ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 88-97.

УДК 517.956

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ГАУССА-БИБЕРБАХА-РАДЕМАХЕРА НА ПЛОСКОСТИ

А.В. НЕКЛЮДОВ

Аннотация. В работе изучена асимптотика решений уравнения Гаусса-Бибербаха-Радемахера $\Delta u = e^u$ в области, внешней по отношению к кругу на плоскости. Установлено, что главный член асимптотики является логарифмической функцией, убывающей к $-\infty$. Найдены также вторые члены асимптотики при различных значениях коэффициента в главной части.

Ключевые слова: полулинейное эллиптическое уравнение, уравнение Гаусса-Бибербаха-Радемахера, асимптотическое поведение решений.

Mathematics Subject Classification: 35J15, 35J61, 35J91

1. Введение

Уравнение

$$\Delta u = e^u, \tag{1}$$

возникает как модельное в задачах дифференциальной геометрии в связи с вопросом существования поверхностей отрицательной гауссовой кривизны [1], теории автоморфных функций [2], при изучении равновесия заряженного газа [3]. Вопросы существования решений уравнений вида (1) в неограниченных областях, в частности глобальных решений, рассматривались в работах [1], [4]–[8]. В частности хорошо известно [1], что глобальных решений уравнения (1) не существует при любом числе независимых переменных n, а при $n \geq 3$ не существует решений, определенных во внешности ограниченной области [8]. Поведение на бесконечности решений полулинейных эллиптических уравнений с экспоненциальной нелинейностью рассматривалось ранее в основном в цилиндрических областях [9]–[13]. В настоящей работе рассматривается асимптотическое поведение решений двумерного уравнения (1), определенных во внешности круга. Используется метод энергетических оценок типа принципа Сен-Венана [14]–[17], а также метод усреднения.

Рассмотрим уравнение (1) в двумерной области $Q = \{x : |x| > R_0\} \subset \mathbb{R}^2_x$, где $x = (x_1, x_2)$, Δ — двумерный оператор Лапласа. Будем считать, что $u \in C^2(\overline{Q})$.

Введем следующие обозначения. Среднее значение функции $u(x)$ на окружности $S_R = \{x : |x| = R\}$:

$$\overline{u}(R) = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} u\, ds,$$

"поток тепла"функции $u(x)$ через S_R:

$$P(R, u) = \int_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = 2\pi R \overline{u}'(R), \tag{2}$$

A.V. Neklyudov, Behavior of solutions to Gauss-Bieberbach-Rademacher equation on plane.

© Неклюдов А.В. 2014.

Поступила 28 марта 2014 г.

где ν — единичная внешняя нормаль к S_R. Пусть $Q(a,b) = \{x : a < |x| < b\}$, $0 < R_0 \le a < b$. Очевидно, что для решения $u(x)$ уравнения (1) в Q имеем

$$P(b,u) = P(a,u) + \int_{Q(a,b)} e^u\,dx. \tag{3}$$

Будем также использовать обозначение $\nabla u \equiv \operatorname{grad} u$. Для условия $f/g \to 1$ при некотором стремлении аргумента функций f и g будем использовать стандатное обозначение: $f \sim g$ при данном стремлении.

2. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $u(x)$ - решение уравнения (1) в Q. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$\int_Q e^u\,dx < \infty;$$

$$P(R,u) \to 2\pi C, \qquad \overline{u}(R) \sim C\ln R, \quad R \to \infty, \qquad C = \mathrm{const} \le -2.$$

Доказательство. Из (2) и (3) получим

$$P(R,u) = 2\pi R\overline{u}'(R) = P(R_0,u) + \int_{Q(R_0,R)} e^u\,dx. \tag{4}$$

Покажем, что правая часть равенства (4) отрицательна для всех $R > R_0$. Предположим, что это не так, тогда при $R > R_1 = \mathrm{const} > R_0$ получаем

$$R\overline{u}'(R) > c_1 > 0,$$

здесь и далее через c_j будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от рассматриваемого решения (1) и не завиящие от R, a, b, t и т.п. Отсюда при $R > R_2 = \mathrm{const} > R_1$

$$\overline{u}(R) > c_2 \ln R.$$

Используя интегральное неравенство Иенсена, отсюда получаем

$$\int_{S_R} e^u\,ds \ge 2\pi R e^{\overline{u}(R)} > 2\pi R^{c_2+1},$$

$$\int_{Q(R_0,R)} e^u\,dx > c_3 R^{c_2+2},$$

$R > R_3 = \mathrm{const} > R_2$. Снова используя (4) и интегрируя, получаем

$$R\overline{u}'(R) > c_4 R^{c_2+2}, \qquad \overline{u}(R) > c_5 R^{c_2+2}, \quad R > R_4 = \mathrm{const} > R_3.$$

