ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 1 (2015). С. 59-71.

УДК 517.925

УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОРЕЗОНАНСА В ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

О.А. СУЛТАНОВ

Аннотация. Рассматривается математическая модель, которая описывает начальный этап захвата в авторезонанс в нелинейных колебательных системах с диссипацией. Резонансу соответствуют решения с неограниченно растущей амплитудой. Для таких решений строится асимптотика на бесконечности по времени в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами. Устойчивость авторезонанса относительно постоянно действующих возмущений исследуется вторым методом Ляпунова. Описываются классы возмущений, при которых имеет место захват в авторезонанс.

Ключевые слова: авторезонанс, нелинейные колебания, диссипация, возмущения, устойчивость.

Mathematics Subject Classification: 34D05, 70K30, 93D05, 93D20

Введение

Постановка задачи. Рассматривается математическая модель, описывающая начальный этап захвата в авторезонанс [1, 2] в нелинейных осциллирующих системах с малой накачкой [3] и диссипацией:

$$\frac{dr}{d\tau} = f(\tau)\sin\psi - \beta r, \quad r\Big[\frac{d\psi}{d\tau} - r^2 + \lambda\tau\Big] = g(\tau)\cos\psi, \qquad (1)$$

$$\tau > 0, \quad \lambda, \beta = \mathrm{const} > 0.$$

Искомые функции $r(\tau)$ и $\psi(\tau)$ соответствуют медленно меняющимся амплитуде и сдвигу фазы быстрых гармонических колебаний. С авторезонансом связывают решения с неограниченно растущей амплитудой $r(\tau) \approx \sqrt{\lambda\tau}$. Переменные коэффициенты $f(\tau) = f_0 + f_1\tau$, $g(\tau) = g_0 + g_1\tau$ $(f_1, g_1 \neq 0)$ отвечают за амплитуду накачки. В силу инвариантности системы относительно замены: $\psi \Rightarrow \psi + \pi$, $f, g \Rightarrow -f, -g$ без ограничения общности можно считать $f_1 < 0$. Параметр β соответствует коэффициенту диссипации или трения.

Система (1) появляется в результате усреднения по малому параметру [4] нелинейных неизохронных колебаний с накачкой малой амплитуды. В качестве примера рассмотрим уравнение Дюффинга с трением

$$\frac{d^2x}{ds^2} + x - \gamma x^3 = -\delta\frac{dx}{ds} + \varepsilon A(s;\varepsilon)\cos\phi(s;\alpha) \qquad (2)$$

$$A(s;\varepsilon) = A_0 + A_1(\varepsilon)s, \quad \phi(s;\alpha) = s - \alpha s^2, \quad 0 < \alpha, \delta, \varepsilon \ll 1, \quad \gamma > 0.$$

Асимптотический анзатц

$$x(s;\varepsilon) = \varepsilon^{1/3}\kappa \cdot r(\tau)\cos[\phi(s;\alpha) + \psi(\tau)] + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \quad \varepsilon \to 0, \quad \tau = \varepsilon^{2/3}s$$

O.A. Sultanov, Stability of autoresonance in dissipative systems.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00078).

Поступила 23 июня 2014 г.

для решений уравнения (2) приводит к системе (1) с коэффициентами: $\lambda = 2\alpha\varepsilon^{-4/3}$, $\beta = \delta\varepsilon^{-2/3}/2$, $f_1 = g_1 = -\varepsilon^{-2/3}A_1/2\kappa$, $f_0 = g_0 = -A_0/2\kappa$, $\kappa = 2\sqrt{2/3\gamma}$. Заметим, что в данной работе при исследовании устойчивости решений системы (1) малость коэффициентов уравнений не используется.

Поясним специфику рассматриваемой задачи, в частности, выбор специальной накачки в (2). Заметим, что траектории невозмущенного уравнения $\ddot{x} + x - \gamma x^3 = 0$ с начальной энергией $0 < E < 1/(4\gamma)$ описывают неизохронные колебания[1]. Значительный рост энергии таких колебаний под действием малой ($0 < \varepsilon \ll 1$) осциллирующей силы, при условии $|x(s_0)| + |\dot{x}(s_0)| \ll 1$, обычно связывают с явлением авторезонанса. В силу неизохронности системы накачка с постоянной частотой ($\alpha = 0$) не приводит к значительному росту амплитуды колебаний [5], с. 76. Очевидно, что требуется некоторая подстройка внешней силы к меняющейся собственной частоте. Оказывается, что такую подстройку обеспечивает медленное изменение частоты накачки. В частности, если $0 < \alpha \ll 1$, $\delta = 0$ и $A_1(\varepsilon) = 0$, то у решений уравнения (2) можно наблюдать значительный рост энергии (рис. 1). В этом случае говорят, что имеет место захват колебательной системы в авторезонанс. Отметим, что явление авторезонанса или автофазировки имеет большое число приложений [6, 7, 8, 9].

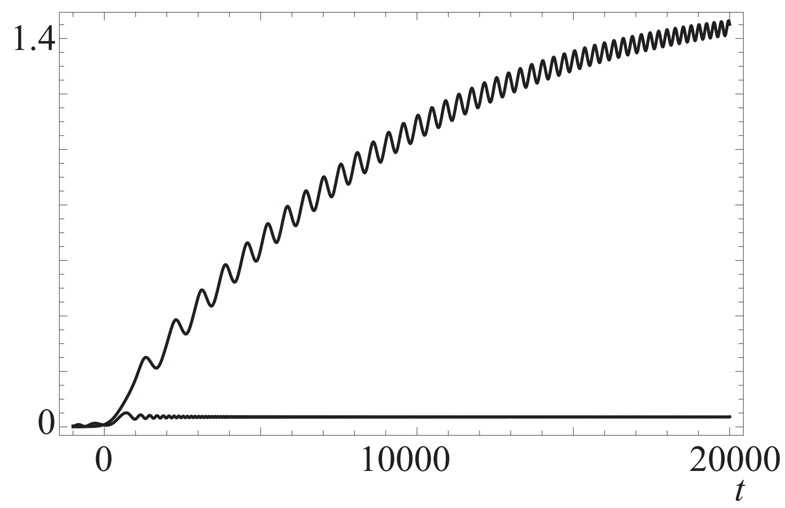

Рис. 1. Эволюция энергии уравнения (2) с переменной частотой накачки без учета диссипации: $\gamma = 1/6$, $\delta = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $A_0 = 1$, $A_1 = 0$, $\alpha = 10^{-5}$. Два графика соответствуют решениям разного типа: захваченное в резонанс и нерезонансное

При учете диссипации ($0 < \delta \ll 1$) медленно меняющаяся сила с $A(s;\varepsilon) \equiv A_0$ приводит к росту колебаний лишь на относительно коротком промежутке времени, после чего колебания затухают [10], рис. 2, a. Достаточно продолжительный рост энергии колебаний может быть получен за счет медленного изменения амплитуды накачки $A(s;\varepsilon) = -2\kappa(1 + \varepsilon^{2/3}s)$, см. рис. 2, b.

