ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 32-49.

УДК 517.946

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Э.Р. АНДРИЯНОВА, Ф.Х. МУКМИНОВ

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для некоторого класса параболических уравнений с двойной нестепенной нелинейностью в цилиндрической области $D = (t > 0) \times \Omega$. Методом галеркинских приближений доказывается существование сильных решений в пространстве Соболева-Орлича.

Ключевые слова: параболическое уравнение, N-функции, существование решения, пространства Соболева-Орлича.

Mathematics Subject Classification: 35D05, 35B50, 35B45, 35K55

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область пространства $R_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ рассматривается уравнение вида

$$(\beta(x,u))'_t = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{p_i}(x,u,\nabla u)\right)_{x_i} - b(x,u,\nabla u), \text{ где } a(x,u,\nabla u) = a(x,u,p)\Big|_{p=\nabla u}, \tag{1}$$

с монотонным оператором в правой части. Краевые условия однородны:

$$u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{3}$$

Функция $a(x,u,p)$, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, удовлетворяет условию Каратеодори при $p \in R_n$ и $x \in \Omega$. Функция $\beta(x,u), \beta(x,0) = 0$, абсолютно непрерывна и возрастает по u, а также измерима по $x \in \Omega$ при $u \in R$.

В настоящей работе доказывается существование сильного решения задачи (1)–(3) с нелинейностями, определяемыми N-функциями. Вопросы существования решения параболических уравнений с двойной нелинейностью рассматривались в работах [1] – [11] и других. Существенным продвижением явилась работа [3], в которой рассмотрен также вопрос о единственности решения. В основном существование решения доказывалось дискретизацией по времени, и нелинейности подчинялись степенным оценкам. Работа [4] посвящена доказательству существования слабых решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью в ограниченной области методом галеркинских приближений. В работе [5] решение в неограниченной области было получено в виде предела решений в последовательности ограниченных областей. Существование

E.R. Andriyanova, F.Kh. Mukminov, Existence of solution for parabolic equation with non-power nonlinearities.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00081-а).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания организациям высшего образования.

Поступила 23 сентября 2014 г.

слабого решения параболического уравнения с двумя переменными нелинейностями в подходящих пространствах Соболева-Орлича при ограниченной области Ω доказано в [6]. Существование W- и H-решений для параболических уравнений 2-го порядка с переменным порядком нелинейности было доказано в работе [8].

Существование сильного решения задачи (1)–(3) для изотропного параболического уравнения с двойной степенной нелинейностью было установлено в [9]. Там же были получены точные двусторонние оценки степенного убывания нормы решения по времени. В [18] рассмотрен случай анизотропных параболических уравнений.

В работе [10] для модельного параболического уравнения с нестепенными нелинейностями при условии ограниченности в окрестности нуля производной $\beta'(u)$ было доказано существование сильного решения.

В работах, касающихся единственности решения задачи (1)–(3), рассматривались лишь уравнения со степенными нелинейностями . В работе [11] единственность решения задачи (1)–(3) была доказана в случае, когда $\beta = |u|^{\alpha-2}u,\ \alpha \in (1,2)$ в предположении $(\beta(u))'_t \in L_1(D^T),\ u_0 \geq 0$. Похожие результаты для уравнения (1), записанного в другой форме, были установлены в [12, 13]. Единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи со степенными нелинейностями была установлена в [14].

2. Условия на функции, входящие в уравнение и обозначения

Определим здесь используемые в работе функциональные пространства и приведем некоторые известные факты из теории пространств Соболева-Орлича [22].

Введем следующие обозначения

$$\langle f(t)\rangle = \int\limits_{\Omega} f(t,x)dx, \quad [f] = \int\limits_{D^T} f(t,x)dxdt, \quad f(\phi) = (f,\phi)_{\Omega}.$$

В последнем равенстве записано значение обобщенной функции f на элементе ϕ.

Для выпуклых функций $B(s),\ s \geq 0$, следующая функция

$$\overline{B}(z) = \sup_{s\geq 0}(s|z| - B(s))$$

называется дополнительной. Очевидно неравенство Юнга

$$|zs| \leqslant B(z) + \overline{B}(s).$$

Говорят, что N-функция $B(s)$ удовлетворяет Δ_2-условию, если выполнено одно из трех эквивалентных условий: 1) существует такое число $k > 0$, что $B(2s) \leqslant kB(s),\ \forall s \geq 0$;

2) существуют такие числа $l > 1,\ m > 0$, что

$$B(ls) \leqslant kl^m B(s),\ \forall s \geq 0;$$

3) существует такое число $\alpha_B > 0$, что $sB'(s) \leqslant \alpha_B B(s),\ \forall s \geq 0$. Здесь и далее $B'(s)$ обозначает правую производную выпуклой функции. Отметим еще, что из известного [22, гл.1, формула (2.7)] равенства $uB'(u) = B(u) + \overline{B}(B'(u))$ следует оценка

$$\overline{B}(B'(u)) \leq cB(u). \tag{4}$$

Будем обозначать все N-функции заглавными латинскими буквами.

Все постоянные, встречающиеся в работе, положительны.

Будем предполагать, что существует абсолютно непрерывная нечетная возрастающая функция $\gamma(u)$, удовлетворяющая при $u \in R,\ x \in \Omega$ неравенствам:

$$\gamma(u)/c_\gamma \leqslant u\gamma'(u) \leqslant c_\gamma\gamma(u),\ \gamma'(u) \leq \beta'(x,u) \leq c_\beta\gamma'(u). \tag{5}$$

Здесь и далее через $\beta',\ \gamma',\ g'$ будем обозначать производные $\beta'_u(x,u)$, $\gamma'_u(x,u)$, $g'_u(x,u)$ абсолютно непрерывных по u функций и через $u',\ v',\ w'$ – производные $u'_t(t,x)$, $v'_t(t,x)$, $w'_t(t,x)$.

Будем записывать функцию $u(t,x)$ через u или $u(t)$, когда это не вызывает двусмысленности. Аргументы функций $a=a(x,u,\nabla u)$, $b=b(x,u,\nabla u)$, $a_{p_i}=a_{p_i}(x,u,\nabla u)$ также будем иногда опускать.

Предполагается еще, что интеграл

$$G(u)=\int\limits_0^u s\gamma'(s)ds$$

определяет $N-$функцию, и ниже будет показано, что она удовлетворяет Δ_2-условию.

Условие монотонности будем требовать в виде неравенства

$$(b(x,u,p)-b(x,v,q))(u-v)+\sum_{i=1}^n(a_{p_i}(x,u,p)-a_{p_i}(x,v,q))(p_i-q_i)\geq 0, \qquad (6)$$

справедливого при всех $u,v\in R,\ p,q\in R^n$, и почти всех $x\in\Omega$. Пусть также выполняется условие:

$$b(x,u,p)u+\sum_{i=1}^n a_{p_i}(x,u,p)p_i\geq S(p)-c(G(u)+f(x)),\ f\in L_1(\Omega), \qquad (7)$$

где $S(p)=\sum_{i=1}^n B_i(p_i),\ B_i$ – некоторые N-функции.

Через $L_B(Q)$ обозначим пространство Орлича, соответствующее N-функции $B(s)$, с нормой Люксембурга

$$||u||_{L_B(Q)}=||u||_{B,Q}=\inf\{k>0:\int\limits_Q B\left(\frac{u(x)}{k}\right)dx\leqslant 1\}.$$

Ниже в качестве Q могут выступать области Ω, D^T и другие, причем индекс $Q=\Omega$ может быть опущен.

