

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ И СДВИГИ МНОЖЕСТВ. II. ОПОРНАЯ ФУНКЦИЯ, СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ, ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ

Б.Н. ХАБИБУЛЛИН

Аннотация. Пусть \mathcal{S} — семейство множеств в \mathbb{R}^n , S — объединение всех этих множеств и C — выпуклое множество в \mathbb{R}^n . В терминах опорных функций множеств из \mathcal{S} и множества C устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых некоторый параллельный сдвиг множества C покрывает множество S . Отдельно исследуется двумерный случай, когда множества неограничены, для чего используются дополнительные характеристики множеств. Даны применения этих результатов к задачам неполноты экспоненциальных систем в пространствах функций.

Ключевые слова: выпуклое множество, система линейных неравенств, сдвиг, опорная функция, неполнота систем экспонент, индикатор целой функции.

Mathematics Subject Classification: 52A35, 52A20

1. ВВЕДЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ КЛЮЧЕВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Используются обозначения предыдущей первой части работы [1] и, зачастую, не оговаривая специально, известные факты и термины из [2]–[6]. Тем не менее, в п. 1.1 для удобства ссылок мы напоминаем основные элементарные свойства опорных функций. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ через $\text{cl } S$, $\text{int } S$, $\text{co } S$ обозначаем соответственно замыкание, внутренность, выпуклую оболочку множества S ; $B(x, r)$ — открытый шар с центром x радиуса $r > 0$ в \mathbb{R}^n .

1.1. Для произвольного множества $S \subset \mathbb{R}^n$ в обозначении $\langle \cdot, \cdot \rangle$ для скалярного произведения на \mathbb{R}^n функция

$$H_S: \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, +\infty], \quad H_S(a) := \sup_{s \in S} \langle a, s \rangle, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

— опорная функция множества $S \subset \mathbb{R}^n$. В частности, если $S = \emptyset$ — пустое множество в \mathbb{R}^n , то $H_\emptyset(a) \equiv -\infty$, $a \in \mathbb{R}^n$, согласно традиционному соглашению $\sup \emptyset = -\infty$ и $\inf \emptyset = +\infty$ для пустого подмножества в $[-\infty, +\infty]$. Обратно, если $H_S(a) = -\infty$ хотя бы для одного $a \in \mathbb{R}^n$, то $S = \emptyset$. Таким образом, если $S \neq \emptyset$, то образ $H_S(\mathbb{R}^n) \subset (-\infty, +\infty]$. Наконец, множество $S \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, если и только если $H_S(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$.

Опорная функция положительно однородна, т. е.

$$H_S(\lambda a) \equiv \lambda H_S(a), \quad \lambda \in (0, +\infty), \quad a \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda \cdot (\pm\infty) := \pm\infty, \quad (1)$$

субаддитивна, т. е. $H_S(a + a') \leq H_S(a) + H_S(a')$ для всех $a, a' \in \mathbb{R}^n$, полунепрерывна снизу и даже непрерывна, если S ограничено, а также обладает топологически-алгебраическими свойствами $H_S = H_{\text{cl } S} = H_{\text{co } S} = H_{\text{cl co } S}$, $S \subset \mathbb{R}^n$, которые для выпуклого S при $\text{int } S \neq \emptyset$

B.N. KHABIBULLIN, HELLY'S THEOREM AND SHIFTS OF SETS. II. SUPPORT FUNCTION, EXPONENTIAL SYSTEMS, ENTIRE FUNCTIONS.

© ХАБИБУЛЛИН Б.Н. 2014.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00030-а).

Поступила 25 февраля 2014 г.

можно дополнить равенствами $H_{\text{int } S} = H_{\text{int cl } S} = H_S = H_{\text{cl int } S}$. Очевидно, для одноточечного множества $S = \{x\}$, $x \in \mathbb{R}^n$ при любом $a \in \mathbb{R}^n$ имеем $H_{\{x\}}(a) = \langle x, a \rangle = \langle a, x \rangle$.

Для выпуклого $C \subset \mathbb{R}^n$ множество $S \subset \mathbb{R}^n$ содержится в C при замкнутом C или открытом S , если и только если $H_S(a) \leq H_C(a)$ для всех $a \in \mathbb{R}^n$.

Множество $S \subset C \subset \mathbb{R}^n$ предкомпактно включается в открытое множество C , если и только если в индуцированной на C с \mathbb{R}^n топологии замыкание $\text{cl } S$ — компакт в C (пишем $S \in C$).

1.2. Основная рассматриваемая задача для $S \subset \mathbb{R}^n$ и выпуклого $C \subset \mathbb{R}^n$ — в терминах опорных функций (прежде всего) или каким-либо иным функциональным способом дать необходимые и достаточные условия, при которых некоторый сдвиг S содержится в C , когда S представлено объединением произвольных множеств. В основе исследования этой задачи лежит элементарное

Предложение 1. Пусть C — непустое выпуклое множество в \mathbb{R}^n , $S \subset \mathbb{R}^n$.

Если C замкнутое или S открытое множество, то некоторый сдвиг множества S содержится в C в том и только том случае, когда найдется $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $\langle a, x \rangle + H_S(a) \leq H_C(a)$ при всех $a \in \mathbb{R}^n$.

Для открытого C некоторый сдвиг S предкомпактно включается в C тогда и только тогда, когда S ограничено, т.е. $H_S(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}$, и найдется $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $\langle a, x \rangle + H_S(a) < H_C(a)$ при всех $a \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Некоторый сдвиг множества S содержится в C тогда и только тогда, когда найдется $x \in \mathbb{R}^n$, для которого $S + x \subset C$, откуда $\langle a, x \rangle + H_S(a) = H_{S+x}(a) \leq H_C(a)$ для всех $a \in \mathbb{R}^n$. Обратно, если C замкнутое или S открытое множества, то включение $S + x \subset C$ означает, что, как отмечалось выше, $H_{S+x}(a) \leq H_C(a)$, где левая часть есть $\langle a, x \rangle + H_S(a)$, что доказывает первую часть Предложения 1.