[1] то есть колебания, в которых собственная частота зависит от амплитуды

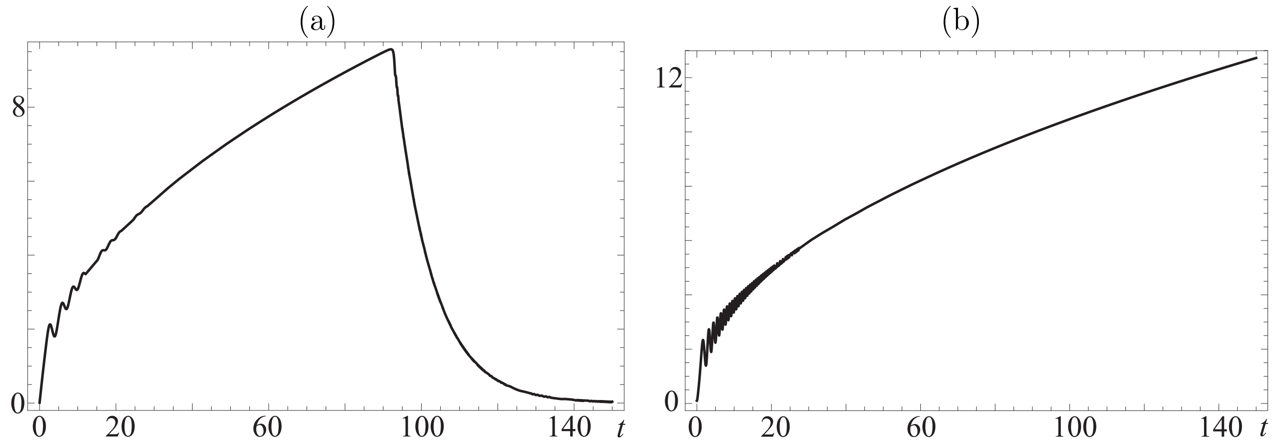

Рис. 2. Эволюция амплитуды $r(\tau)$ при $\lambda = 1$, $\beta = 0.1$, (a): $f(\tau) \equiv g(\tau) \equiv 1$; (b): $f(\tau) \equiv g(\tau) \equiv -(1+\tau)$

Такой способ накачки для захвата в авторезонанс нелинейных колебательный систем с диссипацией был предложен в [3], где проводился асимптотический анализ системы (1) и получены условия существования двухпараметрического семейства решений с растущей амплитудой.

Авторезонансное решение. Для рассматриваемых уравнений (1) решение в явном виде не выписывается. Однако, можно построить формальное асимптотическое решение на бесконечности по τ в виде степенных рядов с постоянными коэффициентами:

$$R_0(\tau) = \sqrt{\lambda\tau} + \sum_{k=0}^{\infty} r_k \tau^{-k/2}, \quad \Psi_0(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \tau^{-k/2}, \quad \tau \to \infty. \tag{3}$$

Коэффициенты r_k, ψ_k определяются из рекуррентных формул после подстановки рядов в соответствующие уравнения. На этом пути определяются два решения, отличия в которых связаны с выбором одного из корней уравнения: $\sin\psi_0 = 0$. Существование частных решений при $\tau \geq \tau_0$, $\tau_0 = \text{const} > 0$ с построенной асимптотикой следует из [11]. Из [12] следует, что эти решения можно продолжить на всю полуось $\tau \geq 0$. Устойчивость этих решений обсуждается ниже.

Возмущенные уравнения главного резонанса. Цель работы — исследовать влияние постоянно действующих возмущений на захват в авторезонанс. Для этого рассматриваются возмущенные уравнения в виде:

$$\frac{dr}{d\tau} = (f(\tau) + \mu\xi)\sin\psi - \beta r, \quad r\left[\frac{d\psi}{d\tau} - r^2 + \lambda\tau + \mu\varphi\right] = (g(\tau) + \mu\eta)\cos\psi. \tag{4}$$

Здесь функции $\xi(r,\psi,\tau)$, $\eta(r,\psi,\tau)$, $\varphi(r,\psi,\tau)$ играют роль возмущений, $\mu \in \mathbb{R}$, $|\mu| \ll 1$ – малый параметр, с помощью которого контролируется величина возмущения [13].

Примером исходной задачи, усреднение которой приводит к системе (4), является уравнение Дюффинга с возмущенной амплитудой и фазой накачки:

$$\frac{d^2x}{ds^2} + x - \gamma x^3 = -\delta\frac{dx}{ds} + \varepsilon(A + \mu h)\cos(\phi + \mu\theta). \tag{5}$$

Возмущение здесь моделируется функциями $h(x, \dot{x}, s; \varepsilon)$ и $\theta(x, \dot{x}, s; \varepsilon)$. В частном случае, когда возмущение зависит только от времени, связь между функциями $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\varphi(\tau)$ и $h(s; \varepsilon)$, $\theta(s; \varepsilon)$ описывается следующими формулами:

$$\xi(\tau) = a_1 h(s; \varepsilon), \quad \eta(\tau) = a_2 h(s; \varepsilon), \quad \varphi(\tau) = \theta'(s; \varepsilon)\varepsilon^{-2/3}, \tag{6}$$

где a_1, a_2 — некоторые константы.

На уровне модельной системы (1) проблема устойчивости авторезонанса состоит в идентификации класса возмущений, относительно которых растущее решение (3) будет устойчиво. В данной работе мы ограничиваемся классами возмущений, при которых система (4) имеет глобальное решение с начальными данными из окрестности решений (3). Достаточные условия, гарантирующие выполнение этого свойства, хорошо известны (см. [14], с. 9, [15], с. 20).

Заметим, что модели авторезонанса, не учитывающие диссипацию, многократно исследовались, в том числе и на предмет устойчивости (см. [16, 17, 18]). Однако, в реальных физических процессах всегда присутствуют диссипативные эффекты [19], которые необходимо учитывать в математических моделях наряду с возмущениями. В данной работе предлагается решение проблемы устойчивости авторезонанса в нелинейных колебательных системах при наличии диссипации.

Работа состоит из трех частей. В первой части обсуждается устойчивость авторезонансных решений по Ляпунову относительно возмущений начальных данных и конструируется функция Ляпунова. Во второй части работы исследуется устойчивость авторезонанса при постоянно действующих возмущениях. Третья часть посвящена устойчивости авторезонанса на асимптотически большом промежутке времени. Основные результаты работы заключаются в доказательстве устойчивости авторезонанса и в описании допустимых классов возмущений, при которых имеет место захват в авторезонанс.

