ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 19-31.

УДК 517.53

ДВУСТОРОННЯЯ ОЦЕНКА K-ПОРЯДКА РЯДА ДИРИХЛЕ В ПОЛУПОЛОСЕ

Н.Н. АИТКУЖИНА, А.М. ГАЙСИН

Аннотация. Изучаются ряды Дирихле, сходящиеся лишь в полуплоскости, последовательность показателей которых допускает расширение до некоторой „правильной“ последовательности. Установлены неулучшаемые оценки k-порядка суммы ряда Дирихле в полуполосе, ширина которой зависит от специальной плотности распределения показателей.

Ключевые слова: k-порядок ряда Дирихле в полуполосе, целые функции заданного роста на вещественной оси.

Mathematics Subject Classification: 30D10

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$—последовательность, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\lambda_n} = H < \infty. \tag{1}$$

При изучении целых функций

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{2}$$

определённых всюду сходящимися рядами Дирихле, в своё время Риттом было введено понятие R—порядка. Приведём определение этой величины.

Порядком по Ритту (R—порядком) целой функции F, определённой рядом (2), называется величина [1]

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln\ln M(\sigma)}{\sigma},$$

где $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Отметим, что в силу условия (1) ряд сходится во всей плоскости абсолютно. Известно, что $\ln M(\sigma)$—возрастающая выпуклая функция от σ, $\lim\limits_{\sigma\to+\infty} \ln M(\sigma) = +\infty$.

Рассмотрим полосу $S(a, t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a\}$. Положим $M_s(\sigma) = \max\limits_{|t-t_0|\le a} |F(\sigma + it)|$. Величина

$$\rho_s = \overline{\lim_{\sigma\to+\infty}} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{\sigma} \quad (a^+ = \max(a, 0))$$

называется R—порядком функции F в полосе $S(a, t_0)$.

N.N. Aitkuzhina, A.M. Gaisin, k-Order estimate for Dirichlet series in a half-strip.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 14-01-00720, 14-01-97037), Программы фундаментальных исследований Отделения математики РАН „Современные проблемы теоретической математики“: проект „Комплексный анализ и функциональные уравнения“.)

Поступила 24 сентября 2014 г.

Пусть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty, \qquad D^* = \overline{\lim_{\lambda\to+\infty}} \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda D(x)dx,$$

где $D(x) = \frac{n(x)}{x}$, $n(x) = \sum\limits_{\lambda_n\le x} 1$ (D—верхняя плотность, D^*—усреднённая верхняя плотность последовательности Λ). Известно, что $D^* \le D \le eD^*$ [2]. В [2] доказано, что если

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0,$$

то R—порядок ρ_s функции F в полосе $S(a,t_0)$ при $a > \pi D^*$ равен R—порядку ρ_R во всей плоскости. Наиболее общий результат о связи между величинами ρ_R и ρ_s установлен А.Ф. Леонтьевым [3].

Аналогичные вопросы в случае, когда $H = 0$, а область сходимости ряда (2)—полуплоскость $\Pi_0 = \{s = \sigma + it : \sigma < 0\}$, исследованы А.М. Гайсиным в [4].

При $H = 0$, если ряд (2) сходится в полуплоскости Π_0, то он сходится в Π_0 и абсолютно. Тогда сумма ряда F аналитична в данной полуплоскости. Класс всех аналитических функций, представимых рядами Дирихле (2), сходящимися лишь в полуплоскости Π_0, обозначим через $D_0(\Lambda)$.

Пусть $S(a,t_0) = \{s = \sigma + it : |t - t_0| \le a, \sigma < 0\}$—полуполоса. Величины

$$\rho_R = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln^+ \ln M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}, \qquad \rho_s = \overline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln^+ \ln M_s(\sigma)}{|\sigma|^{-1}}$$

называются порядками по Ритту функции F в полуплоскости Π_0 и полуполосе $S(a,t_0)$ [4]. В дальнейшем ρ_R и ρ_s будем называть порядками в полуплоскости и полуполосе. Если это необходимо, вместо ρ_R и ρ_s будем писать $\rho_R(F)$ и $\rho_s(F)$.

В [4] показано, что если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln n = 0,$$

то порядок ρ_R любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ равен

$$\rho_R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln^+ |a_n|. \tag{3}$$

Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность D. Тогда

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = x + iy)$$

—целая функция экспоненциального типа. Пусть $h(\varphi)$—индикатриса роста функции $L(z)$. Тогда $\tau = h(\pm\frac{\pi}{2}) \le \pi D^*$ [2]. Очевидно, τ—тип функции $L(z)$. Пусть

$$|L(x)| \le e^{g(x)}\, (x \ge 0), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)\ln x}{x} = 0, \tag{4}$$

где g – некоторая неотрицательная на $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ функция. В этом случае $h(0) = h(\pi) = 0$. Следовательно, сопряжённая диаграмма функции $L(z)$ есть отрезок $I = [-\tau i, \tau i]$, $h(\varphi) = \tau|\sin\varphi|$.

В [4] доказана следующая

Теорема I. *Пусть функция $L(z)$ удовлетворяет условиям (4) и имеет тип τ $(0 \le \tau < \infty)$. Положим $q = q(L)$, где*

$$q(L) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n} \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_n)}\right|. \tag{5}$$

Тогда порядок ρ_s в полуполосе $S(a,t_0)$ при $a>\tau$ и порядок ρ_R любой функции $F\in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости Π_0 удовлетворяют оценкам

$$\rho_s \le \rho_R \le \rho_s + q. \tag{6}$$

Для полуполосы $S(a,t_0)$ при $a<\tau$ правая оценка в (6), вообще говоря, не верна [4].

