ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 4 (2014). С. 3-18.

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

ЗАМКНУТЫЕ ПОДМОДУЛИ В МОДУЛЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Н.Ф. АБУЗЯРОВА

Аннотация. В работе рассматривается топологический модуль целых функций $\mathcal{P}$ – изоморфный образ при преобразовании Фурье-Лапласа пространства Шварца $\mathcal{E}'$ распределений с компактным носителем в конечном или бесконечном интервале $(a;b) \subset \mathbb{R}$. Изучаются некоторые свойства замкнутых подмодулей модуля $\mathcal{P}$, связанные с задачей локального описания, и вопросы двойственности между замкнутыми подмодулями в $\mathcal{P}$ и инвариантными относительно дифференцирования подпространствами пространства $\mathcal{E} = C^\infty(a;b)$.

Ключевые слова: целые функции, преобразование Фурье-Лапласа, локальное описание подмодулей, инвариантные подпространства, спектральный синтез, конечно порожденные подмодули.

Mathematics Subject Classification: 30D15, 30H99, 42A38, 47E05

1. Введение

Для конечного или бесконечного интервала $(a;b)$ вещественной прямой рассмотрим последовательность отрезков, исчерпывающую этот интервал: $[a_1;b_1] \Subset [a_2;b_2] \Subset \dots$ Пусть P_k – банахово пространство, состоящее из всех целых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(1+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)}, \quad y^\pm = \max\{0, \pm y\}, \quad z = x + \mathrm{i}y,$$

$\mathcal{P}$ – индуктивный предел последовательности $\{P_k\}$. Каждое из вложений $P_k \subset P_{k+1}$ вполне непрерывно, поэтому локально-выпуклое пространство $\mathcal{P}$ есть пространство типа (LN^*), в частности, оно полное, отделимое, неметризуемое, рефлексивное, монтелевское (см. [1]). Кроме того, в этом пространстве непрерывна операция умножения на независимую переменную z, т.е. $\mathcal{P}$ – топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$.

В настоящей статье изучаются некоторые специальные свойства замкнутых подмодулей модуля $\mathcal{P}$. Для краткости всюду ниже будем пользоваться термином „*подмодуль*“, имея в виду замкнутый подмодуль. Исследование подмодулей в $\mathcal{P}$ представляет интерес в связи с тем, что они состоят в двойственности с замкнутыми подпространствами пространства $C^\infty(a;b)$, инвариантными относительно оператора дифференцирования.

Для функции $\varphi \in \mathcal{P}$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}$ определим ее *дивизор*

$$n_\varphi(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \varphi(\lambda) \neq 0, \\ m, & \text{если} \quad \lambda \text{ – нуль } \varphi \quad \text{кратности} \quad m. \end{cases}$$

N.F. Abuzyarova, Closed submodules in the module of entire functions of exponential type and polynomial growth on the real axis.

Работа выполнена при поддержке гранта №01201456408 Минобрнауки РФ.
Поступила 16 мая 2014 г.

Дивизором подмодуля $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ называется функция $n_{\mathcal{J}}(\lambda) = \min\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} n_\varphi(\lambda)$. Обозначим $\Lambda_\varphi = \{(\lambda_k, m_k) :\ m_k = n_\varphi(\lambda_k) > 0,\ k = 1, 2, \dots\}$ – *нулевое множество функции* $\varphi \in \mathcal{P}$, отличной от тождественного нуля; $\Lambda_{\mathcal{J}} = \{(\lambda_k, m_k) :\ m_k = n_{\mathcal{J}}(\lambda_k) > 0,\ k = 1, 2, \dots\}$ – *нулевое множество подмодуля* $\mathcal{J} \neq \{0\}$.

Известно (см., например, [2]), что всякий элемент пространства $\mathcal{P}$ является функцией вполне регулярного роста при порядке 1, индикаторная диаграмма которой есть отрезок мнимой оси $[\mathrm{i}c_\varphi; \mathrm{i}d_\varphi] \subset (\mathrm{i}a; \mathrm{i}b)$. Для подмодуля $\mathcal{J}$ положим $c_{\mathcal{J}} = \inf\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} c_\varphi$, $d_{\mathcal{J}} = \sup\limits_{\varphi\in\mathcal{J}} d_\varphi$. Множество $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$ будем называть *индикаторным отрезком* подмодуля $\mathcal{J}$.

Так как $\mathcal{P}$ – пространство типа (LN^*), множество $B \subset P$ ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится и ограничено в одном из банаховых пространств P_k (см. [1, теорема 2]). Используя этот факт и определение топологии в $\mathcal{P}$, нетрудно проверить, что пространство $\mathcal{P}$ борнологическое и *b-устойчивое*. Напомним, что локально-выпуклое пространство целых функций называется *b-устойчивым*, если для любого ограниченного множества $B \subset \mathcal{P}$ множество всех *целых* функций ψ вида $\psi(z) = \varphi(z)/(z-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in B$, содержится и ограничено в $\mathcal{P}$ (см. [3, §1]).

В силу вышесказанного для исследования подмодулей в модуле $\mathcal{P}$ можно применить абстрактные методы, разработанные И.Ф. Красичковым-Терновским в [3], [4].

Подмодуль $\mathcal{J}$ *слабо локализуем*, если он содержит все функции $\varphi \in \mathcal{P}$, удовлетворяющие условиям: 1) $n_\varphi(z) \geq n_{\mathcal{J}}(z)$, $z \in \mathbb{C}$; 2) индикаторная диаграмма функции φ содержится в множестве $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$. В случае, если $c_{\mathcal{J}} = a$ и $d_{\mathcal{J}} = b$, слабая локализуемость $\mathcal{J}$ означает, что этот подмодуль *обильный* или *допускает локальное описание* (короче, *локализуемый*).

Подмодуль $\mathcal{J}$ называется *устойчивым в точке* $\lambda \in \mathbb{C}$, если выполнение условий $\varphi \in \mathcal{J}$ и $n_\varphi(\lambda) > n_{\mathcal{J}}(\lambda)$ влечет включение $\varphi/(z-\lambda) \in \mathcal{J}$. Подмодуль $\mathcal{J}$ *устойчив*, если он устойчив в любой точке $\lambda \in \mathbb{C}$.

Термины „устойчивый (в точке) подмодуль“, „обильный подмодуль“ введены в [3], [5].

Ясно, что *устойчивость подмодуля $\mathcal{J}$ является необходимым условием его слабой локализуемости.*

Обозначим $\mathcal{J}_{\varphi_1,\dots,\varphi_m}$ замкнутый подмодуль, *порожденный функциями* $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{P}$:

$$\mathcal{J} = \overline{\{p_1\varphi_1 + \dots + p_m\varphi_m, \quad p_1, \dots, p_m \in \mathbb{C}[z]\}}, \tag{1.1}$$

Функции $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ называются *образующими* подмодуля $\mathcal{J}_{\varphi_1,\dots,\varphi_m}$.

Из результатов работы [4, § 4] следует, что главный (порожденный одной функцией) подмодуль в $\mathcal{P}$ всегда устойчив. Это также нетрудно проверить непосредственно, учитывая, что модуль $\mathcal{P}$ *поточечно устойчив* (о свойстве поточечной устойчивости $\mathcal{P}$ подробно говорится в доказательстве теоремы 1). В отличие от главных подмодулей, подмодули, порожденные m функциями, $m > 1$, устойчивы не всегда. Например, подмодуль, порожденный в $\mathcal{P}$ функциями $e^{-\mathrm{i}cz}$, $e^{-\mathrm{i}dz}$, где $a < c < d < b$, не устойчив в силу предложений 1 и 2 настоящей работы и примера 2 из работы [12, § 2].

Ниже, в параграфе 3, рассматривается вопрос об условиях устойчивости подмодуля, порожденного в $\mathcal{P}$ двумя функциями φ, ψ, в терминах взаимного расположения нулей (а значит, „близости“ роста) этих функций (теорема 1). В основе исследований лежит критерий устойчивости для подмодуля с конечным числом образующих, полученный И.Ф. Красичковым-Терновским ([4, предложение 4.9]).

