УДК 519.626

# ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО СОСТОЯНИЮ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И РЕШЕНИЯМИ

**А.Р. МАНАПОВА*, Ф.В. ЛУБЫШЕВ**

**Аннотация.** В работе рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления для полулинейных уравнений эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения.

**Mathematics Subject Classification:** 49J20, 35A35, 35J61, 65N06

## 1. Введение

Математические модели оптимизации для систем с распределенными параметрами (описываемых уравнениями математической физики (УМФ)) — это наиболее сложный класс задач в оптимизации, особенно для нелинейных задач оптимального управления. Под «нелинейными задачами оптимизации» для УМФ мы понимаем такие, в которых отображение $g \to u(g)$ из множества допустимых управлений $U$ в пространство состояний $W$ является нелинейным. Характер конкретных постановок задач оптимального управления для распределенных систем существенно зависит от многих факторов: куда входят управления (в свободные члены уравнений состояния или в коэффициенты уравнений); линейными или нелинейными УМФ описываются состояния систем; какова структура множеств допустимых управлений и функционалов цели; какова гладкость состояния, обеспечиваемая заданной априорной гладкостью входных данных и гладкостью управлений и т.д. В настоящее время наиболее полно исследованы линейные системы управления с достаточно гладкими входными данными и функциями состояния процессов управления. Особый интерес с теоретической и практической точек зрения представляет физико-математическая постановка задач оптимального управления, в которых, в силу характера исследуемого физического процесса, состояния описываются нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своей физико-математической постановке сами решения УМФ допускают разрывы.

A.R. Manapova, F.V. Lubyshev, Accuracy estimate with respect to state of finite-dimensional approximations for optimization problems for semi-linear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions.



* Работа выполнена при поддержке гранта Республики Башкортостан по итогам конкурса научных работ молодых ученых и молодежных научных коллективов 2014 года.

*Поступила 14 января 2014 г.*

Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы — «конечномерными задачами». Правильно построенная аппроксимация позволяет получить содержательные результаты качественного и численного характера об изучаемом процессе. Центральными в проблеме аппроксимации являются вопросы «конструирования» аппроксимаций, сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций [1]–[5]. Для систем с распределенными параметрами построения и исследования аппроксимаций проводились в основном также для линейных задач оптимального управления, причем с достаточно гладкими коэффициентами УМФ и состояниями. Актуальными являются вопросы «конструирования» конечномерных аппроксимаций и исследования их сходимости для задач оптимального управления, описываемых нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями). Заметим, что разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами, но непрерывными потоком и решением (с условиями сопряжения типа идеального контакта) построены и исследованы в [6], [7] для УМФ с классическими решениями некоторой степени гладкости. Исследованию сходимости разностных схем для параболических уравнений с разрывными коэффициентами и решением в классической постановке задач с достаточно гладкими решениями посвящены работы [8], [9]. Отметим также, что оптимизационные аспекты в этих работах не рассматривались.

В настоящей работе, по тематике, примыкающей к [1]–[5], [10]–[13], рассмотрены математические модели нелинейных задач оптимального управления, описываемых полулинейными уравнениями эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями), с граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта [6], [14]. В качестве управления выступает коэффициент в граничном условии сопряжения. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию.

В теплофизических терминах поставленную задачу можно трактовать как задачу оптимального управления коэффициентом граничного условия сопряжения теплопроводящих сред. При этом этот коэффициент характеризует термическое сопротивление неидеального контакта разнородных сред [6], [14].

## 2. Постановка задач

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r_\alpha \leqslant l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область $\Omega$ разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi,\ 0 \leqslant r_2 \leqslant l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi, \quad 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1, \quad 0 < r_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти $\Omega_1$ и $\Omega_2$ соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область $\Omega$ есть объединение областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей $\Omega_1$ и $\Omega_2$, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области $\Omega$. Далее, через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей $\Omega_k$ без $S$, $k = 1,2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части $\Gamma_k$, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через $n_\alpha$, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области $\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к $S$ в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль $n$ является внешней нормалью к $S$ по отношению к области $\Omega_1$, то есть нормаль $n$ направлена внутрь области $\Omega_2$. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, $S$ – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях $\Omega_1$ и $\Omega_2$ обладают некоторой гладкостью.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) $\Omega_1$ и $\Omega_2$, разбитой на части внутренней границей $S$, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 \equiv \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты $u_k$, $k = 1,2$, удовлетворяют условиям:
1) функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, определенные на $\overline{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, $k = 1,2$, удовлетворяют в $\Omega_k$, $k = 1,2$, уравнениям

$$L_k\, u_k = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(k)}(x)\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right) + d_k(x)q_k(u_k) = f_k(x), \quad \text{в } \Omega_k,\ k = 1,2, \tag{1a}$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \overline{\Gamma}_k$ условиям