Ясно, что левая оценка в (6) точна. Действительно, если $t_0=0$, а коэффициенты $a_n>0$, то $M(\sigma)=M_s(\sigma)$, и $\rho_R=\rho_s$. В [4] показано, что если Λ—последовательность всех нулей функции типа синуса, то существует функция $F\in D_0(\Lambda)$, для которой $\rho_R=\rho_s+q$ при $a>\tau$. В общей ситуации правая оценка (6) не точна, более того, пара условий (4) может и не выполняться. Однако может существовать целая функция экспоненциального типа Q с простыми нулями в точках последовательности Λ, для которой условия (4) будут выполнены, причём $q(Q)=q^*$, где

$$q^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln\lambda_n}{\lambda_n}\int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}dt,$$

$q(Q)$—величина, определяемая точно так же, что и $q(L)$ в (5), а $n(\lambda_n;t)$ — число точек $\lambda_k\ne\lambda_n$ из отрезка $\{x:|x-\lambda_n|\le t\}$. Построению таких целых функций Q с заданным нулевым подмножеством Λ и требуемой асимптотикой на вещественной оси посвящена статья [5]. Оказывается, в терминах специальной плотности $G(R)$ распределения точек последовательности Λ можно указать достаточно общие, но простые и наглядные условия, при выполнении которых справедлива оценка

$$\rho_R \le \rho_s + q^*$$

(ρ_s—порядок в полуполосе $S(a,t_0)$ ширины больше, чем $2\pi G(R)$), не улучшаемая в классе $D_0(\Lambda)$ [6]. Цель статьи – обобщить и уточнить результаты работ [6], [4] на случай k-порядков.

§1. Необходимые сведения. Леммы

1^0. Специальные плотности распределения последовательности Λ. Пусть $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow\infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, L — класс положительных, непрерывных и неограниченно возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Через K обозначим подкласс функций h из L, таких, что $h(0)=0$, $h(t)=o(t)$ при $t\to\infty$, $\frac{h(t)}{t}\downarrow$ при $t\uparrow$ ($\frac{h(t)}{t}$ монотонно убывает при $t>0$). В частности, если $h\in K$, то $h(2t)\le 2h(t)$ $(t>0)$, $h(t)\le h(1)t$ при $t\ge1$.

K — плотностью последовательности Λ называется величина

$$G(K)=\inf_{h\in K}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)}, \tag{7}$$

где $\omega(t)=[t,t+h(t))$ — полуинтервал, $\mu_\Lambda(\omega(t))$ — число точек из Λ, попавших в полуинтервал $\omega(t)$.

Пусть $\Omega=\{\omega\}$ — семейство полуинтервалов вида $\omega=[a,b)$. Через $|\omega|$ будем обозначать длину ω. Всякая последовательность $\Lambda=\{\lambda_n\}$ $(0<\ \lambda_n\uparrow\infty)$ порождает целочисленную считающую меру μ_Λ:

$$\mu_\Lambda(\omega)=\sum_{\lambda_n\in\omega}1,\quad \omega\in\Omega.$$

Пусть μ_Γ — считающая мера, порождённая последовательностью $\Gamma=\{\mu_n\}$ $(0<\mu_n\uparrow\infty)$. Тогда включение $\Lambda\subset\Gamma$ означает, что $\mu_\Lambda(\omega)\le\mu_\Gamma(\omega)$ для любого $\omega\in\Omega$. В этом случае говорят, что мера μ_Γ мажорирует меру μ_Λ.

Через $D(K)$ обозначим точную нижнюю грань тех чисел $b \quad (0 \le b < \infty)$, для каждого из которых существует мера μ_Γ, мажорирующая μ_Λ, такая, что для некоторой функции $h \in K$

$$|M(t) - bt| \le h(t) \qquad (t \ge 0). \tag{8}$$

Здесь $\Lambda = \{\lambda_n\},\ \Gamma = \{\mu_n\},\ M(t) = \sum\limits_{\mu_n \le t} 1.$

Лемма 1 [6].*Величины $D(K)$ и $G(K)$ совпадают: $D(K) = G(K)$.*

2^0. Существование целых функций с правильным поведением на вещественной оси. Пусть L и K — классы функций, введённые выше,

$$S = \left\{ h \in K:\ d(h) = \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{h(x)\ln h(x)}{x \ln \frac{x}{h(x)}} < \infty \right\}.$$

Теорема II [6]. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную S — плотность $G(S)$. Тогда для любого $b > G(S)$ существует последовательность $\Gamma = \{\mu_n\} \quad (0 < \mu_n \uparrow \infty)$, содержащая Λ и имеющая плотность b, такая, что целая функция экспоненциального типа πb*

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) \qquad (z = x + iy) \tag{9}$$

обладает свойствами:

1) $Q(\lambda_n) = 0,\ Q'(\lambda_n) \ne 0$ для любого $\lambda_n \in \Lambda$;

2) существует $H \in S$, такая, что:

$$\ln|Q(x)| \le AH(x)\ln^+ \frac{x}{H(x)} + B; \tag{10}$$

3) если $\Lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n \le x} 1$, и

$$\Lambda(x+\rho) - \Lambda(x) \le a\rho + b + \frac{\varphi(x)}{\ln^+\rho + 1} \qquad (\rho \ge 0) \tag{11}$$