Наконец, еще раз используя (4) и неравенство Иенсена, имеем при $R > R_5 = \mathrm{const}$

$$\overline{u}'(R) \ge c_6 + \frac{1}{2\pi R}\int_{Q(R_0,R)} e^u\,dx \ge c_6 + \frac{1}{R}\int_{R_0}^{R} r e^{\overline{u}(r)}\,dr > \left(\int_{R_0}^{R} e^{\overline{u}(r)}\,dr\right)^{1/2}.$$

Пусть $\int_{R_0}^{R} e^{\overline{u}(r)}\,dr = z(R)$, тогда $\overline{u}(R) = \ln z'(R)$, последнее неравенство можно записать в виде

$$\frac{z''}{z'} > z^{1/2},$$

откуда при $R > R_6$

$$z' > c_7 z^{3/2}.$$

Отсюда легко следует, что $z(R) \to \infty, \quad R \to R_7 - 0$ для некоторого $R_7 > R_6$, что невозможно для решения, определенного при $|x| > R_0$. Таким образом, полученное противоречие означает, что правая часть (4) отрицательна при всех $R > R_0$, отсюда немедленно вытекает первое утверждение теоремы.

Из (4) тогда следует, что

$$P(R,u) \to 2\pi C, \quad \overline{u}(R) \sim C \ln R, \quad R \to \infty, \quad C = \mathrm{const} \le 0.$$

Из неравенства Иенсена также получаем, что

$$\int_{R_0}^{\infty} r e^{\overline{u}(r)}\, dr \le \frac{1}{2\pi} \int_Q e^u \, dx < \infty,$$

откуда вытекает, что $C \le -2$. Теорема полностью доказана.

Лемма 1. *Пусть* $f \in C^1(\overline{Q}) \cap L_1(Q)$,

$$\int_{R_0}^{\infty} r \left(\int_{S_r} |f|\, dx \right)^2 dr < \infty.$$

Тогда в Q *существует решение* $V(x)$ *уравнения*

$$\Delta V = f,$$

удовлетворяющее при $R > R_1 = \mathrm{const} > R_0$ *оценкам*

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla V|^2 \, dx \le c_0 \ln R, \quad |\overline{V}(R)| \le c_1 \ln R. \tag{5}$$

При этом если $f > 0$ *в* Q, *то* $V \le 0$ *в* Q.

Если также выполнены условия

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{r} \int_{Q(r,\infty)} |f|\, dx < \infty, \quad \int_Q |x|^2 f^2 \, dx < \infty, \tag{6}$$

то

$$\int_Q |\nabla V|^2 \, dx < \infty, \quad V(x) \to C = \mathrm{const}, \quad |x| \to \infty.$$

Доказательство. Для любого натурального $N > R_0$ рассмотрим в области $Q(R_0, N)$ решение V_N краевой задачи

$$\Delta V_N = f, \qquad V_N\big|_{S_{R_0}} = 0, \quad \frac{\partial V_N}{\partial \nu}\bigg|_{S_N} = C_N,$$

где

$$C_N = -\frac{1}{2\pi N} \int_{Q(N,\infty)} f\, dx.$$

Очевидно, что при $N \ge R > R_0$

$$P(R, V_N) = P(N, V_N) - \int_{Q(R,N)} f\, dx = -\int_{Q(R,\infty)} f\, dx. \tag{7}$$

С учетом того, что $2\pi R \overline{V}'_N(R) = P(R, V_N)$, получаем тогда при $N \ge R >> R_0$

$$\left|\overline{V_N}(R)\right| \le c_2 \ln R. \tag{8}$$

Оценим интеграл Дирихле решения V_N. Очевидно, что

$$\int_{Q(R_0,N)} |\nabla V_N|^2 \, dx = C_N \int_{S_N} V_N \, ds - \int_{Q(R_0,N)} f V_N \, dx. \tag{9}$$