1. Устойчивость по Ляпунову

Система (1) имеет пару решений с асимптотикой (3), отличие которых связано с выбором корня уравнения: $\sin\psi_0 = 0$. Решение с $\psi_0 = \pi$ оказывается неустойчивым, что следует из анализа собственных чисел матрицы линеаризованной на решении $R_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ системы.

Для другого решения, определяемого выбором $\psi_0 = 0$, собственные числа линеаризованной системы являются чисто мнимыми. Следовательно, для анализа устойчивости необходимо учитывать нелинейные члены. Предлагается исследовать устойчивость этого решения с помощью второго метода Ляпунова.

Уточним асимптотику (3) рассматриваемого решения при $\tau \to \infty$:

$$R_0(\tau) = \sqrt{\lambda\tau} + r_0 + r_1\tau^{-1/2} + \mathcal{O}(\tau^{-1}), \quad \Psi_0(\tau) = \psi_1\tau^{-1/2} + \mathcal{O}(\tau^{-1}), \tag{7}$$

$$r_0 = -\frac{g_1}{2\lambda}, \quad r_1 = -\frac{g_1^2}{8\lambda^{5/2}}, \quad \psi_1 = \frac{\beta\lambda^{1/2}}{f_1}.$$

Справедливо утверждение:

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют неравенству* $1 + g_1/f_1 > 0$, *тогда решение* $R_0(\tau), \Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (7) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. В системе (1) делается замена:

$$r = R_0(\tau) + \nu R\tau^{1/4}, \quad \psi = \Psi_0(\tau) + \Psi, \quad t = \left(\frac{\tau}{z}\right)^{7/4}, \tag{8}$$

$\nu = \sqrt{-f_1}/(4\lambda)^{1/4}$, $z = (-7\nu/4f_1)^{4/7}$, и для новых функций $R(t)$, $\Psi(t)$ исследуется устойчивость положения равновесия $(0;0)$. В новых переменных исходные уравнения (1) принимают следующую форму:

$$\frac{dR}{dt} = -\partial_\Psi H(R,\Psi,t), \quad \frac{d\Psi}{dt} = \partial_R H(R,\Psi,t) + G(R,\Psi,t). \tag{9}$$

Здесь гамильтониан и негамильтонова компонента имеют вид[1]:

$$H = \frac{R_0(\tau)}{2\sqrt{\lambda\tau}}R^2 + \Big(1 + \frac{f_0}{f_1}\tau^{-1}\Big)(\cos\Psi_0 - \cos(\Psi+\Psi_0) - \Psi\sin\Psi_0) + \\ + \frac{\nu R^3}{6\sqrt{\lambda}}\tau^{-1/4} + \frac{(4\beta+\tau^{-1})R\Psi}{8\nu\sqrt{\lambda}}\tau^{-3/4}; \tag{10}$$

$$G = \frac{1}{2\nu\sqrt{\lambda}}\Big[g(\tau)\Big(\frac{\cos(\Psi+\Psi_0)}{R_0(\tau)+\nu R\tau^{1/4}} - \frac{\cos\Psi_0}{R_0(\tau)}\Big) - (4\beta+\tau^{-1})\frac{\Psi}{4}\Big]\tau^{-3/4}. \tag{11}$$

Для систем вида (9) эффективно строится функция Ляпунова [20], конструкция которой опирается на асимптотику гамильтониана $H(R,\Psi,t)$ и добавки $G(R,\Psi,t)$ при $t\to\infty$ и в окрестности равновесия при $\rho = \sqrt{R^2+\Psi^2}\to 0$.

В гамильтониане можно выделить положительно определенную квадратичную форму в качестве главного члена асимптотики:

$$H(R,\Psi,t) = \frac{R^2}{2} + \frac{\Psi^2}{2} + \mathcal{O}(\rho^3) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(t^{-1/7}), \quad \rho\to 0, \quad t\to\infty.$$

Заметим, что приводимые здесь и ниже асимптотические оценки вида $\mathcal{O}(\rho^n)$ или $\mathcal{O}(t^{-m})$ $(n,m = \mathrm{const} > 0)$ являются равномерными по (R,Ψ,t) в некоторой области $\mathcal{D}(\rho_0,t_0)$:

$$\mathcal{D}(\rho_0,t_0) = \{(R,\Psi,t) : \rho<\rho_0,\ t>t_0\}, \quad \rho_0, t_0 = \mathrm{const} > 0.$$

Частные производные гамильтониана $H(R,\Psi,t)$ имеют следующие асимптотики:

$$\partial_R H = R + \frac{\nu R^2}{2\sqrt{\lambda}}\tau^{-1/4} + \mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(\tau^{-1/2}), \quad \partial_\Psi H = \sin\Psi + \mathcal{O}(\rho)\mathcal{O}(\tau^{-1/2}),$$

$$\partial_t H = \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-2}).$$

Функция $G(R,\Psi,t)$ стремится к нулю при $t\to\infty$:

$$G(R,\Psi,t) = \frac{g_1(\cos\Psi - 1)}{2\nu\lambda}\tau^{-1/4} - \frac{g_1 R\cos\Psi}{2\lambda^{3/2}}\tau^{-1/2} - \frac{b\Psi}{2\nu\lambda^{1/2}}[1+\mathcal{O}(\rho)]\tau^{-3/4} + \mathcal{O}(\tau^{-1}).$$

Коэффициент $b = \beta(1+g_1/f_1) > 0$.

Основу конструируемой функции Ляпунова составляет гамильтониан, который возмущается добавками, убывающими при $t\to\infty$ с разными скоростями.

$$V(R,\Psi,t) = H(R,\Psi,t) + V_1(R,\Psi,t) + V_2(R,\Psi,t) + V_3(R,\Psi,t). \tag{12}$$

$$V_1(R,\Psi,t) = \frac{g_1 R}{2\nu\lambda}\Big(\cos\Psi - 1 - \frac{R^2}{3}\Big)\tau^{-1/4},$$

$$V_2(R,\Psi,t) = \Big[\frac{g_1^2}{4\nu^2\lambda^2}\Big(\frac{\sin^2\Psi}{2} + \cos\Psi - 1\Big) + \frac{g_1}{4\lambda^{3/2}}\Big(\sin^2\Psi - \frac{R^4}{4}\Big)\Big]\tau^{-1/2},$$

$$V_3(R,\Psi,t) = -\frac{bR\Psi}{4\nu\lambda^{1/2}}\tau^{-3/4}.$$

[1] в формулах используется переменная τ, при этом, $\tau = zt^{4/7}$

Производная от этих функций, вычисленная в силу системы (9), имеет следующий вид:

$$\frac{dH}{dt}\Big|_{(9)} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \Psi}G = \frac{g_1}{2\nu\lambda}\sin\Psi(\cos\Psi - 1)\tau^{-1/4} - \frac{g_1}{2\lambda^{3/2}}R\sin\Psi\cos\Psi\tau^{-1/2} -$$

$$-\frac{b}{2\nu\lambda^{1/2}}\Psi^2\tau^{-3/4} + \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(\tau^{-3/4}) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-1}).$$