Определим также анизотропное пространство Соболева-Орлича $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$||u||_{W^1_{G,B}(\Omega)}=\sum_{i=1}^n||u_{x_i}||_{B_i,\Omega}+||u||_{G,\Omega}.$$

Через $V(D^T)$ будем обозначать пополнение $C_0^\infty(D^T)$ по норме

$$||u||_{V(D^T)}=\sum_{i=1}^n||u_{x_i}||_{B_i,D^T}+||u||_{G,D^T}.$$

Известно (см. [22]), что для нормы Люксембурга при $\nu\equiv||u||_{B,Q}\geq 1$ выполнено неравенство $||u||_{B,Q}\leqslant\int\limits_Q B(u)dx$. Далее, при $\nu>1$, имеем

$$\int\limits_Q B(u)dx=\int\limits_Q B(\nu u/\nu)dx\leqslant k\nu^m\int\limits_Q B(u/\nu)dx\leqslant k\nu^m.$$

Таким образом, всегда

$$\int\limits_Q B(u)dx\leq f_B(||u||_{B,Q}),\ f_B(s)=ks^m+s. \qquad (8)$$

Для анизотропных пространств Соболева-Орлича известна теорема вложения А.Г. Королева [23]. Для ее формулировки определим функцию $\Theta(s)$ следующим образом

$$\Theta(s)=s^{-\frac{1}{n}}\prod_{i=1}^n\left(B_i^{-1}(s)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Может оказаться, что интеграл

$$\int_0^1 \frac{\Theta(s)}{s} ds \tag{9}$$

расходится в нуле, тогда при вычислении $\Theta(s)$ заменяем функции B_i на $\widetilde{B}_i$ по формуле

$$\widetilde{B}_i(s) = \left\{ \begin{array}{ll} B_i(s), & \text{при } |s| \geq 1, \\ s^{\kappa} B_i(1), & \text{при } |s| \leqslant 1. \end{array} \right.$$

Отметим, что поскольку функции B_i – выпуклые, то выполняется неравенство $B_i'(1) > B_i(1)$. Выберем $\kappa \in (1, n)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$B_i'(1) > \kappa B_i(1), \ i = 1, 2, ..., n.$$

Сходимость интеграла (9) в нуле обеспечена неравенством $\kappa < n$.

Определим теперь N-функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int_0^{|z|} \frac{\Theta(s)}{s} ds,$$

предполагая, что интеграл

$$I(\Theta) = \int_0^{\infty} \frac{\Theta(s)}{s} ds = \infty \tag{10}$$

расходится к бесконечности. Известна теорема вложения А. Г. Королева [23], вытекающая из неравенства

$$||u||_{B^*,\Omega} \leqslant C \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}||_{\widetilde{B}_i,\Omega}, \tag{11}$$

справедливого для функций $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$.

Пусть $\chi(M)$ обозначает характеристическую функцию множества M. Потребуем выполнения следующих условий при любых $u \in R, p \in R^n$ и почти всех $x \in \Omega$:

$$\widetilde{b}^2 \chi(|u| < 1) + G\left(\frac{\widetilde{b}^2}{\beta'(x,u) G'(u)}\right) + \sum_{i=1}^{n} \overline{B}_i(a_{p_i}(x,u,p)) \leqslant c(\phi(x,u) + S(p)), \tag{12}$$

где $\widetilde{b}(x,u,p) = b(x,u,p) - a_u(x,u,p)$,

$$\phi(x,u) = f(x) + G(u) + \sum_{i=1}^{n} B_i(c_{\Omega}^i u);$$

здесь постоянные c_{Ω}^i таковы, что справедливо неравенство (см. лемму 1)

$$\sum_{i=1}^{n} \langle B_i(c_{\Omega}^i u) \rangle \leq \langle S(\nabla u) \rangle, \ u \in C_0^{\infty}(\Omega). \tag{13}$$

$$\Gamma_1 a(x,u,p) + c\phi(x,u) \geq b(x,u,p)u + \sum_{i=1}^{n} a_{p_i}(x,u,p) p_i, \ c \in [0, \frac{1}{2}]; \tag{14}$$

$$b(x,u,p)u + \sum_{i=1}^{n} a_{p_i}(x,u,p) p_i \geq \delta_1 a(x,u,p) - c\phi(x,u); \tag{15}$$

$$|b(x,u,p)| \leqslant c\overline{G}^{-1}\left(S(p) + \phi(x,u)\right) + c\Lambda(u,p), \tag{16}$$

где

$$\Lambda(u,p) = \overline{B^*}^{-1}\left(S(p) + B^*(u)\right).$$

Здесь и далее через $c, c_1, c_2, \ldots$ обозначаем постоянные, которые, вообще говоря, могут не совпадать даже при одинаковых индексах.

Теорема 1. *Пусть* $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ *и выполняются условия* (5)–(7),(10), (12)–(16). *Тогда существует обобщенное решение задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее соотношениям*

$$u(t) \in L_{\infty,\mathrm{loc}}([0,\infty); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)),$$

$$(\beta'(x,u))^{\frac{1}{2}}\, u' \in L_2(D^T),$$

$$\beta(x,u(t,x)) \in C_w([0,\infty); L_{\overline{G}}(\Omega)),$$

где непрерывность понимается в слабой топологии пространства $L_{\overline{G}}(\Omega)$).

Единственность решения задачи (1)–(3) со свойствами, установленными в теореме 1, будет доказана в другой работе.

3. Вспомогательные утверждения

Пусть при почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,u)$ абсолютно непрерывна по $u \in R$ и определена равенством

$$g'(x,u) = u\beta'(x,u), \quad g(x,0) = 0. \tag{17}$$

Убедимся, что она удовлетворяет неравенству

$$ug'(x,u) \leqslant \alpha g(x,u), \quad \forall u \in R,\ x \in \Omega \tag{18}$$

с некоторым $\alpha > 0$. Отметим неравенство, вытекающее из (5)

$$u\gamma(u) = \int\limits_0^u (s\gamma(s))'ds = \int\limits_0^u \gamma(s)ds + G(u) \leqslant (c_\gamma + 1)\int\limits_0^u \gamma(s)ds,\ u \geq 0. \tag{19}$$

Поэтому

$$uG'(u) = u^2\gamma'(u) \leq c_\gamma u\gamma(u) \leq c_\gamma(c_\gamma+1)G(u),$$

то есть $G(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Отсюда же, ввиду (5), имеем (18).

Отметим, что если $u_m \to u$ в $L_B(\Omega)$ и B удовлетворяет Δ_2-условию, то существует C такое, что $\langle B(u_m)\rangle \leqslant C$. Действительно, сходящаяся последовательность ограничена $||u_m||_{L_B(\Omega)} \leqslant c,\ m = 1, 2, \ldots$ Поэтому нужное неравенство легко следует из (8).

Покажем, что

$$I_D = \int\limits_0^T ||u(t)||_{B^*,\Omega}dt < \infty,\ u \in V(D^T). \tag{20}$$

Запишем следующие соотношения

$$\begin{gathered} ||u_{x_i}||_{\widetilde{B}_i(\Omega)} \leqslant 1 + \langle \widetilde{B}_i(u_{x_i})\rangle \leqslant 1 + \langle B_i(u_{x_i})\chi(|u_{x_i}|>1)\rangle + \\ +\langle B_i(1)\chi(|u_{x_i}|\leq 1)\rangle) \leq 1 + \langle B_i(u_{x_i})\rangle + \langle B_i(1)\rangle. \end{gathered} \tag{21}$$

Воспользуемся неравенствами (11) и (21)

$$||u||_{B^*,\Omega} \leqslant C\sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||_{\widetilde{B}_i,\Omega} \leqslant c_2 + C\sum_{i=1}^n \langle B_i(u_{x_i})\rangle.$$

Отсюда следует (20).

