ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 83-101.

УДК 517.957

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА В НЕЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЗРАСТАЮЩИХ ПО ВРЕМЕНИ ОБЛАСТЯХ

И.А. КАЛИЕВ, А.А. ШУХАРДИН, Г.С. САБИТОВА

Аннотация. В данной работе для полной системы уравнений одномерного нестационарного движения вязкого теплопроводного газа доказывается глобальная разрешимость начально-краевых задач в нецилидрических возрастающих по времени областях. Локальная теорема существования и единственности рассматриваемых задач доказана в более ранних работах Кажихова А.В. и Калиева И.А. Поэтому доказательство теоремы существования и единственности "в целом" по времени связано с получением априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и величины интервала времени T, но не зависят от промежутка существования локального решения. Исследования проводятся в эйлеровых переменных.

Ключевые слова: Система уравнений Навье-Стокса, теплопроводный газ, глобальная разрешимость, нецилиндрические возрастающие по времени области.

Mathematics Subject Classification: 35Q30, 76D05,76N10

ВВЕДЕНИЕ

Полная система уравнений движения вязкого теплопроводного газа, или система уравнений Навье-Стокса представляет собой интересный и важный класс дифференциальных уравнений в частных производных. В теории таких систем одной из центральных является проблема однозначной разрешимости "в целом" как по времени, так и по данным.

Изучение вопросов корректности начально-краевых задач для системы уравнений Навье-Стокса началось с работы Дж. Серрина 1959 г. [1]. В ней были сформулированы постановки основных краевых задач и доказаны теоремы единственности в классе гладких решений. Отметим также более раннюю статью Д. Граффи 1953 г. [2] о единственности классических решений для баротропного газа.

Первый результат по разрешимости для уравнений Навье-Стокса получил в 1962 г. Дж. Нэш [3]. Он доказал существование классического решения задачи Коши "в малом" по времени. Этот результат несколько иными методами был повторен и обобщен в работах Н. Итая [4], А.И. Вольперта и С.И. Худяева [5].

Для начально-краевых задач локальные по времени теоремы существования и единственности установлены В.А. Солонниковым [6] и А. Тани [7].

Первый результат по однозначности разрешимости "в целом" по времени и по данным был установлен в 1968 г. Я.И. Канелем [8] в случае задачи Коши для уравнений одномерного движения вязкого баротропного газа ($p = R\rho^\gamma$). Для модели Бюргерса ($p = const$) разрешимость задачи Коши и начально-краевых задач были доказаны в работах Н. Итая [9], [10] и А. Тани [11].

В 1976 г. А.В. Кажихов [12] впервые получил результат о глобальной разрешимости для уравнений одномерного движения вязкого теплопроводного газа. В дальнейшем цикл работ А.В. Кажихова [13]–[16], В.В. Шелухина [17]–[19], С.Я. Белова [20], В.А. Вайганта [21], [22] позволил

I.A. Kaliev, A.A. Shukhardin, G.S. Sabitova, Boundary value problems for equations of viscous heat-conducting gas in time-increasing non-cylindrical domains.

Поступила 4 июля 2014 г.

построить довольно полную теорию по глобальной разрешимости основных начально-краевых задач и задачи Коши для уравнений движения вязкого газа.

В работах И.А. Калиева, А.В. Кажихова [23], [24] исследованы вопросы однозначной разрешимости задачи со свободной границей, моделирующей процесс фазового перехода между вязким газом и твердым телом. При этом возникает вспомогательная задача, описывающая движение вязкого теплопроводного газа в криволинейной области, доказывается единственность и существование ее локального решения.

Как правило, область, в которой доказывается существование решения "в целом" по времени, является либо полосой $\{(x,t)| -\infty < x < \infty, 0 < t < T\}$, либо цилиндром $\{(x,t)|a < x < b, 0 < t < T\}$; a, b, T — заданные постоянные. В нашей работе для полной системы уравнений одномерного нестационарного движения вязкого теплопроводного газа доказывается глобальная разрешимость начально-краевых задач в нецилиндрических возрастающих со временем областях $\{(x,t)|0 < x < s(t), 0 < t < T\}$, где $x = s(t)$ — заданная гладкая возрастающая функция.

Для вязкого газа известны результаты по глобальной разрешимости задачи со свободной границей об истечении газа в вакуум [12], [25] и задачи о поршне, который двигается по заданному закону [25]. В обеих задачах скорость движения границы $s(t)$ области, занятой газом, совпадает со скоростью движения материальной точки с координатой $s(t)$, т.е. $u(s(t),t) = ds(t)/dt, 0 < t < T$. Другими словами, газ через границу $s(t)$ не течет, и этот факт играет решающую роль при доказательстве теорем существования, поскольку область определения решения в лагранжевых координатах становится фиксированным цилиндром.

В настоящей работе $u(s(t),t) = 0, ds(t)/dt > 0$, т.е. $u(s(t),t) - ds(t)/dt < 0$, и газ втекает через подвижную границу области $x = s(t)$. В статье исследование проводится в эйлеровых переменных.

Случай, когда $ds(t)/dt \leqslant 0$, рассмотрен в работах Калиева И.А. и Подкуйко М.С. [26], [27].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть нецилиндрическая область $\Omega_T = \{(x,t)|0 < x < s(t), 0 < t < T\}$, где $x = s(t)$ – известная гладкая функция, занята вязким теплопроводным газом. В работе изучается случай, когда область расширяется со временем, т.е. $ds(t)/dt > 0$. Одномерное нестационарное движение вязкого теплопроводного газа в области Ω_T описывается системой уравнений [25]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0,\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}) = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x},\ p = R\rho\theta,\ (x,t) \in \Omega_T, \tag{2}$$

$$\rho(\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{\partial\theta}{\partial x}) = \kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \mu(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - p\frac{\partial u}{\partial x},\ (x,t) \in \Omega_T. \tag{3}$$

Здесь $\rho(x,t), u(x,t), p(x,t)$ и $\theta(x,t)$ – плотность, скорость, давление и абсолютная температура газа; μ, R, κ – положительные константы: вязкость, газовая постоянная и коэффициент теплопроводности газа соответственно.

В начальный момент времени задаются u, θ, ρ:

$$u(x,t)|_{t=0} = u_0(x),\ \theta(x,t)|_{t=0} = \theta_0(x),\ \rho(x,t)|_{t=0} = \rho_0(x),\ x \in [0, s_0], \tag{4}$$

где $s_0 = s(0)$. На известных границах $x = 0$ и $x = s(t)$ задаются условия:

$$u(x,t)|_{x=0} = 0,\ u(x,t)|_{x=s(t)} = 0,\ t \in [0,T], \tag{5}$$

$$\theta(x,t)|_{x=0} = \theta_1(t),\ \theta(x,t)|_{x=s(t)} = \theta_2(t),\ t \in [0,T], \tag{6}$$

$$\rho(x,t)|_{x=s(t)} = \rho_2(t),\ t \in [0,T]. \tag{7}$$

Предполагается, что для всех $t \in [0,T]$ и $x \in [0, s_0]$ выполняются неравенства:

$$0 < m \leqslant \rho_0(x), \rho_2(t), \theta_0(x), \theta_1(t), \theta_2(t) \leqslant M < +\infty, \tag{8}$$

$$0 < s_0,\ 0 < m \leqslant \frac{ds}{dt}(t) \leqslant M, \tag{9}$$

где m, M – некоторые положительные константы.

Задача Gas. Требуется найти функции $\rho(x,t), u(x,t), \theta(x,t)$, удовлетворяющие системе уравнений (1)–(3), если в начальный момент и на известных границах выполняются условия (4)–(7).

Теорема 1. *Пусть начальные и краевые данные задачи Gas принадлежат пространствам Гельдера*

$$\rho_0(x) \in C^{1+\alpha}([0,s_0]),\ u_0(x) \in C^{2+\alpha}([0,s_0]),\ \theta_0(x) \in C^{2+\alpha}([0,s_0]),$$
$$s(t), \rho_2(t) \in C^{1+\alpha}([0,T]),\ \theta_1(t), \theta_2(t) \in C^{(2+\alpha)/2}([0,T]),$$

$0 < \alpha = const < 1$*; выполнены условия* (8), (9) *и условия согласования нулевого и первого порядков в точках* $(0,0), (s_0,0)$.