Если S — ограниченное множество, то H_S — непрерывная функция, и при этом $\langle \cdot, x \rangle + H_S - H_C$ — полунепрерывная сверху функция и достигает своего максимального значения $-\varepsilon < 0$ на единичной сфере с центром в 0. Отсюда в силу положительной однородности опорной функции $\langle a, x \rangle + H_{\text{cl } S}(a) + \varepsilon|a| \leq H_C(a)$ для всех $a \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, имеем включение $x + \text{cl } S + \varepsilon B(0, 1) \subset C$ и компактность $\text{cl } S$ в C . Предложение доказано. \square

1.3. Приведем в этом подразделе формулировки некоторых характерных результатов для случая выпуклого компакта $C \subset \mathbb{R}^n$, который рассмотрен достаточно полно (см. Теоремы 1, 2 во Введении). Ситуация неограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^n$ ввиду ее многовариантности при $n \geq 3$ рассмотрена здесь лишь для некоторых случаев (см. п. 3.1, раздел 3) и несколько более детально для плоского случая $n = 2$, т.е. для $C \subset \mathbb{C}$, где комплексная плоскость \mathbb{C} отождествляется с \mathbb{R}^2 (см. п. 3.2, раздел 3). Случаи ни замкнутого, ни открытого выпуклого множества C вовсе не затрагиваются как весьма затруднительные даже в выборе подходящей терминологии. В последнем разделе 4 доказываются теоремы о неполноте систем экспонент в различных функциональных пространствах, иллюстрирующих важность для этих вопросов возможности покрытия сдвигом выпуклого множества некоторого объединения множеств.

Теорема 1 (для выпуклых множеств $C \in \mathbb{R}^n$). Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — выпуклое ограниченное множество в \mathbb{R}^n , \mathcal{S} — семейство множеств из \mathbb{R}^n , а S — объединение всех множеств из \mathcal{S} . Допустим, что C замкнутое или S открытое множество. Тогда попарно эквивалентны следующие четыре утверждения:

1. некоторый сдвиг множества S содержится в C ;

2. для любого набора трех множеств S_1, S_2, S_3 из \mathcal{S} и любого замкнутого непустого¹ треугольника, описанного вокруг C , найдется точка $z \in \mathbb{C}$, для которой все три сдвига $S_1 + z, S_2 + z, S_3 + z$ содержатся в этом треугольнике;
3. для любого набора трех множеств $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ и для любых наборов трех чисел $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ и чисел $q_1, q_2, q_3 \geq 0$ при условии

$$q_1 e^{i\theta_1} + q_2 e^{i\theta_2} + q_3 e^{i\theta_3} = 0$$

выполнено неравенство

$$q_1 h_{S_1}(\theta_1) + q_2 h_{S_2}(\theta_2) + q_3 h_{S_3}(\theta_3) \leq q_1 h_C(\theta_1) + q_2 h_C(\theta_2) + q_3 h_C(\theta_3);$$

4. для любого набора трех множеств $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ и для любого набора чисел $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}$ имеют место оба из условий
- (а) если всякая разность из этого набора чисел кратна π , то для каждой пары номеров $k, j \in \{1, 2, 3\}$, для которых разность $\theta_j - \theta_k$ не кратна 2π , выполнено неравенство

$$h_{S_1}(\theta_k) + h_{S_2}(\theta_j) \leq h_C(\theta_k) + h_C(\theta_j); \quad (6)$$

- (б) если, — возможно, после перенумерации, — разность $\theta_2 - \theta_1$ не кратна π , то справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & h_{S_1}(\theta_1) \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} + h_{S_3}(\theta_3) + h_{S_2}(\theta_2) \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \\ & \leq h_C(\theta_1) \frac{\sin(\theta_3 - \theta_2)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} + h_C(\theta_3) + h_C(\theta_2) \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1. Импликация $1 \Rightarrow 2$ очевидна.

Для доказательства импликации $2 \Rightarrow 1$ для каждого вектора $a \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, обозначим через C_a замкнутое полупространство, содержащее C и ограниченное опорной гиперплоскостью к выпуклому множеству C в направлении a , т. е.

$$C_a := \{x: \langle x, a \rangle \leq H_C(a)\}.$$

Здесь $C_a = C_{a'}$, если вектора a и a' сонаправлены, т. е. $a = \alpha a'$ при некотором $\alpha > 0$. Рассмотрим семейство полупространств $\mathcal{C} := \{C_a: a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$, где пересечение $C = \bigcap_{a \neq 0} C_a$ ограничено. Утверждение 2 Теоремы 1 означает, что для любого набора $n + 1$ множеств S_1, \dots, S_{n+1} из семейства \mathcal{S} и любого набора $n + 1$ замкнутых полупространств $C_{a_1}, \dots, C_{a_{n+1}}$ найдется вектор x , для которого каждый сдвиг $S_k + x$ содержится в замкнутом полупространстве C_{a_k} при всех $k = 1, \dots, n + 1$, т. е. пересечение

$$\bigcap_{k=1}^{n+1} (S_k \stackrel{*}{\ast} C_{a_k})$$

геометрических разностей $S_k \stackrel{*}{\ast} C_{a_k}$ непусто. Тогда [1, Теорема 1 о покрытиях сдвигами, Замечание 2, импликация (CS) \Rightarrow (T)] влечет за собой справедливость и импликации $2 \Rightarrow 1$ Теоремы 1.

Для доказательства эквивалентности $2 \Leftrightarrow 3$ перепишем утверждение 2 в виде системы $n + 1$ линейных неравенств. Утверждение 2 по Предложению 1 эквивалентно бесконечной серии неравенств

$$\langle a, x \rangle + H_{S_k}(a) \leq H_{C_{a_k}}(a) \quad \text{при всех } a \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, n + 1. \quad (8)$$

¹Под треугольником понимаем также и невырожденный отрезок (только одна сторона нулевой длины), и точку (все стороны нулевой длины, а вершины совпадают), и фигуру, ограниченную двумя параллельными прямыми и пересекающей их прямой (одна вершина — точка ∞ , две стороны бесконечной длины).

Но по построению замкнутых полупространств C_{a_k} для всех векторов a , не сонаправленных с a_k , имеем $H_{C_{a_k}}(a) = +\infty$. Следовательно, бесконечная система неравенств (8) равносильна конечной системе $n + 1$ линейных неравенств

$$\langle a_k, x \rangle + H_{S_k}(a_k) \leq H_{C_{a_k}}(a_k) \text{ при всех } a_k \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, n + 1,$$

или иначе, в более традиционной записи,

$$\langle a_k, x \rangle - (H_{C_{a_k}}(a_k) - H_{S_k}(a_k)) \leq 0 \text{ при всех } a_k \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, n + 1. \quad (9)$$

Совместность такой уже конечной системы линейных неравенств (9) (при любом фиксированном наборе векторов $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$) по известной Теореме Александрова–Фань–Цзи [9, Теорема 2.3] эквивалентна утверждению: *для любого набора $n + 1$ чисел $p_1, \dots, p_{n+1} \geq 0$ при условии*

$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k a_k = 0$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n+1} p_k (H_{S_k}(a_k) - H_C(a_k)) \leq 0.$$

Последнее эквивалентно высказыванию 3 доказываемой Теоремы.