(φ — любая неотрицательная, неубывающая функция, определённая на луче $[0, \infty)$, $1 \le \varphi(x) \le \alpha x \ln^+ x + \beta$), то существует последовательность $\{r_n\}$, $0 < r_n \uparrow \infty$, $r_{n+1} - r_n = O(H(r_n))$ при $n \to \infty$, такая, что для $x = r_n \quad (n \ge 1)$

$$\ln|Q(x)| \ge -CH(x)\ln^+ \frac{x}{H(x)} - 2\varphi(x) - D; \tag{12}$$

4) если

$$\Delta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t} dt < \infty,$$

то при условии (11)

$$\left| \ln\left|\frac{1}{Q'(\lambda_n)}\right| - \int_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}dt \right| \le EH(\lambda_n)\ln^+\frac{\lambda_n}{H(\lambda_n)} + $$

$$+2\varphi(\lambda_n) + F\ln\lambda_n + L \qquad (n \ge 1), \tag{13}$$

где $n(\lambda_n;t)$ — число точек $\lambda_k \ne \lambda_n$ из отрезка $\{x : |x - \lambda_n| \le t\}$.

Здесь все постоянные положительны, конечны.

Отметим, что условие $\Delta < \infty$ не является следствием оценки (11), если даже функция φ ограничена. Действительно, пусть $\sup\limits_{x\geq 0}\varphi(x) < \infty$, $0 \leq \rho \leq 1$. Тогда из (11) следует, что $\Lambda(x+\rho) - \Lambda(x) \leq C < \infty \quad (x \geq 0)$. Следовательно, если $h_n = \min\limits_{k\neq n}|\lambda_k - \lambda_n|$, то

$$\ln^+\frac{1}{h_n} \leq \int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n;t)}{t}dt \leq 2C\ln^+\frac{1}{h_n}.$$

Так что в этом случае $\Delta < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\ln^+\frac{1}{h_n} < \infty.$$

Если же функция φ не ограничена, при условии (11) возможна ситуация

$$\sup_{x\geq 0}[\Lambda(x+1) - \Lambda(x)] = \infty.$$

Теперь докажем несколько лемм технического характера. Для этого введем следующие обозначения: $\ln_0 t = t$, $\exp_0 t = t$, $\ln_k t = \underbrace{\ln\ln\ldots\ln}_{k} t$, $\exp_k t = \underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{k} t$ $(k \geq 1)$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\frac{\lambda_n}{\ln_m\lambda_n}},\ \lambda_n\uparrow\infty,\ \varepsilon > 0,\ m \geq 1. \tag{14}$$

Лемма 2. *Ряд (14) сходится для любого $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n\ln_m\lambda_n}{\lambda_n} = 0.$$

Доказательство. 1^0. *Необходимость.* Пусть ряд (14) сходится для любого $\varepsilon > 0$. Так как общий член ряда монотонно убывает при $n \geq n_0$, то, как известно,

$$\lim_{n\to\infty} ne^{-\varepsilon\frac{\lambda_n}{\ln_m\lambda_n}} = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ будет справедлива оценка

$$ne^{-\varepsilon\frac{\lambda_n}{\ln_m\lambda_n}} < 1.$$

Значит при $n \geq N(\varepsilon)$

$$\ln n < \varepsilon\frac{\lambda_n}{\ln_m\lambda_n},$$

откуда и все следует.

2^0. *Достаточность.* Пусть теперь

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n\ln_m\lambda_n}{\lambda_n} = 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n \geq N(\varepsilon)$

$$\frac{\ln n\ln_m\lambda_n}{\lambda_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда для всех $n \geq N(\varepsilon)$

$$e^{-\varepsilon\frac{\lambda_n}{\ln_m\lambda_n}} \leqslant \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Следовательно, ряд (14) сходится для любого $\varepsilon > 0$.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi_m(t) = q\frac{t}{\ln_m t} - t\sigma \quad (m \geq 1,\, q, \sigma > 0).$$

Эта функция определена при $t > \exp_{m-1}(0)$ за исключением точки $p_0 = \exp_m(0)$, в которой логарифм в знаменателе обращается в нуль.

Пусть t_0 – решение уравнения

$$\frac{q}{\ln_m t_0} = \sigma \quad (0 < \sigma \leqslant 1),$$

а $\max\limits_{t \geq p} \varphi_m(t) = \varphi(t_\ni)$, где $p = \exp_m q$. Так как $\frac{q}{\ln_m p} = 1$, то $p \leqslant t_\ni \leqslant t_0$. Значит, $\varphi_m(t_\ni) \leqslant q\frac{t_\ni}{\ln_m t_\ni} \leqslant t_\ni \leqslant t_0 = \exp_m\left(\frac{q}{\sigma}\right)$.