Тогда задача Gas имеет единственное классическое решение, обладающее свойствами

$$\rho(x,t) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}_T),\ u(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T),\ \theta(x,t) \in C^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T),$$

причем

$$0 < m_1 \leqslant \rho(x,t) \leqslant M_1 < +\infty,\ 0 < m_2 \leqslant \theta(x,t) \leqslant M_2 < +\infty, \tag{10}$$
$$(x,t) \in \Omega_T;$$

где m_1, M_1, m_2, M_2 *– некоторые положительные константы.*

Локальная теорема существования и единственности задачи Gas доказана в [23], [24]. Поэтому доказательство теоремы связано с получением априорных оценок, постоянные в которых зависят только от данных задачи и величины интервала времени T, но не зависят от промежутка существования локального решения.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Предположим, что $\rho(x,t) > 0,\ \theta(x,t) > 0$ (в малом по времени имеется теорема существования с соответствующими оценками) [23], [24].

Лемма 1. *Для любых* $t \in [0,T]$ *выполняются оценки*

$$\int_0^{s(t)} \rho(x,t)dx = \int_0^{s_0} \rho_0(x)dx + \int_0^t \rho_2(\tau)\frac{ds(\tau)}{d\tau} \leqslant M_0,$$

где

$$M_0 = \int_0^{s_0} \rho_0(x)dx + \int_0^T \rho_2(\tau)\frac{ds(\tau)}{d\tau}d\tau.$$

`Доказательство`. Используя условия (5), (7), проинтегрируем уравнение (1) по x от 0 до *s(t)*

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} \rho(x,t)dx - \rho_2(t)\frac{ds}{dt} = 0.$$

Интегрируя по t, получаем утверждение леммы 1:

$$\int_0^{s(t)} \rho(x,t)dx = \int_0^{s_0} \rho_0(x)dx + \int_0^t \rho_2(\tau)\frac{ds(\tau)}{d\tau}d\tau \leqslant M_0,$$

$$M_0 = \int_0^{s_0} \rho_0(x)dx + \int_0^T \rho_2(\tau)\frac{ds(\tau)}{d\tau}d\tau.$$

В дальнейшем при получении оценок на функции ρ, u, θ в области, занятой вязким газом, используются методы, разработанные В.А. Вайгантом [21]. Заметим, что в [21] область, занятая газом, является прямоугольником $(0,1)\times(0,T)$, а у нас область, занятая газом, является криволинейной трапецией $\Omega_T = \{(x,t)|0 < x < s(t), 0 < t < T\}$, где $x = s(t)$ – заданная возрастающая функция. Тем не менее, все необходимые априорные оценки удается доказать и в нашем случае.

Введем в Ω_T вспомогательную функцию $B(x,t)$, определенную следующим образом:

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\rho u,\ \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\mu}R\rho\theta - \frac{1}{\mu}\rho u^2,$$

$$B|_{t=0} = B_0(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \rho_0(\xi)u_0(\xi)d\xi,\ 0 \leqslant x \leqslant s_0.$$

Для функции $B(x,t)$ в [21] были получены равенства:

$$\frac{\partial}{\partial t}(B + \ln\rho) + u\frac{\partial}{\partial x}(B + \ln\rho) + \frac{1}{\mu}R\rho\theta = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e^B) + u\frac{\partial}{\partial x}(\rho e^B) + \frac{1}{\mu}R\rho^2\theta e^B = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{\rho}e^{-B}) + u\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{\rho}e^{-B}) - \frac{1}{\mu}R\theta e^{-B} = 0. \tag{13}$$

Лемма 2. *Существует постоянная C, зависящая от граничных данных, и T, такая, что для любых $(x,t) \in \Omega_T$ справедливо неравенство*

$$|B(x,t)| \leqslant C\left(1 + \left(\int_0^{s(t)}\rho u^2dx\right)^{1/2} + \int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho\theta dxd\tau + \int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho u^2dxd\tau\right).$$

Доказательство. Проинтегрируем функцию $\partial B/\partial t$ по области $\Omega_t = \{(x,\tau)|0 < x < s(\tau),\ 0 < \tau < t\}$. Нам иногда будет удобнее описывать область Ω_t в другой форме: $\Omega_t = \{(x,\tau)|0 < x < s(t),\ h(x) < \tau < t\}$, где $h(x) = 0$ при $x \in [0, s_0]$ и $s(h(x)) = x$ при $s_0 < x \leqslant s(t)$. Тогда имеем

$$\iint_{\Omega_t} B_t d\tau dx = \int_0^{s_0} B(x,\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} dx + \int_{s_0}^{s(t)} B(x,\tau)\Big|_{\tau=h(x)}^{\tau=t} dx =$$

$$= \int_0^{s_0} B(x,t)dx - \int_0^{s_0} B(x,0)dx + \int_{s_0}^{s(t)} B(x,t)dx - \int_{s_0}^{s(t)} B(x,h(x))dx =$$

$$= \int_0^{s(t)} B(x,t)dx - \frac{1}{\mu}\int_0^{s_0}\int_0^x \rho_0(\xi)u_0(\xi)d\xi dx - \int_{s_0}^{s(t)} B(x,h(x))dx.$$

С другой стороны,

$$\iint_{\Omega_t} B_t dxd\tau = \iint_{\Omega_t}\left(u_x - \frac{1}{\mu}R\rho\theta - \frac{1}{\mu}\rho u^2\right)dxd\tau =$$

$$= -\frac{R}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho\theta dxd\tau - \frac{1}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho u^2dxd\tau.$$

В итоге получаем

$$\int_0^{s(t)} B(x,t)dx = \frac{1}{\mu}\int_0^{s_0}\int_0^x \rho_0(\xi)u_0(\xi)d\xi dx + \int_{s_0}^{s(t)} B(x,h(x))dx -$$

$$-\frac{R}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho\theta dxd\tau - \frac{1}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho u^2dxd\tau.$$

Отсюда с учетом (8), (9) получим неравенство

$$\left|\int_0^{s(t)} B(x,t)dx\right| \leqslant \frac{s_0^2M}{2\mu}\max_{x\in[0,s_0]}|u_0(\xi)| + \frac{R}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho\theta dxd\tau +$$

$$+\frac{1}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho u^2dxd\tau + \left|\int_{s_0}^{s(t)} B(x,h(x))dx\right|.$$

В последнем интеграле заменим переменную $x = s(\tau), dx = \frac{ds}{d\tau}d\tau, B(x,h(x)) = B(s(\tau),\tau)$ и используем (9):

$$\left|\int_0^{s(t)} B(x,t)dx\right| \leqslant C + \frac{R}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho\theta dxd\tau + \frac{1}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dxd\tau +$$

$$+ M\int_0^t |B(s(\tau),\tau)|\, d\tau. \tag{14}$$

Здесь и в дальнейшем через C обозначаем константы, зависящие от граничных данных и T.

Так как при каждом $t \in [0,T]$ существует точка $x_0 = x_0(t) \in [0, s(t)]$ такая, что

$$B(x_0(t),t) = \frac{1}{s(t)}\int_0^{s(t)} B(x,t)dx,$$

то получаем

$$|B(x,t)| \leqslant |B(x_0(t),t)| + \int_0^{s(t)} |B_x| dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{s(t)}\left|\int_0^{s(t)} B(x,t)dx\right| + \frac{1}{\mu}\left(\int_0^{s(t)} \rho dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{s(t)} \rho u^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{s_0}\left|\int_0^{s(t)} B(x,t)dx\right| + \frac{1}{\mu}\sqrt{M_0}\left(\int_0^{s(t)} \rho u^2 dx\right)^{1/2}, \tag{15}$$

M_0 – константа из леммы 1.