Достаточные условия устойчивости подмодуля с двумя образующими, содержащиеся в теореме 1, по всей видимости, далеки еще от необходимых, как и во всех известных нам утверждениях такого рода (см. [6]–[11]). С другой стороны, в отличие от общего критерия И.Ф. Красичкова-Терновского [4, предложение 4.9], условия устойчивости, формулируемые в терминах взаимного расположения нулевых множеств двух функций (или подмодулей) – обозримые и проверяемые. Это позволяет, в частности, получать утверждения о

2-порожденности или представимости в виде замыкания суммы двух специальных обильных подмодулей (идеалов) для обильных (см. [6]–[11]), а иногда, как в нашем случае, даже только устойчивых подмодулей (теорема 2).

Пример неустойчивого подмодуля, приведенный выше, показывает, что 2-порожденный подмодуль в $\mathcal{P}$ не обязательно является главным. Из теоремы 2 следует большее: не всякий *устойчивый* подмодуль с двумя образующими в $\mathcal{P}$ – главный.

Отметим, что для широкого класса весовых модулей функций, голоморфных в области $\Omega \subset \mathbb{C}$, в работе [9] изучались условия обильности (устойчивости) подмодуля, порожденного двумя обильными (устойчивыми) подмодулями, в терминах „близости“ последовательностей нулей порождающих подмодулей. Однако зазоры между весами, определяющими топологию рассматриваемых в [9] модулей, растут быстрее логарифмической функции, так что здесь результаты этой работы неприменимы: в модуле $\mathcal{P}$ зазоры между весами логарифмические.

2. Вопросы двойственности

2.1. Принцип двойственности. Пусть $\mathcal{E} = C^\infty(a;b)$ – *пространство Шварца*, наделенное стандартной топологией проективного предела банаховых пространств $C^k[a_k;b_k]$. Известно, что $\mathcal{E}$ – полное метризуемое рефлексивное локально-выпуклое пространство, в котором каждое ограниченное множество относительно компактно. Пусть, далее, $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ – оператор дифференцирования, $W \subset \mathcal{E}$ – *замкнутое и инвариантное относительно* D (короче, D-*инвариантное*) подпространство: $DW \subset W$. Если не оговорено противное, то считаем, что $W \neq \mathcal{E}$. Обозначим через $\operatorname{Exp} W$ запас всех корневых элементов оператора D – экспоненциальных одночленов $t^j e^{-\mathrm{i}\lambda t}$ – содержащихся в W.

В работе [12] решена следующая задача спектрального анализа: спектр $\sigma(W)$ сужения оператора дифференцирования на D-инвариантное подпространство W (называемый иначе *спектром* D-*инвариантного подпространства* W) либо дискретен, либо совпадает со всей комплексной плоскостью ([12, теорема 2.1]). В первом случае $\sigma(W)$ представляет собой последовательность кратных точек $\Lambda = \{(-\mathrm{i}\lambda_j, m_j),\}$ $m_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots$, при этом $\operatorname{Exp} W = \{t^k e^{-\mathrm{i}\lambda_j t},\ k = 0, 1, \dots, m_j - 1,\ j = 1, 2, \dots\}$.

Пусть $I \subset (a;b)$ – относительно замкнутый в $(a;b)$ непустой промежуток. Положим

$$W_I = \{f \in \mathcal{E}: \quad f^{(k)}(t) = 0,\ t \in I,\ k = 0, 1, 2, \dots\}. \tag{2.1}$$

В работе [12, параграф 2, пример 1] отмечено, что в случае, когда $I = \{c\}$, $c \in (a;b)$, соответствующее D-инвариантное подпространство W_c представляет собой совокупность всех функций $f \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих условию $f^{(k)}(c) = 0$, $k = 0, 1, \dots$, и имеет пустой спектр.

В [12] также доказано, что *для всякого* D-*инвариантного подпространства* $W \neq \mathcal{E}$ *существует минимальный относительно замкнутый в* $(a;b)$ *промежуток* $I \neq \emptyset$, *для которого верно включение* $W_I \subset W$ (теорема 4.1).
Обозначим этот промежуток I_W и положим $c_W = \inf\{t \in I_W\}$, $d_W = \sup\{t \in I_W\}$.

Согласно теореме Пэли-Винера-Шварца [13, глава 7] преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F}$ устанавливает линейный топологический изоморфизм сильного сопряженного к $\mathcal{E}$ пространства $\mathcal{E}'$ и пространства $\mathcal{P}$:

$$S \in \mathcal{E}' \leftrightarrow \varphi \in \mathcal{P} \iff \varphi = \mathcal{F}(S) = (S, e^{-\mathrm{i}tz}).$$

Символом $\operatorname{ch}\, \operatorname{supp} S$ будем обозначать выпуклую оболочку носителя функционала $S \in \mathcal{E}'$. Так как все элементы пространства $\mathcal{E}'$ имеют компактные носители, $\operatorname{ch}\, \operatorname{supp} S$ – отрезок, лежащий в $(a;b)$.

Предложение 1. ***(Принцип двойственности.)*** *Между D-инвариантными подпространствами $W \subset \mathcal{E}$ и замкнутыми подмодулями $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ имеет место взаимно однозначное соответствие по правилу: $W \leftrightarrow \mathcal{J} \iff \mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$, где $W^0 = \{S \in \mathcal{E}' : \ (S,f) = 0, \ f \in W\}$ – аннуляторное подпространство для W. При этом*

$$\operatorname{Exp} W = \{t^j e^{-i\lambda_k t}, \ j = 0, \dots m_k - 1, \ (\lambda_k, m_k) \in \Lambda_{\mathcal{J}}\}, \tag{2.2}$$

а границей промежутка I_W служат точки $c_{\mathcal{J}}$ и $d_{\mathcal{J}}$.

Доказательство. Первая часть принципа двойственности доказывается такими же рассуждениями, как в [5, §2]. Соотношение (2.2) следует из нее.

Докажем утверждение о границе промежутка I_W. Пусть $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ – *аннуляторный подмодуль* D-инвариантного подпространства W. Положив $I' = (a;b)\bigcap[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$, видим, что D-инвариантное подпространство $W_{I'}$ аннулируется всеми функционалами из подпространства W^0. Отсюда, учитывая первую часть сформулированного принципа двойственности, заключаем, что $W_{I'}$ содержится в W, и значит, $W_{I'} \subset W_{I_W}$. Последнее включение эквивалентно включению: $I' \supset I_W$. Предположим, что оно собственное, пусть, например, $c_{\mathcal{J}} < c_W$. Тогда, согласно теореме Пэли-Винера-Шварца, в аннуляторном подпространстве W^0 имеется распределение S со следующим свойством: пересечение носителя S и открытого интервала $(c_{\mathcal{J}}; c_W)$ не пусто. По определению носителя распределения найдется финитная бесконечно дифференцируемая функция φ_0, для которой $\operatorname{ch}\operatorname{supp}\varphi_0 \Subset (c_{\mathcal{J}}; c_W)$ и $(S, \varphi_0) \neq 0$. Следовательно, $\varphi_0 \notin W$. С другой стороны, видим, что $\varphi_0 \in W_{I_W} \subset W$. Значит, соотношение $c_{\mathcal{J}} < c_W$ не может иметь места.

Так же доказывается, что не может выполняться строгое неравенство $d_{\mathcal{J}} > d_W$.

□

Оказывается, что *D-инвариантное подпространство W имеет дискретный спектр тогда и только тогда, когда его аннуляторный подмодуль $\mathcal{J}$ устойчив.*

Необходимая часть этого утверждения содержится в пункте ii) предложения 3.1 [12], а достаточная – в нижеследующем предложении.

Предложение 2. *Если аннуляторный подмодуль $\mathcal{J} \neq \{0\}$ D-инвариантного W подпространства устойчив, то W имеет дискретный спектр $\sigma_W = -i\Lambda_{\mathcal{J}}$.*

Доказательство. В силу (2.2) в доказательстве нуждается лишь включение $\sigma_W \subset -\mathrm{i}\Lambda_{\mathcal{J}}$.

По предложению 2.2 из работы [12] точка λ лежит в множестве $\mathbb{C} \setminus \sigma_W$ тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $(D - \lambda)W = W$, означающее, что является сюръективным отображение

$$(D - \lambda) : W \to W.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{J} = \mathcal{J}_\varphi$ – главный подмодуль, порожденный функцией $\varphi = \mathcal{F}(S)$, $S \in \mathcal{E}'$; в этом случае $\Lambda_{\mathcal{J}} = \Lambda_\varphi$. Обозначим W_φ соответствующее D-инвариантное пространство (для которого $\mathcal{F}(W_\varphi^0) = \mathcal{J}_\varphi$). Подпространство W_φ состоит из всех функций $f \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих соотоношениям

$$(S, D^k f) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Докажем, что для любой точки $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda_\varphi$ верно равенство

$$(D + \mathrm{i}\lambda_0)W_\varphi = W_\varphi. \tag{2.3}$$

Считаем, что $\varphi(\lambda_0) = 1$.