Возвращаясь к конечной системе $n + 1$ линейных неравенств (9) (при любом фиксированном наборе векторов $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$) по критерию совместности С. Н. Черникова [9, Теорема 1.5] для конечных систем линейных неравенств в обозначениях и соглашениях (2)–(3), система (9) совместна тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{k_1 j_1} & \cdots & a_{k_1 j_r} & H_C(a_{k_1}) - H_{S_{k_1}}(a_{k_1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k_r j_1} & \cdots & a_{k_r j_r} & H_C(a_{k_r}) - H_{S_{k_r}}(a_{k_r}) \\ a_{k j_1} & \cdots & a_{k j_r} & H_C(a_k) - H_{S_k}(a_k) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k = 1, \dots, n + 1,$$

что совпадает с неравенством (4). Теорема 1 доказана.

Доказательство Теоремы 2. Легко видеть, что утверждения 1 и 2 — это в точности утверждения 1 и 2 Теоремы 1. Для того чтобы получить утверждение 3 Теоремы 2, запишем утверждение 3 Теоремы 1 для $n = 2$ с учетом (5) в виде: *для любого набора трех множеств $S_1, S_2, S_3 \in \mathcal{S}$ и для любых наборов трех чисел $a_1 = t_1 e^{i\theta_1}, a_2 = t_2 e^{i\theta_2}, a_3 = t_3 e^{i\theta_3} \in \mathbb{C}$, где $t_1, t_2, t_3 > 0$, и $p_1, p_2, p_3 \geq 0$ при условии*

$$p_1 t_1 e^{i\theta_1} + p_2 t_2 e^{i\theta_2} + p_3 t_3 e^{i\theta_3} = 0$$

выполнено неравенство

$$p_1 t_1 h_{S_1}(\theta_1) + p_2 t_2 h_{S_2}(\theta_2) + p_3 t_3 h_{S_3}(\theta_3) \leq p_1 t_1 h_C(\theta_1) + p_2 t_2 h_C(\theta_2) + p_3 t_3 h_C(\theta_3).$$

Положив $q_1 = p_1 t_1, q_2 = p_2 t_2, q_3 = p_3 t_3$, с учетом положительной однородности (1) убеждаемся, что последнее утверждение эквивалентно утверждению 3 Теоремы 2.

Докажем теперь, что утверждение 4 Теоремы 1 при $n = 2$ в точности совпадает с утверждением 4 Теоремы 2.

Три вектора $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^2$ из (2) можно рассматривать как три комплексных числа

$$\begin{cases} a_1 := t_1 e^{i\theta_1} = t_1 \cos \theta_1 + i \cdot t_1 \sin \theta_1, & t_1 > 0, \\ a_2 := t_2 e^{i\theta_2} = t_2 \cos \theta_2 + i \cdot t_2 \sin \theta_2, & t_2 > 0, \\ a_3 := t_3 e^{i\theta_3} = t_3 \cos \theta_3 + i \cdot t_3 \sin \theta_3, & t_3 > 0. \end{cases} \quad (10)$$

Ранг рассматривается над полем \mathbb{R} .

Случай ранга $r = 1$. В этом случае радиус-векторы точек сонаправлены или противоположно направлены. В случае, когда все радиус-векторы сонаправлены, все шесть разностей $\theta_j - \theta_k$, $j, k = 1, 2, 3$, $j \neq k$, кратны 2π , обе части неравенства (4) равны нулю в силу 2π -периодичности функции (5), и неравенство (4) автоматически выполнено. Пусть теперь хотя бы два радиус-вектора противоположно направлены. Для определенности допустим, что это a_1 и a_2 , т. е. $\theta_2 - \theta_1$ кратно π , но не кратно 2π , и, опять-таки для определенности, $\Delta = t_1 \cos \theta_1 \neq 0$. Тогда (4) переписывается в виде

$$\frac{1}{t_1 \cos \theta_1} \begin{vmatrix} t_1 \cos \theta_1 & H_{S_1}(t_1 e^{i\theta_1}) \\ t_k \cos \theta_k & H_{S_k}(t_k e^{i\theta_k}) \end{vmatrix} \leq \frac{1}{t_1 \cos \theta_1} \begin{vmatrix} t_1 \cos \theta_1 & H_C(t_1 e^{i\theta_1}) \\ t_k \cos \theta_k & H_C(t_k e^{i\theta_k}) \end{vmatrix},$$

где $k = 2, 3$, или с учетом (5)

$$\frac{1}{\cos \theta_1} \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & h_{S_1}(\theta_1) \\ \cos \theta_k & h_{S_k}(\theta_k) \end{vmatrix} \leq \frac{1}{\cos \theta_1} \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & h_C(\theta_1) \\ \cos \theta_k & h_C(\theta_k) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Если $\theta_3 - \theta_1$ кратно 2π , то обе части последнего неравенства равны нулю и оно автоматически выполнено. Когда разность $\theta_k - \theta_1$ кратна π , но не 2π , то $\cos \theta_k = -\cos \theta_1$. Таким образом, в этом случае из (11) следует

$$h_{S_k}(\theta_k) - \frac{\cos \theta_k}{\cos \theta_1} h_{S_1}(\theta_1) \leq h_C(\theta_k) - \frac{\cos \theta_k}{\cos \theta_1} h_{S_1}(\theta_1). \quad (12)$$

Отсюда и получаем неравенство вида (6) с $j = 1$, а в силу произвола в выборе S_1, S_2, S_3 в левой части (12) вместо S_k и S_1 можем ставить любые из множеств S_1, S_2, S_3 . Аналогично поступаем, если $\cos \theta_1 = 0$, но используем $\sin \theta_1 \neq 0$. Перебор остальных случаев для $r = 1$ сводится к перенумерации чисел и множеств. Таким путём получаем п. 4(а).

Случай ранга $r = 2$. Пусть два радиус-вектора точек из (10) линейно независимы — для определенности a_1 и a_2 . Это означает, что

$$\Delta := \begin{vmatrix} t_1 \cos \theta_1 & t_2 \sin \theta_2 \\ t_1 \cos \theta_1 & t_2 \sin \theta_2 \end{vmatrix} = t_1 t_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \neq 0.$$

При этом неравенство (4) запишется в виде

$$\frac{1}{t_1 t_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \begin{vmatrix} t_1 \cos \theta_1 & t_1 \sin \theta_1 & t_1 h_{S_1}(\theta_1) \\ t_2 \cos \theta_2 & t_2 \sin \theta_2 & t_2 h_{S_2}(\theta_2) \\ t_3 \cos \theta_3 & t_3 \sin \theta_3 & t_3 h_{S_3}(\theta_3) \end{vmatrix} \leq \frac{1}{t_1 t_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \begin{vmatrix} t_1 \cos \theta_1 & t_1 \sin \theta_1 & t_1 h_C(\theta_1) \\ t_2 \cos \theta_2 & t_2 \sin \theta_2 & t_2 h_C(\theta_2) \\ t_3 \cos \theta_3 & t_3 \sin \theta_3 & t_3 h_C(\theta_3) \end{vmatrix},$$

или

$$\frac{1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & h_{S_1}(\theta_1) \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & h_{S_2}(\theta_2) \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & h_{S_3}(\theta_3) \end{vmatrix} \leq \frac{1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \begin{vmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & h_C(\theta_1) \\ \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & h_C(\theta_2) \\ \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & h_C(\theta_3) \end{vmatrix}$$

Отсюда, разлагая два определителя по последним столбцам, получаем (7), что завершает доказательство Теоремы 2.