Оценим интегралы в правой части (9). С учетом (8) имеем

$$\left| C_N \int_{S_N} V_N \, ds \right| = 2\pi N \left| C_N \overline{V_N}(N) \right| \le c_3 \ln N. \tag{10}$$

Так как в силу теоремы вложения для функций одной переменной и неравенства Пуанкаре $\sup_{S_r} |V_N - \overline{V_N}(r)| \le c_4 r^{1/2}\big(\int_{S_r} |\nabla V_N|^2\, ds\big)^{1/2}$, то

$$\begin{aligned}\bigg|\int_{S_r} f(V_N - \overline{V_N}(r))\, ds\bigg| &\le c_4 r^{1/2}\bigg(\int_{S_r} |\nabla V_N|^2\, ds\bigg)^{1/2}\int_{S_r} |f|\, ds \le \\ &\le \frac{1}{2}\int_{S_r} |\nabla V_N|^2\, ds + c_5 r\bigg(\int_{S_r} |f|\, ds\bigg)^2.\end{aligned} \tag{11}$$

В силу (8) имеем

$$\bigg|\overline{V_N}(r)\int_{S_r} f\, ds\bigg| \le c_6 \ln r \int_{S_r} |f|\, ds. \tag{12}$$

Из (9)–(12) получаем

$$\begin{aligned}\int_{Q(R_0,N)} |\nabla V_N|^2\, dx &\le c_3 \ln N + \frac{1}{2}\int_{Q(R_0,N)} |\nabla V_N|^2\, dx + \\ &+ c_5 \int_{R_1}^{N} r\bigg(\int_{S_r} |f|\, ds\bigg)^2 dr + c_6 \ln N \int_{Q(R_1,N)} |f|\, dx.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\int_{Q(R_0,N)} |\nabla V_N|^2\, dx \le c_7 \ln N. \tag{13}$$

Оценим теперь интеграл Дирихле функции V_N по области $Q(R_0,R)$ для произвольного $R \in (R_0, N)$:

$$I(R) \equiv \int_{Q(R_0,R)} |\nabla V_N|^2\, dx = \int_{S_R} \frac{\partial V_N}{\partial \nu} V_N\, ds - \int_{Q(R_0,R)} f V_N\, dx.$$

Оценивая второе слагаемое согласно (11)-(12), получим при $R \ge R_1 > R_0$

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla V_N|^2\, dx \le c_8 \ln R + \frac{1}{2}\int_{Q(R_0,R)} |\nabla V_N|^2\, dx + \int_{S_R} \frac{\partial V_N}{\partial \nu} V_N\, ds.$$

Используя неравенство Пуанкаре и (7), (8), отсюда получим

$$\begin{aligned}I(R) &\equiv \int_{Q(R_0,R)} |\nabla V_N|^2\, dx \le 2\int_{S_R} \frac{\partial V_N}{\partial \nu} V_N\, ds + 2c_8 \ln R = \\ &= 2P(R, V_N)\overline{V_N}(R) + 2\int_{S_R} \frac{\partial V_N}{\partial \nu}\big(V_N - \overline{V_N}(R)\big)\, ds + 2c_8 \ln R \le \\ &\le c_9\bigg(R\int_{S_R} |\nabla V_N|^2\, ds + \ln R\bigg) = c_9(RI'(R) + \ln R).\end{aligned}$$

Интегрируя полученное неравенство от R до $N \ge R^2$, получаем с учетом (13)

$$I(R) \le I(N)\bigg(\frac{R}{N}\bigg)^{\delta} + c_{10} R^{\delta} \int_R^N \frac{\ln r}{r^{\delta+1}}\, dr \le c_{11} \ln R, \qquad \delta > 0.$$

Таким образом, для любого фиксированного $R > R_0$ последовательность V_N равномерно ограничена в пространстве С.Л. Соболева $W_2^1(Q(R_0,R))$. Применяя стандартный диагональный процесс, получим последовательность V_{N_k}, для любого $R > R_0$ слабо сходящуюся в $W_2^1(Q(R_0,R))$ и сильно сходящуюся в $L_2(Q(R_0,R))$ к некоторой функции V. Так как $V_{N_k} - V_{N_l}$ — гармонические функции, то сходимость функций V_{N_k} и их производных является равномерной в $Q(R_0,R)$. Таким образом, функция V удовлетворяет уравнению (1) и, с учетом (8), для нее выполняются оценки (5).