Пусть $\operatorname{ch}\operatorname{supp} S = [c; d] \subset (a; b)$. Для $f \in W_\varphi$ положим

$$\tilde{f}(t) = -\left(S, \int_c^t f(\tau)e^{-\mathrm{i}(t-\tau)\lambda_0}\mathrm{d}\tau\right)e^{-\mathrm{i}t\lambda_0} + \int_c^t f(\tau)e^{-\mathrm{i}(t-\tau)\lambda_0}\mathrm{d}\tau. \tag{2.4}$$

Нетрудно проверить, что $(D+\mathrm{i}\lambda_0)\tilde{f} = f$ и $(S, D^k\tilde{f}) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Значит, $\tilde{f}$ – решение уравнения $(D + \mathrm{i}\lambda_0)g = f$, $f \in W_\varphi$, принадлежащее подпространству W_φ.

Соотношение (2.3) и, следовательно, включение $\sigma_{W_\varphi} \subset -\mathrm{i}\Lambda_{\mathcal{J}_\varphi}$ для главного подмодуля $\mathcal{J}_\varphi$ доказаны.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathcal{J} = \mathcal{F}(W^0)$ – произвольный устойчивый подмодуль в $\mathcal{P}$, $\lambda_0 \notin \Lambda_{\mathcal{J}}$. Пусть $\varphi_0 \in \mathcal{J}$, $\varphi_0(\lambda_0) = 1$.

Если $\psi \in \mathcal{J}$, то функция

$$\Psi = \begin{cases} \psi - \frac{\psi(\lambda_0)}{\lambda_0} z\varphi_0, & \lambda_0 \neq 0, \\ \psi - \psi(0)\varphi_0, & \lambda_0 = 0, \end{cases}$$

принадлежит $\mathcal{J}$ и обращается в нуль в точке λ_0. Поэтому $\tilde{\psi} = \Psi/(z - \lambda_0) \in \mathcal{J}$. Таким образом, представление

$$\psi = \begin{cases} (z - \lambda_0)\tilde{\psi} + \frac{\psi(\lambda_0)}{\lambda_0} z\varphi_0, & \lambda_0 \neq 0, \\ z\tilde{\psi} + \psi(0)\varphi_0, & \lambda_0 = 0, \end{cases}$$

имеет место для произвольной функции $\psi \in \mathcal{J}$. Для подмодуля $\mathcal{J}$ можем написать

$$\mathcal{J} = (z - \lambda_0)\mathcal{J} + \mathcal{J}_{\varphi_0}. \tag{2.5}$$

Используя *принцип двойственности* (предложение 1) и рефлексивность пространства $\mathcal{E}$, из (2.5) нетрудно вывести, что исходное D-инвариантное подпространство W есть пересечение D-инвариантных подпространств W_1 и W_2, имеющих аннуляторные подмодули $(z - \lambda_0)\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_{\varphi_0}$, соответственно.

Решением в W уравнения $(D+\mathrm{i}\lambda_0)g = f$, $f \in W$, будет функция $\tilde{f}$, определяемая формулой (2.4). Действительно, как уже отмечалось, $\tilde{f} \in W_2$, а соотношение $(D + \mathrm{i}\lambda_0)\tilde{f} = f \in W$ эквивалентно включению $\tilde{f} \in W_1$. Поэтому $\tilde{f} \in W_1 \bigcap W_2 = W$. Следовательно, $(D + \mathrm{i}\lambda_0) : W \to W$ – сюръективный оператор. Согласно цитированному в начале доказательства утверждению из работы [12] точка $(-\mathrm{i}\lambda_0)$ не является точкой спектра σ_W. Значит, справедливо включение $\mathbb{C} \setminus (-\mathrm{i}\Lambda_{\mathcal{J}}) \subset \mathbb{C} \setminus \sigma_W$, эквивалентное требуемому.

□

2.2. Сохранение класса $\mathcal{F}(C_0^\infty(a;b))$ при возмущениях нулей. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \int_a^b s(t)e^{-\mathrm{i}tz}\mathrm{d}\,t, \quad s \in C_0^\infty(a;b); \tag{2.6}$$

обозначим через $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $k = 1, 2, , \ldots$ – последовательность корней этой функции, упорядоченную по возрастанию модулей: $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \ldots$.

Нас интересуют условия близости другой последовательности $\Gamma = \{\gamma_k\}$ к последовательности Λ, при которых Γ тоже будет множеством нулей функции ψ из $\mathcal{F}(C_0^\infty(a;b))$.

Устойчивость различных классов функций финитных преобразований Фурье относительно сдвигов нулей изучалась А.М. Седлецким [14].

Пусть $(a'; b') \Subset \mathbb{R}$. Теорема 5.1.2 работы [14], в частности, содержит следующее утверждение:
условие

$$\sum_j \frac{|\lambda_j - \gamma_j|}{1 + |\mathrm{Im}\,\lambda_j| + |\mathrm{Im}\,\gamma_j|} \leq +\infty \tag{2.7}$$

сохраняет класс $\mathcal{F}(L^p(a'; b'))$, $1 \leq p \leq \infty$.

Предложение 3. *Пусть φ – функция вида (2.6) с последовательностью нулей $\Lambda = \{\lambda_k\}$, $0 < |\lambda_1| \le |\lambda_2| \le \dots$, и пусть $\Gamma = \{\gamma_k\}$ – другая последовательность, столь близкая к Λ, что выполнено условие (2.7). Тогда для любых a', $b' \in \mathbb{R}$ таких, что $\operatorname{ch}\operatorname{supp} s \Subset (a';b') \subset (a;b)$, функция ψ, определенная формулой*

$$\psi(z) = e^{-icz} \lim_{R\to\infty} \prod_{|\gamma_k|<R} (1 - z/\gamma_k), \quad где \quad c = (h_\varphi(\pi/2) + h_\varphi(-\pi/2))/2, \tag{2.8}$$

принадлежит классу $\mathcal{F}(C_0^\infty(a';b'))$, и ее индикатор h_ψ совпадает с индикатором h_φ функции φ.

Доказательство. Пусть a', $b' \in \mathbb{R}$ такие, как сказано в условии. В силу цитированного выше результата А.М. Седлецкого функция ψ есть образ при преобразовании Фурье-Лапласа некоторой функции $\tilde{s} \in L^q(a';b')$ для всех $1 \le q \le \infty$, причем из доказательства теорем 5.1.1, 5.1.2 в работе [14] видно, что $\operatorname{ch}\operatorname{supp}\tilde{s} = \operatorname{ch}\operatorname{supp} s$, и значит, индикаторы целых функций φ и ψ совпадают.

Применив аналогичные рассуждения к функциям $z^m\varphi$ и $z^m\psi$, $m = 1, 2, \dots$, и учитывая соотношения

$$z^m\varphi = \mathcal{F}(s^{(m)}), \quad z^m\psi = \mathcal{F}(\tilde{s}^{(m)}) \quad (\tilde{s}^{(m)} \quad \text{– обобщенная производная распределения} \quad \tilde{s}),$$

получим

$$\tilde{s}^{(m)} \in L^q(a';b'), \quad 1 \le q \le \infty, \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}\operatorname{supp}\tilde{s}^{(m)} \subset \operatorname{ch}\operatorname{supp} s, \ m = 0, 1, \dots$$

Следовательно, $\tilde{s} \in C_0^\infty(a';b')$, $\psi = \mathcal{F}(\tilde{s}) \in \mathcal{F}(C_0^\infty(a';b'))$. □

В работе [14] (доказательство теоремы 5.1.2) показано, что условие (2.7) влечет сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{|\lambda_j - \gamma_j|}{1+|\operatorname{Im}\lambda_j|}$. Обозначим его сумму через C.

Нижеследующее утверждение, дополняющее предложение 3, будет использовано при доказательстве теоремы 2.

