

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

А.Р. ХАШИМОВ, С. ЯКУБОВ

Аннотация. В статье построено решение задачи Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа в многомерном пространстве и исследованы некоторые ее свойства.

Ключевые слова: задача Коши, уравнения третьего порядка, нестационарные уравнения, функция Эйри, растущие на бесконечности решения.

Mathematics Subject Classification: 35A02, 35A09, 35B40

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является исследование некоторых свойств решений уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^3}{\partial x_i^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

в области $D = \{(x_i; t) : -\infty < x_i < \infty, 0 < t \leq T\}$, с начальным условием

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad -\infty < x_i < \infty. \quad (2)$$

Если в (1) $n = 1$, то мы получаем уравнение

$$u_{xxx} - u_t = 0, \quad (3)$$

которое было исследовано в работе [2]. В этой работе были построены фундаментальное решение для уравнения (3) и теория потенциалов, а также разработан метод исследования краевых задач и задачи Коши для уравнения (3). Позднее решение задачи Коши для уравнения (3) было построено в работе [16] в более широком классе и были изучены некоторые его свойства. Далее, этим же методом было построено решение задачи Коши для уравнения высокого нечетного порядка [15]

$$\frac{\partial^{2k+1} u}{\partial x^{2k+1}} + (-1)^k \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Если в (1) положить $n = 2$, то мы получим уравнение

$$u_{xxx} + u_{yyy} - u_t = 0. \quad (4)$$

Отметим, что решения уравнения (4) и линейного уравнения Захарова–Кузнецова (см. [4], [5])

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} = 0 \quad (5)$$

A.R. KHASHIMOV, S. YAKUBOV, ON SOME PROPERTIES OF CAUCHY PROBLEM FOR NON-STATIONARY THIRD ORDER COMPOSITE TYPE EQUATION.

© ХАШИМОВ А.Р., ЯКУБОВ С. 2014.

Работа поддержана ГКНТ РУз (грант Ф-4-55).

Поступила 30 октября 2014 г.

имеют аналогичные асимптотические свойства на бесконечности. Уравнение Захарова–Кузнецова (5) является одним из вариантов обобщения уравнения Кортевеге–де-Фриза в многомерном пространстве и описывает ионно-акустические волновые процессы в плазме [20]. Решение задачи Коши для уравнения (4) было построено в работе [8].

Класс корректности задачи Коши в классах функций, растущих на бесконечности, впервые был определен в работе А.Н. Тихонова [18] для уравнения теплопроводности. Дальнейшее исследование начально-краевых задач для дифференциальных уравнений четного порядка в классах функций, растущих на бесконечности, выполнено с применением аппарата теории обобщенных функций [9, 10, 11, 12, 13, 19]. В настоящее время теория линейных уравнений четного порядка (например, для линейных уравнений параболического типа) разработана наиболее полно [3, 14, 17].

В работе [1] было построено фундаментальное решение уравнения (1) в пространстве \mathbb{R}^{n+1}

$$\begin{aligned} U(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) = \\ = \frac{1}{(t - \tau)^{\frac{n}{3}}} f\left(\frac{x_1 - \xi_1}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right) \dots f\left(\frac{x_n - \xi_n}{(t - \tau)^{\frac{1}{3}}}\right), \quad x_i \neq \xi_i, \quad t > \tau, \quad i = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $f(z) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda^3 - \lambda z) d\lambda$, $-\infty < z < \infty$, — функция Эйри и удовлетворяющая уравнению

$$f(z) + \frac{1}{3}zf(z) = 0. \quad (7)$$

Для функции $f(z)$ имеют место следующие соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \pi, \quad \int_{-\infty}^0 f(z) dz = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^{\infty} f(z) dz = \frac{2\pi}{3}. \quad (8)$$

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ кусочно-непрерывная функция с компактным носителем $D_{(a_i, b_i)} = \{x_i : a_i \leq x_i \leq b_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $D_{(a_i, b_i)} \subset \mathbb{R}^n$ и имеющая ограниченную вариацию. Тогда функция

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t) \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n$$