Если $f > 0$ в Q, то из принципа максимума очевидно, что $V_N < 0$ в $Q(R_0, N)$ и $V \leq 0$ в Q.

Пусть для функции f также выполнены условия (6). Тогда из (6) и (7) получаем, что

$$\int_{R_0}^{\infty} |\overline{V}'(r)|\, dr = \frac{1}{2\pi} \int_{R_0}^{\infty} \frac{|P(r,V)|}{r}\, dr < \infty,$$

$$\overline{V}(R) \to C_0 = \mathrm{const}, \quad R \to \infty.$$

Аналогично из (7) также следует равномерная ограниченность $|\overline{V}_N(R)|$. С учетом этого, проводя оценки вида (9)–(12), получим

$$\int_{Q(R_0,N)} |\nabla V_N|^2\, dx \leq c_{12},$$

откуда получаем конечность интеграла Дирихле по Q для V.

Покажем, что в этом случае $V(x) \to C_0$, $|x| \to \infty$. При $R > 2R_0$ согласно оценке типа Де Джорджи [18], с.186, и неравенству Пуанкаре имеем для $x \in S_R$

$$\begin{aligned} &|V(x) - \overline{V}(R)|^2 \leq \\ &\leq c_{13}\left(R^{-2}\int_{Q(R/2,3R/2)} \big(V(z) - \overline{V}(R)\big)^2\, dz + R^2 \int_{Q(R/2,3R/2)} f^2(z)\, dz\right) \leq \\ &\leq c_{14}\left(\int_{Q(R/2,3R/2)} |\nabla V(z)|^2\, dz + \int_{Q(R/2,3R/2)} |z|^2 f^2(z)\, dz\right) \to 0, \quad R \to \infty. \end{aligned}$$

С учетом того, что $\overline{V}(R) \to C_0$, $R \to \infty$, получаем, что $V(x) \to C_0$, $|x| \to \infty$. Лемма полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть $g(r) > 0$ — невозрастающая на $[r_0, \infty)$ измеримая функция, причем*

$$\int_{r_0}^{\infty} r g(r)\, dr < \infty.$$

Тогда

$$\int_{r_0}^{\infty} r^3 g^2(r) dr < \infty.$$

Доказательство. Из монотонности $g(r)$ легко следует, что $g(r) \leq r^{-2}$ при $r > r_1 = \mathrm{const} > 0$. Тогда $r^3 g^2(r) \leq r g(r)$, $r > r_1$, откуда и следует утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в Q. Тогда*

$$r^{-1} \int_{S_r} e^u\, ds \leq c_0,$$

$$\int_{R_0}^{\infty} r \left(\int_{S_r} e^u\, ds\right)^2 dr < \infty.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и леммы 2 достаточно доказать, что $g'(r) < 0$ при всех $r > R_0$, где

$$g(r) = r^{-1} \int_{S_r} e^u\, ds.$$

Имеем

$$g'(r) = r^{-1} \int_{S_r} e^u \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds.$$

Предположим, что $g'(r_1) \geq 0$ для некоторого $r_1 > R_0$. Возьмем произвольное $r > r_1$. Пусть $\theta = \theta(|x|) \geq 0$ — срезающая функция класса C^2, такая что $\theta(|x|) = 1$ при $|x| \leq r$, $\theta(|x|) = 0$

при $|x| \geq r+1$, $(\theta'(|x|))^2 \leq c_1\theta(|x|)$ при $r \leq |x| \leq r+1$, $c_1 = \mathrm{const} > 0$. Умножая обе части уравнения (1) на $e^u\theta$ и интегрируя по области $Q(r_1, r+1)$, получим

$$\int_{Q(r_1,r+1)} \big(e^{2u} + |\nabla u|^2 e^u\big)\theta\, dx = -r_1 g'(r_1) - \int_{Q(r,r+1)} e^u \frac{\partial u}{\partial |x|}\theta'\, dx \leq$$
$$\leq \int_{Q(r,r+1)} e^u\big(|\nabla u|^2\theta + c_2\big)\, dx.$$

Тогда

$$\int_{Q(r_1,r)} e^{2u}\, dx \leq c_2 \int_{Q(r,r+1)} e^u\, dx \to 0, \qquad r \to \infty,$$