Лемма 1. *В условиях и обозначениях предложения 3 справедливы неравенства*

$$\max_{a'\le t\le b'} |\tilde{s}^{(m)}(t)| \le A_m, m = 0, 1, \dots, \quad \text{где} \quad A_m = e^{2C}\|s^{(m+1)}\|_{L^1(a';b')}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Положим

$$s_{m,0}(t) = s^{(m)}(t), \quad s_{m,n}(t) = s_{m,n-1}(t) - \mathrm{i}(\gamma_n - \lambda_n)\int_{a'}^{t} e^{\mathrm{i}\lambda_n(t-\tau)} s_{m,n-1}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau, \quad t \in (a';b').$$

Из оценки (5.1.14) в [14], определений функций $s_{m,n}$ и величины C следует, что

$$\|s_{m,n}\|_{L^1(a';b')} \le \left(1 + \frac{2|\lambda_j - \gamma_j|}{1 + |\operatorname{Im}\lambda_j|}\right)\|s_{m,n-1}\|_{L^1(a';b')} \le \dots \le e^{2C}\|s^{(m+1)}\|_{L^1(a';b')}.$$

Так как последовательность $s_{m,n}$ сходится к $\tilde{s}^{(m)}$ в $L^1(a';b')$ (это доказано в теореме 5.1.2 работы [14]), учитывая последнее неравенство, заключаем, что

$$\|\tilde{s}^{(m)}\|_{L^1(a';b')} \le e^{2C}\|s^{(m)}\|_{L^1(a';b')}.$$

Из этой оценки выводим требуемые неравенства (2.9):

$$\max_{a'\le t\le b'} |\tilde{s}^{(m)}(t)| = \max_{a'\le t\le b'} \left|\int_a^t \tilde{s}^{(m+1)}(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau\right| \le \|\tilde{s}^{(m+1)}\|_{L^1(a';b')} \le e^{2C}\|s^{(m+1)}\|_{L^1(a';b')}.$$

□

3. Достаточные условия устойчивости 2-порожденного подмодуля в $\mathcal{P}$

3.1. Вспомогательные оценки. Пусть $\varphi \in \mathcal{P}$, $\varphi(0) = 1$, $\Lambda = \{\lambda_j\}$, $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ – множество нулей функции φ. Известно [2, гл. II], что для φ имеет место представление

$$\varphi(z) = e^{-\mathrm{i}(c_\varphi + d_\varphi)z/2} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right), \quad \text{где } \ c_\varphi = h(-\pi/2), \ \ d_\varphi = h(\pi/2), \tag{3.1}$$

при этом бесконечное произведение сходится условно и равномерно на компактах в $\mathbb{C}$, а последовательность Λ имеет плотность $\Delta_0 = (d_\varphi - c_\varphi)/2\pi$.

Рассмотрим еще одну функцию $\psi \in \mathcal{P}$, $\psi(0) = 1$, с нулевым множеством $\Gamma = \{\gamma_j\}$, упорядоченным по возрастанию модулей $|\gamma_j|$ и имеющим плотность Δ_0. Функция ψ тоже может быть представлена в виде (3.1) с γ_j вместо λ_j.

Введем необходимые обозначения.

$$\varphi_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right), \qquad \psi_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{z}{\gamma_j}\right),$$

$$\Phi_M(z) = \prod_{j\in M} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right), \qquad \Psi_M(z) = \prod_{j\in M} \left(1 - \frac{z}{\gamma_j}\right),$$

где $M \subset \mathbb{N}$, – непустое множество, для которого оба произведения сходятся (условно и равномерно на компактах в $\mathbb{C}$); если $M = \emptyset$, то полагаем $\Phi_M(z)$ и $\Psi_M(z)$ тождественно равными единице.

Для чисел $\sigma \in (0; 1/2)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначим $e_\sigma(\lambda)$ замкнутый круг радиуса $\sigma|\lambda|$ с центром λ, и для непустого множества $M \subset \mathbb{N}$ положим $E_{M,\sigma} = \bigcup\limits_{j\in M} \left(e_\sigma(\lambda_j) \bigcup e_\sigma(\gamma_j)\right)$.

Пусть

$$\chi(\mu) = \frac{1}{\mu}\ln(1+\mu) + \ln\left(1 + \frac{1}{\mu}\right), \tag{3.2}$$

эта функция строго убывает на положительной полуоси и принимает там положительные значения; значит, существует обратная к ней функция $\mu(\chi) > 0$, также определенная и строго убывающая при положительных значения аргумента.

Следующие величины характеризуют близость последовательностей Λ и Γ.

$$S_n = \sum_{j\geq n} \left|\frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\gamma_j}\right|, \qquad K_M = \max_{j\in M} \left\{ \left|\frac{\lambda_j}{\gamma_j}\right|, \ \left|\frac{\gamma_j}{\lambda_j}\right| \right\}, \quad M \subset \mathbb{N}, \quad M \neq \emptyset,$$

полагаем $K_M = 1$, если $M = \emptyset$.

Далее в этом пункте считаем, что

$$|\lambda_j| \geq 2, \quad , |\gamma_j| \geq 2, \quad j = 1, 2, \dots, \tag{3.3}$$

и для некоторого числа $\Delta > \Delta_0$ при всех $r > 0$ выполнены неравенства

$$n_\Lambda(r) < \Delta r, \qquad n_\Gamma(r) < \Delta r, \tag{3.4}$$

здесь $n_\Lambda(r) = \sum\limits_{j:\ |\lambda_j|\leq r} 1$ и $n_\Gamma(r) = \sum\limits_{j:\ |\gamma_j|\leq r} 1$ – считающие функции последовательностей Λ и Γ.

Лемма 2. 1. *Пусть $\delta > 0$ и $\Delta > \Delta_0$ – число, для которого выполнены неравенства (3.4). Для всех k при $|z| \geq \max\{2,\ \mu(\delta/\Delta)\max\{|\lambda_k|, |\gamma_k|\}\}$ справедливы оценки*

$$\ln|\varphi_k(z)| \leq \min\{\delta|z|, k\ln|z|\}, \quad \ln|\psi_k(z)| \leq \min\{\delta|z|, k\ln|z|\}. \tag{3.5}$$

2. *Для* $\sigma\in(0;1/2)$, $M\subset\mathbb{N}$ *вне множества* $E_{M,\sigma}$ *выполнены неравенства*

$$\left|\ln\left|\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right|\right|\le\frac{S_p}{\sigma}|z|, \tag{3.6}$$

$$\left|1-\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right|\le\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_p|z|\exp\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_p|z|\right), \tag{3.7}$$

где $p=\min\{j:\ j\in M\}$, *а множество* $M\subset\mathbb{N}$ – *такое, что произведения, определяющие функции* Φ_M, Ψ_M, *сходятся.*

3. *Пусть функция* φ *при всех* $z\in\mathbb{C}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\ln|\varphi(z)|\le\frac{d_\varphi-c_\varphi}{2}|\operatorname{Im}z|. \tag{3.8}$$

Для произвольных $\sigma\in(0;1/2)$, $R>0$, $k\in\mathbb{N}$ *положим*

$$M=M(k,R,\sigma)=\left\{j\in\mathbb{N}:\quad j>k,\ \left(e_\sigma(\lambda_j)\bigcup e_\sigma(\gamma_j)\right)\bigcap[-R,R]\ne\emptyset\right\}. \tag{3.9}$$

Тогда неравенство

$$|\psi_k(x)\varphi(x)-\varphi_k(x)\psi(x)|\le\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_MS_{k+1}R$$
$$\exp\left[\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_MS_{k+1}+\frac{\sigma(d_\varphi-c_\varphi)}{1-\sigma}\right)R+\min\{\delta R,\ k\ln R\}\right]$$
$$\left(1+\exp\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_MS_{k+1}R\right)\right), \tag{3.10}$$

выполнено для всех $x\in[-R;R]$, $R\ge\max\{2,\ \mu(\delta/\Delta)|\lambda_k|\}$, $k\in\mathbb{N}$.

Отметим, что величины S_p в правых частях неравенств (3.6), (3.7) и S_{k+1} в правой части неравенства (3.10) могут принимать значение $+\infty$; в этом случае указанные неравенства тривиальны. В дальнейшем, при использовании этих неравенств на последовательности Λ и Γ будут наложены условия, обеспечивающие конечность S_p.

Доказательство. 1. Неравенства $\ln|\varphi_k(z)|\le\delta|z|$, $\ln|\psi_k(z)|\le\delta|z|$ для $|z|\ge\mu(\delta/\Delta)\max\{|\lambda_k|,|\gamma_k|\}$ доказываются так же, как п. 1 леммы 1 из [6], с учетом условий (3.4) на число Δ и того, что последовательности Λ и Γ упорядочены по возрастанию $|\lambda_j|$, $|\gamma_j|$.