Следовательно,

$$\max_{t \geq p} \varphi_m(t) \leqslant \exp_m\left(\frac{q}{\sigma}\right).$$

Таким образом, доказана

Лемма 3. *Для функции $\varphi_m(t)$ при $0 < \sigma \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\max_{t \geq p} \varphi_m(t) \leqslant \exp_m\left(\frac{q}{\sigma}\right), \quad p = \exp_m q.$$

Пусть Q — целая функция экспоненциального типа (9), а γ — функция, ассоциированная с ней по Борелю. Справедлива следующая

Лемма 4. *Для того чтобы существовала неотрицательная на $[a, \infty)$ мажоранта g функции $\ln|Q(x)|$, удовлетворяющая условию*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)\ln_{k-1} x}{x} = 0 \quad (k \geq 2), \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{\delta \to 0_+}}\, \delta \ln_k |\gamma(t)| \leqslant 0 \quad (k \geq 2), \quad \delta = |Ret|. \tag{16}$$

1^0. Необходимость. Для любого $\varepsilon > 0$ при $x \geq x_0 \geq 1$ имеем

$$|Q(x)| \leqslant \exp\left(\varepsilon\frac{x}{\ln_{k-1} x}\right).$$

Следовательно, полагая $\delta = |Ret|$, получаем

$$|\gamma(t)| \leqslant \int_0^\infty |Q(x)|e^{-\delta x}dx \leqslant A + B\int_{x_0}^\infty \exp\left(\varepsilon\frac{x}{\ln_{k-1} x} - \delta x\right)dx.$$

Отсюда

$$|\gamma(t)| \leqslant A + B\exp\left[\max_{x \geq x_0}\left(\varepsilon\frac{x}{\ln_{k-1} x} + 2\ln x - \delta x\right)\right]. \tag{17}$$

Но

$$\exp\left[\max_{x \geq x_0}(\varepsilon\frac{x}{\ln_{k-1} x} + 2\ln x - \delta x)\right] \leqslant$$

$$\leqslant B_1(\varepsilon)\exp\left[\max_{x \geq x_0}(2\varepsilon\frac{x}{\ln_{k-1} x} - \delta x)\right].$$

Применяя лемму 3 к выражению в квадратных скобках, из (17) в итоге получаем

$$|\gamma(t)| \leqslant C(\varepsilon)\exp_k\left(\frac{2\varepsilon}{\delta}\right) \quad (0 < \delta \leqslant 1).$$

Таким образом, условие (16) действительно имеет место.

2^0. Достаточность. Последовательность всех нулей функции Q имеет плотность b. Следовательно, тип функции Q равен πb (сопряжённая диаграмма Q есть отрезок $[-\pi bi, \pi bi]$). Далее, функция Q — чётная. Для $x > 0$ имеем

$$Q(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\delta} \gamma(t) e^{xt} dt, \tag{18}$$

где Γ_δ — граница прямоугольника со сторонами, лежащими на прямых $Re t =^{+}_{-} \delta$ $(0 < \delta \leq 1$, $Im\, t =^{+}_{-} (\pi b + 1)$. Учитывая (16), из (18) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < \delta \leq \delta_0(\varepsilon)$

$$|Q(x)| \leq C_\varepsilon \exp_{[k-1]} \left[e^{\varepsilon \delta^{-1}} + \delta x \right] \quad (0 < C_\varepsilon < \infty). \tag{19}$$

Оценка (19) верна при любом $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon)]$. Имея это в виду, положим

$$\delta^{-1} = \varepsilon^{-1} \ln_{k-1} x^\alpha, \quad \alpha = \alpha(x) = 1 - \frac{\ln(\ln_{k-1} x)^2}{\ln x}.$$

Видим, что $\alpha(x) \to 1$ при $x \to \infty$, а при $\delta \to 0_+$

$$x^\alpha = \frac{x}{\ln^2_{k-1} x} \to \infty.$$

Подставляя выбранное значение для δ^{-1} в (19), при $x \geq x_0(\varepsilon)$ получаем, что

$$\ln |Q(x)| \leqslant \ln C_\varepsilon + \frac{x}{\ln^2_{k-1} x} + \frac{\varepsilon x}{\ln^\alpha_{k-1}}. \tag{20}$$

Проверяется, что при $x \to \infty$

$$\ln_{k-1} x^\alpha = (1 + o(1)) \ln_{k-1} x \ \ (k \geq 2).$$

Учитывая это, из (20) окончательно имеем

$$\ln |Q(x)| \leqslant 2\varepsilon \frac{x}{\ln_{k-1} x}, \quad x \geq x_1(\varepsilon).$$

Это и означает, что

$$\ln |Q(x)| \leqslant g(x) \quad (x \geq 0)$$

для некоторой неотрицательной (и неубывающей) функции g, удовлетворяющей условию (15).

Лемма доказана.

§2. Формула для вычисления k-порядка суммы ряда Дирихле в полуплокости

Величину

$$\rho_k = \varlimsup_{\sigma \to 0_-} \frac{\ln_k M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}} \quad (k \geq 2) \tag{21}$$

будем называть k-порядком функции $F \in D_0(\Lambda)$ в полуплоскости $\Pi_0 = \{s : \ \sigma = Res < 0\}$. Здесь $M(\sigma) = \sup\limits_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|$. Имеет смысл рассматривать только те функции $F \in D_0(\Lambda)$, для которых $\sup\limits_{\sigma<0} M(\sigma) = \infty$. Из определения k-порядка (21) видно, что $\rho_2 = \rho_R$, где ρ_R — R-порядок в полуплоскости Π_0 [4].