что невозможно. Противоречие показывает, что $g'(r) < 0$ для всех $r > R_0$, что и доказывает лемму.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в Q, для которого $\overline{u}(R) \sim C\ln R$, $C = \mathrm{const} < -2$, $R \to \infty$. Тогда*

$$u(x) = C\ln|x| + C_1 + o(1), \qquad |x| \to \infty, \quad C_1 = \mathrm{const}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ при $|x| > R_1 = R_1(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$u(x) \leq (C+\varepsilon)\ln|x|.$$

Заметим, что в силу теоремы 1 и леммы 3 функция $f(x) = e^{u(x)}$ удовлетворяет условию леммы 1, кроме, быть может, условий (6). Рассмотрим гармоническую функцию $U = u - V$, где V — решение уравнения $\Delta V = e^u$, существование которого установлено в лемме 1. Оценим коэффициенты Фурье по φ функции U на окружности S_r. Так как с учетом леммы 3 и теоремы 1

$$\int_0^{2\pi} |u(r,\varphi)|\, d\varphi = 2\int_0^{2\pi} u^+(r,\varphi)\, d\varphi - 2\pi\overline{u}(r,\varphi)) \leq 2\int_0^{2\pi} e^{u(r,\varphi)}\, d\varphi + c_1\ln r \leq c_2 \ln r$$

(здесь $u^+ = \max\{u, 0\}$), то, используя оценки $|\overline{V}(r)| \leq c_3\ln r$, $V \leq 0$ и лемму 3, получим

$$\int_0^{2\pi} |U(r,\varphi)|\, d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \big(|u(r,\varphi)| + |V(r,\varphi)|\big)\, d\varphi \leq c_4\ln r, \quad r \geq r_1 = \mathrm{const} > R_0.$$

Отсюда разложение U в ряд Фурье по φ имеет вид

$$U = a_0\ln r + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi).$$

Тогда с учетом оценки интеграла Дирихле для V из леммы 1 получаем

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\, dx \leq c_4\ln R. \tag{14}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, такое, что $C + \varepsilon < -2$. При $R > R_2 = R_2(\varepsilon)$

$$\overline{u}(R) \leq (C + \varepsilon/2)\ln R.$$

В силу (14) для всех $R > 2R_2$ найдется $r_1 \in (R/2, R)$, для которого

$$\int_{S_{r_1}} |\nabla u|^2\, ds \leq 2c_4\frac{\ln R}{R}.$$

Тогда, используя теорему вложения и неравенство Пуанкаре, получим при $x \in S_{r_1}$ оценку

$$u(x) - (C+\varepsilon/2)\ln R < (u(x) - \overline{u}(r_1)) + (\overline{u}(r_1) - (C+\varepsilon/2)\ln r_1) <$$
$$< c_5 r_1^{1/2}\left(\int_{S_{r_1}} |\nabla u|^2\, ds\right)^{1/2} \leq c_6\ln^{1/2} R,$$

$$u(x) \le (C+\varepsilon)\ln R, \quad R > R_3(\varepsilon).$$

Аналогично это же неравенство выполнено при $x \in S_{r_2}$ для некотогого $r_2 \in (R, 3R/2)$, если R достаточно велико. Согласно принципу максимума это неравенство выполнено в $Q(r_1, r_2)$ и, в частности, при $|x| = R$. Отсюда при $|x| > R_4(\varepsilon)$ имеем

$$u(x) \le (C+\varepsilon)\ln|x|.$$

Отсюда получаем, что $e^{u(x)} \le c_7|x|^{-2-\delta}$ в Q, $\delta > 0$. Таким образом, функция $f(x) = e^{u(x)}$ удовлетворяет условиям (6). Отсюда получаем, что функция $V \to C_0$, $|x| \to \infty$. Таким образом,

$$u(x) = U + V = C\ln|x| + C_1 + o(1), \quad C < -2 \ \ , |x| \to \infty.$$

Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению случая $C = -2$, т.е. $\overline{u}(R) \sim -2\ln R$. Очевидно, прямой аналог теоремы 2 не имеет места, так как в силу теоремы 1 $\int_Q e^u\,dx < \infty$. и, следовательно, решение не может быть представлено в виде $u(x) = -2\ln|x| + C_1 + o(1)$.