Кроме того, из (8) получаем

$$\langle B^*(u)\rangle \leqslant c_3(k), \text{если} \langle S(\nabla u)\rangle \leq k. \tag{22}$$

Лемма 1. *Пусть область Ω расположена в полупространстве $x_1 > 0$. Тогда для произвольной N-функции B выполняется следующее неравенство*

$$\int\limits_{\Omega^r} B(u(x))dx \leqslant \int\limits_{\Omega^r} B(ru_{x_1}(x))dx,\ u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $f(x_1) \in C^1[0,r],\ f(0) = 0$. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница, получим

$$|f(x_1)| = |\int\limits_0^{x_1} f'(x_1)dx_1| \leqslant \int\limits_0^r |f'(x_1)|dx_1, \quad x_1 \in [0,r].$$

Теперь применим интегральное неравенство Йенсена (см. [22, гл.2, §8.2, нер.-во 8.2]), тогда

$$B\left(\frac{f(x_1)}{r}\right) \leqslant B\left(r^{-1}\int\limits_0^r |f'(x_1)|dx_1\right) \leqslant \frac{1}{r}\int\limits_0^r B(f'(x_1))dx_1.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по x_1

$$\int\limits_0^r B\left(\frac{f(x_1)}{r}\right)dx_1 \leqslant \int\limits_0^r B(f'(x_1))dx_1.$$

Тогда, после подстановки $f(x_1) = ru(x)$ и интегрирования по $x' = \{x_2, ..., x_n\}$, получим (23). □

Следствием леммы 1 является, в частности, неравенство (13) в случае ограниченной области Ω. Предельным переходом устанавливается также, что оно справедливо и для функций из пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$. Пользуясь (8), легко установить также неравенство

$$\langle\phi(x,u)\rangle \leqslant c(\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)}). \tag{24}$$

Случай, когда $G(u)$ является степенной функцией $G(u) = |u|^p$, рассмотрен в работе [16]. При этом при $p \geq 2$ и при $p < 2$ используются разные техники предельных переходов в галеркинских приближениях. В случае $N-$функции $G(u)$ она может иметь на разных интервалах степенное поведение с разными показателями p. Оказывается, предельные переходы следует выполнять в интервалах постоянства знака функции $y(u) = u(\gamma(u) - u\gamma'(u))$. При этом разным знакам соответствует разная техника предельных переходов.

Будем предполагать, что луч $(0, +\infty)$ поделен на непересекающиеся связные промежутки $I_1, I_2, ...$ без конечных точек накопления, в каждом из которых поочередно либо $y(u) \leqslant 0$, либо $y(u) > 0$. Положим

$$N^+ = \{k | u \in I_k \Rightarrow y(u) > 0\},$$
$$N^- = \{k | u \in I_k \Rightarrow y(u) \leqslant 0\}.$$

Множества $N^+,\ N^-$ могут быть пустыми, конечными или счетными.

Пусть $\alpha(t)$ – обратная функция к $\gamma(u)$. Положим

$$j(t) = G(\alpha(\sqrt{|t|})), j(\gamma^2(u)) = G(u).$$

Лемма 2. *Пусть $\overline{I}_k = [a_k, b_k]$ – замыкание промежутка I_k. Если $k \in N^+$, то функция $j(u)$ выпукла на $I_k^\gamma = (\gamma^2(a_k), \gamma^2(b_k))$ и функция $2j(u) - j(a_k)$ продолжается линейно до выпуклой на $[0,\infty)$ функции $j_k(u)$, при этом*

$$\frac{s^2}{\beta'(x,u)} \leq c(G(u) + J_k(s)),\ |u| \in I_k,\ s > 0. \tag{25}$$

где $J_k(s) = j_k(s^2)$ *–* N*-функция.*

Если же $k \in N^-$*, то существует* N*-функция* $H_k(u)$ *такая, что*

$$s^2\gamma'(u) \leqslant c(G(u) + H_k(s)),\ |u| \in I_k,\ s > 0. \tag{26}$$

Доказательство. График выпуклой функции $f(s)$, $s > 0$ лежит выше касательной $f(s) \geq f'(t)(s-t) + f(t)$, например, с правой производной $f'(t)$, поэтому

$$sf'(t) \leq f(s) - f(t) + tf'(t). \tag{27}$$

Пусть $k \in N^+$. Тогда при $u \in I_k$

$$\left(\frac{\gamma(u)}{u}\right)' = \frac{u\gamma'(u) - \gamma(u)}{u^2} = -\frac{y(u)}{u^3} < 0,$$

т.е. функция $\gamma(u)/u$ убывает. Тогда из (5) при $1 \in N^+$следует неравенство

$$\frac{1}{\beta'(x,u)} \leq c, u \in (0, b_1), x \in \Omega. \tag{28}$$

Проверим, что $j(t)$ – выпуклая функция на интервале I_k^γ

$$j'(t) = u\gamma'(u)\frac{1}{\gamma'(u)}\Big|_{u=\alpha(\sqrt{|t|})}\frac{1}{2\sqrt{|t|}} = \frac{\alpha(\sqrt{|t|})}{2\sqrt{|t|}} = \frac{u}{2\gamma(u)}.$$

Выпуклость установлена, поскольку $u/\gamma(u)$ – возрастающая функция.

Далее, ввиду (19),

$$\frac{j'(t)t}{j(t)}\Big|_{t=\gamma^2(u)} = \frac{u\gamma(u)}{2G(u)} > \frac{1}{2}.$$

Поэтому функция $j_k(t) = 2j(t) - j(\gamma^2(a_k)), t \in [\gamma^2(a_k), \gamma^2(b_k)]$, может быть продолжена с промежутка I_k^γ до выпуклой на $[0, \infty)$ функции формулами $j_k(t) = tj(\gamma^2(a_k))/\gamma^2(a_k)$, $t \in [0, \gamma^2(a_k)]$, $j_k(t) = (t - \gamma^2(b_k))j_k'(\gamma^2(b_k)) + j_k(\gamma^2(b_k))$, $t \in [\gamma^2(b_k), \infty)$. Далее, полагаем $J_k(s) = j_k(s^2)$.

В том случае, когда, например, $I_1 = (0, \infty)$, то продолжать функцию $j_1(s)$ нет необходимости, и просто предполагается, что $J_1(s)$ удовлетворяет условиям N-функции в окрестности нуля и бесконечности. Достаточно для этого потребовать, чтобы

$$\lim_{s\to 0}\frac{\gamma(s)}{s} = 0,\ \lim_{s\to\infty}\frac{\gamma(s)}{s} = \infty.$$

Покажем, что неравенство (5) обеспечивает Δ_2-условие для функции $J_k(u)$. Действительно, с учетом (19), имеем

$$G(u) \geq \frac{1}{c_\gamma}\int_0^u \gamma(s)ds \geq \frac{u\gamma(u)}{c_\gamma(c_\gamma+1)}.$$

Тогда

$$\frac{j_k'(t)t}{j_k(t)}\Big|_{t=\gamma^2(u)} \leq \frac{2j'(t)t}{j(t)}\Big|_{t=\gamma^2(u)} = \frac{u\gamma(u)}{G(u)} \leqslant c_2,\ |u| \in I_k.$$

Это неравенство влечет выполнение Δ_2-условия для функции $J_k(s)$.

Установим (25). Поскольку, ввиду (5), $c_\gamma\beta'(u) \geq c_\gamma\gamma'(u) \geq \gamma(u)/u,\ |u| \in I_k$, то

$$\frac{1}{c_\gamma\beta'(u)} \leqslant \frac{u}{\gamma(u)}\Big|_{u=\alpha(\sqrt{|t|})} = j_k'(t).$$

Далее, применив (27), имеем

$$\frac{s}{c_\gamma\beta'(u)} \leq tj_k'(t) + j_k(s) \leq c_2j_k(t)\Big|_{t=\gamma^2(u)} + j_k(s) \leq 2c_2G(u) + j_k(s),$$

откуда следует (25).

Пусть теперь $k \in N^-$. Определим функцию $h(u)$

$$h(u) = \int\limits_0^{\sqrt{|u|}} \gamma(s)ds.$$

Тогда $h'(u) = \frac{\gamma(\sqrt{|u|})}{2\sqrt{|u|}}$ – возрастающая функция при $u \in I_k$, т.е. $h(u)$ – выпуклая функция. При этом, ввиду (19),

$$\frac{h'(u)u}{h(u)} = \frac{\sqrt{|u|}\gamma(\sqrt{|u|})}{2\int\limits_0^{\sqrt{|u|}} \gamma(s)ds} > \frac{1}{2}.$$

Поэтому функция $h_k(u) = 2h(u) - h(a_k), u \in [a_k, b_k]$ может быть продолжена с промежутка I_k до выпуклой на $[0,\infty)$ функции формулами $h_k(u) = uh(a_k)/a_k,\ u \in [0, a_k]$, $h_k(u) = (u-b_k)h_k'(b_k) + h_k(b_k),\ u \in [b_k, \infty)$. Далее, по неравенству (19)

$$\frac{h_k'(u)u}{h_k(u)} \leqslant \frac{2h'(u)u}{h(u)} \leqslant c_\gamma + 1.$$

Неравенство $h_k(u^2) \leqslant 2c_\gamma G(u),\ u^2 \in I_k$ следует из определения функции h_k и (5). Положим $H_k(s) = h_k(s^2)$. Применяя (27) к функции h_k, имеем

$$s\gamma(u)/u = sh_k'(u^2) \leq u^2 h_k'(u^2) + h_k(s) \leq (c_\gamma+1)h_k(u^2) + h_k(s) \leq c_3(G(u) + H_k(\sqrt{s}))$$

Теперь (26) следует из (5). □

4. Доказательство теоремы существования.

Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u(t,x)$, принадлежащую пространствам $L_\infty((0,T); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)) \subset V(D^T)$ при каждом $T > 0$, и удовлетворяющую при $\varphi(t,x) \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$ равенству

$$[-\beta(x,u)\varphi' + b(x,u,\nabla u)\varphi] + \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x,u,\nabla u)\varphi_{x_i}] = \langle \beta(x,u_0)\varphi(0)\rangle. \tag{29}$$

Покажем, что функционал

$$\widetilde{a}(u) = b(x,u,\nabla u) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{p_i}(x,u,\nabla u)$$

ограничен в единичном шаре пространства $V(D^T)$

$$(\widetilde{a}(u), v)_{D^T} = [b(x,u,\nabla u)v] + \sum_{i=1}^n [a_{p_i}(x,u,\nabla u)v_{x_i}] = I_1 + I_2.$$

Оценим интеграл I_2 с помощью (12), (24), а также неравенства Юнга при $||v||_{V(D^T)} \leqslant 1$

$$|I_2| \leqslant \left[S(\nabla v) + \sum_{i=1}^n \overline{B}_i(a_{p_i}(x,u,\nabla u))\right] \leqslant c_1 + c\left[S(\nabla u) + \phi(x,u)\right] \leqslant c_2.$$

Оценим интеграл I_1, используя (16)

$$|I_1| \leqslant \left[c\overline{G}^{-1}\left(S(\nabla u) + \phi(x,u)\right)|v|\right] +$$
$$+c\left[\Lambda(u,\nabla u)|v|\right] \leqslant c[2S(\nabla u) + G(u) + 2G(v)] + [\Lambda(u,\nabla u)|v|] + c_3 \leqslant c_4.$$

В последнем неравенстве использованы соотношения (20), (22)

$$[\Lambda(u,\nabla u)|v|] \le \int_0^T ||v(t)||_{B^*,\Omega}||\Lambda(u,\nabla u)||_{\overline{B}^*,\Omega}dt \le c_5\int_0^T ||v(t)||_{B^*,\Omega}dt \le c_6.$$

Таким образом, ограниченность функционала $\widetilde{a}(u)$ установлена.

Приступим к построению галеркинских приближений. Выберем последовательность $\omega_k \in C_0^\infty(\Omega)$ линейно независимых функций, линейная оболочка которых плотна в $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$. Положим $\beta_m(x,u)=\int\limits_0^u \beta'_m(x,s)ds$, где

$$\beta'_m(x,u)=\varepsilon_m+\beta'(x,u)+c_+(\beta'(x,\varepsilon_m)-\beta'(x,u))\chi(0<|u|<\varepsilon_m),$$

$c_+=1$, если $1\in N^+$ и $c_+=0$, если $1\in N^-$.

Введем также функцию $g_m(x,u)=\int\limits_0^u s\beta'_m(x,s)ds$. Числа $\varepsilon_m>0$ выберем позже.

Отметим при $u>0$ неравенство

$$g(x,u)-g_m(x,u)=\int_0^u s(\beta'(x,s)-\beta'_m(x,s))ds \leqslant \tag{30}$$

$$\leqslant \int_0^{\varepsilon_m} s\beta'(x,s)ds = g(x,\varepsilon_m)\le c_\beta G(\varepsilon_m).$$

Такое же неравенство справедливо и при $u<0$. Аналогичным образом, при помощи (18) устанавливаем, что

$$g_m(x,u)-g(x,u)\le \varepsilon_m u^2/2+\int_0^{\varepsilon_m} s\beta'(x,\varepsilon_m)ds \leqslant \varepsilon_m u^2/2+c_\beta G(\varepsilon_m). \tag{31}$$

Галеркинские приближения к решению будем искать в виде

$$u_m(t,x)=\sum_{k=1}^m c_{mk}(t)\omega_k(x),$$

где функции $c_{mk}(t)$ определяются из уравнений

$$\left\langle \omega_j\frac{\partial}{\partial t}(\beta_m(x,u_m))+\sum_{i=1}^n a_{p_i}(x,u_m,\nabla u_m)(\omega_j)_{x_i}+b(x,u_m,\nabla u_m)\omega_j\right\rangle=0, \tag{32}$$

где $j=1,2,...,m$.

Убедимся, что уравнения (32) разрешимы относительно производных c'_{mk}. Очевидно, что они имеют вид

$$\sum_{k=1}^m A_{jk}(t)c'_{mk}=F_j(c_{m1},c_{m2},...,c_{mm}).$$

Матрица коэффициентов

$$A_{jk}(t)=\langle\beta'_m(x,u_m)\omega_j\omega_k\rangle$$

при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ω_k, $k=1,2,...,m$ и поэтому имеет обратную. Из уравнений (32) при начальных условиях $c_{mk}(0)$, подобранных так, чтобы $u_m(0,x)\to u_0(x)$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$, находим функции $c_{mk}(t)$.

Сначала эти функции находятся на малом промежутке времени, но установленная ниже ограниченность галеркинских приближений позволяет определить их на бесконечном промежутке времени.

Умножим уравнения (32) на $c_{mj}(t)$, просуммируем и воспользуемся определением функции g_m, тогда

$$\langle g'_m(x,u_m)u'_m + b(x,u_m,\nabla u_m)u_m\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle a_{p_i}(x,u_m,\nabla u_m)u_{mx_i}\rangle = 0.$$

Воспользовавшись неравенством (7), получим:

$$\big\langle (g_m(x,u_m))'_t + S(\nabla u_m(t)\big\rangle \leqslant c\langle G(u_m(t)) + f(x)\rangle.$$

Интегрируя по t и применяя (13), получим

$$\langle g_m(x,u_m(t))\rangle + \int\limits_{D_0^t} S(\nabla u_m)dxdt \leqslant \langle g_m(x,u_m(0))\rangle + c\int\limits_{D_0^t} G(u_m)dxdt + c_1 t.$$

Выберем ε_m так, чтобы

$$G(\varepsilon_m)c_\beta \mathrm{mes}(\Omega) \leq \frac{1}{2m}, \tag{33}$$

и

$$\langle \varepsilon_m u_m^2(0)\rangle \leq \frac{1}{m},\ m = 1,2...$$

Тогда из (30) следует неравенство

$$\langle g(x,u_m(t)) - g_m(x,u_m(t))\rangle \leqslant \int\limits_{\Omega} c_\beta G(\varepsilon_m)dx \leqslant c_\beta G(\varepsilon_m)\mathrm{mes}(\Omega) \leqslant \frac{1}{2m}.$$

Из (31) следует также ограниченность интегралов

$$\langle g_m(x,u_m(0))\rangle \leq c,\ m = 1,2...$$

Теперь, при помощи (5), устанавливаем неравенство

$$\langle G(u_m(t))\rangle + \int\limits_{D_0^t} S(\nabla u_m)dxdt \leqslant C(1+t) + c\int\limits_{D_0^t} G(u_m)dxdt.$$

По лемме Гронуола получим следующую оценку

$$\langle G(u_m(t))\rangle + [S(\nabla u_m)] \leqslant \overline{C}(T),\ \forall t\in[0,T]. \tag{34}$$

Из (34) следует ограниченность последовательности u_m в пространстве $V(D^T)$ при всех $T>0$ и в пространстве $L_\infty([0,T];L_G(\Omega))$.