при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (1) и для любого $x_i^0 \in (a_i, b_i)$

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x_1^0, \dots, x_n^0, t) = \frac{2}{3} \varphi(x_1^0 - 0, \dots, x_n^0 - 0) + \frac{1}{3} \varphi(x_1^0 + 0, \dots, x_n^0 + 0).$$

Справедливость первой части теоремы сразу следует из свойств фундаментального решения уравнения (1) и условий теоремы. Доказательство второй части теоремы проводится по каждой пространственной переменной отдельно. Так как доказательство этой части теоремы будет аналогично работе [16] и не вызывает существенных трудностей, здесь мы не будем на нем останавливаться.

Теорема 2. Пусть функция $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ на любой ограниченной области $D_{(a_i, b_i)} = \{x_i : a_i \leq x_i \leq b_i\}$, $i = \overline{1, n}$, $D_{(a_i, b_i)} \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, а вариация функции

$$P(y) = y^{\frac{3}{4} + \delta_1} \psi(y) \quad (9)$$

ограничена при $y < a_0$ для любого $a_0 = \text{const}$. Кроме того, пусть $\varphi(x_1, \dots, x_n) \sim \prod_j \psi(x_j) \exp \left\{ \text{const} \sum_{i \neq j} |x_i|^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right\}$, при $x_i \rightarrow \infty$, $x_j < a_j$, $j = \overline{1, n}$, $i + j = n$; $\varphi(x_1, \dots, x_n) \sim \prod_j \psi(x_j)$, при $x_j < a_j$, где δ_1, δ_2 — положительные числа. Тогда функция

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t) \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (10)$$

при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (1) и условию

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n, t) \rightarrow (x_1^0, \dots, x_n^0, +0)} u(x_1, \dots, x_n, t) = \varphi(x_1^0, \dots, x_n^0). \quad (11)$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. С этой целью формально дифференцируя выражение (10) по x_j , имеем

$$\begin{aligned} \pi^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 U(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t)}{\partial x_j^3} \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 U(\xi_1, \dots, \xi_n; t)}{\partial x_j^3} \varphi(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^3 U(x_1, \dots, x_n; t)}{\partial x_j^3} = -\frac{t^{-1}}{3} \{U + x_j U_{x_j}\}.$$

При вычислении производных учитывалось соотношение (7). Отсюда получим

$$\begin{aligned} \pi^n t \frac{\partial^3 u}{\partial x_j^3} &= -\frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1) \dots f(z_n) \varphi \left(\xi_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, \xi_n - z_n t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 \dots dz_n - \\ &- \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(z_1) \dots f(z_{j-1}) f(z_{j+1}) \dots f(z_n) dz_1 \dots dz_{j-1} dz_{j+1} \dots dz_n \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} z f'(z_j) \varphi \left(\xi_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, \xi_n - z_n t^{\frac{1}{3}} \right) dz_j = \\ &= -\frac{1}{3} \{u_{j1} + u_{j2}\}, \quad z_j = \frac{x_j - \xi_j}{t^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Докажем, что при выполнении условия теоремы 2 интеграл в правой части (12), полученный после формального дифференцирования, сходится. Исследуем сходимость интеграла (12) при $j = 1$, остальные случаи исследуются аналогичным образом. Для функций Эйри справедливы следующие соотношения [16]:

$$f(z) \sim \begin{cases} |z|^{-\frac{1}{4}} \exp \left(-\frac{2}{3} |z|^{\frac{3}{2}} \right) \left(\sqrt{\pi} + O \left(|z|^{-\frac{3}{2}} \right) \right), \\ |z|^{\frac{1}{4}} \exp \left(-\frac{2}{3} |z|^{\frac{3}{2}} \right) \left(\sqrt{\pi} + O \left(|z|^{-\frac{3}{2}} \right) \right), \end{cases} \quad (13)$$

при достаточно больших отрицательных z ;

$$f(z) \sim \begin{cases} z^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{2}{3} |z|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\sqrt{\pi} + O \left(|z|^{-\frac{3}{2}} \right) \right), \\ z^{\frac{1}{4}} \sin \left(\frac{2}{3} |z|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\sqrt{\pi} + O \left(|z|^{-\frac{3}{2}} \right) \right), \end{cases} \quad (14)$$

при достаточно больших положительных z .