Для $x = s(\tau)$ и $t = \tau$ из (15) используя неравенство Коши, имеем:

$$|B(s(\tau),\tau)| \leqslant \frac{1}{s_0}\left|\int_0^{s(\tau)} B(x,\tau)dx\right| + \frac{M_0}{4\mu^2} + \int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dx. \tag{16}$$

Подстановка (16) в (14) дает

$$\left|\int_0^{s(t)} B(x,x)\right| \leqslant C + \frac{R}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho\theta dxd\tau + \left(\frac{1}{\mu} + M\right)\int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dxd\tau +$$

$$+\frac{M}{s_0}\int_0^t\left|\int_0^{s(\tau)} B(x,\tau)dx\right| d\tau.$$

Отсюда с использованием неравенства Гронуолла для функции

$$y(t) = \left|\int_0^{s(t)} B(x,t)dx\right|,$$

получим оценку

$$\left|\int_0^{s(t)} B(x,t)dx\right| \leqslant C\left(1 + \int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dxd\tau + \int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho\theta dxd\tau\right).$$

Подставляя последнее неравенство в (15), получим утверждение леммы 2

$$|B(x,t)| \leqslant C\left[1 + \int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho u^2 dxd\tau + \int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho\theta dxd\tau + \left(\int_0^{s(t)} \rho u^2 dx\right)^{1/2}\right].$$

Лемма 3. *Существует постоянная C, зависящая от граничных данных и T, такая, что для любых $t \in [0,T]$ справедливо неравенство*

$$\int_0^{s(t)} (\rho\ln\rho - \rho + 1)dx + \frac{R}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho^2\theta dxd\tau \leqslant C(1 + \max_{(x,\tau)\in\Omega_t} |B(x,\tau)|). \tag{17}$$

Доказательство. Умножим уравнение (11) на $\rho(x,t)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до $s(t)$. Тогда в силу уравнения (1) имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho(B+\ln\rho)dx-\frac{ds(t)}{dt}\rho_2(t)\left[B(s(t),t)+\ln\rho_2(t)\right]+$$

$$+\left[\rho u\left(B+\ln\rho\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=s(t)}+\frac{R}{\mu}\int_0^{s(t)}\rho^2\theta dx-\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho dx+\frac{ds(t)}{dt}\rho_2(t)\pm\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}dx=0.$$

Отсюда с учетом (5) и (7) следует

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\left(\rho B+\rho\ln\rho-\rho+1\right)dx+\frac{R}{\mu}\int_0^{s(t)}\rho^2\theta dx-$$

$$-\frac{ds(t)}{dt}\big\{\rho_2(t)[B(s(t),t)+\ln\rho(s(t),t)-1]+1\big\}=0.$$

Интегрируя по времени, получаем

$$\int_0^{s(t)}(\rho\ln\rho-\rho+1)dx+\frac{R}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta dxd\tau=$$

$$=\int_0^t\frac{ds(\tau)}{d\tau}[\rho_2(\tau)\ln\rho_2(\tau)-\rho_2(\tau)+1]d\tau-\int_0^{s(t)}\rho Bdx+$$

$$+\int_0^{s_0}(\rho_0B_0+\rho_0\ln\rho_0-\rho_0+1)dx+\int_0^t\frac{ds(\tau)}{d\tau}\rho_2(\tau)B(s(\tau),\tau)d\tau.$$

Обозначим:

$$C=\int_0^T\frac{ds(\tau)}{d\tau}[\rho_2(\tau)\ln\rho_2(\tau)-\rho_2(\tau)+1]d\tau+\int_0^{s_0}(\rho_0B_0+\rho_0\ln\rho_0-\rho_0+1)dx.$$

Учитывая, что $\rho\ln\rho-\rho+1\geq 0,\ ds/dt>0$, получим

$$\int_0^{s(t)}(\rho\ln\rho-\rho+1)dx+\frac{R}{\mu}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta dxd\tau\leqslant C+\int_0^{s(t)}\rho|B|dx+$$

$$+\int_0^t\frac{ds(\tau)}{d\tau}\rho_2(\tau)|B(s(\tau),\tau)|d\tau\leqslant C\left(1+\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right).$$

В результате получаем утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Для любых $t\in[0,T]$ справедливы оценки*

$$\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)}\rho(x,t)\leqslant M\exp\{2\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\},\tag{18}$$

$$\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)}\frac{1}{\rho(x,t)}\leqslant C\Big[\exp\{2\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\}+$$

$$+\exp\{4\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\}\int_0^t\max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)}\theta(x,\tau)d\tau\Big].\tag{19}$$

Доказательство. Умножим равенство (12) на $\rho(\rho e^B)^{n-1}$, где n – натуральное число, проинтегрируем по x от 0 до $s(t)$, воспользуемся (1)

$$\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho(\rho e^B)^ndx-\frac{1}{n}\frac{ds(t)}{dt}\rho_2(t)[\rho_2(t)e^{B(s(t),t)}]^n+\frac{1}{n}\rho u(\rho e^B)^n\Big|_{x=0}^{x=s(t)}+$$

$$+\frac{R}{\mu}\int_0^{s(t)}\rho^2(\rho e^B)^n\theta dx=0.$$

С учетом (5) и (7) получим

$$\frac{1}{n}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho(\rho e^B)^ndx-\frac{1}{n}\frac{ds(t)}{dt}\rho_2(t)[\rho_2(t)e^{B(s(t),t)}]^n+\frac{R}{\mu}\int_0^{s(t)}\rho^2\theta(\rho e^B)^ndx=0.$$

Третье слагаемое неотрицательно, тогда

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} \rho^{n+1} e^{nB} dx - \frac{ds(t)}{dt}\rho_2(t)[\rho_2(t)e^{B(s(t),t)}]^n \leqslant 0.$$

Отсюда, интегрируя по времени от 0 до t, имеем:

$$\int_0^{s(t)} \rho^{n+1} e^{nB} dx \leqslant \int_0^{s_0} \rho_0^{n+1} e^{nB_0} dx + \int_0^t \frac{ds(\tau)}{d\tau}\rho_2^{n+1}(\tau)e^{nB(s(\tau),\tau)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M^{n+1}(s_0+TM)\left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{B(x,\tau)}\right]^n.$$

Тогда

$$\int_0^{s(t)} \rho^{n+1} dx \leqslant CM^{n+1}\left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{B(x,\tau)}\right]^n \left[\min_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{B(x,\tau)}\right]^{-n} \leqslant$$

$$\leqslant CM^{n+1}\left[\exp\{2\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\}\right]^n.$$

Переходя к переделу при $n\to\infty$, используя

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b |f(x)|^n dx\right)^{1/n} = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

получаем оценку (18) леммы 4:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)} \rho(x,t) \leqslant M\exp\left\{2\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\}.$$

Чтобы доказать оценку (19), умножим равенство (13) на $\rho(\rho e^B)^{-n}$, где n – натуральное число, проинтегрируем по x от 0 до $s(t)$, воспользуемся (1), (7)

$$\frac{1}{n+1}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} \rho\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^{n+1} dx - \frac{1}{n+1}\frac{ds(t)}{dt}\rho_2(t)\left(\frac{1}{\rho_2(t)e^{B(s(t),t)}}\right)^{n+1} +$$

$$+\frac{1}{n+1}\rho u\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^{n+1}\Bigg|_{x=0}^{x=s(t)} = \frac{R}{\mu}\int_0^{s(t)} \rho e^{-B}\theta(\rho e^B)^{-n} dx.$$

В силу (5) и (7) получаем

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} \left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^n \frac{1}{e^B} dx = \frac{ds(t)}{dt}\left(\frac{1}{\rho_2(t)e^{B(s(t),t)}}\right)^n \frac{1}{e^{B(s(t),t)}} +$$

$$+\frac{R(n+1)}{\mu}\int_0^{s(t)} e^{-2B}\theta\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^{n-1} dx.$$

Отсюда, интегрируя по времени от 0 до t, имеем

$$\int_0^{s(t)} \left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^n \frac{1}{e^B} dx \leqslant s_0\left(\frac{1}{m}\right)^n \left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{-B(x,\tau)}\right]^{n+1} +$$

$$+MT\left(\frac{1}{m}\right)^n\left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{-B(x,\tau)}\right]^{n+1} +$$

$$+\frac{R(n+1)}{\mu}\left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{-2B(x,\tau)}\right]\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^{n-1}\theta dx d\tau.$$

