ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 63-70.

УДК 517.95

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭЙЛЕРА-ДАРБУ

И.В. ВЕРЕВКИН

Аннотация. Введено преобразование Эйлера-Дарбу для неоднородных дифференциальных уравнений с правой частью в виде обобщенной функции. В качестве примера построены фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока и Шредингера с переменными коэффициентами, описывающих частицу во внешнем скалярном поле.

Ключевые слова: преобразование Эйлера-Дарбу, уравнение Клейна-Гордона-Фока, уравнение Шредингера, фундаментальное решение.

Mathematics Subject Classification: 35A08, 35D99, 35Q40

1. Преобразование Эйлера-Дарбу неоднородных уравнений и обобщенные решения

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

$$Lu = Au + Bu = f, \tag{1}$$

где оператор A — дифференциальный оператор по одной переменной x:

$$A = \sum_{i=0}^{K} a_i(x) D_x^i, \tag{2}$$

B — дифференциальный оператор по переменным $y_1, \dots, y_n$ вида

$$B = \sum_{|\alpha| \geq 0}^{M} b_\alpha(y) D_y^\alpha, \tag{3}$$

а $f(x, y_1, \dots, y_n)$ — обобщенная функция. Далее используется стандартная теория обобщенных функций [1] и введены следующие обозначения: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс, $D_x^i = \dfrac{\partial^i}{\partial x^i}$, $D_y^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {y_1}^{\alpha_1} \dots \partial {y_n}^{\alpha_n}}$ — операции обобщенного дифференцирования. Для классических функций мы будем также употреблять обозначения производных (в общем случае тоже обобщенных) очевидные из контекста: h', γ_y. Функции $a_i(x)$ и $b_\alpha(y)$ считаются гладкими в соответствующих областях. Кроме этого, считаем, что все функции, на которые умножаются обобщенные функции, являются бесконечно дифференцируемыми.

Следуя работе [2], класс уравнений вида (1) обозначим через $E_{K,M}$.

Если $h(x), g(y)$ — классические решения уравнений

$$\begin{aligned} &Ah = ch, \\ &Bg + cg = 0, \qquad \text{где } c \in R^1, \end{aligned} \tag{4}$$

I.V. Verevkin, Generalized solutions and Euler-Darboux transformations.

Поступила 6 марта 2014 г.

то функция $u_1 = gh$ удовлетворяет однородному уравнению (1). Функция u_1 порождает преобразование уравнения (1).

Теорема 1. *Класс уравнений $E_{K,M}$ обладает следующими свойствами:*
1. Если γ — гладкая функция вида $\gamma = p(x)q(y) \neq 0$, то преобразование

$$u \to v = u/\gamma$$

переводит обобщенные решения уравнения (1) в обобщенные решения уравнения

$$\hat{L}v = vL(\gamma)/\gamma + A_1 v + B_1 v = f/\gamma,$$

где

$$A_1 = \sum_{i=1}^{K} a_i^1(x) D_x^i, \qquad \text{где } B_1 = \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} b_\alpha^1(y) D_y^\alpha.$$

При $\gamma = u_1 \neq 0$ уравнение $\hat{L}v = f/\gamma$ имеет вид

$$L_1 v = A_1 v + B_1 v = f/\gamma. \tag{5}$$

2. Преобразование $v \to w = v_x$ переводит обобщенные решения уравнения (5) в обобщенные решения уравнения

$$L_2 w = \sum_{i=1}^{K} (D_x(a_i^1) D_x^{i-1} w + a_i^1 D_x^i w) + \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} b_\alpha^1 D_y^\alpha w = D_x(f/\gamma). \tag{6}$$

Доказательство.

Заметим, что для произведения γv, где v — обобщенная функция, справедлива формула Лейбница для дифференцирования произведения. Учитывая это и равенство $(Lu, \varphi) = (L(\gamma v), \varphi)$, которое следует из равенства $(u, \varphi) = (\gamma v, \varphi)$, верно следующее соотношение

$$Lu = L(\gamma v) = vL(\gamma) + \widetilde{A}v + \widetilde{B}v = f, \tag{7}$$

где

$$\widetilde{A}v = \sum_{i=0}^{K} \widetilde{a}_i(x, \gamma, \gamma_x, \ldots) D_x^i v, \qquad \widetilde{B}v = \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} \widetilde{b}_\alpha(y, \gamma, \gamma_y, \ldots) D_y^\alpha v,$$