Пусть $j = 1$, $t \geq t_0 > 0$, $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 2, 3, \dots, n$.

Сначала исследуем второе слагаемое в правой части (12). Тогда из (12) имеем

$$\begin{aligned}
u_{12}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= \left\{ \int_{-\infty}^{-r_2} + \int_{-r_2}^{r_2} + \int_{r_2}^{\infty} \right\} f(z_2) dz_2 \dots \left\{ \int_{-\infty}^{-r_n} + \int_{-r_n}^{r_n} + \int_{r_n}^{\infty} \right\} f(z_n) dz_n \times \\
&\quad \times \left\{ \int_{-\infty}^{-r_1} + \int_{-r_1}^{r_1} + \int_{r_1}^{\infty} \right\} z_1 f'(z_1) \varphi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, x_n - z_n t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 = \\
&= \left\{ \int_{-\infty}^{-r_2} + \int_{-r_2}^{r_2} + \int_{r_2}^{\infty} \right\} f(z_2) dz_2 \dots \left\{ \int_{-\infty}^{-r_n} + \int_{-r_n}^{r_n} + \int_{r_n}^{\infty} \right\} [J_1 + J_2 + J_3] f(z_n) dz_n, \quad (15)
\end{aligned}$$

где r_j — достаточно большие положительные числа. Сначала рассмотрим интегралы содержащие выражение $J_1(x_1, \dots, x_n; z_2, \dots, z_n; t)$ при достаточно больших положительных r_1 .

Пусть $z_i \in [-\infty; -r_i]$, $i = \overline{2, n}$. Тогда в силу условия (13) будем иметь

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{-r_2} f(z_2) dz_2 \dots \int_{-\infty}^{-r_n} J_1(x_1, \dots, x_n; z_2, \dots, z_n; t) f(z_n) dz_n = \\
&= \int_{-\infty}^{-r_2} f(z_2) dz_2 \dots \int_{-\infty}^{-r_n} f(z_n) dz_n \int_{-\infty}^{-r_1} z_1 f'(z_1) \varphi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, x_n - z_n t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 \sim \\
&\sim O \left(\int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-z_2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_2^{-\delta_2} \left(\frac{x_2}{z_2} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) \right] dz_2 \right) \times \dots \\
&\quad \times O \left(\int_{r_n}^{\infty} z_n^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-z_n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_n^{-\delta_2} \left(\frac{x_n}{z_n} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) \right] dz_n \right) \times \\
&\quad \times O \left(\int_{r_1}^{\infty} z_1^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-z_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_1^{-\delta_2} \left(\frac{x_1}{z_1} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) \right] dz_1 \right).
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что этот интеграл равномерно сходится к нулю при $r_j \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $z_2 \in [r_2, \infty]$, $z_k \in [-\infty, -r_k]$, $k = \overline{3, n}$. Тогда в силу (13) и условий теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned}
&\int_{r_2}^{\infty} f(z_2) dz_2 \int_{-\infty}^{-r_3} f(z_3) dz_3 \dots \int_{-\infty}^{-r_n} J_1(x_1, \dots, x_n; z_2, \dots, z_n; t) f(z_n) dz_n = \\
&= \int_{r_2}^{\infty} f(z_2) dz_2 \int_{-\infty}^{-r_3} f(z_3) dz_3 \dots \int_{-\infty}^{-r_n} f(z_n) dz_n \times \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{-r_1} z_1 f'(z_1) \varphi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, x_n - z_n t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 \sim \\
&\sim O \left(\int_{r_1}^{\infty} z_1^{\frac{5}{4}} \exp \left[-z_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_1^{-\delta_2} \left(\frac{x_1}{z_1} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) \right] dz_1 \right) \times \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times O \left(\int_{r_n}^{\infty} z_n^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-z_n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_n^{-\delta_2} \left(\frac{x_n}{z_n} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2}-\delta_2} \right) \right] dz_n \right) \times \\ & \times \int_{r_2}^{\infty} \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) f(z_2) dz_2 = J_{11}(x_1, t) \dots J_{1n}(x_n, t) J_{12}(x_2, t). \end{aligned}$$