Из условий (3.3) непосредственно получаем, что $\ln|\varphi_k(z)|\le k\ln|z|$, $\ln|\psi_k(z)|\le k\ln|z|$ при $|z|\ge2$.

2. Для вывода оценок (3.6) и (3.7) воспользуемся схемой, которая применялась при доказательстве пунктов 2 и 3 леммы 1 из [6]. Фиксируем произвольное $\sigma\in(0;1/2)$. Для $z\notin e_\sigma(\gamma_j)$ имеем

$$\ln\left|\frac{1-z/\lambda_j}{1-z/\gamma_j}\right|=\ln\left|1+\frac{(1/\gamma_j-1/\lambda_j)z}{1-z/\gamma_j}\right|\le\left|\frac{1}{\gamma_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right|\frac{|z|}{\sigma}.$$

Аналогично, для $z\notin e_\sigma(\lambda_j)$ будет

$$\ln\left|\frac{1-z/\gamma_j}{1-z/\lambda_j}\right|\le\left|\frac{1}{\gamma_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right|\frac{|z|}{\sigma}.$$

Из этих неравенств следует справедливость оценки (3.6)для всех z, лежащих вне множества $E_{M,\sigma}$:

$$\left|\ln\left|\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right|\right| \le \sum_{j\in M}\left|\ln\left|\frac{1-z/\lambda_j}{1-z/\gamma_j}\right|\right| \le \left(\sum_{j\in M}\left|\frac{1}{\gamma_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right|\right)\frac{|z|}{\sigma} \le \frac{S_p}{\sigma}|z|.$$

Для того чтобы получить неравенство (3.7), оценим сначала выражение $\left|\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right|$, вне множества $E_{M,\sigma}$.

Заметим, что

$$\left|\mathrm{Re}\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right| = \left|\ln\left|\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right|\right|, \left|\mathrm{Im}\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right| = \left|\arg\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right|.$$

Для $\left|\mathrm{Re}\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right|$ выполняется неравенство (3.6).

Оценим $\left|\mathrm{Im}\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right|$. Для этого воспользуемся легко проверяемым неравенством

$$\arg(1+w) \le \pi|w|, \quad w\in\mathbb{C},$$

где взята ветвь функции arg, принимающая значения в промежутке $(-\pi;\pi]$.

Для $z\notin e_\sigma(\gamma_j)$ имеем

$$\arg\left|\frac{1-z/\lambda_j}{1-z/\gamma_j}\right| = \arg\left|1+\frac{(1/\gamma_j-1/\lambda_j)z}{1-z/\gamma_j}\right| \le \frac{\pi}{\sigma}\left|\frac{1}{\gamma_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right|\,|z|.$$

Аналогично, для $z\notin e_\sigma(\lambda_j)$ будет

$$\arg\left|\frac{1-z/\gamma_j}{1-z/\lambda_j}\right| \le \frac{\pi}{\sigma}\left|\frac{1}{\gamma_j}-\frac{1}{\lambda_j}\right|\,|z|.$$

Поэтому

$$\left|\mathrm{Im}\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right| \le \sum_{i\in M}\left|\arg\left|\frac{1-z/\lambda_j}{1-z/\gamma_j}\right|\right| \le \frac{\pi}{\sigma}S_p|z|, \quad z\notin E_{M,\sigma}.$$

Из полученных оценок для $\mathrm{Re}\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}$ и $\mathrm{Im}\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}$ следует, что

$$\left|\ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}\right| \le \frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_p|z|, \quad z\notin E_{M,\sigma}.$$

Выражение $\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}$ вне множества $E_{M,\sigma}$ может быть представлено в виде $\exp c_M(z)$, где $c_M(z) = \ln\frac{\Phi_M(z)}{\Psi_M(z)}$. Разлагая $\exp c_M(z)$ в ряд по степеням $c_M(z)$ и используя стандартный способ оценки таких рядов, получим неравенство (3.7).

3. Положим $N=\{j>k, \quad j\notin M\}$. Так как $\{j:\ \ j>k\} = M\bigcup N$, функция, которую нужно оценить, может быть представлена в виде

$$\psi_k(z)\varphi(z)-\varphi_k(z)\psi(z) = \psi_k(z)\varphi(z)\left(1-\frac{\Psi_M(z)}{\Phi_M(z)}\right)+ \\ +\psi_k(z)\varphi(z)\frac{\Psi_M(z)}{\Phi_M(z)}\left(1-\frac{\Psi_N(z)}{\Phi_N(z)}\right). \quad (3.11)$$

Заметим, что множество M, определенное формулой (3.9), конечно, поэтому множество индексов N отличается от множества $\{j:\ \ j>k\}$ лишь на конечное число элементов. Следовательно, все четыре произведения, участвующие в определении функций Φ_M, Ψ_M, Φ_N, Ψ_N, сходятся.

Для фиксированных $\sigma\in(0;1/2)$, $R\ge\max\{2,\ \mu(\delta/\Delta)|\lambda_k|\}$ выберем положительное число $\varepsilon_{R,\sigma} < 2\sigma R/(1-\sigma)$ столь малым, что прямоугольник $\Pi_{R,\varepsilon} = \{z=x+\mathrm{i}y:\ |x|\le R,\ |y|\le\varepsilon\}$

и множество $E_{N,\sigma} = \bigcup\limits_{j\in N}(e_\sigma(\lambda_j)\bigcup e_\sigma(\gamma_j))$ не имеют общих внутренних точек при всех $\varepsilon \le \varepsilon_{R,\sigma}$.

Оценим каждое из слагаемых в правой части (3.11).

Выражение $\varphi(z)\left(1-\frac{\Psi_M(z)}{\Phi_M(z)}\right)$ представляет собой целую функцию. Используя условие (3.8), оценку (3.7) и ограничения при выборе числа ε, выводим, что на границе области $G_{R,\varepsilon,\sigma}$, состоящей из всех внутренних точек множества $\Pi_{R,\varepsilon}\bigcup\left(\bigcup\limits_{j\in M}(e_\sigma(\lambda_j)\bigcup e_\sigma(\gamma_j))\right)$, эта целая функция удовлетворяет неравенству

$$\left|\varphi(z)\left(1-\frac{\Psi_M(z)}{\Phi_M(z)}\right)\right| \le \frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_M S_{k+1}R\times$$
$$\times\exp\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_M S_{k+1}+\frac{\sigma(d_\varphi-c_\varphi)}{1-\sigma}\right)R. \quad (3.12)$$

Учитывая соотношения (3.5), получаем, что при $R\ge\max\{2,\ \mu(\delta/\Delta)|\lambda_k|\}$, $k\in\mathbb{N}$ для всех $x\in[-R;R]$ выполняется неравенство

$$\left|\psi_k(x)\varphi(x)\left(1-\frac{\Psi_M(x)}{\Phi_M(x)}\right)\right| \le \frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_M S_{k+1}R$$
$$\exp\left[\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_M S_{k+1}+\frac{\sigma(d_\varphi-c_\varphi)}{1-\sigma}\right)R+\min\{\delta R,\ k\ln R\}\right]. \quad (3.13)$$

Оценим второе слагаемое в правой части представления (3.11). В силу неравенств (3.6), (3.8) и условий выбора числа ε на границе области $G_{R,\varepsilon,\sigma}$ для целой функции $\varphi(z)\frac{\Psi_M(z)}{\Phi_M(z)}$ имеет место неравенство

$$\left|\varphi(z)\frac{\Psi_M(z)}{\Phi_M(z)}\right| \le \exp\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_M S_{k+1}+\frac{\sigma(d_\varphi-c_\varphi)}{1-\sigma}\right)R. \quad (3.14)$$

Далее, при любом $\varepsilon\in(0;\varepsilon_{R,\sigma})$ на границе прямоугольника $\Pi_{R,\varepsilon}$ для множителя $\left(1-\frac{\Psi_N(z)}{\Phi_N(z)}\right)$ верна оценка

$$\left|\left(1-\frac{\Psi_N(z)}{\Phi_N(z)}\right)\right| \le \frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_{k+1}|z|\exp\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_{k+1}|z|\right).$$

Внутри прямоугольника $\Pi_{R,\varepsilon}$ функция $\left(1-\frac{\Psi_N(z)}{\Phi_N(z)}\right)$ аналитична. Поэтому для всех $x\in[-R;R]$ будет

$$\left|\left(1-\frac{\Psi_N(x)}{\Phi_N(x)}\right)\right| \le \frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_{k+1}\sqrt{R^2+\varepsilon^2}\exp\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_{k+1}\sqrt{R^2+\varepsilon^2}\right).$$