$$\frac{dV_1}{dt}\Big|_{(9)} = -\frac{g_1}{2\nu\lambda}\sin\Psi(\cos\Psi - 1)\tau^{-1/4} -$$

$$-\frac{g_1}{4\lambda^{3/2}}R\sin\Psi\Big[R^2 + \frac{g_1}{\nu^2\lambda^{1/2}}(\cos\Psi - 1)\Big]\tau^{-1/2} +$$

$$+\mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(\tau^{-3/4}) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-1}),$$

$$\frac{dV_2}{dt}\Big|_{(9)} = \frac{g_1}{2\lambda^{3/2}}R\sin\Psi\cos\Psi\tau^{-1/2} +$$

$$+\frac{g_1}{4\lambda^{3/2}}R\sin\Psi\Big[R^2 + \frac{g_1}{\nu^2\lambda^{1/2}}(\cos\Psi - 1)\Big]\tau^{-1/2} +$$

$$+\mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(\tau^{-3/4}) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-1}),$$

$$\frac{dV_3}{dt}\Big|_{(9)} = -\frac{b}{4\nu\lambda^{1/2}}(R^2 - \Psi^2)\tau^{-3/4} + \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(\tau^{-3/4}) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(\tau^{-1}).$$

Отсюда вытекает выражение для производной функции $V(R,\Psi,t)$, которая оказывается знакопостоянной в главном члене асимптотики:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(9)} = -\frac{\omega}{2}t^{-3/7}(R^2 + \Psi^2) + \mathcal{O}(\rho^3)\mathcal{O}(t^{-3/7}) + \mathcal{O}(\rho^2)\mathcal{O}(t^{-4/7}),$$

$\omega = b(2\nu\lambda^{1/2}z^{3/4})^{-1} > 0$. Так как оценки в последнем выражении могут быть сделаны сколь угодно малыми, то для любого $\sigma > 0$ существуют константы $\rho_1 > 0$, $t_1 > 0$ такие, что в окрестности $\mathcal{D}(\rho_1, t_1)$ справедлива оценка сверху:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(9)} \leqslant -\frac{(\omega - \sigma)}{2}t^{-3/7}(R^2 + \Psi^2), \quad \omega - \sigma > 0.$$

Аналогично получаются оценки и для самой функции $V(R,\Psi,t)$: $\forall\sigma > 0$ существуют $\rho_2 > 0$, $t_2 > 0$:

$$\frac{(1-\sigma)}{2}(R^2 + \Psi^2) \leqslant V(R,\Psi,t) \leqslant \frac{(1+\sigma)}{2}(R^2 + \Psi^2), \tag{13}$$

при $(R,\Psi,t) \in \mathcal{D}(\rho_2, t_2)$. Выберем $\sigma \in (0, \min\{1,\omega\})$, тогда в области $\mathcal{D}(\rho_0, t_0)$, $\rho_0 = \min(\rho_1, \rho_2)$, $t_0 = \max(t_1, t_2)$ имеет место оценка:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(9)} \leqslant -\omega_0 t^{-3/7}V \leqslant 0, \quad \omega_0 = \frac{\omega - \sigma}{1 + \sigma} > 0. \tag{14}$$

Зафиксируем достаточно малое $\epsilon > 0$ и определим $\delta_\epsilon = \epsilon\sqrt{1-\sigma}/(2\sqrt{1+\sigma})$. Тогда для функции Ляпунова выполняются неравенства:

$$\sup_{\rho\leqslant\delta_\epsilon, t>t_0} V(R,\Psi,t) \leqslant (1+\sigma)\frac{\delta_\epsilon^2}{2} \leqslant (1-\sigma)\frac{\epsilon^2}{2} \leqslant \inf_{\rho=\epsilon, t>t_0} V(R,\Psi,t).$$

Отсюда в силу отрицательности производной функции Ляпунова следует, что всякая траектория $R(t)$, $\Psi(t)$ с начальными данными $R^2(t_0) + \Psi^2(t_0) \leqslant \delta_\epsilon^2$ не покинет ϵ-окрестность положения равновесия $R=0$, $\Psi=0$ при $t>t_0$. Более того, из (14) следует, что функция Ляпунова убывает на траекториях системы (9):

$$0\leqslant V(R(t),\Psi(t),t)\leqslant C\exp(-\frac{7\omega_0}{4}t^{4/7}),\quad t>t_0.$$

Константа $C>0$ зависит от выбора траектории. С помощью замены переменных (8) выводятся оценки для решений системы (1) при $\tau>\tau_0$, $\tau_0=zt_0^{4/7}$:

$$|r(\tau)-R_0(\tau)|\leqslant\nu\tau^{1/4}\sqrt{\frac{2C}{1-\sigma}}\exp\Big(-\frac{7\omega_0}{8z}\tau\Big),$$

$$|\psi(\tau)-\Psi_0(\tau)|\leqslant\sqrt{\frac{2C}{1-\sigma}}\exp\Big(-\frac{7\omega_0}{8z}\tau\Big).$$

Из последних неравенств следует асимптотическая устойчивость решения $R_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$. ■

Замечание. В приложениях функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$, как правило, тождественно равны между собой. В этом случае утверждение теоремы становится безусловным, так как $1+g_1/f_1\equiv 2>0$.

2. Устойчивость при постоянно действующих возмущениях

В данном разделе исследуется устойчивость решения $R_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ относительно постоянно действующих возмущений. Наряду с уравнениями (1) рассматривается возмущенная система:

$$\begin{gathered}\frac{dr}{d\tau}=(f(\tau)+\mu\xi)\sin\psi-\beta r,\\ r\Big[\frac{d\psi}{d\tau}-r^2+\lambda\tau+\mu\varphi\Big]=(g(\tau)+\mu\eta)\cos\psi.\end{gathered}\tag{15}$$

Функции $\xi(r,\psi,\tau)$, $\eta(r,\psi,\tau)$, $\varphi(r,\psi,\tau)$ соответствуют возмущениям, μ – малый параметр. Дадим определение устойчивости, которое будет использоваться в данном разделе.

Определение 1. *Решение $R_0(\tau),\Psi_0(\tau)$ системы (1) устойчиво относительно постоянно действующих возмущений $\mathcal{B}$, если $\forall\,\epsilon>0\ \ \exists\,\delta_\epsilon,\Delta_\epsilon>0$:*

$$\forall\,\tau_0>0\ \ \forall\varrho_0,\phi_0:\quad|\varrho_0-R_0(\tau_0)|\leqslant\delta_\epsilon,\quad|\phi_0-\Psi_0(\tau_0)|\leqslant\delta_\epsilon,$$

$\forall\,|\mu|<\Delta_\epsilon$, $\forall\,(\xi,\eta,\varphi)\in\mathcal{B}$ решение $r_\mu(\tau)$, $\psi_\mu(\tau)$ возмущенных уравнений (15) с начальными данными $r_\mu|_{\tau=\tau_0}=\varrho_0$, $\psi_\mu|_{\tau=\tau_0}=\phi_0$ удовлетворяет неравенствам:

$$|r_\mu(\tau)-R_0(\tau)|\tau^{-1/4}<\epsilon,\quad|\psi_\mu(\tau)-\Psi_0(\tau)|<\epsilon\quad\forall\tau>\tau_0.$$

Класс возмущений $\mathcal{B}$, относительно которого авторезонанс является устойчивым, будем называть допустимым.