Далее, умножив уравнения (32) на $c'_{mj}(t)$ и просуммировав, получим:

$$\langle \beta'_m(x,u_m(t,x))(u'_m)^2 + b(x,u_m,\nabla u_m)u'_m\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle a_{p_i}(x,u_m,\nabla u_m)u'_{mx_i}\rangle = 0,$$

или

$$\big\langle \beta'_m(x,u_m(t,x))(u'_m)^2 + (a(x,u_m,\nabla u_m))'_t\big\rangle = \langle (a_u - b)(x,u_m,\nabla u_m)u'_m\rangle.$$

Проинтегрируем последнее равенство по t:

$$[\beta'_m(x,u_m)(u'_m)^2] + \langle a(x,u_m(T,x),\nabla u_m(T,x))\rangle = \tag{35}$$

$$= \langle a(x,u_m(0),\nabla u_m(0))\rangle + [(a_u - b)(x,u_m,\nabla u_m)u'_m] = I_\Omega + I_D.$$

Воспользуемся теперь условиями (15), (16), (12), (13), тогда

$$I_\Omega = \langle a(x,u_m(0),\nabla u_m(0))\rangle \leqslant c(\langle \phi(x,u_m(0)) + S(\nabla u_m(0))\rangle \leqslant c_1.$$

Ниже будет показана ограниченность последовательности интегралов

$$I_\beta = [\beta'_m(x,u_m)(u'_m)^2] \le c. \tag{36}$$

Для оценки интеграла I_D запишем неравенства

$$[|u'_m\varphi|] \leqslant \left[(\beta'_m(x,u_m))^{\frac12}|u'_m|\frac{|\varphi|}{(\beta'_m(x,u_m))^{\frac12}}\right] \leqslant \tag{37}$$

$$\leqslant I_\beta/2 + \left[\frac{\varphi^2\chi(|u_m|>0)}{2\beta'_m(x,u_m)}\right].$$

Оценим второй интеграл в правой части последнего неравенства, пользуясь неравенством Юнга, соотношением (28) и формулой для β_m

$$\left[\frac{\varphi^2\chi(|u_m|>0)}{\beta'_m(x,u_m)}\right] \le \left[\frac{\varphi^2\chi(|u_m|>0)}{\beta'(x,u_m)}\right] + c_+\left[\frac{\varphi^2\chi(\varepsilon_m \ge |u_m|>0)}{\beta'(x,\varepsilon_m)}\right] \le$$

$$\leqslant \left[\overline{G}(u_m\gamma'(u_m)) + G\left(\frac{\varphi^2}{u_m\beta'(x,u_m)\gamma'(u_m)}\right)\right] +$$

$$+c[\varphi^2\chi(\varepsilon_m \ge |u_m|>0)].$$

Таким образом, подставляя $\varphi = (b-a_u)(x,u_m,\nabla u_m)$, $u_m\gamma'(u_m) = G'(u_m)$ и пользуясь (4),(12), имеем

$$[|u'_m\varphi|] \leqslant c_1(T) + I_\beta/2 + c_2[\phi(x,u_m) + S(\nabla u_m)].$$

Далее, применяя (13), а также (34), получаем

$$I_D \le c_3(T) + I_\beta/2.$$

Соединив оценки интегралов и равенство (35), а также применив (14),(7), будем иметь

$$\frac12[\beta'_m(x,u_m)(u'_m)^2] + \langle S(\nabla u_m(T))/\Gamma_1\rangle \leqslant c_4 + \langle\frac{1}{2\Gamma_1}\phi(x,u_m(T,x))\rangle \leqslant$$

$$\leqslant c_5 + \frac{1}{2\Gamma_1}\langle S(\nabla u_m(T))\rangle.$$

Из последнего неравенства, а также (34), устанавливаем ограниченность последовательности $(\beta'_m)^{\frac12}u'_m$ в $L_2(D^T)$. Последовательность u_m также ограничена в пространстве $L_\infty([0,T];\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega))$ при каждом $T>0$.

Теперь диагональным процессом выбираем подпоследовательность u_{m_k}, слабо сходящуюся в указанных ниже пространствах. Для упрощения записи подиндекс k в подпоследовательностях будем опускать.

$$u_m \to u \text{ слабо в } V(D^T),$$

$$(\beta'_m(x,u_m))^{\frac12}\, u'_m \to \tilde u \text{ слабо в } L_2(D^T),\ \forall T>0.$$

Поскольку u_m – ограниченная последовательность в $L_\infty((0,T);\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega))$, то $\widetilde{a}(u_m)$ – ограниченная последовательность в пространстве $(V(D^T))'$, и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$$\tilde a(u_m) \to \chi \qquad \text{слабо в } (V(D^T))'.$$

Сходимость имеет место при каждом $T = 1,2,...$, причем предельные функции совпадают в общей области определения. Тогда, фактически, сходимость имеет место при любом $T>0$.

Ниже будет доказано, что $\tilde u = (\beta'(x,u))^{\frac12}\, u'$, $\chi = \tilde a(u)$, и функция u является обобщенным решением задачи (1)–(3). Соответствующие рассуждения разобьем на три шага.

Шаг 1. Последовательность $u_m(t)$ ограничена в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ на любом конечном промежутке $t \in [0,T]$:

$$||u_m(t)||_{W^1_{G,B}(\Omega)} \leqslant C(T),\ m = 1,2,...$$

Зафиксируем счетное плотное подмножество $\{t_s\} \subset [0,\infty]$. Можно считать, что $t_0 = 0$. Для ограниченной области Ω известна компактность вложения $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega) \subset L_1(\Omega)$. Так как $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$, то диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(t_s) \to h_s$ сильно в $L_1(\Omega)$ при всех натуральных s. Выбирая еще раз подпоследовательность, можно считать также (отбрасывая подиндексы), что $u_m(t_s,x) \to h_s(x)$ почти всюду в Ω при каждом t_s. В частности, при $t_0 = 0$ имеем $u_m(0,x) \to u_0(x)$ почти всюду в Ω.

Для следующего шага используем лемму, доказанную в [16].

Лемма 3. *Пусть последовательность $v_m(t) \in C([0,T];L_2(\Omega))$ обладает свойствами:*
1) $v_m(t_s,x)$ сходится почти всюду в Ω при каждом t_s ;
2) последовательность v'_m ограничена в $L_2(D^T)$.

Тогда можно выделить подпоследовательность v_{m_k}, сходящуюся к функции v в пространстве $C([0,T];L_1(\Omega))$, и $v_{m_k} \to v$ почти всюду в $(0,T)\times\Omega$.

Шаг 2. К последовательности $v_m = f_m(x,u_m) = \int\limits_0^{u_m} (\beta'_m(x,\tau)-\varepsilon_m)^{\frac{1}{2}} d\tau$ применим лемму 3. При этом последовательность $v'_m = (\beta'_m - \varepsilon_m)^{\frac{1}{2}} u'_m$ ограничена ввиду (36). Ниже установим равномерную сходимость $f_m(x,u) \to f(x,u) = \int\limits_0^{u} (\beta'(x,\tau))^{\frac{1}{2}} d\tau, m \to \infty$ по u при почти всех фиксированных $x \in \Omega$, что влечет первое условие леммы. Принадлежность $v_m(t)$ к $L_2(\Omega)$ следует из ее гладкости и ограниченности $\beta_m(x,u)$ на конечных интервалах по u:

$$v_m^2 \le |u_m| \int\limits_0^{|u_m|} (\beta'_m(x,\tau) - \varepsilon_m) d\tau \le |u_m| \int\limits_0^{|u_m|} c_\beta \gamma'(\tau) d\tau.$$

Указанная выше равномерная сходимость $f_m(x,u) \to f(x,u)$ по u при $x \in \Omega$ легко следует из равенства

$$f_m(x,u) - f(x,u) = \int\limits_0^{\varepsilon_m} ((\beta'_m(x,\tau) - \varepsilon_m)^{\frac{1}{2}} - (\beta'(x,\tau))^{\frac{1}{2}}) d\tau$$