Лемма 4. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения (1) в Q. Тогда для функции $w(x) = u(x) - \overline{u}(|x|)$ конечен интеграл Дирихле по Q:*

$$\int_Q |\nabla w|^2\,dx < \infty.$$

Доказательство. В силу [19] того, что $\Delta(\overline{u}(|x|)) = \overline{\Delta u}(|x|)$, функция w удовлетворяет уравнению

$$\Delta w = h(x) \equiv e^u - \overline{e^u}.$$

Имеем

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla w|^2\,dx = -\int_{Q(R_0,R)} hw\,dx + \int_{S_R} w\frac{\partial w}{\partial \nu}\,ds - \int_{S_{R_0}} w\frac{\partial w}{\partial \nu}\,ds. \tag{15}$$

Для $h(x)$ справедлива оценка вида (11):

$$\left|\int_{Q(R_0,R)} hw\,dx\right| \le \frac{1}{2}\int_{Q(R_0,R)} |\nabla w|^2\,dx + c_1\int_{R_0}^R r\left(\int_{S_r} |h|\,ds\right)^2 dr. \tag{16}$$

В силу леммы 3

$$\int_{R_0}^\infty r\left(\int_{S_r} |h|\,ds\right)^2 dr < \infty. \tag{17}$$

Из (15)–(17) получаем, что

$$\int_{Q(R_0,R)} |\nabla w|^2\,dx \le 2\int_{S_R} w\frac{\partial w}{\partial \nu}\,ds + c_2.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и учитывая, что $\overline{w}(R) = 0$, неравенство Пуанкаре, получим

$$J(R) \equiv \int_{Q(R_0,R)} |\nabla w|^2\,dx \le 2\left(\int_{S_R} w^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_{S_R} |\nabla w|^2\,ds\right)^{1/2} + c_2 \le$$
$$\le c_3 R\int_{S_R} |\nabla w|^2\,ds + c_2 \equiv c_3 R J'(R) + c_2.$$

Отсюда получаем, что либо функция $J(R)$ ограничена, либо растет быстрее, чем $\ln R$. Последнее невозможно в силу (14). Таким образом, лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $u(x)$ - решение (1) в Q, причем $\overline{u}(R) \sim -2\ln R$, $R \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $R \ge R_1(\varepsilon)$ справедлива оценка*

$$\overline{u}(R) \le -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 + \varepsilon.$$

Доказательство. Покажем сначала, что неравенство

$$\overline{u}(R) > -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 + \varepsilon \tag{18}$$

не может выполняться при всех $R \geq R_1 = \mathrm{const} \geq \mathrm{R}_0$. Предположим противное. Пусть (18) верно для некоторого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших R. Тогда

$$\int_{Q(R,\infty)} e^u\,dx \geq 2\pi\int_R^\infty re^{\overline{u}(r)}\,dr \geq 2\pi M_0\int_R^\infty \frac{dr}{r\ln^2 r} = \frac{2\pi M_0}{\ln R}, \qquad M_0 = \mathrm{const} > 2.$$

Отсюда, учитывая, что $P(R,u) \to -4\pi$, $R \to \infty$, получим, учитывая (3), при всех $R > R_1$

$$\overline{u}'(R) = \frac{1}{2\pi R}P(R,u) = \frac{1}{2\pi R}\biggl(-4\pi - \int_{Q(R,\infty)} e^u\,dx\biggr) \leq -\frac{2}{R} - \frac{M_0}{R\ln R},$$

что противоречит неравенству (18). Итак, (18) не может выполняться одновременно для всех R, начиная с некоторого R_1. Это означает, что нижний предел при $R \to \infty$ функции $z(R) = \overline{u}(R) + 2\ln R + 2\ln\ln R - \ln 2$ неположителен. Для того чтобы доказать утверждение леммы, достаточно показать, что $z(R)$ не имеет положительных локальных максимумов. Если существует такая точка максимума R, то

$$0 = z'(R) = \overline{u}'(R) + \frac{2}{R} + \frac{2}{R\ln R} = \frac{P(R,u)}{2\pi R} + \frac{2}{R} + \frac{2}{R\ln R}.$$

Тогда в этой точке

$$z''(R) = \overline{u}''(R) - \frac{2}{R^2} - \frac{2(1+\ln R)}{R^2\ln^2 R} = \frac{1}{2\pi}\biggl(-\frac{P(R,u)}{R^2} + \frac{P'(R,u)}{R}\biggr) - \frac{2}{R^2} -$$
$$- \frac{2(1+\ln R)}{R^2\ln^2 R} = \frac{2}{R^2} + \frac{2}{R^2\ln R} + \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} e^u\,ds - \frac{2}{R^2} - \frac{2(1+\ln R)}{R^2\ln^2 R} >$$
$$> e^{\overline{u}(R)} - \frac{2}{R^2\ln^2 R} > 0.$$