Заметим, что определение 1 несколько ослабляет классическое определение устойчивости [21, 22] ввиду наличия множителя $\tau^{-1/4}$ в неравенстве для амплитуды. Это неравенство можно рассматривать как оценку для нормы в пространстве непрерывных функций с весом $\tau^{-1/4}$:

$$\|u(\tau)\|_{\mathcal{C}_{\tau^{1/4}}}=\sup_{\tau>\tau_0}|u(\tau)|\tau^{-1/4}.$$

С другой стороны, устойчивость по определению 1 в некоторой степени сильнее устойчивости по части переменных [23], с. 16, для которой требуется малость отклонений только некоторых компонент решений. Рассматриваемый случай соответствует ψ - устойчивости. Таким образом, для устойчивости здесь требуется сохранение скорости роста амплитуды возмущенных решений в главном члене асимптотики на бесконечности.

Замечание. Из [3] следует, что если $1+f_1/g_1 > 0$, то для уравнений (1) существует двухпараметрическое семейство решений, которые имеют асимптотику $r(\tau) = \sqrt{\lambda\tau} + \mathcal{O}(\tau^{1/4})$, $\psi(\tau) = o(1)$ при $\tau \to \infty$. Авторезонансные решения с такой амплитудой могут быть и в возмущенной системе (15). Поэтому появление множителя $\tau^{-1/4}$ в оценке для амплитуды в определении устойчивости видится вполне обоснованным.

С практической точки зрения, приведенное определение позволяет описать более широкий класс возмущений, при которых имеет место захват в авторезонанс.

Пусть $a, b, c = \text{const} \geq 0$. Определим класс возмущений $\mathcal{P}_{a,b,c}$ как множество функций (ξ, η, φ), для которых конечна следующая величина:

$$\sup_{(r,\psi)\in\mathbb{R}^2, \tau>0} |\xi(r,\psi,\tau)|\tau^{-a} + |\eta(r,\psi,\tau)|\tau^{-b} + |\varphi(r,\psi,\tau)|\tau^{-c} < \infty.$$

Для каждого значения $m > 0$ определим также $\mathcal{P}^m_{a,b,c}$ как подмножество функций $(\xi, \eta, \varphi) \in \mathcal{P}_{a,b,c}$, для которых выполняется неравенство:

$$|\xi(r,\psi,\tau)|\tau^{-a} + |\eta(r,\psi,\tau)|\tau^{-b} + |\varphi(r,\psi,\tau)|\tau^{-c} \leqslant m, \quad \forall (r,\psi) \in \mathbb{R}^2,\ \tau > 0.$$

Исследование устойчивости решения $R_0(\tau), \Psi_0(\tau)$ сводится к задаче об устойчивости положения равновесия $(0;0)$ системы (9) относительно постоянно действующих возмущений. Для этого в возмущенных уравнениях (15) делается замена переменных (8), после чего система принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -\partial_\Psi H(R,\Psi,t) + \mu p(R,\Psi,t), \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \partial_R H(R,\Psi,t) + G(R,\Psi,t) + \mu q(R,\Psi,t). \end{aligned} \tag{16}$$

Гамильтониан $H(R,\Psi,t)$ и функция $G(R,\Psi,t)$ определяются формулами (10) и (11). Постоянно действующие возмущения системы (9) описываются функциями $p(R,\Psi,t)$ и $q(R,\Psi,t)$:

$$p(R,\Psi,t) = -\frac{\hat{\xi}}{zf_1} t^{-4/7}, \quad q(R,\Psi,t) = -\frac{\nu}{z^{3/4} f_1}\Big(\frac{\hat{\eta}\cos(\Psi+\Psi_0)}{R_0 + \nu R z^{1/4} t^{1/7}} - \hat{\varphi}\Big) t^{-3/7}. \tag{17}$$

Функции $\hat{\xi}(R,\Psi,t)$, $\hat{\eta}(R,\Psi,t)$, $\hat{\varphi}(R,\Psi,t)$ появляются в результате подстановки (8) в $\xi(r,\psi,\tau)$, $\eta(r,\psi,\tau)$, $\varphi(r,\psi,\tau)$ соответственно, например,

$$\hat{\xi}(R,\Psi,t) = \xi(R_0(\tau) + \nu R\tau^{1/4}, \Psi_0(\tau) + \Psi, \tau), \quad \tau = zt^{4/7}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу устойчивости тривиального решения системы (9) при постоянно действующих возмущениях (p,q). Определим класс $\mathcal{K}$ возмущений системы (9) как множество функций (p,q), для которых

$$\sup_{(R,\Psi)\in\mathbb{R}^2, t>0} |p(R,\Psi,t)|t^{3/7} + |q(R,\Psi,t)|t^{3/7} < \infty.$$

При каждом фиксированном значении $m > 0$ множество функций $(p,q) \in \mathcal{K}$, для которых выполняется оценка:

$$|p(R,\Psi,t)|t^{3/7} \leqslant m, \quad |q(R,\Psi,t)|t^{3/7} \leqslant m \quad \forall (R,\Psi) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0,$$

обозначим через $\mathcal{K}^m$.

При исследовании систем (9) и (16) используется классическое определение устойчивости [21], с. 302.

Определение 2. *Решение $R(t)\equiv 0$, $\Psi(t)\equiv 0$ системы (9) устойчиво относительно постоянно действующих возмущений $\mathcal{K}$, если $\forall\,\epsilon>0\ \ \exists\,\delta_\epsilon,\Delta_\epsilon>0:$*

$$\forall\,t_0>0\ \ \forall\varrho_0,\phi_0:\quad \varrho_0^2+\phi_0^2\leqslant\delta_\epsilon^2,\ \ \forall\,|\mu|<\Delta_\epsilon,\quad \forall\,(p,q)\in\mathcal{K},$$

решение $R_\mu(t)$, $\Psi_\mu(t)$ возмущенных уравнений (16) с начальными данными $R_\mu|_{t=t_0}=\varrho_0$, $\Psi_\mu|_{t=t_0}=\phi_0$ удовлетворяет неравенству:

$$R_\mu^2(t)+\Psi_\mu^2(t)<\epsilon^2\quad \forall\,t>t_0.$$

Справедливо утверждение:

Лемма 1. *Если в системе (9) коэффициенты удовлетворяют неравенству $1+g_1/f_1>0$. Тогда $\forall m>0$ тривиальное решение $R(t)\equiv 0$, $\Psi(t)\equiv 0$ устойчиво относительно постоянно действующих возмущений $(p,q)\in\mathcal{K}^m$.*

Доказательство утверждения опирается на функцию Ляпунова (12), построенную в теореме 1 для невозмущенной системы (9). Вычислим полную производную функции $V(R,\Psi,t)$ в силу возмущенной системы (16):

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(16)}=\frac{dV}{dt}\Big|_{(9)}+\mu(p\partial_R V+q\partial_\Psi V).$$

Для первого слагаемого в правой части выражения справедлива оценка (14) в области $\mathcal{D}(\rho_0,t_0)$ с константами $\sigma,\omega,\omega_0>0$. Частные производные функции V ограничены в окрестности нуля $R=0$, $\Psi=0$ при $t>t_0$: $|\partial_R V|\leqslant\ell$, $|\partial_\Psi V|\leqslant\ell$. Зафиксируем параметры $\epsilon>0$ и $m>0$, пусть ϵ достаточно мало. Определим $\Delta_\epsilon=\epsilon^2\omega_0(1-\sigma)^2/(32m\ell(1+\sigma))$. Тогда в области $\mathcal{D}(\rho_0,t_0)\backslash\overline{\mathcal{D}(\delta_\epsilon,t_0)}$ при $|\mu|<\Delta_\epsilon$ и подходящем выборе $\delta_\epsilon\in(0,\rho_0)$ выполняются неравенства:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(16)}\leqslant-\omega_0t^{-3/7}\Big[V-\frac{\epsilon^2(1-\sigma)^2}{16(1+\sigma)}\Big]<0,\quad \delta_\epsilon=\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}}<\epsilon. \tag{18}$$

Из оценок (13) для функции Ляпунова вытекает справедливость неравенств:

$$\sup_{\rho\leqslant\delta_\epsilon,t>t_0}V(R,\Psi,t)\leqslant(1+\sigma)\frac{\delta_\epsilon^2}{2}<(1-\sigma)\frac{\epsilon^2}{2}\leqslant\inf_{\rho=\epsilon,t>t_0}V(R,\Psi,t). \tag{19}$$

Отсюда и из отрицательности полной производной функции $V(R,\Psi,t)$ следует, что для любого $T_0>t_0$ решение системы (16) с начальными данными $R_\mu^2(T_0)+\Psi_\mu^2(T_0)=\delta_\epsilon^2$ остается в ϵ-окрестности нуля, то есть, $R_\mu^2(t)+\Psi_\mu^2(t)<\epsilon^2$ при $t>T_0$.

Для траекторий возмущенной системы (16) с начальными данными $R_\mu(T_0)$, $\Psi_\mu(T_0)$ из круга $\rho<\delta_\epsilon$, в котором не гарантируется отрицательность полной производной функции Ляпунова, имеются две возможности: либо $R_\mu^2(t)+\Psi_\mu^2(t)<\delta_\epsilon^2$ при всех $t>T_0$, либо существует $t_\epsilon>T_0$ такое, что $R_\mu^2(t_\epsilon)+\Psi_\mu^2(t_\epsilon)=\delta_\epsilon^2$. В последнем случае из оценок (18) и (19) следует, что $R_\mu^2(t)+\Psi_\mu^2(t)<\epsilon^2$ при $t>t_\epsilon$.

Таким образом, доказана устойчивость тривиального решения в окрестности бесконечности $t>t_0$. Устойчивость на конечном промежутке $0\leqslant t\leqslant t_0$ следует из теоремы о непрерывности решения задачи Коши относительно параметров уравнений (см. [14], с. 22-23). ■

Уточним класс возмущений $\mathcal{P}$ системы (1). Выберем параметры $a=1/4$, $b=1/2$, $c=0$, тогда функции p и q, определяемые формулами (17), принадлежат классу $\mathcal{K}$. Справедлива теорема:

Теорема 2. *Пусть в системе* (1) *коэффициенты удовлетворяют неравенству* $1+g_1/f_1>0$. *Тогда* $\forall\, m>0$ *решение* $R_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (7) *устойчиво относительно постоянно действующих возмущений* $(\xi,\eta,\varphi)\in\mathcal{P}^m_{1/4,1/2,0}$:

$$|\xi(r,\psi,\tau)|\leqslant m\tau^{1/4},\quad |\eta(r,\psi,\tau)|\leqslant m\tau^{1/2},\quad |\varphi(r,\psi,\tau)|\leqslant m,\quad \tau>0. \tag{20}$$

Доказательство. Заметим, что для функций $\hat\xi(R,\Psi,t)$, $\hat\eta(R,\Psi,t)$, $\hat\varphi(R,\Psi,t)$ справедливы оценки:

$$|\hat\xi(R,\Psi,t)|\leqslant \hat m t^{1/7},\quad |\hat\eta(R,\Psi,t)|\leqslant \hat m t^{2/7},\quad |\hat\varphi(R,\Psi,t)|\leqslant \hat m\quad \forall (R,\Psi),\, t>t_0,$$

$\hat m=m\cdot\max\{1,z^{1/4},z^{1/2}\}$. Отсюда с учетом структуры функций $p(R,\Psi,t)$ и $q(R,\Psi,t)$ следуют неравенства: $|p(R,\Psi,t)|\leqslant Mt^{-3/7}$, $|q(R,\Psi,t)|\leqslant Mt^{-3/7}$ с положительной константой $M=mz^{-3/4}\max\{1,|\nu|(1+\lambda^{-1/2})\}/|f_1|$, то есть $(p,q)\in\mathcal{K}$. Тогда в силу леммы 1 тривиальное решение системы (9) устойчиво относительно постоянно действующих возмущений (в смысле определения 2), и для траекторий системы (16) с начальными данными из окрестности равновесия справедлива оценка:

$$R^2_\mu(t)+\Psi^2_\mu(t)<\epsilon^2$$

при $t>0$. Следовательно, $\forall\,\tau_0>0$ с учетом замены (8) для решений системы (15) с начальными данными вблизи $R_0(\tau_0)$, $\Psi_0(\tau_0)$ выполняются неравенства:

$$|r_\mu(\tau)-R_0(\tau)|\tau^{-1/4}<\nu\epsilon,\quad |\psi_\mu(\tau)-\Psi_0(\tau)|<\epsilon,\quad \tau>\tau_0.$$

Отсюда следует устойчивость решения $R_0(\tau)$, $\Psi_0(\tau)$ в смысле определения 1. ■