3. НЕОГРАНИЧЕННОЕ ВЫПУКЛОЕ ЗАМКНУТОЕ МНОЖЕСТВО C

3.1. Случай $n \geq 1$. В определенных достаточно простых ситуациях аналогии Теорем 1 и 2 можно установить и для неограниченного множества $C \subset \mathbb{R}^n$. Напомним [1, Определение 1], что ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называем *направлением звёздости* для множества $C \subset \mathbb{R}^n$ (относительно бесконечности), или *направлением рецессии*, если для любой точки $c \in C$ луч $r_y(c) := \{c + ty : t \geq 0\}$ содержится в C . Вектор $y \in \mathbb{R}^n$ называется *направлением*

линейности, если как y , так и противоположный ему вектор $-y$ — направления звёздности для множества C , т. е. для каждой точки $c \in C$ прямая

$$l_y(c) := \{c + ty : t \in \mathbb{R}\} = r_y(c) \cup (r_{-y}(c)) = l_{-y}(c) \quad (13)$$

содержится в C . Множество C полиэдрально, если C — пересечение конечного числа замкнутых полупространств, определяемых конечной системой линейных неравенств вида

$$\langle a, x \rangle - b \leq 0 \text{ при некоторых } a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

При этом сами полупространства, определяемые через (14), называем *определяющими полупространствами* полиэдрального множества C .

Теорема 3 (для неограниченных выпуклых замкнутых множеств). Пусть C — выпуклое неограниченное замкнутое множество в \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{S} — семейство множеств из \mathbb{R}^n , а S — объединение всех множеств из \mathcal{S} . Допустим, что семейство \mathcal{S} конечно, т. е. $\text{card } \mathcal{S} < \infty$, а множество C полиэдральное или каждое направление звёздности для C — направление линейности для C . Тогда попарно эквивалентны следующие четыре утверждения:

1. некоторый сдвиг множества S содержится в C ;
2. для любого набора $n + 1$ множеств S_1, \dots, S_{n+1} из семейства \mathcal{S} и любого набора $n + 1$ замкнутых полупространств (только определяющих, если C полиэдральное) C_1, \dots, C_{n+1} , содержащих C и ограниченных опорными гиперплоскостями к выпуклому множеству C , найдется вектор x , для которого каждый сдвиг $S_k + x$ содержится в замкнутом полупространстве C_k при всех $k = 1, \dots, n + 1$;
3. выполнено утверждение 3 Теоремы 1;
4. выполнено утверждение 4 Теоремы 1.

Доказательство. Пусть \mathcal{C} — конечное семейство всех определяющих полупространств, когда C — полиэдральное множество, или, в противном случае, семейство всех замкнутых полупространств, содержащих C и ограниченных опорными гиперплоскостями к выпуклому множеству C . Применяя [1, Теорема 1 о покрытиях сдвигами, условие (F)], при условии конечности (C — полиэдральное множество, семейство \mathcal{S} конечно) из эквивалентности (ST) \Leftrightarrow (T) в [1, Теорема 1] следует эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$. При условии на направления звёздности пользуемся [1, Теорема 1 о покрытиях сдвигами, условие (d) с $\text{card } \mathcal{S} < \infty$], и вновь из эквивалентности (ST) \Leftrightarrow (T) в [1, Теорема 1] следует эквивалентность $1 \Leftrightarrow 2$. Остальная часть доказательства (эквивалентности $2 \Leftrightarrow 3$ и $2 \Leftrightarrow 4$ Теоремы 3) повторяет без особых изменений доказательство аналогичных эквивалентностей Теоремы 1. \square

3.2. Плоский случай. Напомним, что *шириной* $B_S(\theta)$ (см. [10, 33], [11, 4.1.1], [12, гл. I, § 4]) произвольного множества $S \subset \mathbb{C}$ в направлении $\theta \in \mathbb{R}$ называется расстояние между двумя опорными прямыми к S , ортогональными радиус-вектору точки $e^{i\theta}$. В терминах опорной функции

$$B_S(\theta) = h_S(\theta) + h_S(\theta + \pi) = H_S(e^{i\theta}) + H_S(-e^{i\theta}).$$

Наименьшая ширина $b_S := \inf_{\theta \in \mathbb{R}} B_S(\theta)$ называется *широтой* [12, гл. I, § 4] или *толщиной* [11, 4.1.1] множества S . Далее, если $e^{i\theta}$ — направление звёздности для выпуклого множества $C \subset \mathbb{C}$, то число $\theta \in \mathbb{R}$ также удобно называть направлением звёздности. В плоском случае так и будем понимать направление звёздности. В таком понимании число θ — направление линейности, если направлениями звёздности являются одновременно и θ , и $\theta + \pi$. Если каждое направление звёздности выпуклого неограниченного замкнутого множества $C \subset \mathbb{C}$ есть направление линейности, то это либо пустое множество, либо вся комплексная плоскость, либо полоса конечной широты, т. е. в любом случае это C — полиэдральное множество, или выпуклый многоугольник в широком смысле (соответственно либо без

вершин и сторон, либо одноугольник с вершиной в ∞ и стороной нулевой длины, либо двугульник с вершинами в ∞ и с двумя сторонами бесконечной длины). Таким образом, в Теореме 3 условие на направления звёздности множества C вписывается в случай его полиэдральности, и Теорема 3 при $n = 2$ звучит короче:

Теорема 4 (для неограниченных выпуклых множеств $C \subset \mathbb{C}$). Пусть C — выпуклый неограниченный замкнутый многоугольник в \mathbb{C} (в широком смысле, с конечным числом сторон, среди которых могут быть и стороны бесконечной длины, т. е. лучи или прямые), \mathcal{S} — конечное семейство множеств из \mathbb{C} , а S — объединение всех множеств из семейства \mathcal{S} . Тогда попарно эквивалентны следующие четыре утверждения:

1. некоторый сдвиг множества S содержится в C ;
2. для любого набора множеств S_1, S_2, S_3 из семейства \mathcal{S} и любого замкнутого треугольника (в широком смысле, со сторонами, определяющими полиэдральное множество C) найдется точка $z \in \mathbb{C}$, для которой сдвиги $S_k + z$, $k = 1, 2, 3$, содержатся в этом треугольнике;
3. выполнено утверждение 3 Теоремы 2;
4. выполнено утверждение 4 Теоремы 2.