Сходимость интегралов $J_{11}(x_1, t), \dots, J_{1n}(x_n, t)$ при $r_j \rightarrow \infty, j = 1, 3, \dots, n$ к нулю очевидна. Рассмотрим интеграл $J_{12}(x_2, t)$.

$$\begin{aligned} \int_{r_2}^{\infty} \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) f(z_2) dz_2 & \sim \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_2 + \\ & + O \left(\int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{7}{4}} \cos \left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_2 \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} & \left| \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_2 \right| = \\ & = \left| \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-1-\delta_1} \cos \left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \left| \frac{x_2}{z_2} - t^{\frac{1}{3}} \right|^{-\frac{3}{4}-\delta_1} \left| x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right|^{\frac{3}{4}+\delta_1} \right. \\ & \quad \left. \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_2 \right| \leq M \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-1-\delta_1} dz_2 = \left(\frac{M}{\delta_1} \right) r_2^{-\delta_1}, \\ & \left| \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{7}{4}} \cos \left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_2 \right| = \\ & = \left| \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{5}{2}-\delta_1} \cos \left(\frac{2}{3} z_2^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \left| \frac{x_2}{z_2} - t^{\frac{1}{3}} \right|^{-\frac{3}{4}-\delta_1} \left| x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right|^{\frac{3}{4}+\delta_1} \right. \\ & \quad \left. \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_2 \right| \leq M \int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{5}{2}-\delta_1} dz_2 = \left(\frac{M}{\delta_1} \right) r_2^{-\frac{3}{2}-\delta_1}. \end{aligned}$$

Поэтому интеграл $J_{12}(x_2, t)$ сходится к нулю при $r_2 \rightarrow \infty$.

Аналогичным образом доказывается сходимость остальных интегралов, содержащих выражение $J_1(x_1, \dots, x_n, z_2, \dots, z_n, t)$.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема.

Теорема 3. (см. [7]). Пусть вариация функции $P(x)$ ограничена на интервале (a, b) , и

$$\left| \int_a^b Q(x) dx \right| < M.$$

Тогда

$$\left| \int_a^b Q(x) P(x) dx \right| < M \{ |P(x)| + V_a^b(P(x)) \},$$

где V_a^b – вариация функции на интервале (a, b) .

Рассмотрим теперь интегралы, содержащие выражение $J_3(x_1, \dots, x_n, z_2, \dots, z_n, t)$ при достаточно больших положительных r_1 .

Пусть $z'_i \in [-\infty, -r'_i]$. Тогда в силу (13) и условий теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-r_2} f(z_2) dz_2 \dots \int_{-\infty}^{-r_n} J_3(x_1, \dots, x_n, z_2, \dots, z_n, t) dz_n = \\ &= \int_{-\infty}^{-r_2} f(z_2) dz_2 \dots \int_{-\infty}^{-r_n} f(z_n) dz_n \int_{r_1}^{\infty} z_1 f'(z_1) \varphi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, x_n - z_n t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 \sim \\ & \sim O \left(\int_{r_2}^{\infty} z_2^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-z_2^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_2^{-\delta_2} \left(\frac{x_2}{z_2} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) \right] dz_2 \right) \times \dots \\ & \times O \left(\int_{r_n}^{\infty} z_n^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-z_n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_n^{-\delta_2} \left(\frac{x_n}{z_n} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) \right] dz_n \right) \times \\ & \times \int_{r_1}^{\infty} \psi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \right) z_1 f'(z_1) dz_1 = J_{32}(x_2, t) \dots J_{3n}(x_n, t) J_{31}(x_1, t). \end{aligned}$$