Тогда

$$\int_0^{s(t)} \left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^n dx \leqslant (s_0+MT)\left(\frac{1}{m}\right)^n\left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{B(x,\tau)}\right]\left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{-B(x,\tau)}\right]^{n+1} +$$

$$+\frac{R(n+1)}{\mu}\left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{B(x,\tau)}\right]\left[\max_{(x,\tau)\in\Omega_t} e^{-2B(x,\tau)}\right]\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^{n-1}\theta dx d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{m}\right)^n\exp\left\{(n+2)\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\} + \tag{20}$$

$$+\frac{R(n+1)}{\mu}\exp\left\{3\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\}\int_0^t \max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)}\theta(x,\tau)\int_0^{s(\tau)}\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^{n-1}dxd\tau.$$

Обозначим

$$y(t)=\left(\int_0^{s(t)}\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^n dx\right)^{1/n}.$$

Применяя неравенство Гельдера к последнему интегралу в (20), используя неравенство $s(\tau)\leqslant s(T)$, получим

$$\int_0^{s(t)}\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^{n-1}dx\leqslant\left(\int_0^{s(t)}\left(\frac{1}{\rho e^B}\right)^{(n-1)\cdot\frac{n}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}}\cdot\left(\int_0^{s(t)}1^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant$$

$$\leqslant y^{n-1}(t)\cdot\sqrt[n]{s(T)}.$$

Подставляя полученную оценку в (20), имеем

$$y^n(t)\leqslant C\left(\frac{1}{m}\right)^n\exp\left\{(n+2)\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\}+ \tag{21}$$

$$+\frac{R(n+1)\sqrt[n]{s(T)}}{\mu}\exp\left\{3\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\}\int_0^t\max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)}\theta(x,\tau)y^{n-1}(\tau)d\tau.$$

Для оценки функции $y(t)$ потребуется следующая лемма.

Лемма 5. [22] *Если непрерывная неотрицательная на $[0,T]$ функция $y(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$y^n(t)\leqslant a+b\int_0^t c(\tau)y^{n-1}(\tau)d\tau,$$

где $a,b=const\geq 0$, $n=const\geq 1$, $c(t)$ – заданная неотрицательная функция класса $L_1[0,T]$, то справедлива оценка

$$y(t)\leqslant\sqrt[n]{a}+\frac{b}{n}\int_0^t c(\tau)d\tau. \tag{22}$$

Если применить оценку (22) к неравенству (21), то получим

$$y(t)\leqslant\frac{\sqrt[n]{C}}{m}\exp\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\}+$$

$$+\frac{R\sqrt[n]{s(T)}}{\mu}\left(1+\frac{1}{n}\right)\exp\left\{3\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\}\int_0^t\max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)}\theta(x,\tau)d\tau.$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$, имеем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)}\frac{1}{\rho e^B}\leqslant\frac{1}{m}\exp\left\{\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\}+$$

$$+\frac{R}{\mu}\exp\left\{3\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right\}\int_0^t\max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)}\theta(x,\tau)d\tau.$$

Отсюда следует оценка (19). Лемма 4 доказана.

Лемма 6. *(Оценка полной энергии). Существует постоянная $C>0$, зависящая от граничных данных, и T, такая, что*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{s(t)}\left(\rho\theta+\frac{\rho u^2}{2}\right)dx\leqslant C.$$

Доказательство. Для оценки полной энергии введем вспомогательную функцию $A(x,t)$ как решение краевой задачи:

$$\rho(A_t + uA_x) = \kappa A_{xx}, (x,t) \in \Omega_T, \tag{23}$$
$$A|_{x=0} = \theta_1(t), A|_{x=s(t)} = \theta_2(t), A|_{t=0} = \theta_0(x).$$

В силу принципа максимума имеем:

$$0 < m \leqslant A(x,t) \leqslant M < +\infty. \tag{24}$$

Функция

$$\varphi(x,t) = \theta(x,t)A^{-1}(x,t),$$

которая принимает значения

$$\varphi|_{x=0} = \varphi|_{x=s(t)} = 1, \varphi|_{t=0} = 1,$$

удовлетворяет в силу (3) и (23) уравнению

$$A\rho(\varphi_t + u\varphi_x) = \kappa(A\varphi_x)_x + \kappa A_x\varphi_x + \mu u_x^2 - R\rho A\varphi u_x.$$

Умножим это уравнение на $(1 - \frac{1}{\varphi})$ и проинтегрируем по x от 0 до $s(t)$. Используя (23), получим

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} A\rho(\varphi - \ln\varphi - 1)dx + \int_0^{s(t)} \kappa A\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}dx + \int_0^{s(t)} \frac{1}{\varphi}\mu u_x^2 dx =$$
$$= \int_0^{s(t)} (\mu u_x^2 - R\rho A\varphi u_x)dx + \int_0^{s(t)} \frac{1}{\varphi}R\rho A\varphi u_x dx. \tag{25}$$

Домножая уравнение (2) на $u(x,t)$ и интегрируя по x от 0 до $s(t)$, используя (1), находим:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} \rho u^2 dx + \int_0^{s(t)} u_x(\mu u_x - p)dx = 0.$$

Сложим полученное равенство с (25)

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} \left(A\rho(\varphi - \ln\varphi - 1) + \frac{\rho u^2}{2}\right)dx + \int_0^{s(t)} \kappa A\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}dx + \int_0^{s(t)} \mu\frac{u_x^2}{\varphi}dx =$$
$$= \int_0^{s(t)} R\rho A u_x dx. \tag{26}$$

Оценим слагаемое в правой части

$$\int_0^{s(t)} R\rho A u_x dx \leqslant \int_0^{s(t)} \left(\frac{\mu u_x^2}{2\varphi} + \frac{R^2 A}{2\mu}\rho^2 A\varphi\right)dx \leqslant \frac{\mu}{2}\int_0^{s(t)} \frac{u_x^2}{\varphi}dx + \frac{R^2 M}{2\mu}\int_0^{s(t)} \rho^2\theta dx.$$

В результате получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)} \left(A\rho(\varphi - \ln\varphi - 1) + \frac{\rho u^2}{2}\right)dx + \int_0^{s(t)} \kappa A\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}dx + \frac{\mu}{2}\int_0^{s(t)} \frac{u_x^2}{\varphi}dx \leqslant$$
$$\leqslant C\int_0^{s(t)} \rho^2\theta dx.$$

Интегрируя полученное неравенство по времени, имеем

$$\int_0^{s(t)} \left(A\rho(\varphi - \ln\varphi - 1) + \frac{\rho u^2}{2}\right)dx + \int_0^t\int_0^{s(\tau)} \kappa A\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}dxd\tau + \frac{\mu}{2}\int_0^t\int_0^{s(\tau)} \frac{u_x^2}{\varphi}dxd\tau \leqslant$$
$$\leqslant C\left(1 + \int_0^t\int_0^{s(\tau)} \rho^2\theta dxd\tau\right).$$

Учитывая неравенство

$$\varphi - \ln\varphi - 1 \geq \frac{1}{2}\varphi - \ln 2,$$

ограниченность $A(x,t)$ из (24) и оценку леммы 1, получим:

$$\frac{1}{2}\int_0^{s(t)}\rho\theta dx+\frac{1}{2}\int_0^{s(t)}\rho u^2dx+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\kappa A\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}dxd\tau+\frac{\mu}{2}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\frac{u_x^2}{\varphi}dxd\tau\leqslant$$

$$\leqslant C\left(1+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta dxd\tau\right). \tag{27}$$

Из оценки (17) леммы 3 имеем

$$\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta dxd\tau\leqslant C\left(1+\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}|B(x,\tau)|\right).$$

Используя неравенство леммы 2, получим

$$\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta dxd\tau\leqslant$$

$$\leqslant C\left(1+\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left(\int_0^{s(\tau)}\rho u^2dx\right)^{1/2}+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho\theta dxd\tau+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho u^2dxd\tau\right).$$

Используя последнюю оценку и отбрасывая в левой части (27) интегралы, содержащие производные, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^{s(t)}\rho\theta dx+\frac{1}{2}\int_0^{s(t)}\rho u^2dx\leqslant \tag{28}$$

$$\leqslant C\left(1+\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\left(\int_0^{s(\tau)}\rho u^2dx\right)^{1/2}+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho\theta dxd\tau+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho u^2dxd\tau\right).$$