и неравенства Коши-Буняковского:

$$\left(\int\limits_0^{\varepsilon_m} (\beta'(x,\tau))^{\frac{1}{2}} d\tau \right)^2 \leqslant \varepsilon_m \int\limits_0^{\varepsilon_m} \beta'(x,\tau) d\tau \to 0.$$

Пользуясь леммой 3 и произвольностью $r > 0$, $T = 1,2,...$, диагональным процессом можно выделить подпоследовательность v_{m_k}, сходящуюся в D почти всюду. Так как $f(x,u)$ возрастающая по u непрерывная функция и имеет обратную, то из равенства $v_m = (f_m(x,u_m) - f(x,u_m)) + f(x,u_m) = \nu_m + f(x,u_m), \nu_m \to 0$, находим, что $u_m = f^{-1}(x, v_m - \nu_m)$. Тогда из сходимости последовательности v_{m_k} следует сходимость последовательности u_{m_k} почти всюду в D к u. То, что предельная функция будет именно u, вытекает из следующего утверждения:

Лемма 4. *Пусть последовательность z_m сходится к z почти всюду в Q и ограничена в $L_B(Q)$. Тогда $z_m \to z$ слабо в $L_B(Q)$.*

Доказательство этой леммы, приведенное в [2, гл.1, §1.4, лемма 1.3]) для $L_q(Q)$, $q>1$, очевидным образом переносится на общий случай.

Благодаря слабой сходимости $u_m \to u$ в $V(D^T)$ и непрерывности вложения $V(D^T)\subset L_1([0,T]\times\Omega)$ имеется слабая сходимость $u_m\to u$ в $L_1([0,T]\times\Omega)$. Из леммы 4 следует также, что $v_{m_k}\to v=f(x,u)$ слабо в $L_2(D^T)$ при каждом $T>0$.

Из леммы 3 известно, что $v_{m_k}(T)\to v(T)$ в $L_1(\Omega)$. Тогда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в Ω: $v_{m_k}(T,x)\to v(T,x) \ \Rightarrow\ u_{m_k}(T,x)\to u(T,x)$ почти всюду в Ω . Точно также устанавливается, что $u_{m_k}(0,x)\to u(0,x)$ почти всюду в Ω, т.е.

$$u(0,x)=u_0(x).$$

Ограниченность последовательности $u_m(T)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ постоянной $C(T)$ позволяет выделить подпоследовательность такую, что

$$u_{m_k}(T)\to u(T) \ \text{ слабо в } \ \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega), \text{ при фиксированном } T.$$

Поскольку постоянная $C(T)$ возрастает по T, отсюда следует, что
$u\in L_{\infty,\mathrm{loc}}([0,\infty);\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega))$.

Далее, $(v'_m,\varphi)_{D^T}=-(v_m,\varphi')_{D^T},\ \varphi\in C_0^\infty(D^T)$.
Переходя к пределу, получим

$$(\tilde{u},\varphi)_{D^T}=-(v,\varphi')_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{u}=v'=(\beta'(x,u))^{\frac12}u'$.

Покажем теперь, что последовательность $\beta(x,u_m(t))$ ограничена в $L_{\overline{G}}(\Omega)$ постоянной, не зависящей от $t\in[0,T]$. Сначала установим неравенство, используя (5),

$$\overline{G}(\frac{\beta(x,u_m)}{c_\beta c_\gamma})\leqslant \overline{G}(\frac{\gamma(u_m)}{c_\gamma})\leqslant \overline{G}(u\gamma'(u_m))=\overline{G}(G'(u_m))\leqslant cG(u_m).$$

Ограниченность последовательности $\beta(x,u_m(t))$ установлена. В частности, она ограничена в пространстве $L_{\overline{G}}(D^T)$. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся в $L_{\overline{G}}(D^T)$ к функции $\beta(x,u)$. Действительно, сходимость последовательности u_m к u почти всюду в D^T, и лемма 4 обеспечивают требуемое.

Для дальнейших предельных переходов определим оператор $T_ku=u^{(a_k,b_k)}$, где

$$u^{(a,b)}=\begin{cases}0, \quad \text{при} \quad |u|\le a,\\ u-a\mathrm{sign}u, \quad \text{при} \quad a<|u|<b,\\ (b-a)\mathrm{sign}u, \quad \text{при} \quad |u|\ge b.\end{cases}$$

Положим также

$$T_k^\beta\beta(x,u_m)=\beta(x,a_k\mathrm{sign}u_m+T_ku_m)-\beta(x,a_k\mathrm{sign}u_m);T_k^\beta\beta(x,u_m)\in L_{\overline{G}}(D^T).$$

Отметим очевидные формулы, которые будут использоваться ниже.

$$(T_k^\beta\beta(x,u_m))'=\beta'(x,u_m)(T_ku_m)'=\beta'(x,u_m)u'_m\chi(|u_m|\in I_k)).$$

$$u_m=\sum_k T_ku_m.$$

Покажем, что последовательность

$$\beta'(x,u_m)u'_m\chi(|u_m|\in I_k)=\beta'(x,u_m)(T_ku_m)',\ k\in N^-,$$

ограничена в $L_{\overline{H_k}}(D^T)$. В самом деле, ввиду (36),(5) и леммы 2

$$|[\beta'(x,u_m)u'_m\varphi\chi(|u_m|\in I_k)]|\le c[(\beta')^{\frac12}|u'_m\varphi|(\gamma'(u_m))^{\frac12}\chi(|u_m|\in I_k)]\leqslant$$

$$\leqslant c_1||\varphi(\gamma'(u_m))^{\frac12}\chi(|u_m|\in I_k)||_{L_2(D^T)}\leqslant$$

$$\leq c_2[H_k(\varphi) + G(u_m)]^{\frac{1}{2}} \leqslant c_3, \text{ при } [H_k(\varphi)] \leq 1.$$

Следовательно, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$$\beta'(x, u_m)u_m'\chi(|u_m| \in I_k) \to \overline{u} \in L_{\overline{H_k}}(D^T).$$

Применяя диагональный процесс, можно добиться слабой сходимости выделенной последовательности при каждом $k \in N^-$. Переходя к пределу в равенстве

$$[T_k^\beta \beta(x, u_m)\varphi'] = -[\beta'(x, u_m)(T_k u_m)'\varphi], \ \varphi \in C_0^\infty(D^T),$$

получаем, что

$$[T_k^\beta \beta(x, u)\varphi'] = -[\overline{u}\varphi],$$

то есть

$$(T_k^\beta \beta(x, u))_t' = \overline{u} \in L_{\overline{H_k}}(D^T), k \in N^-. \tag{38}$$

Установим ограниченность последовательности $(T_k u_m)' = u_m'\chi(|u_m| \in I_k)$ при $k \in N^+$ в пространстве $L_{\overline{J_k}}(D^T)$. Действительно, ввиду (37),(36) и леммы 2,

$$[|u_m'\varphi|\chi(|u_m| \in I_k)] \leqslant I_\beta/2 + [J_k(\varphi) + G(u_m)] \leq c_1, \text{ при } [J_k(\varphi)] \leq 1.$$

Аналогично (38), находим, что

$$(T_k u)' = u'\chi(|u| \in I_k) \in L_{\overline{J_k}}(D^T), \ k \in N^+. \tag{39}$$

Шаг 3. Переходим к доказательству равенства $\chi = \tilde{a}(u)$. Умножим уравнение (32) на гладкую функцию $d_j(t)$ и проинтегрируем по t, обозначив $d_j(t)\omega_j(x)$ через φ в конечном выражении

$$[\beta_m'(x, u_m)u_m'\varphi] + (\tilde{a}(u_m), \varphi)_{D^T} = 0. \tag{40}$$

Преобразуем первое слагаемое

$$[\beta_m'(x, u_m)u_m'\varphi] = [\beta'(x, u_m)u_m'\varphi] + A_m,$$

где

$$A_m = [(\varepsilon_m + c_+(\beta'(x, \varepsilon_m) - \beta'(x, u_m))\chi(0 < |u_m| < \varepsilon_m)))u_m'\varphi] = -[(\mu_m)'\varphi].$$

$$\mu_m = (c_+\beta(x, u_m) - (\varepsilon_m + c_+\beta'(x, \varepsilon_m))u_m) \text{ при } |u_m| < \varepsilon_m.$$

