ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 7. № 1 (2015). С. 46-58.

УДК 517.9

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В $H(D)$, С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ УЗЛАМИ

С.Г. МЕРЗЛЯКОВ, С.В. ПОПЕНОВ

Аннотация. В пространстве голоморфных функций в выпуклой области, изучается проблема кратной интерполяции посредством сумм рядов экспонент, сходящихся равномерно на всех компактах в области. Дискретное множество узлов кратной интерполяции лежит на вещественной оси в области и имеет единственную конечную предельную точку. Получен критерий разрешимости этой проблемы в терминах распределения предельных направлений показателей экспонент в бесконечности.

Ключевые слова: голоморфная функция, выпуклая область, кратная интерполяция, ряд экспонент, замкнутый идеал, замкнутый подмодуль, сильно сопряженное пространство, двойственность.

Mathematics Subject Classification: 30E05

1. Формулировка задачи и предварительные сведения

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$. Обозначим через $H(D)$ пространство голоморфных функций в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D. Рассмотрим произвольное бесконечное дискретное в $\mathbb{C}$ множество комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Обозначим

$$\Sigma(\Lambda, D) = \{f \in H(D) : f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\ z \in D\}.$$

Предполагается, что сходимость ряда экспонент абсолютная для каждой точки $z \in D$, тогда ([1]) такой ряд сходится в топологии пространства $H(D)$. Для многомерной ситуации это показано, например, в работе [2].

Предположим, что $D \cap \mathbb{R}$ не пустое множество. Пусть задано бесконечное дискретное в области D множество вещественных узлов интерполяции, $\mathcal{M} = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathcal{M} \subset D \cap \mathbb{R}$. Кроме того, будем полагать, что каждому узлу $\mu_k \in \mathcal{M}$ приписана кратность $m_k \in \mathbb{N}$. Если $f, g \in H(D)$, будем писать $f \cong g$ на $\mathcal{M}$, если $f^{(j)}(\mu_k) = g^{(j)}(\mu_k)$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $j = 0, 1, \ldots, m_k - 1$.

Рассмотрим в $H(D)$ следующую проблему интерполяции с вещественными узлами посредством сумм рядов экспонент:

Для произвольного множества узлов $\mathcal{M} \subset D \cap \mathbb{R}$ и для любой функции $g \in H(D)$ существует функция $f \in \Sigma(\Lambda, D)$, такая, что $f \cong g$ на $\mathcal{M}$.

В силу классического результата об интерполяции голоморфными функциями ([3], Следствие 1.5.4), эта задача может быть сформулирована в традиционных терминах:

S.G. Merzlyakov, S.V. Popenov, Interpolation by series of exponentials in $H(D)$ with real nodes.

Работа поддержана РФФИ (грант №11-01-00572-а).

Поступила 27 октября 2014 г.

Для любых интерполяционных данных $b_k^j \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, \ldots, m_k - 1$, *существует функция* $f \in \Sigma(\Lambda, D)$, *такая что* $f^{(j)}(\mu_k) = b_k^j$, для всех k и j.

Обозначим через $\psi_{\mathcal{M}}$ функцию из $H(D)$ с нулями во всех узлах $\mu_k \in \mathcal{M}$, с кратностями m_k, и только в них. Определим

$$\big(\psi_{\mathcal{M}}\big) = \{h \in H(D) : h = \psi_{\mathcal{M}} \cdot r,\, r \in H(D)\} \tag{1}$$

— замкнутый идеал в $H(D)$, порожденный функцией $\psi_{\mathcal{M}}$. Легко видеть, что $\big(\psi_{\mathcal{M}}\big) = I_{\mathcal{M}} = \{h \in H(D) : h \cong 0 \text{ на } \mathcal{M}\}$.

Для заданного множества узлов $\mathcal{M}$ разрешимость проблемы интерполяции в $H(D)$ суммами рядов экспонент с показателями из заданного множества Λ равносильна существованию следующего представления:

$$H(D) = \Sigma(\Lambda, D) + \big(\psi_{\mathcal{M}}\big). \tag{2}$$

Единственности интерполяции в условиях рассматриваемой задачи быть не может, то есть $\Sigma(\Lambda, D) \cap \big(\psi_{\mathcal{M}}\big) \neq \{0\}$. Это доказано в работе [4] для пространства целых функций, но приведенное там доказательство с очевидными изменениями переносится на рассматриваемый случай.

Если имеется представление (2) и $\Sigma(\Lambda, D) \subset X \subset H(D)$, *то справедливо и представление* $H(D) = X + \big(\psi_{\mathcal{M}}\big)$.

В работе [5], в случае, когда $D = \mathbb{C}$, а X есть ядро некоторого оператора свертки в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$, найдены достаточные условия для интерполяции функциями из ядра оператора свертки в терминах расположения нулей Λ характеристической функции этого оператора. Множество $\mathcal{M}$ в [5] имеет две предельных точки $\pm\infty$. В работе [4] удалось найти другие методы доказательства и, для всех возможных случаев расположения предельных точек $\mathcal{M}$, были получены критерии разрешимости проблемы кратной интерполяции в $H(\mathbb{C})$ посредством сумм рядов экспонент из $\Sigma(\Lambda, \mathbb{C}) \subset X$. В случае, когда множество узлов имеет две предельные точки $\pm\infty$, критерий в [4] формулируется в тех же терминах, как и в работе [5].

В данной статье метод доказательства достаточности [4] распространяется на случай пространства голоморфных функций в выпуклой области. Получен критерий интерполяции в случае, когда $\mathcal{M}$ имеет единственную предельную точку, которая лежит на границе $\partial\, D$ области D. Критерий состоит в том, что распределение предельных направлений показателей Λ в бесконечности связывается с геометрической структурой части границы выпуклой области D, которая содержит эту предельную точку.

Доказательство достаточности условия сводится к рассмотрению интерполяции рядами экспонент в пространстве функций, голоморфных в некоторой полуплоскости. Кроме того, оказалось, что, в рассматриваемой ситуации одной предельной точки, для доказательства необходимости этого условия нужно использовать идеи совсем другой природы, по сравнению с пространством $H(\mathbb{C})$. Дело в том, что ряды экспонент, абсолютно сходящиеся на некотором множестве, обладают свойством распространения сходимости [2]. Следует отметить, что аналитическое продолжение для элементов общих инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, изучалось в работе [6].