Но есть немало ситуаций, когда возможны содержательные утверждения либо в более простой форме, либо для не полиэдрального неограниченного выпуклого множества C . Некоторые из них использовались, иногда в неявной форме, в работах [13], [14, § 7], [15, § 4] (см. также [16, пп. 3.2.1–3.2.3]) при исследовании полноты экспоненциальных систем в пространствах функций на неограниченных выпуклых множествах.

Для выпуклого множества $C \subset \mathbb{C}$ дугой рецессивности, или звёздности (относительно бесконечности), называем дугу единичной окружности с центром в нуле, образованную пересечением этой единичной окружности с множеством всех направлений звёздности для C [2, гл. II, § 8]. Дугу звёздности обозначаем как 0^+C . Множество C ограничено тогда и только тогда, когда дуга звёздности — пустое множество [2, гл. II, Теорема 8.4]. Если дуга звёздности выпуклого множества C содержит дугу раствора $> \pi$, то $C = \mathbb{C}$. Для произвольного множества $S \subset \mathbb{C}$ также определим дугу звёздности $0^+S := 0^+ \text{co } S$.

Пусть $S \subset \mathbb{C}$. Определим функции срезанных верхней и нижней ширины множества S относительно точки s в направлении $\theta = 0$ по правилу

$$\begin{cases} W_S^\uparrow(x; s) := \sup\{\text{Im } z - \text{Im } s : z \in S, \text{Im } z \geq \text{Im } s, \text{Re } z = x\}, & x \in \mathbb{R}, \\ W_S^\downarrow(x; s) := \sup\{\text{Im } s - \text{Im } z : z \in S, \text{Im } z \leq \text{Im } s, \text{Re } z = x\}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (15)$$

где, как обычно, $\sup \emptyset := -\infty$ для пустого подмножества $\emptyset \subset [-\infty, +\infty]$.

Для неограниченного выпуклого множества $C \subset \mathbb{C}$, звёздного в направлении $\theta = 0$, определения функций $W_C^\uparrow(\cdot; c)$ и $W_C^\downarrow(\cdot; c)$ относительно точки $c \in C$ в направлении $\theta = 0$ иллюстрирует рис. 1.

Теорема 5. Пусть $S \subset \mathbb{C}$, C — выпуклое множество в \mathbb{C} .

1. Если C имеет хотя бы два направления звёздности $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ и разность $\theta_1 - \theta_2$ не кратна π , а S ограничено, то некоторый сдвиг множества S содержится в C .
2. Если $0 < \theta_2 - \theta_1 \leq \pi$ и дуга $\smile (\theta_1, \theta_2) := \{e^{i\theta} : \theta_1 < \theta < \theta_2\}$, содержится в 0^+C , а также $\smile (\theta'_1, \theta'_2) \supset 0^+S$ и $\theta_1 < \theta'_1 < \theta'_2 < \theta_2$, то некоторый сдвиг множества S содержится в C .
3. Если множество C замкнуто и имеет лишь два различных направления звёздности θ_1 и θ_2 с точностью до слагаемого, кратного 2π , а разность $\theta_2 - \theta_1$ кратна π , но не кратна 2π , — для определенности рассматриваем $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$, — то C — горизонтальная полоса конечной толщины $b_C = B_C(\pi/2)$, а некоторый сдвиг множества S содержится в C тогда и только тогда, когда ширина $B_S(\pi/2)$ множества S в направлении $\pi/2$ не превышает толщины b_C полосы C .

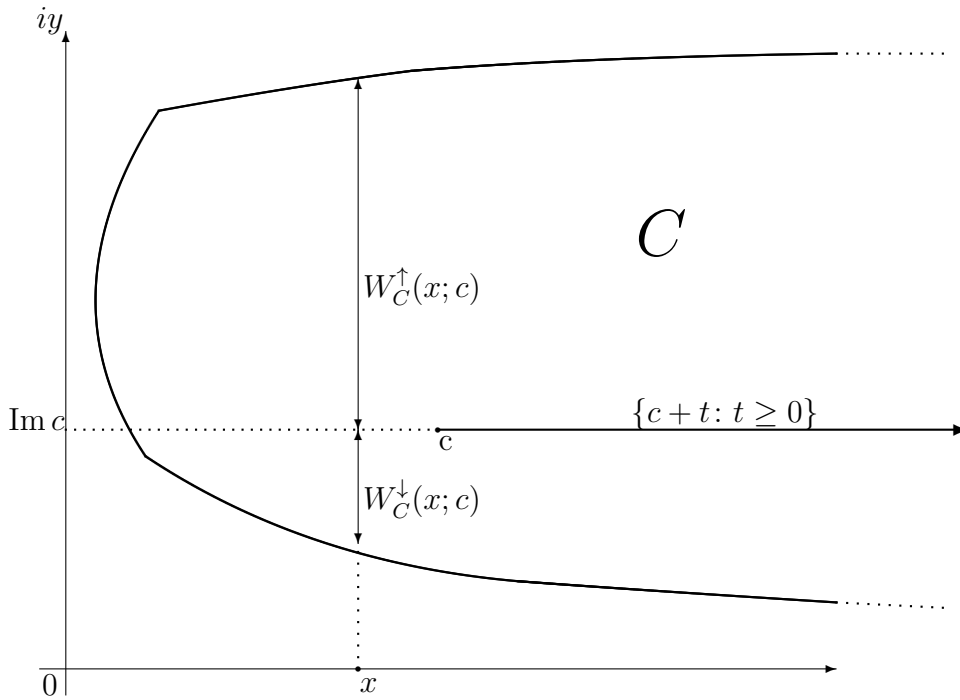


Рис. 1. К определению (15) и доказательству Теоремы 5, часть (4)

4. Если множество C замкнуто и имеет лишь одно направление звёздности $\theta = 0$ с точностью до слагаемого, кратного 2π , то некоторый сдвиг множества S содержится в C в том и только том случае, когда найдутся числа $s \in \mathbb{C}$, $c \in C$, а также $x_0 \in \mathbb{R}$, для которых выполнены неравенства

$$\begin{cases} W_S^\uparrow(x; s) \leq W_C^\uparrow(x + x_0; c) & \text{при всех } x \in \mathbb{R}, \\ W_S^\downarrow(x; s) \leq W_C^\downarrow(x + x_0; c) & \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (16)$$

Доказательство. **1.** По условию первого утверждения Теоремы 5 выпуклое множество C содержит угол ненулевого раствора, куда всегда можно поместить параллельным переносом ограниченное множество S .