Сходимость интеграла $J_{32}(x_2, t), \dots, J_{3n}(x_n, t)$ при $r'_i \rightarrow \infty$ к нулю очевидна. Рассмотрим интеграл $J_{31}(x_1, t)$

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{\infty} \psi(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}) z_1 f'(z_1) dz_1 \sim \int_{r_1}^{\infty} z_1^{\frac{5}{4}} \sin \left(\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \psi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 + \\ & + O \left(\int_{r_1}^{\infty} z_1^{-\frac{1}{4}} \sin \left(\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \psi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 \right). \end{aligned}$$

Сходимость второго интеграла к нулю при $r_1 \rightarrow \infty$ в правой части этого выражения очевидна. Поэтому нам достаточно исследовать первый интеграл в правой части этого выражения

$$\begin{aligned} & \int_{r_1}^{\infty} z_1^{\frac{5}{4}} \sin \left(\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \psi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 = \\ &= \int_{r_1}^{\infty} z_1^{\frac{1}{2} - \delta_1} \sin \left(\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{x_1}{z_1} - t^{\frac{1}{3}} \right)^{-\frac{3}{4} - \delta_1} \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{4} + \delta_1} \psi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 = \\ &= \frac{2}{3} \int_{\rho}^{\infty} v^{-\frac{2}{3} \delta_1} \sin \left(\frac{2}{3} v - \frac{\pi}{4} \right) \mu(v) \left\{ \left(x_1 - v^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{4} + \delta_1} \psi \left(x_1 - v^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} \right) \right\} dv, \end{aligned}$$

где $\rho = r_1^{\frac{3}{2}}$, $\mu(v) = \left(\frac{x_1}{v^{\frac{2}{3}}} - t^{\frac{1}{3}} \right)^{-\frac{3}{4} - \delta_1}$.

Абсолютное значение этого интеграла при достаточно больших положительных r_1 ограничено следующим выражением

$$\frac{2}{3} \left\{ \left| x_1 - r_1 t^{\frac{1}{3}} \right|^{\frac{3}{4} + \delta_1} \left| \psi \left(x_1 - r_1 t^{\frac{1}{3}} \right) \right| + \right.$$

$$+V \left[\left(x_1 - v^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{4} + \delta_1} \psi \left(x_1 - v^{\frac{2}{3}} t^{\frac{1}{3}} \right); v \geq r_1^{\frac{3}{2}} \right] \times \\ \times \sup \left\{ \left| \int_m^n v^{-\frac{2}{3} \delta_1} \sin \left(\frac{2}{3} v - \frac{\pi}{4} \right) dv \right| \right\},$$

где $r_1^{\frac{3}{2}} \leq m < n$.

Существование интегралов (см.[6])

$$\int_0^\infty x^p \sin(ax + b) dx = a^{\frac{1}{p+1}} \Gamma(1 + p) \cos \left(b + \frac{p\pi}{2} \right), \quad a > 0, \quad -1 < p < 0,$$

$$\int_0^\infty x^p \cos(ax + b) dx = -a^{\frac{1}{p+1}} \Gamma(1 + p) \sin \left(b + \frac{p\pi}{2} \right), \quad a < 0, \quad -1 < p < 0$$

означает, что выражение под знаком \sup сходится к нулю при $r_1 \rightarrow \infty$. Следовательно, интеграл $J_{31}(x_1, t)$ равномерно стремится к нулю при $r_1 \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $z_2 \in [r_2, \infty)$, $z_k \in (-\infty, -r_k]$, $k = \overline{3, n}$. Тогда в силу (13) и условий теоремы 2 имеем