Устремляя здесь ε к 0, получим

$$\left|\left(1-\frac{\Psi_N(x)}{\Phi_N(x)}\right)\right| \le \frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_{k+1}R\exp\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{\sigma}S_{k+1}R\right) \qquad x\in[-R;R].$$

Из этого неравенства, оценок (3.14) и (3.5) выводим нужную оценку для второго слагаемого:

$$\left|\psi_k(x)\varphi(x)\frac{\Psi_M(x)}{\Phi_M(x)}\left(1-\frac{\Psi_N(x)}{\Phi_N(x)}\right)\right| \le \frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_M S_{k+1} R\times$$
$$\exp\left[\left(\frac{2\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_M S_{k+1}+\frac{\sigma(d_\varphi-c_\varphi)}{1-\sigma}\right)R+\min\{\delta R,\ k\ln R\}\right]$$
$$\text{для всех}\quad x\in[-R;R],\quad R\ge\max\{2,\ \mu(\delta/\Delta)|\lambda_k|\},\quad k\in\mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Из оценок (3.13) и (3.15) следует требуемое неравенство (3.10).

□

3.2. Условия устойчивости подмодуля с двумя образующими. Рассмотрим функции $\varphi,\,\psi\in\mathcal{F}(C_0^\infty(a;b))\subset\mathcal{P}$, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi(0)=\psi(0)=1,\qquad h_\varphi(\theta)=h_\psi(\theta),\quad \theta\in[0;2\pi). \tag{3.16}$$

Функции φ и ψ – преобразования Фурье-Лапласа финитных бесконечно дифференцируемых функций, поэтому для них верны оценки

$$|\varphi(x)|\le\frac{1}{|x|^k},\quad |\psi(x)|\le\frac{1}{|x|^k},\quad x\in\mathbb{R},\ \ |x|\ge R_k,\quad k=1,2,\dots, \tag{3.17}$$

где $\{R_k\}$ – некоторая возрастающая последовательность чисел, больших 2.

Обозначим $\Lambda=\{\lambda_j\}$, $\Gamma=\{\gamma_j\}$ последовательности нулей функций φ и ψ, соответственно, упорядоченные по возрастанию модулей, каждый нуль выписывается столько раз, какова его кратность. Последовательности Λ и Γ имеют одинаковую плотность; будем обозначать ее Δ_0, как и выше. Для произвольных фиксированных чисел $\Delta>\Delta_0$, $\delta>0$ положим $R_j^*=\mu(\delta/\Delta)\max\{|\lambda_j|,|\gamma_j|\}$, где функция $\mu(\chi)$ – обратная к функции $\chi(\mu)$, определенной формулой (3.2).

Теорема 1. *Предположим, что для некоторых чисел $\Delta>\Delta_0$, $\delta>0$ и возрастающей последовательности $R_k\ge 2$, $k=1,2,\dots$, для которой выполнено (3.17), верно соотношение*

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{S_{k+1}}}{\max\{R_k,R_k^*\}}>\delta. \tag{3.18}$$

Тогда подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$, порожденный функциями φ и ψ в модуле $\mathcal{P}$, устойчив.

Доказательство. Для вещественного числа c отображение

$$\varphi\mapsto\varphi_c=e^{\mathrm{i}cz}\varphi$$

определяет топологический модульный изоморфизм исходного модуля $\mathcal{P}$ и модуля $\mathcal{P}_c$, состоящего из преобразований Фурье-Лапласа распределений с компактными носителями, лежащими в интервале $(a-c;b-c)$. Ясно, что подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ и его образ $\mathcal{J}_{\varphi_c,\psi_c}$ при указанном изоморфизме устойчивы или нет одновременно.

Используя этот факт, перейдем к функциям $\varphi_c=e^{\mathrm{i}cz}\varphi$, $\psi_c=e^{\mathrm{i}cz}\varphi\in\mathcal{P}_c$, где $c=(h_\varphi(-\pi/2)+h_\varphi(\pi/2))/2$. Индикаторные диаграммы функций φ_c и ψ_c совпадают с отрезком мнимой оси $[-\mathrm{i}\pi\Delta_0;\mathrm{i}\pi\Delta_0]$. Поэтому для этих функций выполнена оценка вида (3.8). В дальнейшем изложении индекс c будем опускать.

Как отмечалось выше, модуль $\mathcal{P}$ является b-устойчивым. Поэтому, согласно предложению 4.2 из работы [4] (с учетом замечания 1 из § 4 этой же работы), устойчивость замкнутого подмодуля $\mathcal{J}$ достаточно доказать для какой-нибудь одной точки $\lambda_0\in\mathbb{C}$. Например, для $\lambda_0=0$.

Воспользуемся критерием устойчивости в точке λ_0 для подмодуля с конечным числом образующих ([4, предложение 4.9]), который в случае двух образующих формулируется так: *подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ с образующими, удовлетворяющими условию $\varphi(\lambda_0) = 1$, $\psi(\lambda_0) = 1$, устойчив в точке λ_0 тогда и только тогда, когда тождественный нуль можно аппроксимировать в топологии $\mathcal{P}$ функциями вида $(p\varphi - q\psi)$, где p, q – многочлены и $p(\lambda_0) = q(\lambda_0) = 1$.*

В начале § 4 работы [4], содержащем предложения 4.5, 4.8, из которых выводится этот критерий, на модуль $\mathcal{P}$ накладывается более сильное, чем b-устойчивость, требование *равномерной устойчивости.* Напомним, что *равномерная устойчивость* модуля $\mathcal{P}$ означает, что для любой окрестности нуля $U \subset \mathcal{P}$ найдется окрестность нуля $U' \subset \mathcal{P}$, такая, что при всяком $\lambda \in \mathbb{C}$ верна импликация: $\varphi \in U'$, $n_\varphi(\lambda) > 0 \Longrightarrow \frac{\varphi}{z-\lambda} \in U$. (Этот термин введен в [3], [4]).

Фактически, как это отмечено и в замечании 2 [4, § 4], при доказательстве предложений 4.5, 4.8, 4.9 в [4] использовано лишь следующее, более слабое, свойство *поточечной устойчивости* пространства $\mathcal{P}$: для любой окрестности нуля $U \subset \mathcal{P}$ и любого $\lambda \in \mathbb{C}$ найдется окрестность нуля $V_\lambda \subset \mathcal{P}$, такая, что верна импликация: $\varphi \in V_\lambda$, $n_\varphi(\lambda) > 0 \Longrightarrow \frac{\varphi}{z-\lambda} \in U$. Также в [4, § 4], доказано, что борнологическое b-устойчивое пространство является поточечно устойчивым.

Из вышесказанного заключаем, что сформулированный критерий устойчивости для подмодуля с двумя образующими может быть применен в рассматриваемом модуле $\mathcal{P}$.

Заметим, что на интересующие нас свойства подмодуля, порожденного функциями φ и ψ, не влияет изменение последовательностей Λ и Γ на конечное число точек. Действительно, пусть при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$ для функций φ/φ_{n_0}, ψ/ψ_{n_0} выполнены условия критерия устойчивости: существуют обобщенные последовательности многочленов $\tilde{p}_\alpha$, $\tilde{q}_\alpha$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\tilde{p}_\alpha \frac{\varphi}{\varphi_{n_0}} - \tilde{q}_\alpha \frac{\psi}{\psi_{n_0}} \to 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{P}, \quad \tilde{p}_\alpha(0) = \tilde{q}_\alpha(0) = 1 \quad \text{для всех} \quad \alpha.$$

Тогда для многочленов $p_\alpha = \varphi_{n_0}\psi_{n_0}\tilde{p}_\alpha$, $q_\alpha = \varphi_{n_0}\psi_{n_0}\tilde{q}_\alpha$ и функций φ, ψ, очевидно, будут выполняться аналогичные соотношения:

$$p_\alpha\varphi - q_\alpha\psi \to 0 \quad \text{в} \quad \mathcal{P}, \quad p_\alpha(0) = q_\alpha(0) = 1 \quad \text{для всех} \quad \alpha.$$

Таким образом, можем считать, что исходные последовательности нулей Λ и Γ удовлетворяют условиям (3.3), (3.4).