Замечание при корректуре. Задача интерполяции в ядре оператора свертки в выпуклой области рассматривалась в работе [7]

2. Схема сведения к интерполяции в ядре оператора свертки. Двойственная формулировка проблемы интерполяции

В дальнейшем, как и в работе [4], используется схема доказательства, описанная в работе [8], основанная на двойственности с использованием преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов. При доказательстве достаточности условий интерполяции предлагается рассматривать естественные двойственные утверждения, отдельно для каждого из возможных вариантов расположения предельных точек множества $\mathcal{M}$.

Кратко опишем эту схему, так как в работе [4] она описана достаточно подробно для пространства $H(\mathbb{C})$. В случае $H(D)$ укажем на некоторые изменения в приведенных там рассуждениях.

Обозначим через P_D— пространство всех целых функций экспоненциального типа с традиционной топологией индуктивного предела, которая обеспечивает топологический изоморфизм между сильным сопряженным пространством $H^*(D)$ и пространством P_D, реализующийся с помощью преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(D)$. Точнее, линейное непрерывное взаимнооднозначное преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(D)$ определяется следующим образом: $\mathcal{L} : F \longmapsto \mathcal{L}F(z) = \left\langle F_\lambda, e^{\lambda z} \right\rangle$, $\mathcal{L}F \in P_D$.

Топология в (LN^*)-пространстве P_D не описывается в терминах сходимости последовательностей, однако секвенциально замкнутые подпространства являются замкнутыми ([9]). Точное определение сходимости последовательностей в этой топологии будет приведено в доказательстве достаточности условий леммы 4.

Определим раздельно непрерывную билинейную форму $[\cdot,\cdot] : H(D) \times P_D \longmapsto \mathbb{C}$, согласно формуле $[\psi, \varphi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \psi \rangle$, $\psi \in H(D)$, $\varphi \in P_D$. С помощью отображения $\varphi \longmapsto [\cdot, \phi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \cdot \rangle$, где $\mathcal{L}^{-1}\varphi \in H^*(D)$, задается изоморфизм между P_D и сильным сопряженным пространством $H^*(D)$. Согласно введенной двойственности, любая функция из пространства P_D взаимнооднозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из $H^*(D)$.

Хорошо известно, что каждая функция $G \in P_D$, $G \not\equiv 0$, имеющая минимальный тип при порядке один, порождает в пространстве $H(D)$ оператор свертки $M_G : H(D) \longmapsto H(D)$, который в рассматриваемой двойственности можно определить как

$$M_G[\psi](z) = \big[S_z\big(\psi(\lambda)\big), G_\lambda\big] = \big\langle (\mathcal{L}^{-1}G)_\lambda, \psi(z+\lambda) \big\rangle,$$

где S_z — оператор сдвига: $S_z\big(\psi(\lambda)\big) = \psi(\lambda + z)$.

Известно, что M_G линейный, непрерывный и сюръективный оператор. Сопряженный оператор к оператору свертки M_G это оператор A_G умножения на характеристическую функцию G, корректно определенный на функциях $\omega \in P_D$ следующим образом: $\omega \longmapsto G \cdot \omega$ (подробности в [10], [11]).

Обозначим $\operatorname{Ker} M_G = \{f \in H(D) : M_G[f] = 0\}$ — ядро оператора свертки M_G, которое является замкнутым подпространством в $H(D)$, инвариантным относительно оператора дифференцирования.

Подпространство $\operatorname{Ker} M_G$ допускает спектральный синтез [11], [12], то есть совпадает с замыканием в топологии пространства $H(D)$ линейной оболочки множества всех полиномиально-экспоненциальных мономов $z^\nu e^{\lambda_n z}$, содержащихся в нем.

Подпространство рядов экспонент $\Sigma(\Lambda, D)$, вообще говоря, не замкнутое в $H(D)$. В связи с этим, в доказательстве достаточности условий интерполяции, для каждого из возможных вариантов расположения множества узлов $\mathcal{M}$, выделяется подпоследовательность $\widetilde{\Lambda}$ из Λ, таким образом, чтобы она являлась нулевым множеством некоторой целой функции

$G \in P_D$ минимального типа, причем $\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(\widetilde{\Lambda}, D)$. Затем доказывается наличие представления (2) с заменой Λ на $\widetilde{\Lambda}$, но в таком случае оно будет справедливо и для Λ.

После того, как выделена подпоследовательность $\widetilde{\Lambda}$, достаточно доказать следующие два утверждения.
(I) *Подпространство* $\operatorname{Ker} M_G + \big(\psi_{\mathcal{M}}\big)$ *— всюду плотное в пространстве* $H(D)$;
(II) *Подпространство* $\operatorname{Ker} M_G + \big(\psi_{\mathcal{M}}\big)$ *— замкнутое в пространстве* $H(D)$.

Замкнутый идеал $\big(\psi_{\mathcal{M}}\big)$ определен выше в (1). В дальнейшем в этом параграфе для упрощения обозначений $\psi = \psi_{\mathcal{M}}$.

Если X_1— подпространство в топологическом векторном пространстве X, через X_1^0 обозначим его поляру (или аннулятор), то есть множество функционалов из X^*, которые обращаются в нуль на X_1.

Утверждение (I) равносильно тому, что $\big(\operatorname{Ker} M_G + (\psi)\big)^0 = \big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0 \cap \big((\psi)\big)^0 = \{0\}$. Из Леммы 2 работы [13] следует, что Утверждение (II) равносильно тому, что подпространство $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0 + \big((\psi)\big)^0$ — замкнутое в P_D.

Пространство P_D – модуль над кольцом многочленов. С учетом двойственности поляра $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0$ совпадает с подмодулем, определяемым как

$$\big(G\big)_{P_D} = \{h \in P_D : h = G \cdot r;\ r \in P_D\}. \tag{3}$$

В доказательстве достаточности в лемме 4 будет доказано, что $\big(G\big)_{P_D} = \big(G\big) \cap P_D$, где $\big(G\big)$ – замкнутый идеал в $H(\mathbb{C})$, порожденный функцией G. В частности отсюда следует, что подмодуль $\big(G\big)_{P_D}$ – замкнутый.