$$\int_{r_2}^\infty f(z_2) dz_2 \int_{-\infty}^{-r_3} f(z_3) dz_3 \dots \int_{-\infty}^{-r_n} J_3(x_1, \dots, x_n, z_2, \dots, z_n, t) dz_n = \\ = \int_{r_2}^\infty f(z_2) dz_2 \dots \int_{-\infty}^{-r_n} f(z_n) dz_n \int_{r_1}^\infty z_1 f'(z_1) \varphi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, x_n - z_n t^{\frac{1}{3}} \right) dz_1 \sim \\ \sim O \left(\int_{r_3}^\infty z_3^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-z_3^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_3^{-\delta_2} \left(\frac{x_3}{z_3} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) \right] dz_3 \right) \times \dots \\ \times O \left(\int_{r_n}^\infty z_n^{-\frac{1}{4}} \exp \left[-z_n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{3} - C z_n^{-\delta_2} \left(\frac{x_n}{z_n} + t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) \right] dz_n \right) \times \\ \times \int_{r_2}^\infty \psi \left(x_2 - z_2 t^{\frac{1}{3}} \right) f(z_2) dz_2 \int_{r_1}^\infty \psi \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \right) z_1 f'(z_1) dz_1 = \\ = J_{33}(x_2, t) \dots J_{3n}(x_n, t) J_{32}(x_2, t) J_{31}(x_1, t).$$

Сходимость интегралов $J_{33}(x_2, t), \dots, J_{3n}(x_n, t), J_{32}(x_2, t), J_{31}(x_1, t)$ следует из (16) и теоремы 3.

Аналогичным образом доказывается сходимость интегралов, содержащих выражение $J_3(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n, t)$.

Таким образом, мы доказали, что интеграл (12) равномерно сходится в $D_{(a_i, b_i)}$. Следовательно, в силу произвольности a_i , b_i и t_0 можно утверждать, что интеграл (12) равномерно сходится в D .

Докажем теперь верность соотношения (11). Для этого мы рассмотрим функции $\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_n)$ с компактным носителем. Предположим, что $a_i + 1 \leq x_i^0 \leq b_i - 1$. Положим $\bar{\varphi}(x_1, \dots, x_n) = \Phi(a_i, b_i) \varphi(x_1, \dots, x_n)$, где

$$\Phi(a_i, b_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \in D_{(a_i, b_i)}, \\ 0, & \text{если } x_i \notin D_{(a_i, b_i)}. \end{cases}$$

Пусть

$$\bar{u}(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t) \bar{\varphi}(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

Рассмотрим разность

$$v(x_1, \dots, x_n, t) = u(x_1, \dots, x_n, t) - \bar{u}(x_1, \dots, x_n, t), \quad a_i + 1 \leq x_i \leq b_i - 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} v(x_1, \dots, x_n, t) &= \int_{-\infty}^{-k_1} f(z_1) dz_1 \dots \int_{-\infty}^{-k_n} f(z_n) \varphi(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, x_n - z_n t^{\frac{1}{3}}) dz_n + \\ &+ \int_{h_1}^{\infty} f(z_1) dz_1 \dots \int_{h_n}^{\infty} f(z_n) \varphi(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, x_n - z_n t^{\frac{1}{3}}) dz_n = \\ &= v_1(x_1, \dots, x_n, t) + v_2(x_1, \dots, x_n, t), \end{aligned} \quad (16)$$

где $k_i = (b_i - x_i)t^{-\frac{1}{3}}$, $h_i = (x_i - a_i)t^{-\frac{1}{3}}$.

В силу соотношений (13) и условий теоремы 2 для достаточно больших k_i получаем

$$\begin{aligned} v_1(x_1, \dots, x_n, t) &= O \left(\int_{k_1}^{\infty} z_1^{-\frac{1}{4}} \exp \left(-\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} + C \left(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) dz_1 \right) \times \dots \\ &\times O \left(\int_{k_n}^{\infty} z_n^{-\frac{1}{4}} \exp \left(-\frac{2}{3} z_n^{\frac{3}{2}} + C \left(x_n - z_n t^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{3}{2} - \delta_2} \right) dz_n \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $v_1(x_1, \dots, x_n, t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow +0$, $k_i \rightarrow \infty$.