Рассмотрим последовательность $\{\psi_k\varphi - \varphi_k\psi\}$. В силу (3.3) на вещественной оси, при $|x| \geq 2$, имеем

$$|\varphi_k(x)| \leq |x|^k, \quad |\psi_k(x)| \leq |x|^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Учитывая (3.17) и то, что $R_k \geq 2$, отсюда получим

$$|\psi_k(x)\varphi(x) - \varphi_k(x)\psi(x)| \leq 2, \quad |x| \geq R_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.19}$$

Выберем и фиксируем число $\delta' > \delta$ такое, что соотношение (3.18) остается верным после замены в нем δ на δ'. Существует подпоследовательность индексов k_ν, для которой

$$\frac{\ln \frac{1}{S_{k_\nu+1}}}{\max\{R_{k_\nu}, R^*_{k_\nu}\}} > \delta', \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{3.20}$$

Следовательно,

$$S_{k_\nu+1}\tilde{R}_{k_\nu} \to 0, \quad \nu \to \infty, \tag{3.21}$$

где обозначено $\tilde{R}_k = \max\{R_k, R^*_k\}$.

Фиксируем произвольное $\sigma \in (0; 1/2)$ и воспользуемся пунктом 3 леммы 2, положив в нем $R = \tilde{R}_{k_\nu}$. Оценим сначала величины K_{M_ν}, где множество индексов $M_\nu = M(k_\nu, \tilde{R}_{k_\nu}, \sigma)$

определяется формулой (3.9). Для $j \in M_\nu$ хотя бы одна из величин $|\lambda_j|$, $|\gamma_j|$ не превосходит $\tilde{R}_{k_\nu}/(1-\sigma)$. Пусть, например, $|\lambda_j| \le \tilde{R}_{k_\nu}/(1-\sigma)$. Тогда

$$\left|1 - \left|\frac{\lambda_j}{\gamma_j}\right|\right| \le S_{k_\nu+1}\tilde{R}_{k_\nu}/(1-\sigma).$$

Поэтому

$$K_{M_\nu} \to 1, \quad \nu \to \infty. \tag{3.22}$$

Из неравенства (3.10) для функции $(\psi_{k_\nu}\varphi - \varphi_{k_\nu}\psi)$ получим оценку

$$|\psi_{k_\nu}(x)\varphi(x) - \varphi_{k_\nu}(x)\psi(x)| \le \mathcal{M}_{1,\nu}\mathcal{M}_{2,\nu}, \quad |x| \le \tilde{R}_{k_\nu},$$

где

$$\mathcal{M}_{1,\nu} = \frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_{M_\nu}\left(1 + \exp\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_{M_\nu}S_{k_\nu+1}\tilde{R}_{k_\nu}\right)\right),$$

$$\mathcal{M}_{2,\nu} = S_{k_\nu+1}\tilde{R}_{k_\nu}\exp\left[\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_{M_\nu}S_{k_\nu+1} + \frac{2\pi\Delta_0\sigma}{1-\sigma}\right)\tilde{R}_{k_\nu} + \delta\tilde{R}_{k_\nu}\right].$$

В силу соотношений (3.21) и (3.22) последовательность $\{\mathcal{M}_{1,\nu}\}$ ограничена. Для второго сомножителя $\mathcal{M}_{2,\nu}$ имеем

$$\ln\mathcal{M}_{2,\nu} = \left[\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_{M_\nu}S_{k_\nu+1} + \frac{2\pi\Delta_0\sigma}{1-\sigma} + \frac{\ln\tilde{R}_{k_\nu}}{\tilde{R}_{k_\nu}}\right) + \delta - \frac{\ln\frac{1}{S_{k_\nu+1}}}{\tilde{R}_{k_\nu}}\right]\tilde{R}_{k_\nu}. \tag{3.23}$$

Выберем теперь σ столь близким к нулю, чтобы выполнялось неравенство $(2\pi\Delta_0\sigma)/(1-\sigma) < (\delta'-\delta)/3$. Для выбранного σ найдем значение индекса $\nu = \nu_\sigma$ такое, что значения обоих выражений: $\frac{\sqrt{\pi^2+1}(1+\sigma)}{\sigma(1-\sigma)}K_{M_\nu}S_{k_\nu+1}$ и $(\ln\tilde{R}_{k_\nu})/(\tilde{R}_{k_\nu})$ – меньше, чем $(\delta'-\delta)/3$ при всех $\nu \ge \nu_\sigma$.

Для числа δ' и подпоследовательности $\{k_\nu\}$ выполнено соотношение

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{-\ln\ S_{k_\nu+1}}{\max\{R_{k_\nu}, R^*_{k_\nu}\}} > \delta'.$$

Поэтому найдутся положительное число ε_0 и значение индекса $\nu = \nu_1 \ge \nu_\sigma$, такие, что выражение, стоящее в квадратной скобке в правой части формулы (3.23), не превосходит $(-\varepsilon_0)$ при всех $\nu \ge \nu_1$. Следовательно, имеем оценку

$$\mathcal{M}_{2,\nu} \le \exp(-\varepsilon_0\tilde{R}_{k_\nu}), \quad \nu \ge \nu_1.$$

С учетом ограниченности последовательности $\{\mathcal{M}_{1,\nu}\}$ отсюда получаем, что найдется номер $\nu_0 \ge \nu_1$, для которого

$$|\psi_{k_\nu}(x)\varphi(x) - \varphi_{k_\nu}(x)\psi(x)| \le 2, \quad |x| \le \tilde{R}_{k_\nu}, \quad \nu \ge \nu_0. \tag{3.24}$$

Из этих оценок и неравенств (3.19) заключаем, что при всех $\nu \ge \nu_0$ будут выполнены соотношения

$$|\psi_{k_\nu}(x)\varphi(x) - \varphi_{k_\nu}(x)\psi(x)| \le 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В силу принципу Фрагмена-Линделефа во всей комплексной плоскости справедливы неравенства

$$|\psi_{k_\nu}(z)\varphi(z) - \varphi_{k_\nu}(z)\psi(z)| \le 2\exp\left(\pi\Delta_0|\mathrm{Im} z|\right), \quad \nu \ge \nu_0.$$

Из этих неравенств следует, что последовательность функций $\Phi_\nu(z) = \psi_{k_\nu}(z)\varphi(z) - \varphi_{k_\nu}(z)\psi(z)$, $\nu = \nu_1,\ \nu_2, \dots$, ограничена в $\mathcal{P}$, а значит, относительно компактна в этом пространстве (см. [1]). Учитывая полноту $\mathcal{P}$ (как пространства типа (LN^*), заключаем, что некоторая подпоследовательность $\{\Phi_{\nu_l}\}$ сходится в пространстве $\mathcal{P}$ к тождественному нулю.

Согласно критерию устойчивости из работы [4], приведенному выше, подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ устойчив.

□

Замечание 1. Пусть $N_0 \subset \mathbb{N}$ – такое бесконечное множество индексов, что для чисел R_k выполнено соотношение

$$\lim_{k\to\infty,\, k\in N_0} \frac{R_k}{k} = +\infty.$$

Незначительно изменяя рассуждения в последней части доказательства теоремы 1 (касающейся применения неравенства (3.10)), можно показать, что утверждение теоремы остается справедливым, если условие (3.18) заменить на следующее: найдется подпоследовательность $N_1 \subset N_0$, для которой

$$\lim_{k\to\infty,\, k\in N_1} \frac{\ln \frac{1}{S_{k+1}}}{R_k} > 0.$$

Следствие 1. *В условиях и обозначениях теоремы* 1 *имеет место импликация: если множество* $\Lambda \bigcap \Gamma$ *конечно, то подмодуль* $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ *слабо локализуем.*

Доказательство. Пусть W – D-инвариантное подпространство в $\mathcal{E}$, для которого $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ – аннуляторный подмодуль: $\mathcal{J}_{\varphi,\psi} = \mathcal{F}(W^0)$. Согласно теореме 1 подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ устойчив, поэтому (предложение 2) спектр подпространства W конечен и равен $(-\mathrm{i}\Lambda_{\mathcal{J}_{\varphi,\psi}})$. По предложению 6.1 из работы [12] подпространство W представляет собой алгебраическую прямую сумму подпространств W_{I_W} и $\mathcal{L}(\mathrm{Exp}\,(-\mathrm{i}\Lambda_{\mathcal{J}}))$ ($\mathcal{L}(\,\cdot\,)$ – линейная оболочка множества). Используя двойственность, получим, что подмодуль $\mathcal{J}$ есть пересечение аннуляторных подмодулей этих подпространств:

$$\mathcal{J}_{\varphi,\psi} = \mathcal{F}(W^0_{I_W}) \bigcap \mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathrm{Exp}\,(-\mathrm{i}\Lambda_{\mathcal{J}}))^0).$$

Подмодуль $\mathcal{F}(W^0_{I_W})$ представляет собой множество всех функций из $\mathcal{P}$, индикаторные диаграммы которых содержатся в множестве $\mathrm{i}I_W = \mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$. Подмодуль $\mathcal{F}(\mathcal{L}(\mathrm{Exp}\,(-\mathrm{i}\Lambda_{\mathcal{J}}))^0)$ есть совокупность *всех* функций из $\mathcal{P}$, обращающихся в нуль на множестве $\Lambda_{\mathcal{J}}$. Следовательно, $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ – слабо локализуемый подмодуль.