Как известно, (M^*)-пространство $H(D)$ – рефлексивное ([9], [10]), то есть его сильное второе сопряженное пространство $H^{**}(D)$ канонически изоморфно пространству $H(D)$. Поэтому отображение $\psi \longmapsto [\psi, \cdot]$, с учетом этого канонического изоморфизма, определяет изоморфизм между (M^*)-пространством $H(D)$ и сильным сопряженным P_D^*. Любая функция из $H(D)$ взаимнооднозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из сильно сопряженного пространства P_D.

Более точно, это отображение понимается следующим образом: канонический изоморфизм $H(D)$ и $H^{**}(D)$ имеет вид $\psi \longmapsto \Theta\psi = F_\psi$, $F_\psi \in P_D^*$, $\langle F_\psi, \varphi\rangle = [\psi, \varphi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \psi\rangle$. Здесь $\psi \in H(D)$, $\varphi \in P_D$.

Каждая функция $\psi \in H(D)$, $\psi \not\equiv 0$, порождает в пространстве целых функций экспоненциального типа P_D оператор свертки $\widetilde{M}_\psi : P_D \longmapsto P_D$, $\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \big[(\Theta\psi)_\lambda, S_z\big(\varphi(\lambda)\big)\big]$, где S_z — оператор сдвига, $S_z\big(\varphi(\lambda)\big) = \varphi(\lambda + z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Далее получаем, что $\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \big\langle (\mathcal{L}^{-1} S_z\varphi)_\lambda, \psi(\lambda)\big\rangle = \big\langle e^{z\lambda}(\mathcal{L}^{-1}\varphi)_\lambda, \psi(\lambda)\big\rangle = \big\langle (\mathcal{L}^{-1}\varphi)_\lambda, e^{z\lambda}\psi(\lambda)\big\rangle$, $\varphi \in P_D$.

Отметим, что, используя известную формулу для обратного преобразования Бореля [14], отсюда можно получить явное интегральное представление этого оператора [5], [4].

Известно, что $\widetilde{M}_\psi$ линейный, непрерывный и сюръективный оператор. Оператор $\widetilde{M}_\psi$ является сопряженным к оператору $\widetilde{A}_\psi$ умножения на функцию ψ в пространстве $H(D)$, действующему на функциях $g \in H(D)$ следующим образом: $g \longmapsto \psi \cdot g$. Оператор $\widetilde{A}_\psi$ – линейный и непрерывный, а его образ совпадает с замкнутым идеалом (ψ). Обозначим $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi = \{f \in P_D : \widetilde{M}_\psi[f] = 0\}$.

С учетом двойственности, поляра $\big((\psi)\big)^0$ совпадает с $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi$.

В начале этого параграфа была описана схема того, как доказательство существования представления (2) сводится к утверждениям (I) и (II), а затем было доказано следующее.

Предложение 1. *Утверждения (I) и (II), в (M^*)-пространстве $H(D)$, равносильны двум двойственным утверждениям в (LN^*)-пространстве P_D, соответственно:*
(I^*) Справедливо равенство $\big(G\big)_{P_D} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi = \{0\}$.
(II^*) Подпространство $\big(G\big)_{P_D} + \operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi$ *— замкнутое в пространстве P_D.*

3. Вспомогательные результаты

Справедливо следующее простое, но важное, утверждение.
Предложение 2: *Пусть D_1 – некоторая область, причем $D \subset D_1$, и области имеют общие части границы, на которых лежат все предельные точки множества $\mathcal{M}$. Если найдены некоторые условия на Λ, при выполнении которых имеет место представление (2) с множеством узлов $\mathcal{M}$ для пространства $H(D_1)$, тогда такое представление имеется и для $H(D)$,* с тем же самым множеством узлов.

Доказательство. Для любой функции $g \in H(D)$ существует $g_1 \in H(D_1),\ g \cong g_1$на $\mathcal{M}$. Тогда $g = g_1 + (g - g_1)$ в области D. По условию существует $f_1 \in \Sigma(\Lambda, D_1) \subset \Sigma(\Lambda, D)$, такая, что $f_1 \cong g_1|_{\mathcal{M}}$. В области D получили представление $g = f_1 + (g_1 - f_1) + (g - g_1)$. Функции в скобках лежат в $H(D)$ и равны нулю на $\mathcal{M}$ с учетом кратностей. Доказательство закончено.

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства полиномов из экспонент с вещественными показателями. Такие полиномы изучены в монографии [15].

Рассмотрим произвольный полином из экспонент вида
$$p(z) = \sum_{k=0}^{s} a_k(z) e^{\omega_k z},\ \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_s, \tag{4}$$
где $a_k(z)$ — некоторые многочлены, и пусть $a_0 \cdot a_s \not\equiv 0$.

Из Теоремы 12.9 монографии [15] легко получить, что справедливо следующее.

Лемма 1. *Существует такое $c_1 > 0$, что во внешности круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant c_1\}$ выполнено: существуют положительные постоянные c_2, c_3 и два вещественных числа m_0, m_s, причем $m_0 > m_s$ или $m_0 = m_s = 0$, такие, что*
$$|p(z)| \geqslant c_2 e^{\omega_0 \operatorname{Re} z}, \tag{5}$$
для всех z в области $U_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + m_0 \ln z) < -c_3\}$, и
$$|p(z)| \geqslant c_2 e^{\omega_s \operatorname{Re} z}, \tag{6}$$
для всех z в области $U_s = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + m_s \ln z) > c_3\}$.

Для любого фиксированного $c \in \mathbb{R}$, рассмотрим кривую $\operatorname{Re}(z + m \ln z) = c$, $m \neq 0$. Она симметрична относительно вещественной оси. Для $m > 0$ эта кривая лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z < A$, $A > 0$, а для $m < 0$ она лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z > -A$, $A > 0$,. Если точка $z = x + iy$ лежит на кривой, то $\left|\dfrac{y}{x}\right| \to \infty$, $\arg z \to \dfrac{\pi}{2}$, $|z| = |y|(1 + o(1))$, при $|z| \to \infty$. Рассматриваемая кривая асимптотически приближается к показательной кривой $x + m \ln |y| = c$.

Зафиксируем $\beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ и для $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2} - \beta\right)$, обозначим $A_\alpha(\beta) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \beta| \leqslant \alpha\}$.