2. В условиях утверждения 2 рассмотрим числа θ_1'', θ_2'' , удовлетворяющих неравенствам $\theta_1 < \theta_1'' < \theta_1' < \theta_2' < \theta_2'' < \theta_2$. По определению направления звёздности нетрудно видеть, что множество C содержит некоторый сдвиг угла $\angle[\theta_1'', \theta_2''] := \{re^{i\theta} : r \geq 0, \theta_1'' \leq \theta \leq \theta_2''\}$, а некоторый сдвиг множества S содержится в угле $\angle[\theta_1', \theta_2'] \subset \angle[\theta_1'', \theta_2'']$. Утверждение 2 доказано.

3. В условиях утверждения 3 для любой точки $c \in C$ замкнутое выпуклое множество C содержит в себе прямую (13) вида $l_0(c)$, т. е. горизонтальную прямую, проходящую через точку c [2, Теорема 8.3], [1, Предложение 1]. Таким свойством на плоскости обладают лишь сама плоскость, полуплоскость с границей, параллельной вещественной оси, и горизонтальная полоса конечной толщины. Но плоскость и полуплоскость имеют более двух (с точностью до числа, кратного 2π) направлений звёздности. Значит C — действительно горизонтальная полоса конечной толщины $b_C = B_C(\pi/2)$. Заключительная часть утверждения 3 о сдвиге множества S теперь очевидна.

4. В условиях утверждения 4 (полезно ориентироваться на рис. 1) докажем достаточность. На первом шаге сдвиг плоскости \mathbb{C} вместе с множеством S на число $c - s$ совмещает точки s и c , а множество S сдвигается в множество $S' := S + (c - s)$, для которого в силу

(16) при некотором $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$\begin{cases} W_{S'}^\uparrow(x; c) \leq W_C^\uparrow(x + x_0; c) & \text{при всех } x \in \mathbb{R}, \\ W_{S'}^\downarrow(x; c) \leq W_C^\downarrow(x + x_0; c) & \text{при всех } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (17)$$

Заметим, что в силу выпуклости C функции срезаемых верхней и нижней ширины $W_C^\uparrow(x, s)$ и $W_C^\uparrow(x, c)$ возрастают по переменной x в нестрогом смысле: $(x_1 \leq x_2) \implies (W_C^\uparrow(x_1, c) \leq W_C^\uparrow(x_2, c))$ и аналогично для $W_C^\downarrow(\cdot, c)$. Поэтому, осуществив еще один сдвиг множества $S' = S + (c - s)$ на достаточно большое значение $x'_0 \geq x_0$ в силу условия (17) поместим сдвиг $S + (c - s) + x'_0$ в C .

Необходимость (16) при некоторых $s \in \mathbb{C}$, $c \in C$, $x_0 \in \mathbb{R}$ достаточно очевидна ввиду определения (15) функций срезаемых верхней и нижней ширины. Теорема 5 доказана. \square

Пример 1. Этот пример показывает, что в утверждении 4 Теоремы 5 урезанные верхние и нижние ширины множеств S и C нельзя заменить просто на длины сечений

$$W_S(x) := \sup\{|\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2| : z_1, z_2 \in S, \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = x\}$$

и $W_C(x)$ даже для выпуклого множества S . Достаточно рассмотреть множества

$$\begin{aligned} S &:= \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, 0 \leq y \leq \arctg x\}, \\ C &:= \{x + iy \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{R}, x \geq 0, -\arctg x \leq y \leq 0\}, \end{aligned}$$

которые имеют единственное (с точностью до числа, кратного 2π) направление звёздности $\theta = 0$ и толщину $\pi/2$. При этом $W_S(x) = W_C(x) = \arctg x$ при $x \geq 0$ и $W_S(x) = W_C(x) \equiv -\infty$ при $x < 0$. Но никакой сдвиг S не содержится в C .

4. НЕПОЛНОТА СИСТЕМ ЭКСПОНЕНТ И ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

В этом параграфе демонстрируется связь предыдущих результатов о сдвигах множеств с неполнотой систем экспонент в пространствах функций.

4.1. Общий случай \mathbb{C}^n , $n \geq 1$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, \mathbb{C}^n — n -мерное комплексное пространство над полем \mathbb{C} , наделённое евклидовой метрикой пространства \mathbb{R}^{2n} , т. е. \mathbb{C}^n отождествляется с \mathbb{R}^{2n} : каждой точке

$$z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad z_k = x_k + iy_k, \quad x_k, y_k \in \mathbb{R}$$

сопоставляется точка $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$; $\bar{z} := (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \mathbb{C}^n$. Для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем

$$\langle \lambda, z \rangle := \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_n z_n \in \mathbb{C}, \quad |z| := \sqrt{\langle z, \bar{z} \rangle}$$

— норма в \mathbb{C}^n . Для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ через $\operatorname{Hol}(\Omega)$ обозначаем пространство всех голоморфных в Ω функций, снабженное топологией равномерной сходимости на компактах, а для компакта $C \subset \mathbb{C}^n$ через $\operatorname{CHol}(C)$ — банахово пространство функций $f: C \rightarrow \mathbb{C}$, непрерывных на C и голоморфных во внутренней $\operatorname{int} C$, если она непустая, со стандартной нормой

$$\|f\|_{\operatorname{CHol}(C)} := \sup\{|f(z)| : z \in C\}.$$

Пространство линейных непрерывных функционалов на $\operatorname{CHol}(C)$ образовано комплекснозначными мерами Радона μ с носителем $\operatorname{supp} \mu \subset C$ [17, Appendix A]. Такая мера для каждого функционала неединственна. Более того, при $n > 1$ нельзя даже утверждать, что для заданного линейного непрерывного функционала на $\operatorname{CHol}(C)$ найдется мера с наименьшим

относительно включения носителем, представляющая этот функционал [18, гл. 8]. Характеристической функцией (преобразованием Фурье–Бореля, или Фурье–Лапласа, или Лапласа) функционала-меры μ называют функцию

$$L_\mu(\lambda) := \mu(e^{\langle \lambda, \cdot \rangle}) = \int e^{\langle \lambda, z \rangle} d\mu(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}^n. \quad (18)$$

Это целая функция экспоненциального типа, т. е.

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \frac{\log |L_\mu(\lambda)|}{|\lambda|} < \infty.$$

Класс всех целых функций экспоненциального типа обозначаем $\text{Ent}[1, \infty)$. Если характеристическая функция L_μ ненулевая, то функционал, порожденный мерой μ на $\text{CHol}(C)$, ненулевой.