□

4. 2-порожденные подмодули в $\mathcal{P}$

Применим результаты предыдущего параграфа для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{J} \subset \mathcal{P}$ *– устойчивый подмодуль с конечным множеством нулей* $\Lambda_{\mathcal{J}}$ *и индикаторным отрезком* $[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}] \subset (a;b)$, *причем*[1] $c_{\mathcal{J}} < d_{\mathcal{J}}$. *Тогда для любой функции* $\varphi \in \mathcal{J}$, *удовлетворяющей условиям* $\varphi \in \mathcal{F}(C_0^\infty(a;b))$, $h_\varphi(-\pi/2) = c_{\mathcal{J}}$, $h_\varphi(\pi/2) = d_{\mathcal{J}}$, *найдется функция* $\psi \in \mathcal{J}$, *такая, что*

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_{\varphi,\psi}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что $0 \notin \Lambda_{\mathcal{J}}$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве следствия 1, заключаем, что подмодуль $\mathcal{J}$ слабо локализуем. Поэтому множество $\mathcal{J} \bigcap \mathcal{F}(C_0^\infty(a;b))$ не пусто. Легко видеть, что среди функций этого множества имеются функции с индикаторной диаграммой $\mathrm{i}[c_{\mathcal{J}}; d_{\mathcal{J}}]$. Пусть

[1] Если $c_{\mathcal{J}} = d_{\mathcal{J}} = c \in (a;b)$, то подмодуль $\mathcal{J}$ порожден одной функцией $e^{-\mathrm{i}\,cz}$. Это следует из упоминавшегося в начале § 2 примера 1 из [12, § 2] и принципа двойственности (предложение 1).

$\varphi \in \mathcal{J} \bigcap \mathcal{F}(C_0^\infty(a;b))$ – одна из таких функций, равная 1 в точке 0, и пусть Λ – ее нулевое множество.

Выберем и зафиксируем два числа a', $b' \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих соотношениям

$$a \le a' < c_\mathcal{J} \le d_\mathcal{J} < b' \le b,$$

и какую-нибудь последовательность $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}_k\}$, столь близкую к Λ, что для последовательностей Λ и $\tilde{\Gamma}$ справедливо (2.7). Пусть

$$\tilde{C} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\lambda_j - \tilde{\gamma}_j|}{1 + |\operatorname{Im} \lambda_j|}, \quad \tilde{A}_m = e^{2\tilde{C}} \|s_\varphi^{(m+1)}\|_{L^1(a';b')},$$

где $s_\varphi \in C_0^\infty(a';b')$ – прообраз при преобразовании Фурье-Лапласа функции φ.

Рассмотрим произвольную последовательность $\Gamma = \{\gamma_k\}$, $0 \notin \Gamma$, для которой

$$|\gamma_k - \lambda_k| \le |\tilde{\gamma}_k - \lambda_k|, \quad k = 1, 2, \dots \tag{4.1}$$

Из предложения 3 и леммы 1 следует, что функция ψ, определенная по функции φ и последовательности Γ равенством (2.8), есть преобразование Фурье-Лапласа некоторой функции $s_\psi \in C_0^\infty(a';b') \subset C_0^\infty(a;b)$, причем $\operatorname{ch}\ \operatorname{supp} s_\psi = [c_\mathcal{J}; d_\mathcal{J}]$ и $|s_\psi^{(m)}(t)| \le \tilde{A}_m$, $t \in (a;b)$, $m = 0, 1, \dots$

Пусть $\{r_k\}_{k=0}^\infty$ – возрастающая последовательность вещественных чисел, больших 2, такая, что $|\varphi(x)| \le |x|^{-k}$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| \ge r_k$. Положим

$$R_k = \max\{r_k, \tilde{A}_{k+1}(b' - a')\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{4.2}$$

Для функции ψ имеют место соотношения

$$|\psi(x)| \le \frac{\tilde{A}_{k+1}(b' - a')}{|x|^{k+1}} \le \frac{1}{|x|^k}, \quad |x| \ge R_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Последние оценки справедливы, с одними и теми же R_k, *для всех* функций ψ, определенных формулой (2.8) по функции φ и последовательности Γ, если только Γ удовлетоворяет (4.1). Среди таких последовательностей Γ выберем последовательность, подчиненную дополнительным требованиям: пересечение $\Gamma \bigcap \Lambda$ есть $\Lambda_\mathcal{J}$ и для последовательностей Λ и Γ выполнены условия теоремы 1 с числами R_k, определенными формулой (4.2). Так как $\mathcal{J}$ – слабо локализуемый подмодуль, функция ψ, определенная по такой последовательности Γ, содержится в $\mathcal{J}$. По теореме 1 подмодуль $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ устойчив, а в силу следствия 1 он также слабо локализуем.

Слабо локализуемые подмодули $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_{\varphi,\psi}$ имеют одинаковые индикаторные отрезки и нулевые множества. Поэтому $\mathcal{J}_{\varphi,\psi} = \mathcal{J}$. □

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 и схема доказательства теоремы 2 могут быть использованы для изучения вопроса о 2-порожденности устойчивых подмодулей с бесконечным множеством нулей. Мы планируем подробно обсуждать эти вопросы в другом месте.

Автор выражает благодарность участникам Уфимского городского семинара имени А.Ф. Леонтьева по теории функций за внимание к работе и полезное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Себастьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах ЛВП, важных в приложениях* // Математика. Сб. переводов инстранных статей. 1957. 1:1. С. 60–77.
2. B.Y. Levin (in collaboration with Yu. Lyubarskii, M. Sodin, V. Tkachenko). *Lectures on entire functions.* (Rev. Edition). AMS. Providence. Rhode Island, 1996. 254 p.
3. Красичков-Терновский И.Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I.* // Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43, №1. С. 44–66.
4. Красичков-Терновский И.Ф.*Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II.*// Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43, №2. С. 309–341.
5. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сборник. 1972. Т. 87 (129), №4. С. 459–489.
6. Абузярова Н.Ф. *Об одном свойстве подпространств, допускающих спектральный синтез* // Матем. сборник. 1999. Т. 190, №4. С. 3–22.
7. Абузярова Н.Ф. *Конечно порожденные подмодули в модуле целых функций, определяемом ограничениями на индикатор* // Матем. заметки. 2002. Т. 71, № 1. С. 3–17.
8. Хабибуллин Б.Н. *Спектральный синтез для пересечения инвариантных подпространств голоморфных функций* // Матем.сборник. 2005. Т. 196, №3. С. 119–142.
9. Хабибуллин Б.Н. *Замкнутые подмодули голоморфных функций, порожденные подмодулями, допускающими локальное описание* // Труды матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Геометрическая теория функций и краевые задачи. Т. 14. 2002. С. 280–298.
10. Хабибуллин Б.Н. *Замкнутые подмодули голоморфных функций с двумя порождающими* // Функц. анализ и его приложения. 2004. Т. 38, вып. 1. С. 65–80.
11. Хабибуллин Б.Н. *Замкнутые идеалы голоморфных функций с двумя порождающими* // Матем. заметки. 2004. Т. 76, №4. С. 604–609.
12. A. Aleman, B. Korenblum *Derivation-Invariant Subspaces of C^∞* // Computation Methods and Function Theory. 2008. V. 8, №2. P. 493–512.
13. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир, 1986. 462 с.
14. Седлецкий А.М.*Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации. I.* // Совр.матем. Фунд. направления. 2003. Т. 5. С. 3–152.

Наталья Фаирбаховна Абузярова,
Башкирский государственный университет,
ул. Заки Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: abnatf@gmail.com