3. Устойчивость на асимптотически большом промежутке времени

В предыдущем параграфе описан класс возмущений, при котором решение системы (1) с асимптотикой (7) устойчиво при всех $\tau>0$. Однако, для изучения устойчивости явления захвата в авторезонанс на уровне усредненных уравнений достаточно ограничится конечным временным интервалом, на котором остается пригодной рассматриваемая математическая модель [1]: $0<\tau\leqslant\mathcal{O}(\varepsilon^{-1/3})$, где $0<\varepsilon\ll 1$ – малый параметр накачки в исходном уравнении, см., например, (2). В последующие моменты времени явление авторезонанса описывается другими уравнениями [24]. Поэтому, в рассматриваемом случае более уместной является задача устойчивости относительно постоянно действующих возмущений на конечном, но асимптотически большом интервале времени $0<\tau\leqslant\mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, где $|\mu|\ll 1$ – параметр возмущений. Похожая постановка задачи рассматривалась, например, в [13], с. 76. Очевидно, что устойчивость решения на полуоси относительно возмущений класса $\mathcal{P}$ влечет устойчивость на любом конечном интервале. Попытка ограничить рассматриваемый временной промежуток продиктована надеждой выделить более слабые ограничения, чем (20) на допустимые классы возмущений. Похожий прием оказался весьма удачным при анализе устойчивости динамических систем относительно возмущений «белым шумом» [25].

Сформулируем определение устойчивости:

Определение 3. *Решение* $R_0(\tau),\Psi_0(\tau)$ *системы* (1) *устойчиво относительно постоянно действующих возмущений* $\mathcal{B}$ *на асимптотически большом промежутке времени, если существует* $\varkappa>0$ *такое, что* $\forall\,\epsilon>0\ \exists\,\delta_\epsilon,\Delta_\epsilon>0$:

$$\forall \varrho_0,\phi_0:\quad |\varrho_0-R_0(0)|\leqslant\delta_\epsilon,\quad |\phi_0-\Psi_0(0)|\leqslant\delta_\epsilon,\quad \forall\,|\mu|<\Delta_\epsilon,\quad \forall\,(\xi,\eta,\varphi)\in\mathcal{B}$$

решение $r_\mu(\tau),\psi_\mu(\tau)$ *возмущенных уравнений* (15) *с начальными данными* $r_\mu|_{\tau=0}=\varrho_0$, $\psi_\mu|_{\tau=0}=\phi_0$ *удовлетворяет неравенствам:*

$$|r_\mu(\tau)-R_0(\tau)|\tau^{-1/4}<\epsilon,\quad |\psi_\mu(\tau)-\Psi_0(\tau)|<\epsilon$$

при $0<\tau\leqslant\mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$.

Будем рассматривать класс возмущений $\mathcal{P}_{a,b,c}$, определенный в предыдущем параграфе, но с другими параметрами: $a = 1 + \vartheta$, $b = 5/4 + \vartheta$, $c = 3/4 + \vartheta$, $\vartheta \geq 0$. Тогда справедлива теорема:

Теорема 3. *Пусть в системе* (1) *коэффициенты удовлетворяют неравенству* $1 + g_1/f_1 > 0$. *Тогда* $\forall m > 0$, $\vartheta \geq 0$ *решение* $R_0(\tau), \Psi_0(\tau)$ *с асимптотикой* (7) *устойчиво относительно постоянно действующих возмущений* $(\xi, \eta, \varphi) \in \mathcal{P}^m_{1+\vartheta,5/4+\vartheta,3/4+\vartheta}$:

$$|\xi(r,\psi,\tau)| \leqslant m\tau^{1+\vartheta}, \quad |\eta(r,\psi,\tau)| \leqslant m\tau^{5/4+\vartheta}, \quad |\varphi(r,\psi,\tau)| \leqslant m\tau^{3/4+\vartheta}$$

на асимптотически большом промежутке времени $0 < \tau \leqslant \mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, $0 < \varkappa < \varkappa_0$, $\varkappa_0 = 4/(4\vartheta + 3)$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2, сначала исследуется возмущенная система (16), затем делается вывод об устойчивости решения исходных уравнений (1).

Для функций $p(R,\Psi,t)$ и $q(R,\Psi,t)$ с учетом (17) при указанных ограничениях справедливы оценки: $|p(R,\Psi,t)| \leqslant Mt^{4\vartheta/7}$, $|q(R,\Psi,t)| \leqslant Mt^{4\vartheta/7}$ с положительной константой $M = mz^{\vartheta}\max\{1, |\nu|(1+\lambda^{-1/2})\}/|f_1|$. Вычислим производную функции Ляпунова (12) в силу системы (16):

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(16)} = \frac{dV}{dt}\Big|_{(9)} + \mu(p\partial_R V + q\partial_\Psi V).$$

В области $\mathcal{D}(\rho_0, t_0)$ для производной справедлива оценка:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(16)} \leqslant -\omega_0 t^{-3/7} V + 2|\mu|\ell M t^{4\vartheta/7}.$$

Первое слагаемое в правой части появляется в силу оценки (14) для полной производной функции $V(R,\Psi,t)$. Из ограниченности возмущений $p(R,\Psi,t)$, $q(R,\Psi,t)$ и частных производных функции $V(R,\Psi,t)$ в области $\mathcal{D}(\rho_0,t_0)$: $|\partial_R V| \leqslant \ell$, $|\partial_\Psi V| \leqslant \ell$ следует оставшееся слагаемое в оценке. Зафиксируем $\epsilon > 0$, $m > 0$, $0 < \kappa < 7/(4\vartheta+3)$ и выберем

$$\Delta_\epsilon = (2t_0)^{-(4\vartheta+3)/\kappa_0}\Big[\frac{\epsilon^2\omega_0(1-\sigma)^2}{32M\ell(1+\sigma)}\Big]^{7/\kappa_0}, \quad \kappa_0 = 7 - (4\vartheta+3)\kappa > 0.$$

Тогда при $|\mu| < \Delta_\epsilon$ и подходящем выборе $\delta_\epsilon \in (0,\rho_0)$ в конечной области $\delta_\epsilon < \rho < \rho_0$, $0 < t - t_0 \leqslant t_0|\mu|^{-\kappa}$ справедливы неравенства:

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(16)} \leqslant -\omega_0 t^{-3/7}\Big[V - (1-\sigma)\frac{\delta_\epsilon^2}{4}\Big] < 0, \quad \delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{1-\sigma}{1+\sigma}} < \epsilon.$$

Заметим, что для функции Ляпунова при выбранном δ_ϵ справедливы неравенства (19). Отсюда и из отрицательности полной производной функции $V(R,\Psi,t)$ следует, что всякое решение системы (16) с начальными данными $R_\mu^2(t_0)+\Psi_\mu^2(t_0) = \delta_\epsilon^2$ остается в ϵ-окрестности нуля, то есть, $R_\mu^2(t) + \Psi_\mu^2(t) < \epsilon^2$ при $0 \leqslant t - t_0 \leqslant t_0|\mu|^{-\kappa}$.