Таким образом, $z''(R) > 0$, что невозможно в точке максимума. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $u(x)$ — решение (1) в Q, $\overline{u}(R) \sim -2\ln R$, $R \to \infty$. Тогда*

$$u(x) = \overline{u}(|x|) + o(1), \qquad |x| \to \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $R > 2R_0$. В силу леммы 4 для некоторого $r_1 \in (R/2, R)$ выполнена оценка

$$\int_{S_{r_1}} |\nabla w|^2\,ds \leq \frac{c_1}{R},$$

где $w(x) = u(x) - \overline{u}(|x|)$. Тогда

$$\sup_{S_{r_1}} |w| \leq c_2 r_1^{1/2}\biggl(\int_{S_{r_1}} |\nabla w|^2\,ds\biggr)^{1/2} \leq c_3.$$

Таким образом, используя лемму 5, получим для всех $x \in S_{r_1}$

$$u(x) \leq \overline{u}(|x|) + c_3 \leq -2\ln R - 2\ln\ln R + c_4.$$

Аналогично для некоторого $r_2 \in (R, 3R/2)$ имеем при $x \in S_{r_2}$

$$u(x) \leq \overline{u}(|x|) + c_5 \leq -2\ln R - 2\ln\ln R + c_6.$$

Согласно принципу максимума для всех $x \in S_R$ получим

$$u(x) \leq -2\ln|x| - 2\ln\ln|x| + c_7,$$

откуда

$$e^{u(x)} \leq \frac{c_8}{|x|^2\ln^2|x|}, \quad |\Delta w| \leq \frac{c_9}{|x|^2\ln^2|x|}.$$

Согласно оценке Де Джорджи и неравенству Пуанкаре получаем

$$\sup_{S_R} |w|^2 \le c_{10}\left(R^{-2}\int_{Q(R/2,3R/2)} w^2\,dx + R^2\int_{Q(R/2,3R/2)} (\Delta w)^2\,dx\right) \le$$
$$\le c_{11}\left(\int_{Q(R/2,3R/2)} |\nabla w|^2\,dx + \ln^{-4} R\right) \to 0, \quad R\to\infty.$$

Лемма, таким образом, доказана.

Лемма 7. *Пусть $u(x)$ — решение уравнения* (1) *в Q, для которого $\overline{u}(R) \sim -2\ln R$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для всех $R \ge R_1(\varepsilon)$ справедлива оценка*

$$\overline{u}(R) \ge -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 - \varepsilon.$$

Доказательство. Проведем рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве леммы 5. При этом интеграл $\int_{S_R} e^u\,ds$ нужно оценивать не снизу, а сверху, соответственно вместо интегрального неравенства Иенсена нужно использовать малое отклонение $u(x)$ от его среднего по окружности S_R, установленное в лемме 6.

Предположим, что для всех $R \ge R_1$ выполнено неравенство

$$\overline{u}(R) < -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 - \varepsilon. \tag{19}$$

Тогда для всех $R \ge R_2$ имеем $u(x) < -2\ln R - 2\ln\ln R + \ln 2 - \varepsilon/2$,

$$\int_{Q(R,\infty)} e^u\,dx \le 2\pi M_1 \int_R^\infty \frac{dr}{r\ln^2 r} = \frac{2\pi M_1}{\ln R}, \qquad M_1 = \mathrm{const} < 2.$$

Отсюда

$$\overline{u}'(R) = \frac{1}{2\pi R}P(R,u) = \frac{1}{2\pi R}\left(-4\pi - \int_{Q(R,\infty)} e^u\,dx\right) \ge -\frac{2}{R} - \frac{M_1}{R\ln R},$$

что противоречит (19). Таким образом, (19) не может выполняться для всех $R \ge R_1$. Аналогично доказательству леммы 5 покажем, что функция $z(R) = \overline{u}(R) + 2\ln R + 2\ln\ln R - \ln 2$ не может иметь отрицательных минимумов, равномерно отделенных сверху от нуля. Действительно, в точке такого отрицательного минимума получим при достаточно большом R

$$z''(R) = \frac{1}{2\pi R}\int_{S_R} e^u\,ds - \frac{2}{R^2\ln^2 R} < 0,$$

что невозможно в точке минимума. Лемма доказана.