Лемма 2. *Пусть $\omega_s < 0$. Для произвольного полинома из экспонент p вида (4), существует такое $r = r(p) > 0$, что для всех z, $|z| > r$, в угле $A_\alpha(\beta)$ справедлива следующая оценка*
$$|p(z)| \geqslant c_3 e^{\omega_s \cos(\beta + \alpha)|z|}. \tag{7}$$

Доказательство. Легко видеть, что все точки z из угла $A_\alpha(\beta)$, лежащие вне некоторого круга, лежат в области U_s. Поэтому, из оценки (6) полинома из экспонент p в области U_s для $|z| > c_1$ вытекает оценка вне некоторого круга $|z| > r$ в угле $A_\alpha(\beta)$. Неравенство (7) вытекает из (6): если $z = |z|e^{i\varphi}$, то в этом угле $0 > \omega_s \operatorname{Re} e^{i\varphi} \geqslant \omega_s \cos(\beta + \alpha)$. Лемма 2 доказана.

Пусть некоторая выпуклая область D содержит все показатели ω_k, $k = 0, 1, \ldots, s$, полинома p из экспонент вида (4). Тогда легко показать, что $p \in P_D$.

Следующая лемма по существу доказана в [4] в несколько другой формулировке. Рассмотрим произвольную бесконечную дискретную последовательность комплексных чисел $\mathcal{V} = \{v_j\}$, причем $\operatorname{Re} v_j > 0$. Предположим, что

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\operatorname{Re} v_j}{\ln|v_j|} = \infty. \tag{8}$$

Для дальнейшего важно заметить, что если последовательность $\mathcal{V}$ лежит в угле $A_\alpha(\beta)$, то условие (8) выполняется.

Обозначим $I_\mathcal{V} = \{f \in H(\mathbb{C}) : f(v_j) = 0,\ j \in \mathbb{N}\}$ – замкнутый идеал в $H(\mathbb{C})$. (сравните с (3)).

Лемма 3. *В описанной ситуации, если для $\mathcal{V}$ выполнено условие (8), то никакой многочлен из экспонент $p \not\equiv 0$ вида (4) не может содержаться в идеале $I_\mathcal{V}$.*

Дело в том, что условие (8) на нули идеала противоречит оценке (6).

4. Основные результаты

Для множества Λ введем множество $P(\Lambda)$ предельных направлений в бесконечности как совокупность точек $s \in \mathbb{S}$, для которых найдется последовательность $\{\lambda_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, что $\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k}/|\lambda_{n_k}| = s$, $\lim_{k\to\infty} |\lambda_{n_k}| = \infty$. Множество $P(\Lambda)$ замкнутое.

Аналоги следующего понятия, под различными названиями, часто возникают в комплексном анализе, например, при изучении эффекта аналитического продолжения сумм рядов экспонент, их аналогов, а также элементов инвариантных подпространств [2], [16], [17], [6]. Приведем некоторые необходимые нам определения и результаты из работы [2]:

Обозначим $\mathbb{S} = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$. Пусть S – замкнутое подмножество $\mathbb{S}$. Пусть D – некоторая область в $\mathbb{C}$. Обозначим $h(\varphi) = \sup_{\sigma\in D} \operatorname{Re}(e^{i\varphi}\sigma)$. Если $k(\varphi) : \mathbb{C} \mapsto (-\infty, +\infty]$ – опорная функция (в смысле $\mathbb{R}^2$) выпуклой области D, то $h(\varphi) = k(-\varphi)$.

Легко также видеть, что $h(\varphi)$ это опорная функция (в смысле $\mathbb{R}^2$) области, комплексно сопряженной с D. Функция $H(z) = \sup_{\sigma\in D} \operatorname{Re}(z\sigma) = h(\varphi)|z|$, $z = |z|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, – позитивно однородная, полунепрерывная снизу, выпуклая функция. Из этого несложно получить, что функция $h(\varphi)$ – полунепрерывная снизу на $\mathbb{S}$.

Для $s \in \mathbb{S}$, $s = e^{i\varphi}$, определим функцию $d(s) = k(-\varphi)$, $d : \mathbb{S} \mapsto (-\infty, +\infty]$. По определению, для каждого $s \in \mathbb{S}$, $d(s)$ – это наименьшая верхняя грань проекций точек области D на направление $\overline{s} = e^{-i\varphi}$.

Например, для заданных $t \in \mathbb{S}$ и $c \in \mathbb{R}$, обозначим $\Pi_c(\overline{t}) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(tz) < c\}$ – полуплоскость с направлением $\overline{t}$ внешней нормали к границе, точка $z = c\overline{t}$ лежит на ее границе. Для $D = \Pi_c(\overline{t})$ имеем, что $d(s) = +\infty$, $s \neq t$, и $d(s) = c$, $s = t$.

Множество

$$D_S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(sz) < d(s),\ s = e^{i\varphi} \in S, \}$$

называется S-выпуклой оболочкой области D.

По определению, S-выпуклая оболочка D_S любой области D это пересечение, по всем $s = e^{i\varphi} \in S$, множеств $\Pi(\overline{s}, D) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(sz) < d(s)\}$. Если существует $t \in S : d(t) = \infty$, тогда $\Pi(\overline{t}, D) = \mathbb{C}$. Если при этом существует хотя бы одно число $s \in S$, для которого $d(s) < \infty$, такие $t \in S$ в определении D_S можно не учитывать.

Если $d(s) < \infty$, множество $\Pi(\overline{s}, D)$ – это опорная полуплоскость области D, то есть $D \subset \Pi(\overline{s}, D)$ и $\partial D \cap \partial \Pi(\overline{s}, D) \neq \emptyset$. Легко видеть, что $\Pi(\overline{s}, D) = \Pi_0(\overline{s}) + \overline{s}d(s)$. Здесь $\Pi_0(\overline{s}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(sz) < 0\}$).

Множество D_S – выпуклая область, более того, она S-выпуклая [2], [16]. Если $S = \mathbb{S}$, S-выпуклая оболочка множества – это обычная выпуклая оболочка.

Предложение А. *Пусть D выпуклая область и $S = P(\Lambda)$. Если ряд экспонент $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z}$ абсолютно сходится для всех $z \in D$, то он абсолютно сходится и для $z \in D_{P(\Lambda)}$. Его сумма — аналитическая функция в выпуклой области $D_{P(\Lambda)}$.*

Первое утверждение вытекает из предложений 16 и 8 работы [2]. В работе [1] доказано, что ряд, абсолютно сходящийся в выпуклой области D, сходится и в топологии пространства $H(D)$ равномерной сходимости на компактах.