Верна следующая

Теорема 1. *Условие*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n \ln_{k-1} \lambda_n}{\lambda_n} = 0 \quad (k \geq 2). \tag{22}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы для k-порядка (21) любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ была справедлива формула

$$\rho_k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} \ln_{k-1}\lambda_n \quad (k \geq 2;\ 0 \leqslant \rho_R \leqslant \infty). \tag{23}$$

Замечание. Пусть степенной ряд

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n} \quad (p_n \in N) \tag{24}$$

сходится в круге $\{z:\ |z| < 1\}$, причем

$$M_g(r) = \max_{|z|=r} |g(z)| \to \infty,\ r \to \infty.$$

Положим

$$r_k = \overline{\lim_{r\uparrow\infty}} \frac{\ln_k M_g(r)}{(1-r)^{-1}} \quad (0 \leqslant r < 1).$$

Так как $1 - r = (1 + o(1))|\ln r|$ при $r \uparrow 1$, то

$$r_k = \overline{\lim_{r\uparrow\infty}} \frac{\ln_k M_g(r)}{|\ln r|^{-1}} \tag{25}$$

Сделаем замену $z = e^s$. Тогда

$$f(s) = g(e^s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{p_n s} \quad (s = \sigma + it). \tag{26}$$

Ясно, что ряд Дирихле-Тейлора (26) абсолютно сходится в полуплоскости Π_0. Так как $r = e^{\sigma}$, то $M_g(r) = M(\sigma)$, и $r_k = \rho_k$, где ρ_k — k-порядок ряда (26) (это видно из (25) и определения ρ_k. Сформулируем теперь следствие, вытекающее из теоремы 1.

Следствие. *Для того чтобы для k-порядка r_k любой функции g вида (24) была верна формула*

$$r_k = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{p_n} \ln_{k-1} p_n \quad (k \geq 2),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n \ln_{k-1} p_n}{p_n} = 0 \quad (k \geq 2).$$

Докажем теорему 1.

1^0. Достаточность. Пусть k-порядок ρ_k функции F конечен. Докажем, что тогда $\alpha \leqslant \rho_k$, где

$$\alpha \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|a_n|}{\lambda_n} \ln_{k-1}\lambda_n \quad (k \geq 2).$$

Действительно, из определения k-порядка получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что при $\delta < \sigma < 0$ будет справедливо неравенство

$$\ln M(\sigma) \leqslant \exp_{k-1}\left(\frac{\rho_k + \varepsilon}{|\sigma|}\right). \tag{27}$$

Для $\sigma < 0$ имеем $|a_n| \leqslant M(\sigma)e^{\lambda_n|\sigma|}$ $(n \geq 1)$. Отсюда, учитывая (27), при $\delta < \sigma < 0$ получим

$$\ln|a_n| \leqslant \exp_{k-1}\left(\frac{\rho_k + \varepsilon}{|\sigma|}\right) + \lambda_n|\sigma|.$$

Если положить $t = |\sigma|^{-1}$, то

$$\ln |a_n| \leqslant \exp_{k-1}(\rho_k + \varepsilon)t + \frac{\lambda_n}{t}.$$

Положим $t = t_*$, где

$$t_* = \frac{1}{\rho_k + \varepsilon} \ln_{k-1} \lambda_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_n = 1 - \frac{\ln(\ln_{k-1} \lambda_n)^2}{\lambda_n}.$$

Видно, что $\alpha_n \to 1$ при $n \to \infty$, а $\lambda_n^{\alpha_n} = \frac{\lambda_n}{\ln_{k-1}^2 \lambda_n}$. Так что $t_* = t_*(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\ln |a_n| \leqslant \exp_{k-1} \left((\rho_k + \varepsilon) t_* \right) + \frac{\lambda_n}{t_*} \quad (n \geq N = N(\varepsilon)).$$

Отсюда, в свою очередь, для всех $n \geq N$

$$\ln |a_n| \leqslant \frac{\lambda_n}{\ln_{k-1}^2 \lambda_n} + \frac{\lambda_n(\rho_k + \varepsilon)}{\ln_{k-1} \lambda_n^{\alpha_n}} \quad (k \geq 2). \tag{28}$$

Поскольку (это проверяется непосредственно) при $n \to \infty$

$$\ln_{k-1} \lambda_n^{\alpha_n} = (1 + o(1)) \ln_{k-1} \lambda_n \quad (k \geq 2),$$

то при $n \geq N_1 \geq N$ из (28) получаем оценку

$$\frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} \ln_{k-1} \lambda_n < \rho_k + 3\varepsilon \ \ (k \geq 2).$$

Так как $\varepsilon > 0$ – любое, отсюда следует, что $\alpha \leqslant \rho_k$.

Предположим теперь, что $\alpha < \infty$. Докажем, что тогда $\rho_k \leqslant \alpha$. По определению величины α, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что при $n \geq N$

$$\frac{\ln |a_n|}{\lambda_n} \ln_{k-1} \lambda_n < \alpha + \varepsilon \ \ (k \geq 2).$$

Пусть $k_0 = \min\{n : \ \lambda_n > p_0 = \exp_{k-2}(0) \ (k \geq 2)\}$. Выберем $A(\varepsilon)$ так, чтобы при любом $n \geq k_0$ выполнялось неравенство

$$|a_n| < A(\varepsilon) \exp \left[\frac{(\alpha + \varepsilon)\lambda_n}{\ln_{k-1} \lambda_n} \right] \quad (k \geq 2).$$