Пусть $\mathbb{Z}_+ := \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Функцией-дивизором* на \mathbb{C}^n называем отображение $\Lambda: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{Z}_+$ и носитель дивизора, как обычно, обозначаем $\text{supp } \Lambda \subset \mathbb{C}^n$. Пусть

$$p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad z^p := \prod_{k=1}^n z_k^{p_k}.$$

В этих обозначениях каждому дивизору Λ на \mathbb{C}^n (см. [16, гл. 4]) сопоставляется система (кратных) экспонент на \mathbb{C}^n

$$\text{Exp}^\Lambda := \{z^p e^{\langle \lambda, z \rangle} : z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \text{supp } \Lambda, p_1 + \dots + p_n \leq \Lambda(\lambda) - 1\}.$$

Функции $L \in \text{Ent}[1, \infty)$ можно сопоставить *дивизор нулей* $\text{Zero}_L: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{Z}_+$, который в каждой точке $z \in \mathbb{C}^n$ равен кратности нуля функции L в точке z . Для произвольного дивизора Λ пишем далее $\Lambda \leq \text{Zero}_{L_\mu}$, если $\Lambda(\lambda) \leq \text{Zero}_{L_\mu}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}^n$. Давно известно ([16, Теорема 1.1.2]), что если найдется мера μ с $\text{supp } \mu \subset C$ и с ненулевой характеристической функцией L_μ вида (18), для которой $\Lambda(\lambda) \leq \text{Zero}_{L_\mu}(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{C}^n$, то система¹ Exp^Λ *неполна* в пространстве $\text{CHol}(C)$.

Комплекснозначная мера μ , заданная на \mathbb{C}^n , *сосредоточена* на множестве $S \subset \mathbb{C}^n$, если для любого $A \subset \mathbb{C}^n$ имеет место равенство $\mu(A) = \mu(A \cap S)$.

Теорема 6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — выпуклый компакт в \mathbb{C}^n , а μ_1, μ_2, \dots — не более чем счетная последовательность комплекснозначных мер Радона, сосредоточенных соответственно на множествах $S_1, S_2, \dots \subset \mathbb{C}^n$. Если для семейства $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$ выполнено хотя бы одно из четырех эквивалентных утверждений Теоремы 1, ряд $\sum_{k \geq 1} \mu_k$ слабо* сходится (на пространстве непрерывных функций) к мере μ и

$$\sum_{k \geq 1} \mu_k(\mathbb{C}^n) \neq 0, \quad (19)$$

то в обозначениях (18) для любого дивизора $\Lambda \leq \text{Zero}_{L_\mu}$ система экспонент Exp^Λ *неполна* в пространстве $\text{CHol}(C)$.

Доказательство. При слабой* сходимости ряда $\sum_{k \geq 1} \mu_k$ к мере μ носитель меры μ содержится в замыкании объединения $S = \bigcup_{k \geq 1} S_k$, и нетрудно показать, что в обозначениях (18) ряд

$$\sum_{k \geq 1} L_{\mu_k} = L_\mu \quad (20)$$

¹Система векторов в топологическом векторном пространстве неполна, если замыкание ее линейной оболочки не совпадает с пространством.

сходится равномерно на компактах из \mathbb{C}^n к функции $L_\mu \in \text{Ent}[1, \infty)$, для которой ввиду (19) имеем $L_\mu(0) \neq 0$. Если сдвиг $C + a$ множества C покрывает все S_k одновременно, то такой же сдвиг $C + a$ покрывает и $\text{cl } S$. Тогда ненулевая функция

$$e^{(-a, \cdot)} \cdot L_\mu \in \text{Ent}[1, \infty) \quad (21)$$

— характеристическая функция меры μ_a , определенной по правилу $\mu_a(A) = \mu(A - a)$, где A — произвольное борелевское множество в \mathbb{C}^n , а мера μ_a с носителем $\text{supp } \mu_a \subset C$ порождает ненулевой функционал. Этот функционал аннулирует систему экспонент с дивизором показателей, совпадающим с дивизором нулей функции (21), который равен Zero_{L_μ} и, тем более, аннулирует систему экспонент Exp^Λ , поскольку $\Lambda \leq \text{Zero}_{L_\mu}$. Следовательно, система Exp^Λ неполна в $\text{CHol}(C)$ [16, Теорема 1.1.2]. \square

Замечание 1. При произвольном $\lambda_0 \in \mathbb{C}^n$ условие (19) можно заменить на

$$\sum_{k \geq 1} \int e^{(\lambda_0, z)} d\mu_k(z) \neq 0.$$

Можно сформулировать подобную Теореме 6, но несколько более слабую теорему относительно к мерам только в терминах целых функций экспоненциального типа и их радиальных регуляризованных индикаторов роста.

Прежде всего отметим, что верно и обратное к (18): если $L \in \text{Ent}[1, \infty)$, то для L найдется (неединственная) мера μ с компактным носителем в \mathbb{C}^n , для которой $L = L_\mu$ в обозначениях (18). Для каждой функции $L \in \text{Ent}[1, \infty)$ определяется полунепрерывная сверху функция [18, гл. I, § 8]

$$h_r^*(z, L) := \limsup_{z' \rightarrow z} \limsup_{t > 0, t \rightarrow +\infty} \frac{\log |L(tz')|}{t}, \quad (22)$$

называемая *радиальным регуляризованным индикатором роста* при порядке 1 целой функции L . Если для выпуклого компакта $C \subset \mathbb{C}^n$ с опорной функцией H_C (отождествляем \mathbb{C}^n с \mathbb{R}^{2n}) и функции $L \in \text{Ent}[1, \infty)$ имеет место неравенство $h_r^*(\bar{z}, L) \leq H_C(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, то по Теореме Мартино–Эренпрайса–Пойа [18, Теорема 8.9], [19, Теорема 12.3] для любой области $\Omega \supset C$ функция L — характеристическая функция некоторой меры μ с компактным носителем $\text{supp } \mu \subset \Omega$.

Теорема 7. Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — выпуклый компакт в \mathbb{C}^n ,

$$L_1, L_2, \dots \in \text{Ent}[1, \infty) \quad (23)$$

— конечная последовательность ненулевых функций на \mathbb{C}^n с радиальными регуляризованными индикаторами роста $h_r^*(\cdot, L_k)$, $k = 1, 2, \dots$, и при каждом k для некоторой непрерывной положительно однородной сублинейной функции на \mathbb{R}^{2n} , отождествленном с \mathbb{C}^n , т. е. для опорной функции H_{S_k} некоторого выпуклого замкнутого множества S_k , выполнено неравенство $h_r^*(\bar{z}, L_k) \leq H_{S_k}(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}^n$. Если для семейства $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$ выполнено хотя бы одно из четырех эквивалентных утверждений Теоремы 1, и

$$\sum_{k \geq 1} L_k = L \quad (24)$$

— ненулевая функция, то для любого дивизора $\Lambda \leq \text{Zero}_L$ система Exp^Λ неполна в пространстве $\text{Hol}(\Omega)$ для любой области $\Omega \supset C$.