Область D – полуплоскость. Зафиксируем β, $|\arg\beta| < \dfrac{\pi}{2}$, и обозначим $s_\beta = e^{i\beta}$. Рассмотрим случай, когда $D = \Pi_0(e^{-i\beta})$ – "левая"полуплоскость.

Пусть задано произвольное бесконечное дискретное в области Dмножество вещественных узлов интерполяции $\mathcal{M} \subset \Pi_0(\overline{s_\beta}) \cap \mathbb{R}^-$. Каждая точка $\mu_k \in \mathcal{M}$ имеет кратность m_k, $m_k \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. *Пусть множество $\mathcal{M}$ имеет единственную предельную точку $z = 0$. В пространстве $H\big(\Pi_0(\overline{s_\beta})\big)$ разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma\big(\Lambda, \Pi_0(\overline{s_\beta})\big)$ с множеством узлов $\mathcal{M}$, тогда, и только тогда, когда $s_\beta \in P(\Lambda)$.*

Отметим, что направление s_β – комплексно сопряженное к направлению $\overline{s_\beta} = e^{-i\beta}$ внешней нормали к границе $\partial\,\Pi_0(\overline{s_\beta})$.

Доказательство. Из соображений симметрии (рассматривая функции $\overline{f(\overline{z})}$), в доказательстве можно считать, что $\beta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Условие леммы означает, что множества $\Lambda \cap A_\alpha(\beta)$ – бесконечные, для всех достаточно малых α.

Необходимость. Пусть проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma\big(\Lambda, \Pi_0(\overline{s_\beta})\big)$ с множеством узлов $\mathcal{M}$ разрешима. Предположим, что $s_\beta \notin P(\Lambda)$. Тогда замкнутое множество $P(\Lambda)$ отделено от направления s_β, сопряженного к направлению $\overline{s_\beta}$, внешней нормали к границе $\partial\,\Pi_0(\overline{s_\beta})$.

Для любого числа $s = e^{i\varphi} \in P(\Lambda)$ выполнено $s \neq s_\beta$. Поэтому, для области $D = \Pi_0(\overline{s_\beta})$, $d(s) = +\infty$, следовательно, множество $\Pi(\overline{s}, D) = \mathbb{C}$, для любого $s \in P(\Lambda)$. По определению S-выпуклой оболочки, $D_{P(\Lambda)} = \mathbb{C}$.

Из предложения А получаем следующее. Если ряд экспонент абсолютно сходится в $\Pi_0(\overline{s_\beta})$ и $s_\beta \notin P(\Lambda)$, тогда этот ряд абсолютно сходится всюду в $\mathbb{C}$. Тогда его сумма – целая функция.

Интерполяция целыми функциями с произвольными (например, неограниченными) данными на множестве узлов $\mathcal{M}$, имеющем конечную предельную точку, невозможна. Противоречие.

Достаточность. Доказательство состоит из двух этапов.

1. Сначала сведем задачу к интерполяции в ядре некоторого оператора свертки. Если утверждение леммы доказано для $\widetilde{\Lambda} \subset \Lambda$, то оно будут доказано и для Λ. В дальнейшем, мы перейдем к специальному подпространству в $\Sigma(\Lambda, D)$, замкнутому в $H(D)$. Для этого заменим множество показателей на некоторую подпоследовательность из Λ.

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что: 1) $\Lambda \subset A_\alpha(\beta)$, для некоторого малого α, 2) $P(\Lambda) = \{s_\beta\}$, и 3) выполняется условие разделенности

$$|\lambda_{n+1}| > 2|\lambda_n|. \tag{9}$$

Обозначим через G целую функцию с простыми нулями λ_n,

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right).$$

Величина $\delta = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{1}{|\lambda_n|} \ln \dfrac{1}{|G'(\lambda_n)|}$ есть индекс Гельфонда-Леонтьева.

Из условия (9) вытекает, что функция G имеет минимальный тип при порядке 1, и индекс конденсации $\delta = 0$. Это показано в работе [4].

Из результатов монографии [11] (Теорема 4.2.2) вытекает следующее утверждение.

Пусть $\delta = 0$. Тогда любая функция из замыкания в топологии $H(D)$ линейной оболочки системы полиномиально-экспоненциальных мономов с множеством показателей, имеющим конечную верхнюю плотность с учетом кратностей, представляется в виде ряда экспонент.

Подпространство $\operatorname{Ker} M_G$ допускает спектральный синтез. Тогда, с учетом Теоремы 4.2.3 из монографии [11], получаем следующее утверждение.

Предложение Б. *Ядро $\operatorname{Ker} M_G$ состоит из всех функций $f(z)$, которые представляются рядами экспонент,*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\ z \in \mathbb{C},$$

сходящимися в топологии пространства $H(D)$, то есть $\operatorname{Ker} M_G = \Sigma(\Lambda, D)$.

Следует отметить, что в многомерном случае, в более общей ситуации инвариантных подпространств, в работе [18] изучался фундаментальный принцип (в нашей ситуации это утверждение предложения Б). Самая общая постановка этой задачи для комплексной плоскости рассмотрена в [19]. В работе [20] подробно изучен случай рядов с вещественными показателями Λ.

В этих работах введена новая характеристика S_Λ, используя которую удалось получить критерии наличия фундаментального принципа для инвариантных подпространств в выпуклых областях. В силу этапа 1, Λ лежит в угле, а тогда, повторяя почти дословно доказательство из [20], с. 100, получаем, что $S_\Lambda = 0$, и предложение Б можно получить и из результатов [18], [19], [20].

2. На этом этапе переходим к доказательству двойственных утверждений.

Обозначим через ψ – функцию из $H(D)$ с нулевым множеством $\mathcal{M}$ с учетом кратностей m_k.

В силу Предложения 1 разрешимость интерполяционной проблемы вытекает из двух двойственных утверждений:

(I^*) Справедливо равенство $\big(G\big)_{P_D} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi = \{0\}$.

(II^*) Подпространство $\big(G\big)_{P_D} + \operatorname{Ker} \widetilde{M}_\psi$ — замкнутое в пространстве P_D.

Подмодуль $\big(G\big)_{P_D}$ определен выше в (3).

Важным моментом в доказательстве утверждений (I^*) и (II^*) является следующий известный факт.