Покажем, что $A_m \to 0$ при $m \to \infty$.

$$A_m = [\mu_m\varphi'] - \langle\mu_m(T)\varphi(T)\rangle + \langle\mu_m(0)\varphi(0)\rangle \to 0.$$

Последнее следует из (5), поскольку φ имеет компактный носитель и

$$|\mu_m + \varepsilon_m u_m| \leq \gamma(\varepsilon_m) + \varepsilon_m\gamma'(\varepsilon_m) \to 0.$$

После интегрирования по частям в формуле (40) будем иметь

$$A_m - [\beta(x, u_m)\varphi'] + \langle\beta(x, u_m(T))\varphi(T)\rangle - \langle\beta(x, u_m(0))\varphi(0)\rangle + (\tilde{a}(u_m), \varphi)_{D^T} = 0.$$

Выше отмечалась слабая сходимость последовательностей $\beta(x, u_m)$, $\beta(x, u_m(T))$ в пространствах $L_{\overline{G}}(D^T)$, $L_{\overline{G}}(\Omega)$ соответственно. Тогда, после предельного перехода, получим

$$-[\beta(x, u)\varphi'] + \langle\beta(x, u(T))\varphi(T)\rangle - \langle\beta(x, u(0))\varphi(0)\rangle + (\chi, \varphi)_{D^T} = 0. \tag{41}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\beta(x, u) = \chi$ в смысле распределений и, следовательно, $\beta(x, u) \in C_w([0, \infty); L_{\overline{G}}(\Omega))$.

Таким образом, u будет являться обобщенным решением задачи (1)–(3), если будет установлено, что $\chi = \tilde{a}(u)$. Теперь обоснуем возможность подстановки в формулу (41) $\varphi = u$. Для этого подставим сначала в нее функцию $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, равную нулю при $|u| \leqslant \varepsilon$, и проведем интегрирование по частям

$$-[T_k^\beta \beta(x, u)\varphi'] + \langle T_k^\beta \beta(x, u(T))\varphi(T)\rangle -$$

$$-\langle T_k^\beta \beta(x, u(0))\varphi(0)\rangle = [(T_k^\beta \beta(x, u))'\varphi] = [\beta'(x, u)(T_k u)'\varphi].$$

Сходимость интеграла справа следует из (38), (39), и неравенства (см. (5))

$$\beta'(x,u) \le c_\beta \gamma'(|u|) \le c_1\gamma(|u|)/|u| \le c_2,\ |u| \in [\varepsilon, b_k].$$

Таким образом, (41) обретает вид

$$[\beta'(x,u)u'\varphi] + (\chi, \varphi)_{D^T} = 0. \tag{42}$$

Предельным переходом обосновывается подстановка в (42) ограниченной функции $\varphi = u^{(\varepsilon,k)}\xi$, $\xi(x)$ – липшицева функция с ограниченным носителем.

$$[\beta'(x,u)u'u^{(\varepsilon,k)}\xi] + (\chi, u^{(\varepsilon,k)}\xi)_{D^T} = 0. \tag{43}$$

Пусть $w_m = (g(x,u_m))^{\frac{1}{2}}$, $w_m \to w = (g(x,u))^{\frac{1}{2}}$ почти всюду в D^T. Если будет установлено, что $w \in L_2(D^T)$ имеет обобщенную производную $w_t \in L_2(D^T)$, то будет выполнено тождество

$$[\beta'(x,u)u'u] = \int\limits_0^T \frac{\partial}{\partial t}||w||_2^2 dt = ||w(T)||_{L_2(\Omega)} - ||w(0)||_{L_2(\Omega)}. \tag{44}$$

Воспользуемся (5)

$$\int\limits_\Omega g(x, u_m(T,x))dx \leqslant c_1 \int\limits_\Omega G(u_m(T,x))dx < c_2. \tag{45}$$

Значит последовательность $w_m(T)$ ограничена в $L_2(\Omega)$, и по лемме 4 из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $w(T)$ слабо в $L_2(\Omega)$. Заметим, что тогда $||w||_2^2 = \lim(w, w_m) \leqslant \liminf ||w||_2||w_m||_2$. Откуда следует неравенство

$$\liminf ||g(x, u_m(T))||_{L_1(\Omega)} \ge ||g(x, u(T))||_{L_1(\Omega)}. \tag{46}$$

Проинтегрировав неравенство (45) по T, получаем, что последовательность w_m ограничена в $L_2(D^T)$, и по лемме 4 из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к w слабо в $L_2(D^T)$.

Для доказательства того, что $w' \in L_2(D^T)$, применим условие (18), тогда

$$\left[\left((g^{\frac{1}{2}}(x,u_m))'\right)^2\right] = \left[\left(\frac{g'(x,u_m)u'_m}{2g^{\frac{1}{2}}(x,u_m)}\right)^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant \left[\frac{\alpha(g'(x,u_m))^2(u'_m)^2}{2ug'(x,u_m)}\right] = \frac{\alpha}{2}\left[\beta'(x,u_m)(u'_m)^2\right] = \frac{\alpha}{2} I_\beta < c_3.$$

Следовательно, w'_m слабо сходится к $\overline{w}$ в $L_2(D^T)$. Далее, $[w_m\varphi'] = -[w'_m\varphi]$, $\varphi \in C_0^\infty(D^T)$. Переходя к пределу, получим $[w\varphi'] = -[\overline{w}\varphi]$. Значит $\overline{w} = w' = (g^{\frac{1}{2}}(x,u))'_t$, (44) установлено и $\beta'(x,u)u'u \in L_1(D^T)$.

Положим $u^{(h)} = u^{(h,\infty)}$. По теореме Лебега об ограниченной сходимости допустим предельный переход в (43) сначала по $k \to \infty$

$$[\beta'(x,u)u'u^{(\varepsilon)}\xi] + (\chi, u^{(\varepsilon)}\xi)_{D^T} = 0,$$

затем по $\varepsilon \to 0$. Получим $(u^{(0)} = u)$

$$[\beta'(x,u)u'u\xi] + (\chi, u\xi)_{D^T} = 0.$$

Поскольку $\beta'(x,u)u'u \in L_1(D^T)$, то, совершая предельный переход по подходящей неубывающей последовательности $\xi_m \to 1$, такой, что $u\xi_m \to u$ в $V(D^T)$, будем иметь

$$[\beta'(x,u)u'u] + (\chi, u)_{D^T} = 0.$$

Применяя (44), получаем

$$(-\chi, u)_{D^T} = [\beta'(x,u)u'u] = \langle g(x,u(T)) - g(x,u(0))\rangle. \tag{47}$$

Далее используется монотонность оператора $\tilde{a}$:

$$X_m = (\tilde{a}(u_m) - \tilde{a}(h), u_m - h)_{D^T} \geq 0, \quad \forall h \in V(D^T).$$

Из уравнений (40) при $\varphi = u_m$ легко выводятся соотношения

$$(\tilde{a}(u_m), u_m)_{D^T} = ||g_m(x, u_m(0))||_{L_1(\Omega)} - ||g_m(x, u_m(T))||_{L_1(\Omega)}.$$

Поэтому

$$X_m = ||g_m(x, u_m(0))||_{L_1(\Omega)} - ||g_m(x, u_m(T))||_{L_1(\Omega)} - (\tilde{a}(u_m), h)_{D^T} - (\tilde{a}(h), u_m - h)_{D^T}.$$

Далее, пользуясь (46), выводим

$$0 \leq \limsup X_m \leqslant ||g(x, u(0))||_{L_1(\Omega)} - ||g(x, u(T))||_{L_1(\Omega)} -$$
$$- (\chi, h)_{D^T} - (\tilde{a}(h), u - h)_{D^T}.$$

Применив (47), получим

$$(\chi - \tilde{a}(h), u - h)_{D^T} \geq 0.$$

Положим $h = u - \lambda\omega, \quad \lambda > 0, \quad \omega \in L_\infty((0,T); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega))$, тогда

$$\lambda(\chi - \tilde{a}(u - \lambda\omega), \omega)_{D^T} \geq 0.$$

Устремляя $\lambda \to 0$, будем иметь $(\chi - \tilde{a}(u), \omega)_{D^T} \geq 0, \quad \forall \omega \in L_\infty((0,T); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega))$. Отсюда $\chi = \tilde{a}(u)$.