Тогда

$$|F(s)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\lambda_n \sigma} \leqslant B + A(\varepsilon) \sum_{n=k_0}^{\infty} \exp\left(q \frac{\lambda_n}{\ln_{k-1} \lambda_n} - \lambda_n |\sigma| \right) \leqslant$$

$$\leqslant B + A(\varepsilon) \max_{t \geq \lambda_{k_0}} \exp\left(q_1 \frac{t}{\ln_{k-1} t} - t\sigma \right) \sum_{n=k_0}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon \frac{\lambda_n}{\ln_{k-1} \lambda_n} \right),$$

где $q = \alpha + \varepsilon$, $q_1 = \alpha + 2\varepsilon$, $\sigma = Res < 0$. Имея в виду условие (22), воспользуемся леммой 2. Тогда

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} \exp\left(-\varepsilon \frac{\lambda_n}{\ln_{k-1} \lambda_n} \right) = A_1(\varepsilon) < \infty. \tag{29}$$

Оценим теперь функцию

$$\varphi(t) = q_1 \frac{t}{\ln_{k-1} t} - t\sigma.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\max_{t \geq \lambda_{k_0}} \varphi(t) \leqslant \exp_{k-1} \left(\frac{q_1}{\sigma} \right), \quad 0 < |\sigma| \leqslant 1. \tag{30}$$

Таким образом, учитывая (29) и (30), имеем

$$|F(s)| \leqslant B + A_2(\varepsilon)\exp_k\left(\frac{q_1}{\sigma}\right), \quad 0 < |\sigma| \leqslant 1.$$

Следовательно, при $-1 \leqslant \sigma_0 < \sigma < 0$

$$|F(s)| \leqslant \exp_k\left(\frac{q_2}{\sigma}\right), \quad q_2 = \alpha + 3\varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{\ln_k M(\sigma)}{|\sigma|^{-1}} \leqslant q_2, \quad -1 \leqslant \sigma_0 < \sigma < 0.$$

Это означает, что $\rho_k \leqslant \alpha$. Таким образом, $\alpha = \rho_k$. Отсюда следует, что $\alpha = \infty$ тогда и только тогда, когда $\rho_k = \infty$. Таким образом, достаточность доказана.

2^0. Необходимость. Покажем теперь, что условие (22) является и необходимым для того, чтобы для k-порядка любой функции $F \in D_0(\Lambda)$ была справедлива формула (23). Действительно, пусть условие (22) не выполнено, то есть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n \ln_{k-1}\lambda_n}{\lambda_n} > 0 \quad (k \geq 2).$$

Тогда найдется подпоследовательность $\{n_m\}$, такая, что для любого $m \geq 1$

$$\frac{\ln n_m \ln_{k-1}\lambda_{n_m}}{\lambda_{n_m}} \geq \beta > 0. \tag{31}$$

Теперь положим $a_n = e$ $(n \geq 1)$ и оценим k-порядок функции F, определенной рядом

$$F(s) = e\sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it). \tag{32}$$

Мы предполагаем, что выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n} = 0. \tag{33}$$

Ряд (32) сходится (в силу условия (33) и абсолютно) в полуплоскости Π_0. Вычисляя k-порядок по формуле (23), имеем $\rho_k = 0$. Убедимся, что на самом деле k-порядок функции F больше нуля. Действительно, поскольку коэффициенты $a_n > 0$, то $M(\sigma) = F(\sigma)$ $(\sigma < 0)$. Следовательно, для любого натурального N имеем

$$M(\sigma) \geq e\sum_{k=[\frac{N}{2}]}^{N} e^{-\lambda_k|\sigma|} \geq e\frac{N}{2}e^{-\lambda_N|\sigma|} \geq Ne^{-\lambda_N|\sigma|} = \exp(\ln N - \lambda_N|\sigma|). \tag{34}$$

Запишем условие (31) в виде

$$\lambda_{n_m} \leqslant \frac{1}{\beta}\ln n_m \ln_{k-1}\lambda_{n_m} \quad (\beta > 0) \tag{35}$$

и положим в (34) $N = n_m$. Тогда для любого $m \geq 1$ имеем

$$M(\sigma) \geq \exp(\ln n_m - \lambda_{n_m}|\sigma|) \geq \exp(\ln n_m - \frac{|\sigma|}{\beta}\ln n_m \ln_{k-1}\lambda_{n_m}. \tag{36}$$

Далее, из (35) видно, что $\ln\lambda_{n_m} \leqslant 2\ln\ln n_m$ при $m \geq m_0$. Отсюда следует, что $\ln_{k-1}\lambda_{n_m} \leqslant 2\ln_k n_m$ при $m \geq m_1 \geq m_0$. Учитывая это, из (36) получаем оценку

$$M(\sigma) \geq \exp(\ln n_m - \frac{2|\sigma|}{\beta}\ln n_m \ln_k n_m) \quad (m \geq m_1). \tag{37}$$

В (34) $|\sigma| > 0$ — любое. Положим $\sigma = \sigma_m$, где σ_m — решение уравнения

$$\ln_k n_m = \frac{\beta}{4|\sigma|} \ \ (m \geq m_1).$$

Тогда из (37) получаем

$$M(\sigma) \geq \exp\left\{\frac{1}{2}\exp_{k-1}\frac{\beta}{4|\sigma|}\right\}, \quad \sigma = \sigma_m.$$

Отсюда

$$\ln M(\sigma) \geq \frac{1}{2}\exp_{k-1}\frac{\beta}{4|\sigma|}, \ \ \sigma = \sigma_m \ \ (m \geq m_1),$$

и

$$\ln\ln M(\sigma) \geq \ln\left(\frac{1}{2}\exp_{k-1}\frac{\beta}{4|\sigma|}\right) \geq \frac{1}{2}\exp_{k-2}\frac{\beta}{4|\sigma|}, \ \ \sigma = \sigma_m \ \ (m \geq m_2).$$

Продолжая аналогичные оценки, окончательно получим, что

$$\ln_k M(\sigma) \geq \frac{\beta}{8|\sigma}, \ \ \sigma = \sigma_m \ \ (m \geq m_k).$$

Это означает, что $\rho_k \geq \frac{\beta}{8}$.