Введем две функции на $[0,T]$ следующим образом

$$a(t)=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\int_0^{s(\tau)}\rho(x,\tau)u^2(x,\tau)dx,\ b(t)=\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\int_0^{s(\tau)}\rho(x,\tau)\theta(x,\tau)dx.$$

Тогда из (28) имеем

$$\frac{1}{2}a(t)+\frac{1}{2}b(t)\leqslant C\left(1+\sqrt{a(t)}+\int_0^t a(\tau)d\tau+\int_0^t b(\tau)d\tau\right). \tag{29}$$

Поскольку $C\sqrt{a(t)}\leqslant C^2+\frac{a(t)}{4}$, то из (29) следует

$$a(t)+b(t)\leqslant C\left(1+\int_0^t a(\tau)d\tau+\int_0^t b(\tau)d\tau\right).$$

Отсюда в силу неравенства Гроноулла выводим $a(t)\leqslant C, b(t)\leqslant C$ для всех $t\in[0,T]$, где C — некоторая положительная постоянная. Возвращаясь к неравенству (27), получаем следующую серию оценок

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{s(t)}\rho(x,t)u^2(x,t)dx\leqslant C, \tag{30}$$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\int_0^{s(t)}\rho(x,t)\theta(x,t)dx\leqslant C, \tag{31}$$

$$\int_0^T\int_0^{s(t)}\left(\kappa A\frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}+\frac{u_x^2}{\varphi}\right)dxd\tau\leqslant C. \tag{32}$$

Оценки (30), (31) дают оценку полной энергии.

Оценки сверху и снизу для плотности и температуры снизу

Лемма 7. *Существует постоянная $M_1 > 0$, зависящая от граничных данных, и T, такая, что*

$$\max_{(x,t)\in\Omega_T} \rho(x,t) \leqslant M_1. \tag{33}$$

Доказательство. Из леммы 2 и оценок (30), (31) следует ограниченность функции $B(x,t)$. Тогда из неравенства (18) леммы 4 следует утверждение леммы 7.

Лемма 8. *Существует постоянная $m_2 > 0$, зависящая от граничных данных и T, такая, что*

$$\min_{(x,t)\in\Omega_T} \theta(x,t) \geq m_2. \tag{34}$$

Доказательство. Запишем уравнение для температуры (3) в следующей форме

$$\rho(\theta_t + u\theta_x) = \kappa\theta_{xx} + \mu\left(u_x - \frac{R\rho\theta}{2\mu}\right)^2 - \frac{R^2\rho^2\theta^2}{4\mu}.$$

Разделив на $\rho\theta^2$, получим в области Ω_T уравнение для функции $q(x,t) = 1/\theta(x,t)$

$$q_t + uq_x - \frac{\kappa}{\rho}q_{xx} = \frac{R^2\rho}{4\mu} - \left[\frac{2\kappa}{\rho}\theta q_x^2 + \frac{\mu}{\rho}q^2\left(u_x - \frac{R\rho\theta}{2\mu}\right)^2\right]. \tag{35}$$

Перейдем от функции $q(x,t)$ к новой функции $v(x,t)$, связанной с ней равенством

$$q(x,t) = v(x,t)e^t.$$

Функция $v(x,t)$ удовлетворяет вследствие (35) уравнению

$$v_t + uv_x - \frac{\kappa}{\rho}v_{xx} + v = \frac{R^2\rho}{4\mu}e^{-t} - \left[\frac{2\kappa}{\rho}\theta v_x^2 e^t + \frac{\mu}{\rho}v^2 e^t\left(u_x - \frac{R\rho\theta}{2\mu}\right)^2\right].$$

В силу леммы 7 и неотрицательности слагаемых в квадратной скобке для функции $v(x,t)$ имеем дифференциальное неравенство

$$v_t + uv_x - \frac{\kappa}{\rho}v_{xx} + v \leqslant Ce^{-t}. \tag{36}$$

Предположим, что положительный максимум функции $v(x,t)$ достигается в какой-нибудь внутренней точке (x_0,t_0) в области Ω_T или при $t_0 = T$. Тогда в этой точке

$$v_t \geq 0, v_x = 0, v_{xx} \leqslant 0. \tag{37}$$

В силу (36), (37) получаем оценку

$$\max_{(x,t)\in\Omega_T} v(x,t) \leqslant Ce^{-t_0} \leqslant C.$$

Следовательно, для всех $(x,t) \in \Omega_T$ справедливы неравенства

$$\frac{q(x,t)}{e^t} \leqslant C,\ q(x,t) \leqslant Ce^t \leqslant Ce^T,\ \frac{1}{\theta(x,t)} \leqslant Ce^T$$

или

$$\theta(x,t) \geq m_2 = \frac{1}{Ce^T}.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Существует постоянная $m_1 > 0$, зависящая от граничных данных и T, такая, что*

$$\min_{(x,t)\in\Omega_T} \rho(x,t) \geq m_1.$$

Доказательство. Из оценок (24), (32) выводим

$$\int_0^t \int_0^{s(\tau)} \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2} dx d\tau \leqslant C. \tag{38}$$

Из леммы 4 и оценки $|B(x,t)| \leqslant C$ с учетом (24) имеем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)} \frac{1}{\rho(x,t)} \leqslant C\left(1+\int_0^t \max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)} \theta(x,\tau)d\tau\right) \leqslant \tag{39}$$

$$\leqslant C\left(1+\int_0^t \max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)} A(x,\tau)\varphi(x,\tau)d\tau\right) \leqslant C + CM\int_0^t \max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)} \varphi(x,\tau)d\tau.$$

Учитывая неравенства

$$\varphi(x,t) = (\sqrt{\varphi(x,t)})^2 \leqslant \left(1+\int_0^{s(t)} |(\sqrt{\varphi})_x| dx\right)^2 \leqslant \left(1+\frac{1}{2}\int_0^{s(t)} \left|\frac{\varphi_x}{\sqrt{\varphi}}\right| dx\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[1+\frac{1}{2}\left(\int_0^{s(t)} \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^{s(t)} \varphi dx\right)^{1/2}\right]^2 \leqslant 2\left(1+\int_0^{s(t)} \frac{\varphi_x^2}{\varphi^2}dx \int_0^{s(t)} \varphi dx\right),$$

$$\int_0^{s(t)} \varphi(x,t)dx = \int_0^{s(t)} \frac{\rho\theta}{\rho A}dx \leqslant \frac{1}{m}\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)} \frac{1}{\rho(x,t)}\int_0^{s(t)} \rho\theta dx \leqslant C\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)} \frac{1}{\rho(x,t)},$$

из (38) и (39) выводим неравенство

$$\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)} \frac{1}{\rho(x,t)} \leqslant C + C\int_0^t \max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)} \frac{1}{\rho(x,\tau)}d\tau.$$

Применяя неравенство Гронуолла, получаем утверждение леммы 9. При доказательстве леммы 9 были получены оценки

$$\int_0^t \max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)} \theta(x,\tau)d\tau \leqslant C + C\int_0^t \max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)} \frac{1}{\rho(x,\tau)}d\tau,$$

$$\int_0^{s(t)} \varphi(x,t)dx \leqslant C\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)} \frac{1}{\rho(x,t)},$$

откуда вытекают оценки

$$\int_0^T \max_{0\leqslant x\leqslant s(t)} \theta(x,t)dt \leqslant C, \tag{40}$$

$$\int_0^{s(t)} \theta(x,t)dx = \int_0^{s(t)} A(x,t)\varphi(x,t)dx \leqslant M\int_0^{s(t)} \varphi(x,t)dx \leqslant C, \tag{41}$$

$$\int_0^T \int_0^{s(t)} \theta^2(x,t)dxdt \leqslant \int_0^T \max_{0\leqslant x\leqslant s(t)} \theta(x,t)\int_0^{s(t)} \theta(x,t)dxdt \leqslant C. \tag{42}$$

Оценки производных

Лемма 10. *Существует постоянная $C > 0$, зависящая от граничных данных и T, такая, что*

$$\max_{t\in[0,T]} \int_0^{s(t)} \rho(x,t)u^2(x,t)dx + \int_0^T \int_0^{s(t)} u_x^2(x,t)dxdt \leqslant C. \tag{43}$$

Доказательство. Умножим уравнение (2) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по x от 0 до $s(t)$, воспользуемся (1), (5) и (7):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho u^2 dx+\mu\int_0^{s(t)}u_x^2 dx-\int_0^{s(t)}R\rho\theta u_x dx=0.$$

Используя неравенство Юнга с ε и интегрируя по t, выводим неравенство

$$\frac{1}{2}\int_0^{s(t)}\rho u^2 dx+\mu\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u_x^2 dxd\tau\leqslant C_1+\frac{R^2}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta^2 dxd\tau+$$
$$+\varepsilon\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u_x^2 dxd\tau.$$

Выбирая ε достаточно малым, применяя лемму 7 и неравенство (42), имеем

$$\int_0^{s(t)}\rho u^2 dx+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u_x^2 dxd\tau\leqslant C.$$

Лемма 10 доказана.