5. Примеры

Приведем теперь примеры уравнений, удовлетворяющих условиям из введения.

5.1. Пример 1.

5.1. Пример 1. Рассмотрим уравнение вида

$$(\gamma(u))_t = \sum_{i=1}^{n} (B_i'(u_{x_i}) + \Psi_i(x))_{x_i} + \Phi(x), \tag{48}$$

где B_i – N-функции, $\Psi_i(x) \in L_{\overline{B}_i}(\Omega)$, $\Phi(x) \in L_{\overline{G}}(\Omega)$, $\gamma'(u)$ – четная неограниченная функция, убывающая на $(0, \infty)$, такая, что выполнено условие (5). Тогда N^- пусто и $N^+ = \{1\}$.

Несложно проверить, что условия (7), (12)–(16) выполнены, и справедлива теорема 1.

Несмотря на длинный список условий во введении, имеется широкий класс уравнений, им удовлетворяющих. Однако мы ограничимся лишь еще одним конкретным примером.

5.2. Пример 2. Введем следующее обозначение

$$t^{[a,b]} = \begin{cases} |t|^a, & \text{при} \ |t| < 1, \\ |t|^b, & \text{при} \ |t| \geq 1. \end{cases}$$

Пусть $n = 2$ и область Ω ограничена. Выберем N-функции $B_1(s), B_2(s), G(s)$, а также функции $\beta_1(x,u), \gamma(x,u), a(x,u,p), \ b(x,u,p)$ следующим образом

$$B_1(s) = s^{5/2}, \ B_2(s) = s^{3/2}, \ G(s) = |s|^{3/2} + |s|^{5/2}, \ \gamma'(s) = \frac{3}{2}|s|^{-1/2} + \frac{5}{2}s^{1/2},$$

$$a(x,u,p) = 2/5B_1(p_1) + 2/3B_2(p_2)\frac{2+|x|}{1+|x|} + \frac{p_1^2 + |p_2|^{5/4}}{|u|+1} + u^2,$$

$$b(x,u,p) = a_u(x,u,p) + u|p_1|^{[2,1/2]},$$

$$\beta(x,u) = (3|u|^{1/2} + \frac{5}{3}|u|^{3/2})\mathrm{sgn} u \frac{2+|x|}{1+|x|}.$$

Проверим, что оператор $\widetilde{a}$ – монотонный. Вычисляя гессиан функции $\frac{p_1^2}{|u|+1}$, устанавливаем его неотрицательность и убеждаемся в выпуклости этой функции. Выпуклой является также функция $\frac{|p_2|^{5/4}}{|u|+1}$. Далее, установим неравенство

$$F = (|s_1|^{3/2}\mathrm{sign}s_1 - s_2^{3/2}\mathrm{sign}s_2)(s_1 - s_2) + (u_1 - u_2)^2 + (|s_1|^{[2,1/2]} - |s_2|^{[2,1/2]})(u_1 - u_2) \geq 0,$$

которое, вместе с отмеченной выше выпуклостью функций, обеспечивает условие монотонности (6).

1) Пусть сначала $s_1 s_2 \leqslant 0$. Тогда достаточно установить неравенство

$$(|s_1|^{5/2} + |s_2|^{5/2}) + (u_1 - u_2)^2 + (|s_1|^{[2,1/2]} - |s_2|^{[2,1/2]})(u_1 - u_2) \geq 0,$$

справедливость которого легко проверить, рассматривая случаи $|s_1| < 1$ и $|s_1| \geq 1$ при помощи неравенства $B^2 < 4AC, A > 0 \Rightarrow A + B + C \geq 0$.

2) Пусть теперь числа s_1, s_2 имеют одинаковые знаки. После переобозначений можно считать, что эти числа неотрицательны и $s_1 \geq s_2$. Далее,

$$(|s_1|^{3/2}s_1 - |s_2|^{3/2}s_2)(s_1 - s_2) \geq (s_1 - s_2)^2(s_1^2 + s_2^2)/(|s_1|^{3/2} + |s_2|^{3/2}) \geq (s_1 - s_2)^2|s_1|^{1/2}/2;$$

$$|s_1|^{[2,1/2]} - |s_2|^{[2,1/2]} \leq 2(s_1 - s_2)|s_1|^{[1,-1/2]}.$$

Теперь нетрудно убедиться в неотрицательности функции F.

Пользуясь установленными соотношениями, завершаем доказательство монотонности оператора $\widetilde{a}$.

Прямыми вычислениями находим, что $\Theta(s) = s^{1/30}$, интеграл (10) расходится и $B^*(s) = (s/30)^{30}$.

Несложно проверить, что для данных функций выполнены условия (5), (7), (12)–(16), и утверждение теоремы 1 справедливо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P.A. Raviart *Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. 5. 1970. P. 209–328.
2. Лионс Ж.А. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* Издательство "Мир". Москва. 1972. 587 с.
3. H.W. Alt, S. Luckhaus *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations* // Math. Z. 183. 1983. P. 311–341.
4. Лаптев Г.И. *Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 9. С. 83–112.
5. F. Bernis *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains* // Math. Ann. 279. 1988. P. 373–394.
6. S. Antontsev, S. Shmarev *Parabolic equations with double variable nonlinearities* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 33–48.
7. Антонцев С.Н., Шмарев С.И. *Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности* // Фундамент. и прикл. матем. Т. 12, № 4. 2006. С. 3–19.
8. Алхутов Ю.А., Жиков В.В. *Теоремы существования решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 21–32.
9. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 3. С. 3—14.
10. Андриянова Э.Р. *Оценки скорости убывания решения параболического уравнения с нестепенными нелинейностями* // Уфимск. матем. журн. 2014. Т. 6, № 2. С. 3—25.
11. A. Bamberger *Etude d'une equation doublement non lineaire* // J. Funct. Anal. 24. 1977. P. 148–155.

12. Иванов А.В., Мкртычян П.З., Ягер В. *Существование и единственность регулярного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса дважды нелинейных параболических уравнений* // С.-Петербургское отделение института математики им. В. А. Стеклова РАН 359. 1993. С. 209–328.
13. Мкртычян П.З. *О единственности решения второй начально-краевой задачи для уравнения политропической неньютоновской фильтрации* // Записки научных семинаров ПОМИ 200, 1992. С. 110-–117.
14. J. Carrillo, P. Wittbold *Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems* // J. Differential Equations 156. 1999. P. 93–121.
15. N. Calvo, J. I. Diaz, J. Durany, E. Schiavi, C. Vazquez *On a doubly nonlinear parabolic obstacle problem modelling ice sheet dinamics* // SIAM J. Appl. Math. 63. 2002. P. 683–707.
16. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решения параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Математический сборник. Москва. 2013. Т. 204, № 7. С. 3–28.
17. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях* Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, № 1. С. 63–82.
18. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *О решениях анизотропных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* Матем. сб. 2014. Т. 205, № 1. С. 9–46.
19. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Решения анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью в неограниченных областях* // Вестн. Сам. гос. техн. 2013. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки Т. 1(30). С. 82–89.
20. S.N. Antontsev, S.I. Shmarev *Extinction of Solutions of Parabolic Equations with Variable Anisotropic Nonlinearities* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 16–25.
21. S. Antontsev, S. Shmarev *On the blow-up of solutions to anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 33–48.
22. Рутицкий Я.Б., Красносельский М.А. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* Гос. издательство физ.-мат. лит.-ры. Москва. 1958. 587 с.
23. Королев А.Г. *Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева-Орлича* Вестн. Москов. ун.-та. 1983. Т. 4.

Элина Радиковна Андриянова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Elina.Andriyanov@mail.ru`

Мукминов Фарит Хамзаевич
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `mfkh@rambler.ru`