Подпространство $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi \subset P_D$ *представляет собой линейную оболочку системы всех мономов вида* $\{z^\nu e^{\mu_k z}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu = 0, 1, \cdots, m_k - 1$, *то есть оно состоит только из полиномов из экспонент вида (4), где* $\omega_k = \mu_k$. Это несложно доказываемый фундаментальный принцип для $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ в пространстве P_D.

Двойственное утверждение (I^*) следует из Леммы 3: покажем, что полином из экспонент $p \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$, $p \not\equiv 0$, не может принадлежать $\big(G\big)_{P_D}$. Действительно, после этапа 1, считаем, что множество Λ лежит в $A_\alpha(\beta)$. Из этого следует, что для последовательности $v_k = \lambda_k$ выполнено условие (8) из Леммы 3. Заметим, что $I_\Lambda = \big(G\big)$ – замкнутый идеал в $H(\mathbb{C})$. Как уже отмечалось выше в (3), $\big(G\big)_{P_D} = \big(G\big) \cap P_D$. Утверждение (I^*) доказано.

Докажем последнее равенство. По определению, $\big(G\big)_{P_D} \subset I_\Lambda \cap P_D$. Согласно теореме [14] о делении на функцию минимального типа в пространстве P_D, верно и обратное включение. Другими словами, это следствие из теоремы о сложении индикаторов. Подмодуль в правой части последнего равенства — замкнутый, так как топология в $P_\mathbb{C}$ сильнее топологии поточечной сходимости. Значит подмодуль $(G)_{P_D}$ замкнут в P_D. Эти факты были необходимы выше, при выводе двойственной формулировки проблемы интерполяции (Предложение 1).

Получили, что имеется алгебраическая прямая сумма $(G)_{P_D} \oplus \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi \subset P_D$. Докажем замкнутость этого подпространства в P_D (это утверждение (II^*)). Как известно [9], в (LN^*)-пространстве P_D замкнутость любого подпространства X равносильна его секвенциальной замкнутости.

Сходимость последовательности $\{g_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ *в* (LN^*)*-топологии пространства* P_D *означает следующее:*
1. Последовательность $\{g_l\}$ *сходится к* g *в топологии пространства* $H(\mathbb{C})$.
2. Существуют такие $A > 0$, $j \in \mathbb{N}$, *что для всех* $l \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$|g_l(z)| \leqslant A e^{H_j(z)},\ z \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

Здесь $\{K_j\}$ – произвольное фиксированное счетное исчерпание области D выпуклыми компактами: $K_j \subset \operatorname{int} K_{j+1}$ и $D = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$, $H_j(z) = \sup_{\sigma\in K_j} \operatorname{Re} z\sigma$. Если $z = |z|e^{i\varphi}$, $h_j(\varphi) = H_j(z)/|z|$ – опорная функция (в смысле $\mathbb{R}^2$) компакта, комплексно сопряженного с K_j.

Рассмотрим произвольную последовательность $\{g_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ функций из $(G)_{P_D} \oplus \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ и предположим, что она сходится в пространстве P_D к функции $g \in P_D$. Покажем, что предельная функция g принадлежит $(G)_{P_D} \oplus \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Последовательность $\{g_l\}$ состоит из функций вида $g_l = p_l + R_l$, где функции $R_l \in (G)_{P_D}$, то есть $R_l|_\Lambda = 0$, а функции $p_l \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Если в последовательности $\{g_l\}$ содержится бесконечно много членов с $R_l \equiv 0$, то предельная функция $g \in \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$. Если в $\{g_l\}$ содержится бесконечно много членов с $p_l \equiv 0$, то $g \in (G)_{P_D}$. Для последовательностей $\{g_l\}$ такого типа предельная функция $g \in (G)_{P_D} \oplus \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Следовательно, далее можно считать, что последовательность $\{g_l\}$ такова, что $R_l \not\equiv 0$, $p_l \not\equiv 0$ для всех l.

Полагаем, что $\mu_k < \mu_{k+1} < 0$, $\mu_k \to 0$, $k \to \infty$. Так как $p_l \in \operatorname{Ker} \widetilde{M_\psi}$, $p \not\equiv 0$, это полином из экспонент вида

$$p_l(z) = \sum_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}}^{(l)}} a_k^{(l)}(z) e^{\mu_k z}.$$

Здесь, для любого $k \in \mathbb{N}$, функции a_k^l — произвольные многочлены степени не выше $m_k - 1$. Для каждого $l \in \mathbb{N}$ справа стоит сумма по некоторому конечному подмножеству $Fin_{\mathcal{M}}^l \subset \mathcal{M}$. Обозначим через u_l номер максимального из μ_k в этом представлении, то есть $a_{u_l}^l \not\equiv 0$.

Пусть последовательность $\{g_l\}$ такова, что множество чисел $\{u_l\}$ бесконечное. Покажем, что оно ограниченное. Предположим, что множество $\{u_l\}$ является неограниченным.

Выберем в качестве исчерпания полуплоскости $\Pi_0(\overline{s_\beta})$ полукруги $K_j = e^{-i\beta} \cdot B_j^-$, где $B_j^- = (-1/j + \{|z| \leqslant j\}) \cap \{\operatorname{Re} z \leqslant -1/j\}$. Для каждого j обозначим $t_j = \operatorname{arctg} j^2$. Обозначим $\varepsilon_j = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi}{2} - t_j)$, тогда несложно показать, что справедливы оценки:

$$-\frac{1}{j}|z| \leqslant H_j(z) \leqslant -A_j|z| \text{ для } z \in A_{\varepsilon_j}(\beta), \tag{11}$$

где $A_j = \dfrac{\sqrt{1+j^4}}{j^2} \sin \varepsilon_j = \dfrac{1}{2j^2}(1 + o(j))$, $j \to \infty$.

Все многочлены из экспонент p_l имеют вид (1). Выберем $k > j$, такое, что $\varepsilon_k < \dfrac{\pi}{2} - \beta$. Так как $a_{-q_l}^{(l)} \not\equiv 0$, можно применить оценку (7) для p_l из леммы 2, в которой $\alpha = \varepsilon_k$. Используя еще оценку (10), получаем следующую оценку для $R_l = g_l - p_l$, $p_l \not\equiv 0$, $R_l \not\equiv 0$:

$$|R_l(z)| \geqslant |p_l(z)| - |g_l(z)| \geqslant c_3 e^{\mu_{u_l} \cos(\beta+\alpha)|z|} - A e^{H_j(z)},$$

для всех z в области $\{z \in A_{\varepsilon_k}(\beta),\ |z| > r\}$. Здесь $r = r(l)$. Так так $k > j$, $A_{\varepsilon_k}(\beta) \subset A_{\varepsilon_j}(\beta)$, и тогда из (11) следует, что

$$|R_l(z)| \geqslant |p_l(z)| - |g_l(z)| \geqslant c_3 e^{\mu_{u_l} \cos(\beta+\alpha)|z|} - A e^{-A_j|z|},$$

вне некоторого круга $|z| > r$ в угле $A_{\varepsilon_k}(\beta)$.