Таким образом, из теоремы 2 и лемм 5–7 немедленно вытекает следующий основной результат работы.

Теорема 3. *Любое решение уравнения* (1) *в Q ведет себя одним из двух способов при $|x| \to \infty$:*

1) $u(x) = C\ln|x| + C_1 + o(1)$, $C = \mathrm{const} < -2$; $C_1 = \mathrm{const}$;

2) $u(x) = -2\ln|x| - 2\ln\ln|x| + \ln 2 + o(1)$.

Примерами решений уравнения (1), ведущих себя во внешности круга соответственно первым и вторым из указанных способов, являются решения $u = -\ln|x| - 2\ln\big(|x|-1\big) + \ln 2$ и $u = -2\ln|x| - 2\ln\ln|x| + \ln 2$ соответственно.

В заключение отметим, что поскольку [8] уравнение (1) в многомерном ($n \ge 3$) случае не имеет решений во внешних по отношению к шару областях, то задача поиска асимптотики решения (1) во внешних областях исчерпывается двумерным случаем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Векуа И.Н. *О некоторых свойствах решений уравнения Гаусса* // Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова, 1961. **64**. С. 5–8.
2. L. Bieberbach $\Delta u = e^u$ *und die automorphen Funktionen* // Math. Ann. Vol. 77. 1916. P. 173–212.
3. H. Rademacher *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Braunschweig, Vieweg, 1935.
4. Олейник О.А. *Об уравнении* $\Delta u + k(x)e^u = 0$ // УМН. 1978. **33**. №2. С. 204–205.
5. J.N. Flavin, R.J. Knops, L.E Payne *Asymptotic behavior of solutions to semi-linear elliptic equations on the half-cylinder* // Z. Angew. Math. Phys. 1992. **43**. №3. P. 405–421.
6. H. Usami *Note on the inequality* $\Delta u \geq k(x)e^u$ *in* $\mathbb{R}^n$ // Hiroshima Math. J. 1988 **18**. 1988. P. 661–668.
7. Kuo-Shung Cheng, Chang-Shou Lin *On the Conformal Gaussian Curvature Equation in* $\mathbb{R}^2$ // Journal of differential equations. 1998. **146**. P. 226–250.
8. Неклюдов А. В. *Об отсутствии глобальных решений уравнения Гаусса и решений во внешних областях* // Изв. вузов. Матем. 2014. № 1. С. 55–60.
9. Кондратьев В.А., Олейник О.А. *Об асимптотике решений нелинейных эллиптических уравнений* // УМН. 1993. **48**. № 4. С. 184–185.
10. O.A. Oleinik *Some Asymptotic Problems in the Theory of Partial Differential Equations*. Lezioni Lincee, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
11. Насруллаев А.И. *Об асимптотике решений задачи Неймана для уравнения* $\Delta u - e^u = 0$ *в полубесконечном цилиндре* // УМН. 1995. **50**. № 3. С. 161–162.
12. Неклюдов А.В. *Поведение решений полулинейного эллиптического уравнения второго порядка вида* $Lu = e^u$ *в бесконечном цилиндре* // Матем. заметки. 2009. **85**. № 3. С. 408–420.
13. Неклюдов А.В. *Поведение решений нелинейного бигармонического уравнения в неограниченной области* // Матем. заметки. 2014. **95**. № 2. С. 248–256.
14. Олейник О.А., Иосифьян Г.А. *О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей* // Матем. сб. 1980. **112**. № 4. С. 588–610.
15. O.A. Oleinik, G.A. Yosifian *On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity* // Arch. Ration. Mech. Anal. 1982. **78**. № 1. P. 29–53.
16. Неклюдов А.В. *О задаче Неймана для дивергентных эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченной области, близкой к цилиндру* // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1991. **16**. С. 191–217.
17. Неклюдов А.В. *О решениях третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в полубесконечном цилиндре* // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2013. № 2. С. 48–58.
18. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука. 1989. 464 с.
19. Каметака И., Олейник О.А. *Об асимптотических свойствах и необходимых условиях существования решений нелинейных эллиптических уравнений второго порядка* // Матем. сб.1978.**107**. № 4. С. 572–600.

Алексей Владимирович Неклюдов,
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
Рубцовская наб., д. 2/18,
г.Москва, 105005, Россия,
E-mail: `nekl5@yandex.ru`