Необходимость доказана.

§3. Двусторонняя оценка для k-порядка через k-порядок в полуполосе

Перед тем, как сформулировать теорему, введем в рассмотрение следующие классы функций:

$$L_k = \{h \in L: \ h(x)\ln_{k-1} x = o(x), \quad x \to \infty\} \ \ (k \geq 2),$$

$$R_k = \left\{h \in S: \ h(x)\ln\frac{x}{h(x)} = o\left(\frac{x}{\ln_{k-1} x}\right), \quad x \to \infty\right\} \ \ (k \geq 2).$$

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ *— последовательность, удовлетворяющая условиям:*

$$1) \ \ \Lambda(x+\rho) - \Lambda(x) \leq c\rho + d + \frac{\varphi(x)}{\ln^+ \rho + 1} \quad (\rho \geq 0), \tag{38}$$

где $\Lambda(x) = \sum\limits_{\lambda_n \leq x} 1$, φ *— некоторая функция из* L_k $(k \geq 2)$*;*

$$2) \ \ q_k^* = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln_{k-1}\lambda_n}{\lambda_n}\int\limits_0^1 \frac{n(\lambda_n; t)}{t}dt < \infty \quad (k \geq 2), \tag{39}$$

где $n(\lambda_n; t)$ *— число точек* $\lambda_k \neq \lambda_n$ *из отрезка* $\{x: \ |x-\lambda_n| \leq t\}$.

Если R *— плотность последовательности* Λ *равна* $G(R)$, *то* k*-порядок* ρ_s *любой функции* $F \in D_0(\Lambda)$ *в полуполосе* $S(a, t_0)$ *при* $a > \pi G(R_k)$ *и порядок* ρ_R *этой функции в полуплоскости* Π_0 *удовлетворяют оценкам*

$$\rho_s \leq \rho_k \leq \rho_s + q_k^* \quad (k \geq 2). \tag{40}$$

Доказательство. Так как $\varphi \in L_k$, из оценки (38) и определения R_k — плотности следует, что $G(R_k) < \infty$. Действительно, если $p_0 = \exp_{k-2}(0)$, $(k \geq 2)$, $h(x) = \frac{x}{\ln(x+1)\ln_{k-1}(x+p_0+1)}$ $(x \geq 0)$, то, как легко проверить, $h \in R_k$, и

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\mu_\Lambda(\omega(t))}{h(t)} \leq c,$$

где c — постоянная из условия (38), $\omega(t) = [t, t+h(t))$. Следовательно, $G(R_k) \leq c < \infty$.

Воспользуемся теоремой II. Тогда для любого b, $G(R_k) < b < \frac{a}{\pi}$, существует последовательность $\Gamma = \{\mu_n\}$ $(0 < \mu_n \uparrow \infty)$, содержащая Λ и имеющая плотность b, такая, что целая функция экспоненциального типа πb

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\mu_n^2}\right) \quad (z = x + iy) \tag{41}$$

обладает свойствами:

1) $Q(\lambda_n) = 0, \quad Q'(\lambda_n) \neq 0 \quad (n \geq 1)$;

2) $\ln |Q(x)| \leq g(x) \ (x \geq 0), \quad g \in L_k$;

3) $q_k(Q) = q_k^*$, где q_k^* — величина, определённая формулой (39), а

$$q_k(Q) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln_{k-1} \lambda_n}{\lambda_n} \ln \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right| \quad (k \geq 2).$$

Отметим, что оценка 2) и равенство 3) вытекают из оценок (10) и (11) с учётом того, что в случае R_k — плотности в оценках (10), (11) $H \in R_k$, а $\varphi \in L_k$.

Введём в рассмотрение интерполирующую функцию А.Ф. Леонтьева [3]

$$\omega(\mu, \alpha, F) = e^{-\alpha\mu} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \gamma(t) \left(\int\limits_0^t F(t + \alpha - \eta) e^{\mu\eta} d\eta \right) dt,$$

где $F \in D_0(\Lambda)$, γ — функция, ассоциированная по Борелю с целой функцией Q вида (41), C — замкнутый контур, охватывающий отрезок $I = [-\pi bi, \pi bi]$ — сопряжённую диаграмму Q, α — произвольный комплексный параметр, $Re\ \alpha < 0$. Ясно, что $(t + \alpha - \eta) \in C_\alpha$, где C_α — смещение C на вектор α. В качестве C возьмём границу прямоугольника

$$P = \{t : |Re\ t| \leq h(0 < h \leq 1), \quad |Im\ t| \leq a\}, \qquad \pi G(R) < \pi b < a.$$