В круге $\rho < \delta_\epsilon$ отрицательность полной производной функции $V(R,\Psi,t)$ не гарантируется. Поэтому траектории системы (16) с начальными данными $R_\mu^2(t_0) + \Psi_\mu^2(t_0) < \delta_\epsilon^2$ либо остаются ограниченными $R_\mu^2(t) + \Psi_\mu^2(t) < \delta_\epsilon^2$ на интервале $0 \leqslant t - t_0 \leqslant t_0|\mu|^{-\kappa}$, либо существует $t_\epsilon : 0 < t_\epsilon - t_0 < t_0|\mu|^{-\kappa}$ такое, что $R_\mu^2(t_\epsilon) + \Psi_\mu^2(t_\epsilon) = \delta_\epsilon^2$. В последнем случае из оценок (18) и (19) следует, что $R_\mu^2(t) + \Psi_\mu^2(t) < \epsilon^2$ при $t \in [t_\epsilon, t_0 + t_0|\mu|^{-\kappa}]$. Следовательно, $R_\mu^2(t) + \Psi_\mu^2(t) < \epsilon^2$ при $0 \leqslant t - t_0 \leqslant t_0|\mu|^{-\kappa}$.

С помощью замены переменных (8) выводятся оценки для решений исходной системы (15):

$$|r_\mu(\tau) - R_0(\tau)|\tau^{-1/4} < \nu\epsilon, \quad |\psi_\mu(\tau) - \Psi_0(\tau)| < \epsilon$$

при $0 \leqslant \tau - \tau_0 \leqslant \mathcal{O}(|\mu|^{-4\kappa/7})$. Из теоремы о непрерывности решения задачи Коши относительно параметров уравнений следует устойчивость решения при $\tau \in (0;\tau_0)$. Следовательно, $\forall m > 0$ и $\vartheta \geq 0$ решение $R_0(\tau), \Psi_0(\tau)$ системы (1) устойчиво при постоянно действующих возмущениях на асимптотически большом интервале времени $0 < \tau \leqslant \mathcal{O}(|\mu|^{-\varkappa})$, $\forall\, \varkappa \in (0;\varkappa_0)$ равномерно по $(\xi,\eta,\varphi) \in \mathcal{P}_m$. ∎

Замечание. Из теоремы 3 и формул (6) следует устойчивость авторезонансных решений уравнения Дюффинга с внешней накачкой (2). Если $\mu = \varepsilon^{1/3}$, $h(s;\varepsilon) = \varepsilon^{5/6}s^{5/4}$, $\theta(s;\varepsilon) = \varepsilon^{4/3}s^2$ (соответствует выбору $\vartheta = 1/4$), то в возмущенном уравнении (5) существуют траектории, захваченные в авторезонанс при $s \leqslant \mathcal{O}(\varepsilon^{-5/6})$.

4. Заключение

Исследована система модельных уравнений, которая описывает начальный этап захвата в авторезонанс в нелинейных колебательных системах при наличии диссипации. Доказана устойчивость решения с растущей амплитудой $r(\tau) \approx \sqrt{\lambda\tau}$ по Ляпунову и относительно постоянно действующих возмущений. Описаны допустимые классы возмущений. Полученные результаты позволяют надеяться на существование достаточно продолжительных авторезонансных режимов в реальных физических установках. Остается открытым вопрос о влиянии случайных возмущений на захват в авторезонанс в системах с диссипацией. Эта тема требует особого внимания и будет обсуждаться в отдельной работе.

Автор благодарит Калякина Л.А. за полезные обсуждения и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L.A. Kalyakin *Asymptotic analysis of autoresonance models* // Russian Math. Surveys, 63:5 (2008). P. 791–857.
2. O.M. Kiselev, S.G. Glebov *The capture into parametric autoresonance* // Nonlinear Dynam. 2007. V. 48. № 1–2. P. 217–230.
3. L.A. Kalyakin, M.A. Shamsutdinov *Autoresonant asymptotics in an oscillating system with weak dissipation* // Theoret. and Math. Phys., 160:1 (2009). P. 960–967.
4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* М.: Наука, 1974.
5. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса.* М.: Наука, 1988.
6. Векслер В.И. *Новый метод ускорения релятивистских частиц* // Докл. АН СССР. 1944. Т. 43, № 8. С. 346–348.
7. A.T. Sinclair *On the origin of the commensurabilities amongst the satellites of Saturn* // Mon. Not. R. Astron. Soc. 160 (1972). P. 169–187.
8. Голованивский К.С. *Гиромагнитный авторезонанс с переменной частотой* // Физика плазмы. 1985. Т. 11, № 3. С. 295–299.
9. J. Fajans, L. Friedland *Autoresonant (nonstationary) excitation of pendulums, Plutinos, plasmas, and other nonlinear oscillators* // Am. J. Phys. 2001. V. 69, № 10. P. 1096–1102.
10. S. Glebov, O. Kiselev, N. Tarkhanov *Autoresonance in a dissipative sytem* // J. Phys. A: Math. Theor., 43 (2010) 215203 doi:10.1088/1751-8113/43/21/215203
11. Кузнецов А.Н. *О существовании входящих в особую точку решений автономной системы, обладающей формальным решением* // Функц. анализ и его прилож. 1989. Т. 23, № 4. С. 63–74.
12. Калякин Л.А. *Теоремы существования и оценки решений для уравнений главного резонанса* // Современная математика и ее приложения. 2012. Т. 85, № 4. С. 73–83.
13. Хапаев М.М. *Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний.* М.: Высш.шк, 1988, 184 с.
14. Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* М.: Едиториал, 2004. 552 с.

15. Хасьминский Р.З. *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.* М.: Наука, 1969, 368 с.
16. L.A Kalyakin., O.A. Sultanov *Stability of autoresonance models* // Differential Equations. 2013. Vol. 49, № 3. P. 267–281.
17. Султанов О.А. *Устойчивость моделей авторезонанса относительно возмущений, ограниченных в среднем* // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 274–283.
18. O.A. Sultanov *Stability of autoresonance models subject to random perturbations for systems of nonlinear oscillation equations* // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54, No. 1. P. 59–73.
19. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. *Теория циклических ускорителей.* М.: ГИФМЛ, 1962.
20. Султанов О.А. *Функции Ляпунова для неавтономных систем близких к гамильтоновым* // Уфимский математический журнал. 2010. Т. 2, № 4. С. 88–98.
21. Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения.* М.; Л.: ГИТТЛ, 1952. 432 с.
22. Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М.: Физматгиз, 1959.
23. Румянцев В.В., Озиранер А.С. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.* М.: Наука, 1987.
24. Гарифуллин Р.Н. *Асимптотическое решение задачи об авторезонансе. Внешнее разложение* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2006. Т. 46, № 9. С. 1605–1616.
25. L. Kalyakin *Stability under persistent perturbation by white noise* // Journal of Physics: Conference Series 482 (2014) 012019 doi:10.1088/1742-6596/482/1/012019

Оскар Анварович Султанов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `oasultanov@gmail.com`