а φ — функция из пространства основных функций. Коэффициенты $\widetilde{a}_i$ могут зависеть только от x, γ и производных от γ по x, а коэффициенты $\widetilde{b}_\alpha$ могут зависеть только от y, γ и ее производных по $y_1, \ldots, y_n$. Функция γ и ее производные могут входить в коэффициенты $\widetilde{a}_i, \widetilde{b}_\alpha$ лишь линейным образом.
Умножая (7) на $1/\gamma$, получаем уравнение

$$\widetilde{L}v = \frac{1}{\gamma} L(\gamma) v + A_1 v + B_1 v = f/\gamma,$$

где операторы A_1, B_1 имеют вид

$$A_1 = \sum_{i=0}^{K} \widetilde{a}_i(x, p, p_x, \ldots) D_x^i, \qquad B_1 = \sum_{|\alpha|\geq 1}^{M} \widetilde{b}_\alpha(y, q, q_y, \ldots) D_y^\alpha.$$

При $\gamma = u_1$ получаем уравнение (5). Для доказательства второго свойства достаточно продифференцировать (5) по x и ввести новую обобщенную функцию $w = D_x v$. В результате получается уравнение (6).

Отметим, что все уравнения $Lu = f$, $L_1 v = f/\gamma$, $L_2 = D_x(f/\gamma)$ принадлежат одному классу $E_{K,M}$.

Следствие. *Пусть h — нетривиальное решение уравнения (4), r — гладкая функция от x. Тогда преобразование*

$$v = \frac{1}{r}(D_x u - \frac{h'}{h}u) \tag{8}$$

переводит обобщенные решения уравнения (1) в обобщенные решения уравнения того же класса $E_{K,M}$.

Действительно, преобразование

$$v = p(x)q(y)D_x\left(\frac{u}{u_1}\right), \tag{9}$$

является комбинацией преобразований, рассмотренных в теореме 1, и, следовательно, сохраняет класс уравнения. Здесь p, q — произвольные гладкие функции, u_1 — решение уравнения (1), полученное разделением переменных $u_1 = h(x)g(y)$. Если положить $q = g, p = h/r$, то из (9) получим (8).

Следуя работе [2] покажем, что справедлива

Лемма 1. *Преобразование*

$$u_k = \mathcal{M}_k u = \frac{W(h_1, \ldots, h_k, u)}{W(h_1, \ldots, h_k)} \tag{10}$$

переводит обобщенное решение уравнения (1) в обобщенное решение уравнения того же класса $E_{K,M}$.

Несмотря на то, что доказательство леммы, приведенное в [2], проходит и для случая обобщенных решений, мы его приводим, так как оно используется при доказательстве теоремы 3.

Для того чтобы убедиться в справедливости леммы 1, заметим, что если известны $h_1, \ldots, h_k$ решения уравнения (4) при различных $c_1, \ldots, c_k$, то, как показано в [2], можно построить оператор порядка k, являющийся суперпозицией операторов Эйлера-Дарбу первого порядка вида $\mathcal{L}_h = hD_x(1/h)$ и соответствующее преобразование, действующее на $E_{K,M}$. Действительно, пусть $h_1, \ldots, h_k$ — гладкие, линейно независимые функции от x. Построим последовательность функций и операторов

$$\begin{aligned} &p_1 = h_1, p_2 = \mathcal{L}_{p_1} h_2, \ldots, p_N = \mathcal{L}_{p_{N-1}} \ldots \mathcal{L}_{p_1} h_N, \\ &\mathcal{M}_1 = \mathcal{L}_{p_1}, \mathcal{M}_2 = \mathcal{L}_{p_2}\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_N = \mathcal{L}_{p_N}\mathcal{M}_{N-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Из построения операторов $\mathcal{M}_k$ следует, что функции $h_1, \ldots, h_k$ удовлетворяют дифференциальному уравнению порядка k

$$\mathcal{M}_k h = 0. \tag{12}$$

Значит они образуют базис решений уравнения (12). Следовательно, действие оператора M_k на произвольную функцию представляется в виде [3]

$$\mathcal{M}_k u = D_x^k u + a_{k-1}D_x^{k-1}u + \ldots + a_0 u = \frac{W(h_1, \ldots, h_k, u)}{W(h_1, \ldots, h_k)}. \tag{13}$$

Остается взять в качестве $h_1, \ldots, h_k$ решения уравнения (4) для различных $c_1, \ldots, c_k$.

2. Преобразование уравнений класса $E_{2,M}$

В данном разделе рассматриваются преобразования ЭД для уравнений специального вида из класса уравнений $E_{2,M}$.