Докажем, что $\rho_k \leq \rho_s + q_k^*$ (оценка $\rho_s \leq \rho_k$ очевидна). Имеем

$$|\omega(\lambda_n, \alpha, F)| \leq \frac{2}{\pi}(1 + a)^2 |e^{-\alpha\lambda_n}| \max_{\eta\in P} |e^{\lambda_n \eta}| \max_{t\in C} |\gamma(t)| \max_{u\in P_\alpha} |F(u)|.$$

Положим $\alpha = \sigma - h + it_0$ $(\sigma < 0)$. Применяя лемму 4 и учитывая то, что на горизонтальных участках контура $|\gamma(t)| \leq M$, для любого $\delta > 0$ при $h < h_0(\delta)$ получаем, что

$$|\omega(\lambda_n, \alpha, F)| \leq e^{(|\sigma|+2h)\lambda_n} \exp_k(\frac{\delta}{h}) \max_{u\in P_\alpha} |F(u)|. \tag{42}$$

Здесь P_α — сдвиг прямоугольника P на вектор α.

Считаем, что $\rho_k < \infty$. Тогда $\rho_s < \infty$. Из определения k-порядка ρ_s в полуполосе $S(a, t_0)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ при $0 < |\sigma| < \sigma_0(\varepsilon)$

$$M_s(\sigma) \leqslant \exp_k[(\rho_s + \varepsilon)|\sigma|^{-1}].$$

Отсюда при $0 < |\sigma| < \sigma_0(\varepsilon)$

$$\max_{u\in P_\alpha} |F(u)| \leq \exp_k[(\rho_s + \varepsilon)|\sigma|^{-1}]. \tag{43}$$

Полагая $h = \gamma|\sigma|$ $(0 < \gamma < \infty)$ и учитывая (43), из (42) получаем, что

$$|\omega(\lambda_n, \alpha, F)| \leq e^{(1+2\gamma)\lambda_n|\sigma|} \exp\left[\exp_k(\frac{\delta}{\gamma|\sigma|}) + \exp_k(\frac{\rho}{|\sigma|})\right], \tag{44}$$

где $\rho = \rho_s + \varepsilon, 0 < |\sigma| < \sigma_1(\delta, \varepsilon), \gamma > 0$.

Пусть $\delta = \varepsilon^2, \gamma = \varepsilon$. Тогда, пользуясь формулами для коэффициентов [3]

$$a_n = \frac{\omega(\lambda_n, \alpha, F)}{Q'(\lambda_n)} \quad (n \geq 1)$$

и учитывая (44), имеем

$$|a_n| \leq \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right| \exp\left[(1 + 2\varepsilon)\lambda_n t^{-1} + \exp_{k-1}(\rho_1 t)\right],$$

где $t = |\sigma|^{-1}, t > t_0(\varepsilon)$, $\rho_1 = \rho + \varepsilon$. Это неравенство верно, в частности, при $(n \geq n_0(\varepsilon))$ для

$$t = \frac{1}{\rho_1} \ln_{k-1}^{\alpha_n} \lambda_n, \quad \alpha_n = 1 - \frac{\ln \ln^2 \lambda_n}{\ln \lambda_n}.$$

Для таких t имеем (см. (28)):

$$|a_n| \leq \left| \frac{1}{Q'(\lambda_n)} \right| \exp \left[\frac{(1+2\varepsilon)\rho_1 \lambda_n}{\ln^{\alpha_n} \lambda_n} + \frac{\lambda_n}{\ln_{k-1}^2 \lambda_n} \right] (n \geq n_0(\varepsilon)).$$

Поскольку $\ln_{k-1}^{\alpha_n} \lambda_n = (1 + o(1)) \ln_{k-1} \lambda_n$ при $n \to \infty$, то, применяя формулу (23) для вычисления порядка ρ_k в полуплоскости, отсюда получаем, что $\rho_k \leq q_k(Q) + (1+2\varepsilon)(\rho_s + \varepsilon)$. Поскольку $q_k(Q) = q_k^*$, $\varepsilon > 0$ — любое, то $\rho_k \leq \rho_s + q_k^*$, и тем самым, теорема доказана.

Замечание. В доказанной теореме вместо $S(a, t_0)$ можно брать криволинейную полуполосу K, описываемую вертикальным отрезком длины $2a$ при движении его центра вдоль кривой, которая лежит в полуплоскости Π_0 и имеет общую точку с мнимой осью. И в этом случае оценки (40) имеют место.

Левая оценка в (40) точна. Точность правой оценки при $k = 2$ доказана в [6]. Вопросу о точности этой оценки в общем случае будет посвящена отдельная статья.

Авторы выражают благодарность участникам Уфимского городского семинара имени А.Ф. Леонтьева по теории функций за внимание к работе и полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.F. Ritt *On certain points in the theory of Dirichlet series* // Amer. J. of Math. 1928. V. 50, № 1. P. 73–86.
2. Мандельбройт С. *Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения.* М.: ИЛ, 1955.
3. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
4. Гайсин А.М. *Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле, в полуполосе* // Матем. сб. 1982. Т. 117(159), № 3. С. 412–424.
5. Гайсин А.М., Сергеева Д.И. *Целые функции с заданной последовательностью нулей, имеющие правильное поведение на вещественной оси. I.* // Сиб. матем. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 996–1008.
6. Гайсин А.М., Сергеева Д.И. *Оценка ряда Дирихле в полуполосе в случае нерегулярного распределения показателей. II*// Сиб. матем. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 280–298.

Наркес Нурмухаметовна Аиткужина,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Yusupovan@rambler.ru`

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: `Gaisinam@mail.ru`