По предположению, множество u_l неограниченное, поэтому в представлениях полиномов p_l из экспонент существуют μ_{u_l}, сколь угодно близкие к 0.

Выберем $\mu_{u_{l_0}} > A_j / \cos(\beta + \alpha)$, тогда из последней оценки вытекает, что $|R_{l_0}(z)| > 0$ для всех z вне некоторого круга $\{|z| > r_1(l_0)\}$ в угле $A_{\varepsilon_k}(\beta)$.

Получили противоречие: действительно, в силу этапа 1, $P(\Lambda) = \{s_\beta\}$, поэтому для любого k вне любого круга, в угле $A_{\varepsilon_k}(\beta)$ лежит бесконечная последовательность точек из Λ, а нам дано, что $R_{l_0}|_\Lambda = 0$.

Следует отметить, что для произвольной последовательности $\{g_l\}$ компакт K_j может быть сколько угодно большим, а тогда величина ε_k может быть сколь угодно малой. В этом смысл условия леммы.

Итак, в представлениях полиномов p_l из экспонент в произвольной сходящейся последовательности $\{g_l\}$, $g_l = p_l + R_l$, множество чисел u_l ограниченное. Следовательно, последовательность $\{p_l\}$ принадлежит некоторому конечномерному подпространству $X \subset \operatorname{Ker} \widetilde{M_{\psi_1}}$. Утверждение (I^*) означает, что все элементы сходящейся последовательности $g_l = p_l + R_l$ лежат в алгебраической прямой сумме $X \oplus (G)_{P_D} \subset \operatorname{Ker} \widetilde{M_{\psi_1}} \oplus (G)_{P_D}$.

В любом топологическом векторном пространстве алгебраическая сумма конечномерного подпространства и замкнутого подпространства является замкнутым подпространством ([21], стр. 41). Итак, предельная функция g последовательности $g_l = p_l + R_l$ принадлежит $\operatorname{Ker} \widetilde{M_\psi} \oplus (G)_{P_D}$. Утверждение (II^*) доказано.

Из доказанных утверждений (I^*) и (II^*) вытекает утверждение леммы 4.

Замечание 1. В доказательстве достаточности показано следующее. Пусть Λ – произвольное множество показателей. Тогда одно лишь общее условие (8) (оно следует из условий леммы 4) – достаточное для того, чтобы множество $\Sigma(\Lambda, \Pi_0(\overline{s_\beta})) + I_{\mathcal{M}}$ было всюду плотным в топологии пространства $H(\Pi_0(\overline{s_\beta}))$.

Замечание 2. После преобразования $z \to -z$ плоскости $\mathbb{C}$ получим формулировку, соответствующую случаю "правой"полуплоскости. Кроме того, для любого $h \in \mathbb{R}$, в рассматриваемой задаче допустимо преобразование $z \to z + h$ комплексной плоскости, после которого соответствующим образом нужно изменить формулировки. Действительно, в результате этого преобразования, множество рядов экспонент сохраняется, а множество узлов сдвигается.

Область D – выпуклая, на ее границе лежит конечная предельная точка $\mathcal{M}$. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$.

Обозначим $h(\varphi) = \sup_{\sigma \in D} \operatorname{Re}(e^{i\varphi}\sigma)$. Для каждого $\varphi,$ число $h(\varphi)$ – это значение опорной функции $k(-\varphi)$ (в смысле $\mathbb{R}^2$) области D в направлении $e^{-i\varphi}$. Пусть $s = e^{i\varphi}$, ранее была определена функция $d(s) = k(-\varphi)$.

Прямая $l(\overline{s}) = \{z = x + iy : \operatorname{Re}(sz) = x\cos(-\varphi) + y\sin(-\varphi) = d\}$ называется опорной для области D в направлении $\overline{s} = e^{-i\varphi}$, если на границе D существует точка, принадлежащая $l(\overline{s})$, причем область D лежит в опорной полуплоскости $\Pi(\overline{s}, D) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(sz) < d\}$. Эту точку назовем точкой опоры для прямой $l(\overline{s})$. Легко видеть, что прямая $l(\overline{s})$ – опорная, тогда и только тогда, когда $d = d(s)$.

Пусть $0 \in \partial D$. Обозначим через $T_D(0) \subset \mathbb{S}$ совокупность всех $s \in \mathbb{S}$, для которых точка 0 на границе D является точкой опоры для $l(\overline{s})$. Ясно, что $T_D(0) = \{s \in \mathbb{S} : d(s) = 0\}$.

Заметим, что, в условиях леммы 4, $D = \Pi_0(\overline{s_\beta})$, $T_D(0) = \{s_\beta\}$.

Теорема 1. *Пусть D выпуклая область, причем $0 \in \partial D$ и $D \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Предположим, что множество $\mathcal{M} \subset D \cap \mathbb{R}$ – дискретное в D и имеет единственную предельную точку $z = 0$. В пространстве $H(D)$ разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda, D)$ с множеством узлов $\mathcal{M}$, тогда, и только тогда, когда множество $P(\Lambda) \cap T_D(0) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Случай $D = \Pi_0(\overline{s_\beta})$, $|\beta| < \dfrac{\pi}{2}$, рассмотрен в лемме 4.

Без ограничения общности можно считать, что $D \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$, тогда $\mathcal{M} \subset D \cap \mathbb{R}^-$. В противном случае можно использовать преобразование $z \to -z$ плоскости $\mathbb{C}$.

Тогда $h(\varphi) \geqslant 0$, и из полунепрерывности снизу следует, что множество $T_D(0)$ – замкнутое. Из выпуклости и однородности функции $H(z) = h(\varphi)|z|$ следует, что $T_D(0)$ – связное множество. Легко также видеть, что $|\arg s| < \dfrac{\pi}{2}$ для всех $s \in T_D(0)$, так как $\mathcal{M} \cap \mathbb{R}^- \neq \emptyset$.