Как следствие лемм 9 и 10 получается оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\int_0^{s(t)}u^2(x,t)dx+\int_0^T\int_0^{s(t)}u_x^2(x,t)dxdt\leqslant C. \tag{44}$$

Лемма 11. *Для любых $t\in[0,T]$ справедливо неравенство*

$$\int_0^{s(t)}u_x^2(x,t)dx+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\left(u_\tau^2(x,\tau)+u_{xx}^2(x,\tau)\right)dxd\tau\leqslant \tag{45}$$
$$\leqslant C\left(1+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta_x^2(x,\tau)dxd\tau+\int_0^t\max_{x\in[0,s(\tau)]}\theta^2(x,\tau)\int_0^{s(\tau)}\rho_x^2(x,\tau)dxd\tau\right).$$

Доказательство. Представим уравнение (2) в форме

$$\sqrt{\rho}u_t-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\mu u_{xx}=-\sqrt{\rho}uu_x-R\sqrt{\rho}\theta_x-\frac{1}{\sqrt{\rho}}R\rho_x\theta.$$

Отсюда

$$\int_0^{s(t)}\left(\rho u_t^2+\frac{1}{\rho}\mu^2u_{xx}^2-2\mu u_tu_{xx}\right)dx=\int_0^{s(t)}\left(\sqrt{\rho}uu_x+R\sqrt{\rho}\theta_x+\frac{1}{\sqrt{\rho}}R\rho_x\theta\right)^2dx.$$

Тогда

$$\int_0^{s(t)}\rho u_t^2dx+\mu^2\int_0^{s(t)}\frac{1}{\rho}u_{xx}^2dx-2\mu u_t(s(t),t)u_x(s(t),t)+ \tag{46}$$
$$+\mu\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}u_x^2dx-\mu\frac{ds(t)}{dt}u_x^2(s(t),t)\leqslant 3\int_0^{s(t)}\left(\rho u^2u_x^2+R^2\rho\theta_x^2+\frac{1}{\rho}R^2\rho_x^2\theta^2\right)dx.$$

Поскольку $u(s(t),t)=0$, то

$$u_x(s(t),t)\frac{ds(t)}{dt}=-u_t(s(t),t),$$

и из (46) вытекает неравенство

$$\int_0^{s(t)}\rho u_t^2dx+\mu^2\int_0^{s(t)}\frac{1}{\rho}u_{xx}^2dx+\mu\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}u_x^2dx+\mu\frac{ds(t)}{dt}u_x^2(s(t),t)\leqslant$$
$$\leqslant 3\int_0^{s(t)}\left(\rho u^2u_x^2+R^2\rho\theta_x^2+\frac{1}{\rho}R^2\rho_x^2\theta^2\right)dx. \tag{47}$$

Для оценки $u_x^2(x,t)$ имеем

$$u_x^2(x,t)\leqslant u_x^2(x_0,t)+\int_{x_0}^x\left|(u_x^2)_x\right|dx\leqslant u_x^2(x_0,t)+\int_0^{s(t)}\left|(u_x^2)_x\right|dx=u_x^2(x_0,t)+$$

$$+2\int_0^{s(t)}|u_x u_{xx}|\,dx.$$

Для любого $\varepsilon>0$ проинтегрируем последнее неравенство по x_0 от 0 до $s(t)$

$$u_x^2(x,t)\leqslant \frac{1}{s(t)}\int_0^{s(t)}u_x^2(x,t)dx+2\int_0^{s(t)}|u_x u_{xx}|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{s_0}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\int_0^{s(t)}u_x^2dx+\varepsilon\int_0^{s(t)}u_{xx}^2dx. \tag{48}$$

Учитывая (48), неотрицательность слагаемого $\mu\frac{ds(t)}{dt}u_x^2(s(t),t)$ и оценку

$$\int_0^{s(t)}\rho u^2u_x^2dx\leqslant C\max_{0\leqslant x\leqslant s(t)}u_x^2(x,t)\leqslant\frac{C}{\varepsilon}\int_0^{s(t)}u_x^2dx+C\varepsilon\int_0^{s(t)}u_{xx}^2dx,$$

лемму 10 и ограниченность сверху и снизу $\rho(x,t)$, из (47) получим, при соответствующем выборе $\varepsilon>0$, оценку (45).

Лемма 12. *Для любых $t\in[0,T]$ справедливо неравенство*

$$\int_0^{s(t)}\rho_x^2(x,t)dx\leqslant C+C\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\frac{\theta_x^2}{\theta}dxd\tau+C\varepsilon\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u_{xx}^2dxd\tau.$$

`Доказательство.` Из уравнения (1) имеем

$$(\ln\rho)_t+u(\ln\rho)_x+u_x=0.$$

Тогда уравнение (2) можно записать в форме

$$(\rho u)_t+(\rho u^2)_x=-\mu[(\ln\rho)_t+u(\ln\rho)_x]_x-p_x.$$

Отсюда

$$\rho\left[\left(u+\mu\frac{\rho_x}{\rho^2}\right)_t+u\left(u+\mu\frac{\rho_x}{\rho^2}\right)_x\right]+p_x=0.$$

Умножим полученное равенство на $(u+\mu\rho_x/\rho^2)$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до $s(t)$, тогда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho\left(u+\mu\frac{\rho_x}{\rho^2}\right)^2dx-\frac{1}{2}\frac{ds(t)}{dt}\rho\left(u+\mu\frac{\rho_x}{\rho^2}\right)^2\Big|_{x=s(t)}+$$

$$+\frac{1}{2}\rho u\left(u+\mu\frac{\rho_x}{\rho^2}\right)^2\Big|_{x=0}^{x=s(t)}-\int_0^{s(t)}R\rho\theta u_xdx+R\rho\theta u\Big|_{x=0}^{x=s(t)}+\int_0^{s(t)}(R\rho\theta)_x\,\mu\frac{\rho_x}{\rho^2}dx=0.$$

Поскольку $u=0$ при $x=s(t)$ и $x=0$, то последнее равенство примет вид

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\left(\rho u^2+2\mu\frac{u\rho_x}{\rho}+\mu^2\frac{\rho_x^2}{\rho^3}\right)dx-\int_0^{s(t)}R\rho\theta u_xdx+R\mu\int_0^{s(t)}\frac{\theta\rho_x^2}{\rho^2}dx+$$

$$+R\mu\int_0^{s(t)}\frac{\theta_x\rho_x}{\rho}dx-\frac{\mu^2}{2}\frac{ds}{dt}\frac{\rho_x^2}{\rho^3}\Big|_{x=s(t)}=0.$$

Используя лемму 7, третье слагаемое слева заменим на меньшее

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}(\rho u^2+2\mu\frac{u\rho_x}{\rho}+\mu^2\frac{\rho_x^2}{\rho^3})dx-\int_0^{s(t)}R\rho\theta u_xdx+\frac{R\mu}{M_1^2}\int_0^{s(t)}\theta\rho_x^2dx+$$

$$+R\mu\int_0^{s(t)}\frac{\theta_x\rho_x}{\rho}dx-\frac{\mu^2}{2}\frac{ds}{dt}\frac{\rho_x^2}{\rho^3}\Big|_{x=s(t)}\leqslant 0. \tag{49}$$