Рассмотрим уравнение
$$FD_x^2u + GD_xu + Hu = Bu + f, \tag{14}$$
где F, G, H — гладкие функции от x, f — обобщенная функция, а B — линейный оператор вида (3).

Теорема 2. *Преобразование Эйлера-Дарбу, заданное соотношением (8), переводит обобщенные решения уравнения (14) в обобщенные решения уравнения*
$$FD_x^2v + GD_xv + Hv = Bv + f_1, \tag{15}$$
где
$$G_1 = G + F' + 2F\frac{r'}{r}, \tag{16}$$
$$H_1 = H + \frac{(Fr' + Gr)'}{r} + F'(\ln h)' + 2F(\ln h)'', \tag{17}$$
$$f_1 = \frac{1}{r}(D_xf - \frac{h'}{h}f), \tag{18}$$
а функция $h(x)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению
$$Fh_{xx} + Gh_x + (H + c)h = 0, \qquad \text{где } c \in R^1. \tag{19}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения
$$v = Ru = \frac{1}{r}(D_xu + su), \qquad \text{где } s = -h'/h,$$
$$Au = FD_x^2u + GD_xu + Hu,$$
$$A_1u = F_1D_x^2u + G_1D_xu + H_1u.$$
Тогда исходные уравнения (14) и (15) запишутся как $Au = Bu + f$ и $A_1v = Bv + f_1$. Для доказательства теоремы необходимо показать, что
$$(A^* - B^*)R^*\varphi = R^*(A_1^* - B^*)\varphi. \tag{20}$$
Здесь звездочка означает формальное сопряжение оператора, определяемое для операторов A и B следующим образом
$$A^*\varphi = \sum_{i=0}^{K}(-1)^iD_x^i(a_i(x)\varphi), \qquad B^*\varphi = \sum_{|\alpha|\geq 0}^{M}(-1)^{|\alpha|}D_y^\alpha(b_\alpha(y)\varphi).$$
Действительно,
$$\begin{aligned}(R(A-B)u,\varphi) &= (u,(A^*-B^*)R^*\varphi) = (u,R^*(A_1^*-B^*)\varphi) = \\ &= (Ru,(A_1^*-B^*)\varphi) = (v,(A_1^*-B^*)\varphi) = ((A_1-B)v,\varphi) = (Rf,\varphi).\end{aligned} \tag{21}$$
Здесь мы использовали свойство коммутирования операторов B и R, что, как легко показать, влечет $B^*R^*\varphi = R^*B^*\varphi$. Остается показать, что $A^*R^*\varphi = R^*A_1^*\varphi$. Имеем,
$$A^*R^*\varphi = D_x^2[F(-D_x(\varphi/r) + \frac{s}{r}\varphi)] - D_x[G(-D_x(\varphi/r) + \frac{s}{r}\varphi)] + H[-D_x(\varphi/r) + \frac{s}{r}\varphi],$$
$$R^*A_1^*\varphi = -D_x[\frac{1}{r}(D_x^2(F_1\varphi) - D_x(G_1\varphi) + H_1\varphi)] + \frac{s}{r}[D_x^2(F_1\varphi) - D_x(G_1\varphi) + H_1\varphi].$$
Левая часть уравнения $A^*R^*\varphi - R^*A_1^*\varphi = 0$ является полиномом относительно $\varphi_{xxx}, \varphi_{xx}$, φ_x, φ. Коэффициенты при этих величинах должны быть равны нулю. Собирая подобные члены при $\varphi_{xxx}, \varphi_{xx}$, получаем соответственно $F_1 = F$ и $G_1 = G + F' + 2F(r'/r)$. Подставляя найденные F_1 и G_1 в коэффициент при φ_x, получим выражение (17).

Приравнивая к нулю коэффициент при φ, с учетом найденных F_1, G_1 и H_1, получаем:

$$Fs'' + (F' - 2Fs + G)s' - F's^2 + G's - H' = (Fs' + Gs - Fs^2 - H)' = 0. \tag{22}$$

При $s = -h'/h$ выражение принимает вид $(-Fh''/h - Gh'/h - H)' = 0$, откуда получаем требуемое уравнение (19).

Рассмотрим высшие преобразования ЭД. Если известно k решений $h_1, \dots, h_k$ уравнения (19) для различных $c_1, \dots, c_k$, то можно построить преобразование ЭД порядка k.