В силу теоремы 3 второй интеграл в (16) оценивается следующим образом

$$\begin{aligned} |v_2(x_1, \dots, x_n, t)| &\leq \left\{ \left| \varphi(x_1 - h_1 t^{\frac{1}{3}} \dots x_n - h_n t^{\frac{1}{3}}) \right| + \right. \\ &\left. + V \left(\varphi(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}} \dots x_n - z_n t^{\frac{1}{3}}); z_i \geq h_i \right) \right\} A(\alpha_i, \beta_i), \end{aligned}$$

где

$$A(\alpha_i, \beta_i) = \sup \left\{ \left| \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1) dz_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(z_n) dz_n \right| : h_i \leq \alpha_i \leq \beta_i \right\}.$$

При выполнении условий теоремы 2 первый множитель есть ограниченная величина. Теперь исследуем $A(\alpha_i, \beta_i)$ при достаточно больших $h_i \leq \alpha_i \leq \beta_i$. Имеем

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1) dz_1 \dots \int_{\alpha_n}^{\beta_n} f(z_n) dz_n.$$

Оценим первый интеграл, а остальные интегралы оцениваются аналогичным образом

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1) dz_1 &\sim \int_{\alpha_1}^{\beta_1} z_1^{-\frac{1}{4}} \cos \left(\frac{2}{3} z_1^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\sqrt{\pi} + O \left(z_1^{-\frac{3}{2}} \right) \right) dz_1 \sim \\ &\sim \int_{\gamma}^{\tau} \nu^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{2}{3} \nu - \frac{\pi}{4} \right) \left(\sqrt{\pi} + O \left(\nu^{-1} \right) \right) d\nu, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\gamma = \alpha_1^{\frac{3}{2}}$, $\tau = \beta_1^{\frac{3}{2}}$.

Первое слагаемое в (17) оценивается следующим образом:

$$\left| \int_{\gamma}^{\tau} \nu^{-\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{2}{3}\nu - \frac{\pi}{4} \right) d\nu \right| \leq C \left| \nu^{-\frac{1}{2}} \sin \left(\frac{2}{3}\nu - \frac{\pi}{4} \right) \right|_{\nu=\gamma}^{\nu=\tau} +$$

$$+ C \left| \int_{\gamma}^{\tau} \nu^{-\frac{3}{2}} \sin \left(\frac{2}{3}\nu - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \gamma^{-\frac{1}{2}} + \tau^{-\frac{1}{2}} + C \left(\gamma^{-\frac{1}{2}} - \tau^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Второе слагаемое оценивается следующим выражением $2 \left(\gamma^{-\frac{1}{2}} - \tau^{-\frac{1}{2}} \right)$. Окончательно имеем

$$\sup \left| \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(z_1) dz_1 \right| \leq C \left(\beta_1^{-\frac{3}{4}} + \alpha_1^{-\frac{3}{4}} \right).$$

Следовательно, при $t \rightarrow +0$, $h_i \rightarrow \infty$ интеграл (17) равномерно сходится к нулю. \square

С помощью этой теоремы можно исследовать характер роста решений $u(x_1, \dots, x_n, t)$ задачи. Для простоты исследование проводим по переменной x_1 .

Из (10), для достаточно больших положительных чисел r_1 имеем

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t) \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n =$$

$$= \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} U(\xi_1, \dots, \xi_n; t) \varphi(\xi_1 - \xi_1, \dots, \xi_n - \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z_2) dz_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(z_n) dz_n \left\{ \int_{-\infty}^{-r_1} + \int_{-r_1}^{r_1} + \int_{r_1}^{\infty} \right\} f(z_1) \varphi(x_1 - z_1 t^{\frac{1}{3}}, \dots, x_n - z_n t^{\frac{1}{3}}) dz_1 =$$

$$= u_1(x_1, \dots, x_n, t) + u_2(x_1, \dots, x_n, t) + u_3(x_1, \dots, x_n, t).$$