Оценим некоторые слагаемые. Из уравнения (1) при $x=s(t)$, используя (5), (7), получим соотношение

$$\rho_t(s(t),t)=-\rho_2(t)u_x(s(t),t).$$

С другой стороны, дифференцируя (7) по t, имеем

$$\rho_x(s(t),t)\frac{ds(t)}{dt}+\rho_t(s(t),t)=\frac{d\rho_2(t)}{dt},$$

$$\rho_x(s(t),t)\frac{ds(t)}{dt}=\frac{d\rho_2(t)}{dt}+\rho_2(t)u_x(s(t),t).$$

Тогда, используя условие (9), выводим

$$\rho_x^2(s(t),t)\frac{ds(t)}{dt}=\left(\frac{d\rho_2(t)}{dt}+\rho_2(t)u_x(s(t),t)\right)^2\frac{1}{ds(t)/dt}\leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{d\rho_2(t)}{dt}\right)^2\frac{1}{m}+\frac{2M^2}{m}u_x^2(s(t),t)\leqslant C\left(1+u_x^2(s(t),t)\right).$$

Отсюда, используя (48), получим

$$\rho_x^2(s(t),t)\frac{ds(t)}{dt}\leqslant C+\frac{C}{\varepsilon}\int_0^{s(t)}u_x^2dx+\varepsilon C\int_0^{s(t)}u_{xx}^2dx.$$

Таким образом,

$$\frac{\mu^2}{2}\frac{ds(t)}{dt}\frac{\rho_x^2(s(t),t)}{\rho^3(s(t),t)}\leqslant C+\frac{C}{\varepsilon}\int_0^{s(t)}u_x^2dx+\varepsilon C\int_0^{s(t)}u_{xx}^2dx.$$

Учитывая ограниченность сверху и снизу $\rho(x,t)$, (40), (42), лемму 10 и следующие оценки

$$\int_0^t\int_0^{s(\tau)}R\rho\theta u_xdxd\tau\leqslant C\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta^2dxd\tau+C\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u_x^2dxd\tau\leqslant C,$$

$$-R\mu\int_0^{s(t)}\frac{\theta_x\rho_x}{\rho}dx\leqslant\frac{C}{\varepsilon_1}\int_0^{s(t)}\frac{\theta_x^2}{\theta}dx+\varepsilon_1C\int_0^{s(t)}\theta\rho_x^2dx,$$

$$-\mu\int_0^{s(t)}\frac{u\rho_x}{\rho}dx\leqslant\frac{C}{\varepsilon_2}\int_0^{s(t)}u^2dx+\varepsilon_2C\int_0^{s(t)}\rho_x^2dx,$$

интегрируя (49) по времени, получим, при соответствующем выборе ε_1, ε_2, утверждение леммы 12.

Оценка температуры

Лемма 13. *Существует постоянная $C>0$, такая, что для любых $t\in[0,T]$ справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\int_0^{s(\tau)}\theta^2dx+\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta_x^2dxd\tau\leqslant C.$$

`Доказательство.` Запишем уравнение для энергии $\theta+\frac{1}{2}u^2$. Для этого умножим уравнение (2) на u и сложим с (3), в итоге получим

$$\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)_t+\rho u\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)_x=\mu\left(u_xu\right)_x+\kappa\theta_{xx}-\left(R\rho\theta u\right)_x. \tag{50}$$

Умножим (50) на

$$\theta+\frac{u^2}{2}-\frac{x\theta_2(t)}{s(t)}-\left(1-\frac{x}{s(t)}\right)\theta_1(t),$$

и проинтегрируем по x от 0 до $s(t)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)^2dx-\frac{1}{2}\frac{ds(t)}{dt}\rho_2(t)\theta_2^2(t)-$$

$$-\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)\left[\frac{x\theta_2(t)}{s(t)}+\left(1-\frac{x}{s(t)}\right)\theta_1(t)\right]dx+$$

$$+\frac{ds(t)}{dt}\rho_2(t)\theta_2^2(t)+\int_0^{s(t)}\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)\left[\frac{x\theta_2(t)}{s(t)}+\left(1-\frac{x}{s(t)}\right)\theta_1(t)\right]_tdx+$$

$$+\frac{\theta_2(t)-\theta_1(t)}{s(t)}\int_0^{s(t)}\rho u\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)dx=$$
$$=-\mu\int_0^{s(t)}uu_x\theta_x dx-\mu\int_0^{s(t)}u^2u_x^2dx+\mu\frac{\theta_2(t)-\theta_1(t)}{s(t)}\int_0^{s(t)}uu_xdx-$$
$$-\kappa\int_0^{s(t)}\theta_x^2dx-\kappa\int_0^{s(t)}uu_x\theta_xdx+\kappa\frac{\theta_2(t)-\theta_1(t)}{s(t)}\left(\theta_2(t)-\theta_1(t)\right)+$$
$$+R\int_0^{s(t)}\rho\theta u\theta_xdx+R\int_0^{s(t)}\rho\theta u^2u_xdx-$$
$$-R\frac{\theta_2(t)-\theta_1(t)}{s(t)}\int_0^{s(t)}\rho\theta u dx. \tag{51}$$

Оценим некоторые слагаемые, входящие в (51):

$$\frac{\theta_2(t)-\theta_1(t)}{s(t)}\int_0^{s(t)}\rho u\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)dx\leqslant C\int_0^{s(t)}u^2dx+C\int_0^{s(t)}\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)^2dx,$$
$$\int_0^{s(t)}uu_x\theta_xdx\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{s(t)}u^2u_x^2dx+\varepsilon\int_0^{s(t)}\theta_x^2dx,$$
$$R\int_0^{s(t)}\rho\theta u\theta_xdx\leqslant\frac{R}{\varepsilon}\int_0^{s(t)}\rho^2\theta^2u^2dx+\varepsilon R\int_0^{s(t)}\theta_x^2dx,$$
$$R\int_0^{s(t)}\rho\theta u^2u_xdx\leqslant R\int_0^{s(t)}\rho^2\theta^2u^2dx+R\int_0^{s(t)}u^2u_x^2dx.$$

Остальные слагаемые оцениваются очевидным образом. Интегрируя (51) по времени, получим неравенство

$$\frac{1}{4}\int_0^{s(t)}\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)^2dx+\frac{\kappa}{2}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta_x^2dxd\tau\leqslant C+M_3\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u^2u_x^2dxd\tau+$$
$$+C\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta^2u^2dxd\tau+C\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)^2dxd\tau, \tag{52}$$

где C, M_3 — положительные постоянные, зависящие от T, начальных и краевых данных.

Умножим (2) на $4u^3$, проинтегрируем по x от 0 до $s(t)$ и воспользуемся (1)

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho u^4dx+12\mu\int_0^{s(t)}u^2u_x^2dx=12R\int_0^{s(t)}\rho\theta u^2u_xdx.$$

Применим неравенство Коши к правой части

$$\frac{d}{dt}\int_0^{s(t)}\rho u^4dx+12\mu\int_0^{s(t)}u^2u_x^2dx\leqslant$$
$$\leqslant 6\mu\int_0^{s(t)}u^2u_x^2dx+\frac{6R^2}{\mu}\int_0^{s(t)}\rho^2\theta^2u^2dx. \tag{53}$$

Интегрируя (53) по времени, имеем

$$\int_0^{s(t)}\rho u^4dx+6\mu\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u^2u_x^2dxd\tau\leqslant C+C\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta^2u^2dxd\tau. \tag{54}$$

Умножим (54) на M_3/μ и сложим с (52)

$$\frac{1}{4}\int_0^{s(t)}\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)^2dx+\frac{\kappa}{2}\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta_x^2dxd\tau+\frac{M_3}{\mu}\int_0^{s(t)}\rho u^4dx+$$
$$+5M_3\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u^2u_x^2dxd\tau\leqslant$$

$$\leqslant C + C\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta^2u^2dxd\tau + C\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho\left(\theta+\frac{u^2}{2}\right)^2dxd\tau. \tag{55}$$

Далее нам понадобятся оценки:

$$\theta^2(x,t) = \theta_1^2(t) + \int_0^x(\theta^2)_xdx \leqslant \theta_1^2(t) + 2\int_0^{s(t)}|\theta\theta_x|dx \leqslant$$

$$\leqslant \theta_1^2(t) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{s(t)}\theta^2dx + \varepsilon\int_0^{s(t)}\theta_x^2dx.$$

Интегрируя по времени, используя (42), имеем

$$\int_0^t\max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)}\theta^2(x,\tau)d\tau \leqslant C(\varepsilon) + \varepsilon\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta_x^2dxd\tau. \tag{56}$$

Тогда, используя (44) и (56), оценим

$$\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\rho^2\theta^2u^2dxd\tau \leqslant M_1^2\int_0^t\left[\max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)}\theta^2(x,\tau)\int_0^{s(\tau)}u^2(x,\tau)dx\right]d\tau \leqslant$$

$$\leqslant M_1^2\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\int_0^{s(\tau)}u^2(x,\tau)dx\cdot\int_0^t\max_{0\leqslant x\leqslant s(\tau)}\theta^2(x,\tau)d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C + C\varepsilon\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta_x^2dxd\tau.$$

Используя последнюю оценку при соответствующем выборе ε, применяя неравенство Гронуолла, из (55) получим утверждение леммы.