Теорема 3. *Пусть $h_1, \dots, h_k$ — решения уравнения (19), соответствующие различным постоянным $c_1, \dots, c_k$. Тогда преобразование (13) переводит обобщенные решения уравнения (14) в обобщенные решения уравнения*

$$FD_x^2 u_k + G_k D_x u_k + H_k u_k = Bu_k + f_k, \tag{23}$$

При этом коэффициенты и функция f_k задаются формулами

$$G_k = G + kF', H_k = H + kG' + \frac{k(k-1)}{2}F'' + F'(\ln W)' + 2F(\ln W)'' \tag{24}$$

а

$$f_k = \mathcal{M}_k f = \frac{W(h_1, \dots, h_k, f)}{W(h_1, \dots, h_k)}, \tag{25}$$

здесь W определитель Вронского для функций $h_1, \dots, h_k$.

Доказательство.

Используем результаты теоремы 2. Выражение для G_k получается по индукции последовательным применением формулы (16) при $r = 1$. Используя (17) и конструкцию (11) функций $p_1, \dots, p_k$, легко видеть, что индукционное построение коэффициентов H_k приводит к выражениям

$$H_k = H + kG' + \frac{k(k-1)}{2}F'' + F'(\ln p_1 \dots p_k)' + 2F(\ln p_1 \dots p_k)''. \tag{26}$$

Найдем произведение $p_1 \dots p_k$. Так как, согласно (11) и (13), имеют место соотношения

$$p_{i+1} = \mathcal{M}_i h_{i+1} = \frac{W(h_1, \dots, h_i, h_{i+1})}{W(h_1, \dots, h_i)},$$

справедливы равенства

$$p_1 \dots p_k = h_1 \frac{W(h_1, h_2)}{h_1} \dots \frac{W(h_1, \dots, h_k)}{W(h_1, \dots, h_{k-1})} = W(h_1, \dots, h_k),$$

откуда следует выражение (24) для коэффициента H_k. Справедливость формулы для f_k, с учетом (13) и (18) очевидна.

3. Построение фундаментальных решений

Построим фундаментальные решения уравнений Клейна-Гордона-Фока (КГФ) и Шредингера с переменными коэффициентами. Для простоты ограничимся одномерной размерностью задачи по пространственной переменной. Обобщенная постановка задачи Коши, используемая ниже, подробно обсуждается в [1].

Уравнение КГФ имеет вид [4]

$$D_t^2 u + m^2 u = a^2 D_x^2 u, \qquad \text{где } a, m \in R^1. \tag{27}$$

Для построения фундаментального решения рассмотрим обобщенную задачу Коши для уравнения (27) с источником [1]

$$D_t^2 u + m^2 u = a^2 D_x^2 u + f(x,t), \tag{28}$$

где функция $f(x,t)$ имеет вид (ниже точка обозначает прямое призведение функций)

$$f = u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t). \tag{29}$$

При преобразовании ЭД уравнение (28) по теореме 2 переходит в уравнение

$$D_t^2 v + m^2 v = a^2 D_x^2 v + H_1(x) v + f_1 \tag{30}$$

с функцией $f_1(x,t)$

$$f_1 = D_x f - \frac{h'}{h} f. \tag{31}$$

Функция $H_1(x)$ находится по формуле (17). Для того чтобы решение обобщенной задачи Коши уравнения (28) преобразовывалось в фундаментальное решение уравнения (30), потребуем выполнение следующего условия

$$D_x f - \frac{h'}{h} f = \delta(x-y) \cdot \delta(t).$$

Указанное условие можно переписать в виде обыкновенных дифференциальных уравнений на функции u_0 и u_1

$$u_0' - \frac{h'}{h} u_0 = 0, \tag{32}$$

$$u_1' - \frac{h'}{h} u_1 = \delta(x-y). \tag{33}$$

Решения уравнений (32) и (33) соответственно выберем следующими (из соображений простоты фундаментального решения)

$$u_0 = 0, \tag{34}$$

$$u_1(x,y) = \frac{\theta(x-y)h(x)}{h(y)}, \tag{35}$$

где $\theta(x-y)$ — тета-функция Хевисайда. Решение обобщенной задачи Коши уравнения (28) при выборе функции $u_0 = 0$ есть свертка фундаментального решения уравнения (27) и функции u_1. Фундаментальное решение уравнения КГФ можно выбрать в виде [1]

$$E(x,y,t,\tau) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x-y|) J_0 \left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (x-y)^2} \right), \tag{36}$$

где J_0 — функция Бесселя. Решение обобщенной задачи Коши

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) E(x,\xi,t,0) d\xi. \tag{37}$$

Опуская промежуточные выкладки, выпишем решение обобщенной задачи Коши уравнения КГФ