Необходимость условия $P(\Lambda) \cap T_D(0) \neq \emptyset$ следует из Предложения Б, а достаточность доказывается сведением к лемме 4.

Необходимость. Предположим, что проблема интерполяции разрешима, но условие теоремы не выполнено, $P(\Lambda) \cap T_D(0) = \emptyset$. Далее будет показано, что в этом случае точка $z = 0$ лежит в $D_{P(\Lambda)}$.

Множества $P(\Lambda)$ и $T_D(0) = \{s \in \mathbb{S} : d(s) = 0\}$ замкнутые.

Для любого подмножества $X \subset \mathbb{S}$ и числа $\delta > 0$ обозначим

$$X_\delta = \{s \in \mathbb{S} : \exists u \in X,\ |s - u| \leqslant \delta\}.$$

Найдется такое $\delta > 0$, что $P(\Lambda) \cap \big((T_D(0))\big)_\delta = \emptyset$, поэтому существует такое связное замкнутое множество $S_1 \in \mathbb{S}$, что $P(\Lambda) \in \operatorname{int} S_1$, $S_1 \cap T_D(0) = \emptyset$.

Из определения S-выпуклой оболочки вытекает, что

$$D_{S_1} \subset D_{P(\Lambda)}. \tag{12}$$

Для всех $s \in S_1$ выполнено $d(s) > 0$, поэтому из полунепрерывности следует, что $\exists c$, $d(s) > c > 0$, $s \in S_1$. Обозначим $B(c) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = c\}$. Для всех $z \in B(c)$ и любого $s \in S_1$, $\operatorname{Re}(sz) < c < d(s)$. Отсюда следует, что точка $0 \in \partial D$ лежит в $\Pi_c(\overline{s}) \subset \Pi(\overline{s}, D)$, для любого $s \in S_1$. Доказано, что $0 \in \big(B(c)\big)_{S_1} \subset D_{S_1}$.

Из (12) получаем, что $0 \in D_{P(\Lambda)}$. Доказательство завершается следующим образом.

В силу предложения A, любой ряд экспонент, который сходится абсолютно в выпуклой области D, абсолютно сходится и в выпуклой области $D_{P(\Lambda)}$. Его сумма — аналитическая функция в $D_{P(\Lambda)}$.

Точка $z = 0$ лежит в области $D_{P(\Lambda)}$ и, по условию, она является предельной для множества узлов $\mathcal{M}$. Для множества узлов $\mathcal{M}$, имеющем предельную точку в области, интерполяция аналитическими функциями в этой области невозможна для произвольных (например, неограниченных) интерполяционных данных. Противоречие. Доказательство необходимости условия теоремы закончено.

Достаточность. По условию, существует предельное направление $s_\beta = e^{i\beta} \in P(\Lambda)$, лежащее в $T_D(0)$, тогда $|\beta| < \dfrac{\pi}{2}$, так как множество $D \cap \mathbb{R}^-$ непустое.

Так как $s_\beta \in T_D(0)$, точка $z = 0$ – точка опоры прямой $l(\overline{s_\beta}) = \{z : \operatorname{Re}(zs_\beta) = 0\}$. Область D лежит в опорной полуплоскости $\Pi_0(\overline{s_\beta}) = \{\operatorname{Re}(zs_\beta) < 0\}$, и $0 \in \partial\,\Pi_0(\overline{s_\beta}) = l(\overline{s_\beta})$. Таким образом, множество $\mathcal{M} \subset \Pi_0(\overline{s_\beta})$ можно использовать в качестве множества узлов для интерполяции рядами экспонент в пространстве $H\big(\Pi_0(\overline{s_\beta})\big) \subset H(D)$. При этих условиях, разрешимость проблемы интерполяции рядами экспонент в пространстве $H\big(\Pi_0(\overline{s_\beta})\big)$ доказана в лемме 4. Разрешимость проблемы в $H(D)$ следует из Предложения 2. Доказательство закончено.

Авторы выражают благодарность участникам Уфимского городского семинара по теории функций за внимание к работе и полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983. 175 с.
2. Мерзляков С.Г. *Интегралы от экспоненты по мере Радона* // Уфимск. матем. журн., 3:2. 2011. С. 57–80.
3. Хермандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Мир. 1968. 279 с.
4. Мерзляков С.Г., Попенов С.В. *Кратная интерполяция рядами экспонент в H(C) с узлами на вещественной оси* // Уфимск. матем. журн., 5:3. 2013. С. 130–143.
5. Напалков В.В., Нуятов А.А. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки* // Матем. сб., 203:2. 2012. С. 77–86.
6. Кривошеев А.С. *Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости* // Изв. РАН., Сер. матем., 68:1. 2004. С. 43–78.
7. Напалков В.В., Зименс К.Р. *Кратная задача Валле-Пуссена на выпуклых областях в ядре оператора свёртки* // Доклады РАН. Т. 458, № 4. 2014. С. 387–389.

8. Напалков В.В., Попенов С.В. *Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера* // Докл. РАН., 381. 2. 2001. С. 164–166.
9. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях* // Сб. перев. Математика., 1:1. 1957. С. 60–77.
10. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982. 240 с.
11. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980. 384 с.
12. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях.* Матем. сб., 88(130):1(5). 1972. С. 3–30.
13. Мерзляков С.Г. *Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования* // Матем. заметки., 33:5. 1983. С. 701–713.
14. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976. 536 с.
15. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Мир. 1967. 548 с.
16. Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимск. матем. журн., 3:2. 2011. С. 43–56.
17. Кривошеева О.А. Область сходимости рядов экспоненциальных многочленов // Уфимск. матем. журн., 5:4. 2013. С. 84–90.
18. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. РАН., Сер. матем., 68:2. 2004, С. 71–136.
19. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* // Функц. анализ и его прил., 46:4. 2012. С. 14–30.
20. Кривошеев А.С., Кривошеева О.А. *Замкнутость множества сумм рядов Дирихле* // Уфимск. матем. журн., 5:3. 2013. С. 96–120.
21. Рудин У. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1975. 443 с.

Сергей Георгиевич Мерзляков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `msg2000@mail.ru`

Сергей Викторович Попёнов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `spopenov@gmail.com`