Лемма 14. *Существуют постоянные $C_1, C_2, C_3, M_2 > 0$, зависящие от T, начальных и краевых данных, такие, что для любых $t \in [0,T]$ справедливы следующие оценки*

$$\int_0^{s(t)}u_x^2(x,t)dx + \int_0^t\int_0^{s(\tau)}u_\tau^2dxd\tau + \int_0^t\int_0^{s(\tau)}u_{xx}^2dxd\tau \leqslant C_1, \tag{57}$$

$$\int_0^{s(t)}\rho_x^2(x,t)dx + \int_0^{s(t)}\rho_t^2(x,t)dx \leqslant C_2,$$

$$\int_0^{s(t)}\theta_x^2(x,t)dx + \int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta_\tau^2dxd\tau + \int_0^t\int_0^{s(\tau)}\theta_{xx}^2dxd\tau \leqslant C_3, \tag{58}$$

$$\max_{(x,t)\in\Omega_T}\theta(x,t) \leqslant M_2. \tag{59}$$

`Доказательство.` Если учесть ограниченность $\theta(x,t)$ снизу, то с использованием леммы 13 имеем

$$\int_0^t\int_0^{s(\tau)}\frac{\theta_x^2}{\theta}dxd\tau \leqslant C.$$

Подставляя последнюю оценку в утверждение леммы 12, получим

$$\int_0^{s(t)}\rho_x^2(x,t)dx \leqslant C + C\varepsilon\int_0^t\int_0^{s(\tau)}u_{xx}^2dxd\tau. \tag{60}$$

Теперь оценка (57) получается из леммы 11 с использованием (56), (60) и оценки леммы 13. Из (60) и (57) имеем для всех $t \in [0,T]$

$$\int_0^{s(t)}\rho_x^2(x,t)dx \leqslant C.$$

Из уравнения (1) следует для всех $t \in [0, T]$

$$\int_0^{s(t)} \rho_t^2(x,t)dx \leqslant C.$$

Оценки (58), (59) получаются из уравнения (3) стандартным образом с использованием уже полученных оценок для ρ и u.

Оценки теоремы в гельдеровских нормах, после того как доказаны априорные оценки лемм 1–14, получаются методами, изложенными в [25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Serrin *On the uniqueness of compressible fluid motion* // Arch. Rational Mech. Anal. 1959. V. 3, №3. P. 271–288.
2. D. Graffi *Il teorema di unicita nella dinamica dei fluidi compressibli* // J. Rat. Mech. Anal. 1953. V. 2. P. 99–106.
3. J. Nash *Le probleme de Cauchy pour les equations differentielles d'un fluide general* // Bull. Soc. Math. France. 1962. V. 90. P. 487–497.
4. N. Itaya *The existence and unicueness of the solution of the equations describing compressible viscous fluid flow* // Proc. Japan Acad. 1970. V. 46, №4. P. 379–382.
5. Вольперт А.И., Худяев С.И. *О задаче Коши для составных систем нелинейных дифференциальных уравнений* // Мат. сборник. 1972. Т. 87, №4. С. 504–528.
6. Солонников В.А. *О разрешимости начально-краевой задачи для уравнений движения вязкой сжимаемой жидкости* // В кн.: Исследования по линейным операторам и теории функций. 6. Л.: Наука. 1976. С. 128–142. (Зап. науч. семинаров ЛОМИ АН СССР. Т. 56).
7. A. Tani *On the first initial-boundary value problem of compressible viscous fluid motion* // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 1977. V. 13, №1. P. 193–253.
8. Канель Я.И. *Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа* // Дифференциальные уравнения. 1968. Т. 4, №4. С. 721–734.
9. N. Itaya *On the temporally global problem of the generalized Burgers equation* // J. Math. Kyoto Univ. 1974. V. 14, №1. P. 129–177.
10. N. Itaya *A servey on the generalized Burger's equation with a pressure model term* // J. Math. Kyoto Univ. 1976. V. 16, №1. P. 223–240.
11. A. Tani *On the first initial-boundary value problem of the generalized Burgers equation* // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 1974. V. 10, №1. P. 209–233.
12. Кажихов А.В. *О глобальной разрешимости одномерных краевых задач для уравнений вязкого теплопроводного газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 24. С. 45–61.
13. Кажихов А.В. *Некоторые вопросы теории уравнений Навье-Стокса сжимаемой жидкости* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1979. Вып. 38. С. 33–47.
14. Кажихов А.В. *К теории краевых задач для уравнений одномерного нестационарного движения вязкого теплопроводного газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 50. С. 37–62.
15. Кажихов А.В. *О задаче Коши для уравнений вязкого газа* // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, №1. С. 60–64.
16. Кажихов А.В., Шелухин В.В. *Однозначная разрешимость "в целом" по времени начально-краевых задач для одномерных уравнений вязкого газа* Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, №2. С. 282–291.
17. Шелухин В.В. *Периодические течения вязкого газа*// Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1979. Вып. 42. С. 80–102.
18. Шелухин В.В. *Существование периодических решений обобщённой системы Бюргерса* // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, вып. 6. С. 992–997.

19. Шелухин В.В. *Ограниченные, почти периодические решения уравнений вязкого газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1980. Вып. 44. С. 147–162.
20. Белов С.Я. *Разрешимость "в целом" задачи протекания для уравнений Бюргерса сжимаемой жидкости* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1981. Вып. 50. С. 3–14.
21. Вайгант В.А. *Неоднородные граничные задачи для уравнений вязкого теплопроводного газа* // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1990. Вып. 97. С. 3–21.
22. Вайгант В.А. *Проблема существования глобальных решений уравнений Навье-Стокса сжимаемых сплошных сред*: Дисс. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. - Барнаул: Алтайский гос. ун-т, 1998.
23. Кажихов А.В., Калиев И.А. *Корректность одной модели фазового перехода газ - твердое тело.* Новосибирск, 1999. 32 с. (Препр. / Мин. ОПО РФ. НГУ, НИИ Дискретной математики и информатики. №43).
24. I.A. Kaliev, A.V. Kazhikhov *Well-posedness of a gas-solid phase transition problem* // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1, №3. P. 282–308.
25. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей.* Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.
26. Калиев И.А., Подкуйко М.С. *Об одной граничной задаче для уравнений вязкого теплопроводного газа в нецилиндрических убывающих со временем областях* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, №10. С. 1356–1374.
27. I.A. Kaliev, M.S. Podkuiko *Nonhomogeneous Boundary Value Problems for Equations of Viscous Heat-Conducting Gas in Time-Decreazing Non-Rectangular Domains* // J. Math. Fluid Mech. 2008. V. 10, №2. P. 176–202.

Ибрагим Адиетович Калиев,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
проспект Ленина, 47а,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: kalievia@mail.ru

Андрей Александрович Шухардин,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
проспект Ленина, 47а,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: shukhardinaa@gmail.com

Гульнара Сагындыковна Сабитова,
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
проспект Ленина, 47а,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: sabitovags@mail.ru