Учитывая (13), (14) и условия теоремы 2, имеем

$$|u_1(x_1, \dots, x_n, t)| \leq K \exp \left\{ |x_1|^{\frac{3}{2}-\delta_2} \right\}, \quad (18)$$

$$|u_3(x_1, \dots, x_n, t)| \leq M |x_1|^{-\frac{3}{4}-\delta_1}. \quad (19)$$

Так как $u_2(x_1, \dots, x_n, t)$ ограниченная функция, из оценок (18), (19) следует, что решение задачи Коши может экспоненциально расти на бесконечности, и порядок роста не превосходит $\exp \left\{ |x_1|^{\frac{3}{2}-\delta_2} \right\}$, где $\delta_2 > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдиназаров С., Собиров З.А. *О фундаментальных решениях уравнения с кратными характеристиками третьего порядка в многомерном пространстве* // Труды межд. научн. конф. "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики". Ташкент, 2004. С. 12–13.
2. L. Cattabriga *Potenzial di linea e di domino per equazione non parabolica in due variable a caratteristiche multiple* // Rendi del. Sem. Mat. della univ. di Padova. 1961. Vol. XXXI. P. 1–45.
3. Фрийдман А. *Уравнения с частными производными параболического типа*. М.: Мир. 1962. 427 с.
4. A.V. Famiskii and E.S. Baykova *On initial-boundary value problems in a strip for generalized two-dimensional Zakharov-Kuznetsov equation* // arXiv:1212.5896v1 [math.AP] 24 Dec 2012.

5. Andrei V. Faminskii *Well-posed initial-boundary value problems for the Zakharov-Kuznetsov equation* // Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2008(2008), No. 127. P. 1–23.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений*. М. 1971. 1108 с.
7. E.W. Hobson *Theory of Functions of Real Variable*. Vol.1. New York. 1957.
8. Хашимов А.Р., Матназаров Ж.Ш. *Задача Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа* // УзМЖ. 2009. 3. С.9–10.
9. Олейник О.А., Копачак И. *Об асимптотических свойствах решений системы уравнений теории упругости* // УМН. Т. 33, № 5. 1978. С. 189–190.
10. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *Априорные оценки решений первой краевой задачи для системы уравнений системы уравнений теории упругости теории упругости и их приложения* // УМН. Т. 32, № 5. 1977. 193 с.
11. Олейник О.А. *О поведении решений линейных параболических дифференциальных уравнений в неограниченных областях* // УМН. 30:2. 1975. С. 219–220.
12. O.A. Oleinik, G. A. Yosifian *On singularities at the boundary points and uniqueness theorems for solutions of the first boundary value problems elasticity* // Comm. Partial Diff. Equations. 2(9). 1977. 937 p.
13. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Тавхелидзе И.А. *Оценки решений бигармонического уравнения в окрестности регулярных точек границы и на бесконечности* // УМН. Т. 33, № 3. 1978. 181 с.
14. Ильин А.М., Калашников А.С., Олейник О.А. *Линейные уравнения второго порядка параболического типа* // УМН. Т.17, №3(105). 1962. С. 3–141.
15. Курбонов О.Т. *О разрешимости задачи Коши для уравнения нечетного порядка с кратными характеристиками* // УзМЖ. 1998. №3. С. 33–38.
16. E.L. Roetman *Some observations about an odd order parabolic equation* // Journal of Differential Equations. 1971. 9. 2. P. 335–345.
17. Солонников В.А. *О краевых задач для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида* // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 1965. LXXXIII. С. 3–162.
18. Тихонов А.Н. *Теоремы единственности для уравнения теплопроводности* // Матем. сборник, 42, 2. 1935. С. 199–216.
19. N. Weck *An explicit Saint Venant's principle in three-dimensional elasticity* // Lecture Notes in Mathematics. Vol. 564. 1976. P. 518–526.
20. V.E. Zakharov and E.A. Kuznetsov *On threedimensional solutions* // Zhurnal Eksp. Teoret. Fiz., 66. 1974. P. 594–597. English transl. in Soviet Phys. JETP, 39(1974), 285–288.

Абдукомил Рисбекович Хашимов,
Ташкентский Финансовый институт,
улица А.Темур 60А,
100000, г.Ташкент, Узбекистан
E-mail: abdukomil@yandex.ru

Собитхон Якубов,
Ташкентский Финансовый институт,
улица А.Темур 60А,
100000, г.Ташкент, Узбекистан
E-mail: abdukomil@yandex.ru