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2ah(y)} \int\limits_{-at}^{at} \theta(x-y-z) h(x-z) J_0 \left(\frac{m}{a} \sqrt{a^2t^2 - z^2} \right) dz. \tag{38}$$

Фундаментальное решение уравнения (30) находим по формуле

$$E_1(x,y,t) = D_x u(x,y,t) - \frac{h'(x)}{h(x)} u(x,y,t). \tag{39}$$

После несложных вычислений получаем

$$E_1(x,y,t)=\begin{cases}0, & \text{если } x-y<-at,\\ \frac{1}{2a}J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-(x-y)^2})+ & \\ \frac{1}{2ah(y)}\int\limits_{-at}^{x-y}(h'(x-z)-\frac{h'(x)}{h(x)}h(x-z))J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-z^2})dz, & \text{если } -at\le x-y\le at,\\ \frac{1}{2ah(y)}\int\limits_{-at}^{at}(h'(x-z)-\frac{h'(x)}{h(x)}h(x-z))J_0(\frac{m}{a}\sqrt{a^2t^2-z^2})dz, & \text{если } x-y>at.\end{cases}$$

В последних формулах штрих у функции означает дифференцирование по соответствующему сложному аргументу, выписанному в скобках.
Приведенные формулы легко обобщаются для высших преобразований ЭД. Для этого необходимо взять функцию u_1, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{W(h_1,\ldots,h_k,u_1)}{W(h_1,\ldots,h_k)}=\delta(x-y). \tag{40}$$

Решение последнего уравнения дается формулой

$$u_1(x,y)=\frac{\theta(x-y)}{W_y(h_1,\ldots,h_k)}\sum_{i=1}^{k}W_y(h_1,\ldots,h_{i-1},h_{i+1},\ldots,h_k)h_i(x). \tag{41}$$

Здесь введено обозначение $W_y(h_1,\ldots,h_k)=W(h_1(y),\ldots,h_k(y))$. Коэффициенты преобразованного уравнения определяются по теореме 3 формулой (24).

Построение фундаментального решения для уравнения Шредингера с переменными коэффициентами проводится так же, как и для уравнения КГФ. Стартуя с исходного уравнения

$$iD_tu=-D_x^2u, \tag{42}$$

рассмотрим обобщенную задачу Коши со следующим источником

$$iD_tu=-D_x^2u+u_0(x)\cdot\delta(t). \tag{43}$$

Потребуем, чтобы функция u_0, в соответствии с формулой (18) теоремы 2 преобразовывалась в δ-функцию Дирака. Это будет выполнено, если указанная функция удовлетворяет следующему уравнению

$$u_0'-\frac{h'}{h}u_0=\delta(x-y), \tag{44}$$

решение которого задается формулой (35). Фундаментальное решение уравнения (42) есть [1]

$$E(x,\xi,t)=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t}-\frac{i\pi}{4}\right). \tag{45}$$

Тогда решение обобщенной задачи Коши можно записать в виде свертки

$$u(x,t)=\frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}}\frac{e^{-i\pi/4}}{h(y)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\theta(\xi-y)h(\xi)\exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t}\right)d\xi. \tag{46}$$

Решение обобщенной задачи Коши уравнения (43) преобразуется в фундаментальное решение уравнения

$$iD_tv=-D_x^2v+H_1(x)v, \tag{47}$$

по формуле (39). Коэффициент $H_1(x)$, так же, как и в случае уравнения КГФ, вычисляется по формуле (17). Выпишем фундаментальное решение преобразованного уравнения (45)

$$E_1(x,y,t) = \frac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \frac{e^{-i\pi/4}}{h(y)} \int\limits_y^\infty h(\xi) \left[i\frac{x-\xi}{2t} - \frac{h'(x)}{h(x)} \right] \exp\left(\frac{i(x-\xi)^2}{4t} \right) d\xi. \tag{48}$$

Очевидно, что последняя формула задает фундаментальное решение только в случае существования соответствующих интегралов.
Аналогично уравнению КГФ построение фундаментального решения для уравнения Шредингера так же обобщается для высших преобразований ЭД.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность О.В. Капцову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука. 1981.
2. Капцов О.В. *Эквивалентность линейных дифференциальных уравнений с частными производными и преобразования Эйлера-Дарбу* // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12, №4. С. 59–72.
3. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Харьков: ГНТИ, 1939.
4. Боголюбов Н.Н. *Введение в теорию квантованных полей.* М.: Наука, 1984.

Игорь Викторович Веревкин,
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок, 50/44,
660036, г. Красноярск, Россия
E-mail: vverigor@mail.ru