Доказательство. Пусть сдвиг $C + a$ выпуклого компакта C покрывает все S_k , а область $\Omega + a$ содержит $C + a$. Тогда по Теореме Мартино–Эренпрайса–Пойа для некоторой меры μ с компактным носителем $\text{supp } \mu \subset \Omega + a$ в обозначениях (18) $L = L_\mu$. Следовательно, система экспонент $\text{Exp}^{\text{Zero}_L}$ аннулируется ненулевым функционалом-мерой μ на $\text{Hol}(\Omega + a)$.

Это значит, что система Exp^Λ при $\Lambda \leq \text{Zero}_L$ неполна в пространстве $\text{Hol}(\Omega + a)$. Отсюда система Exp^Λ неполна в $\text{Hol}(\Omega)$. Теорема доказана. \square

Замечание 2. В Теореме 7 последовательность функций в (23) можно считать бесконечной (счетной), но при этом необходимо требовать довольно жесткую сходимость от ряда из (24). Например, достаточно, чтобы такой ряд сходилась равномерно на компактах в \mathbb{C}^n и равномерно по N выполнялась оценка

$$\left| \sum_{1 \leq k \leq N} L_k(z) \right| \leq M \exp(H_{\text{co} \cup_k S_k}(\bar{z})), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad M — \text{постоянная.}$$

Можно усилить Теорему 7 и в другом направлении, а именно: система Exp^Λ неполна в пространстве $\text{Hol}(C)$ функций, голоморфных в окрестности компакта C , с естественной топологией индуктивного предела (см. [16], [18], [19]).

4.2. Плоский случай $n = 1$. При $n = 1$ несколько упрощается трактовка отдельных объектов, участвующих в формулировках Теорем 6 и 7.

Вместо функции-дивизора уместнее рассматривать не более чем счетную последовательность точек $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{C}$, среди которых могут быть и повторяющиеся, но последовательность Λ не имеет предельных точек в \mathbb{C} . Последовательности Λ сопоставляется система (кратных) экспонент

$$\text{Exp}^\Lambda := \{z^p e^{\lambda_k z} : z \in \mathbb{C}, 0 \leq p \leq n_\Lambda(\lambda_k) - 1\},$$

где $n_\Lambda(\lambda)$ — число повторений точки $\lambda \in \mathbb{C}$ в последовательности Λ . Ненулевой функции $L \in \text{Ent}[1, \infty)$ соответствует *последовательность нулей* Zero_L , перенумерованная с учетом кратности. При этом $\Lambda \leq \text{Zero}_L$ означает $n_\Lambda(\lambda) \leq n_{\text{Zero}_L}(\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. В такой трактовке надо заменить в заключении Теоремы 6 фразу «... для любого дивизора $\Lambda \leq \text{Zero}_{L_\mu}$...» на «... для любой последовательности $\Lambda \leq \text{Zero}_{L_\mu}$...».

Что касается Теоремы 7, вместо радиального регуляризованного индикатора роста при порядке 1 целой функции $L \in \text{Ent}[1, \infty)$ можно рассматривать индикатор роста

$$h(\theta, L) := \limsup_{t > 0, t \rightarrow +\infty} \frac{\log |L(te^{i\theta})|}{t}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

— непрерывная 2π -периодическая тригонометрически выпуклая функция [7], [8], [16], которая является опорной функцией некоторого выпуклого компакта (индикаторной диаграммы), или опорной функцией $h_S(\theta) \equiv h(-\theta, L)$ сопряженной диаграммы S функции L . Тогда Теорема 7 переформулируется как

Теорема 8. Пусть C — выпуклый компакт в \mathbb{C} , (23) — конечная последовательность ненулевых функций на \mathbb{C} соответственно с сопряженными диаграммами S_k , $k = 1, 2, \dots$. Если для семейства множеств $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots\}$ выполнено хотя бы одно из четырёх эквивалентных утверждений Теоремы 2 и функция L из (24) — ненулевая функция, то для любой последовательности $\Lambda \leq \text{Zero}_L$ система Exp^Λ неполна в $\text{Hol}(\Omega)$ для любой области $\Omega \supset C$.

Замечание 3. По отношению к Теореме 8 остается в силе Замечание 2.

Автор глубоко признателен А. С. Кривошееву за полезные обсуждения отдельных вопросов, касающихся целых функций многих переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хабибуллин Б.Н. *Теорема Хелли и сдвиги множеств. I* // Уфимский математический журнал. 2014. Т. 6, № 3. С. 98–111.
2. Рокафеллар Р.Т. *Выпуклый анализ*. М.: Мир. 1973.
3. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества*. М.: Наука. 1985.
4. Тихомиров В.М. *Выпуклый анализ* // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. Математический ин-т им.В.А. Стеклова РАН. Москва. 1987. Т. 14. С. 5–101.
5. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. *Выпуклый анализ и его приложения*. М.: Эдиториал УРСС. 2000.
6. Половинкин Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*. М.: Физматлит. 2004.
7. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций*. М.: Физматгиз. 1956.
8. В.Ya. Levin *Lectures on entire functions*. Transl. Math. Monographs. Providence RI. Amer. Math. Soc. V. 150. 1996.
9. Черников С.Н. *Линейные неравенства*. М.: Наука. 1968.
10. Боннезен Т., Фенхель В. *Теория выпуклых тел*. М.: Фазис. 2002.
11. Хадвигер Г. *Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии*. М.: Наука. 1966.
12. Сантало Л. *Интегральная геометрия и геометрические вероятности*. М.: Наука. 1983.
13. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302, № 2. С. 270–273.
14. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Матем. сборник. 1989. Т. 180, № 5. С. 706–719.
15. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа с заданными нулями вдоль прямой* // Analysis Math. 1991. Т. 17, № 3. С. 239–256.
16. Хабибуллин Б.Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности* (издание четвертое, дополненное). Уфа: РИЦ БашГУ. 2012.
17. T. Ransford *Potential Theory in the Complex Plane*. Cambridge: Cambridge University Press. 1995.
18. Лелон П., Груман Л. *Целые функции многих комплексных переменных* М.: Мир. 1989.
19. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах*. М.: Наука. 1982.

Булат Нурмиевич Хабибуллин,
ФГБОУ ВПО «Башкирский государственный университет»,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Khabib-Bulat@mail.ru