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_k,\ k = 1,2; \tag{1b}$$

2) Искомые функции $u_k(x)$, $k = 1,2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на $S$ – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы $S$ областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ следующего вида:

$$G(x) = k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S. \tag{1c}$$

Если ввести функции вида $u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$ $q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1,2, \end{cases}$$

то задачу (1) = (1a) + (1b) + (1c) можно переписать в более компактном виде.

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ уравнению

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

и условиям $\quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2,$

$$\left[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] = 0, \quad G(x) = \left(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S.$$

Здесь $\left[u\right] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачок функции $u(x)$ на $S$; $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2$, $d(x)$, $f(x)$ – известные функции, определяемые по-разному в $\Omega_1$ и $\Omega_2$, претерпевающие разрыв первого рода на $S$; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1,2$, – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1,2$; $\theta(x) \equiv g(x)$, $x \in S$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2)$, $\alpha = 1,2$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$; $0 < \nu \leqslant k_\alpha(x) \leqslant \overline{\nu}$, $\alpha = 1,2$, $0 \leqslant d_0 \leqslant d(x) \leqslant \overline{d}_0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$; $\nu, \overline{\nu}, d_0, \overline{d}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, определенные на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 < q_0 \leqslant \left(q_\alpha(\xi_\alpha) - q_\alpha(\overline{\xi}_\alpha)\right)/\left(\xi_\alpha - \overline{\xi}_\alpha\right) \leqslant L < \infty$, для всех $\xi_\alpha, \overline{\xi}_\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi_\alpha \neq \overline{\xi}_\alpha$, $\alpha = 1,2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \left\{g(x) = \theta(x) \in L_2(S) = H :\ 0 < g_0 \leqslant g(x) \leqslant \overline{g}_0 \text{ п.в. на } S\right\}, \tag{2}$$

где $L_2(S) = H$ – пространство управлений, $U \subset H$, $g_0$, $\overline{g}_0$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J :\ U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \left|u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)\right|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \tag{3}$$

где $u_0^{(1)} \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H$ функционал $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r; g)$ задачи (1), отвечающих всем допустимым управлениям $g = \theta \in U$, требуется минимизировать функционал (3).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$: $V(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\big\}$, где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях $\Omega_k$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ соответственно и нормами [15]–[19]:

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Снабженное скалярным произведением и нормой $(u, \vartheta)_V = \sum\limits_{k=1}^{2} (u_k, \vartheta_k)_{W_2^1(\Omega_k)}$, $\|u\|_V^2 = \sum\limits_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}$, $V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 \, d\Gamma_k + \int\limits_{S} [u]^2 \, dS,$$

где $\big[u\big] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$ – скачок функции $u(x)$ на $S$. Здесь $u_2(x) = u^+(x)$, $x \in S$ и $u_1(x) = u^-(x)$, $x \in S$ – следы функции $u(x)$ на $S$ со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1, 2$, ограничены, так как $\Omega_1$ и $\Omega_2$ – области с Липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(x)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [15]–[19] справедлива для каждой из сторон $S^+$, $S^-$ границы контакта $S$ (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к $\Omega_1$ и $\Omega_2$ позволяет определить для любой функции $u(x) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^\pm$. С другой стороны, если элемент $u \in V(\Omega^{(1,2)})$, то его следы на $S$ с разных сторон (со стороны $\Omega_1$ и со стороны $\Omega_2$) в общем случае различны. Сужения функции $u(x)$ на области $\Omega_k$, $k = 1, 2$: $u|_{\Omega_k}$,$k = 1, 2$, принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, соответственно, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(x)$ не принадлежит, поскольку на множестве $S$ (при переходе из $\Omega_1$ в $\Omega_2$) она имеет разрыв ($\delta(x) = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x)$, $x \in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $\vartheta(x) \in W_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S)$ является условие склейки: $\vartheta_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$; $\vartheta_1(x)|_S = \vartheta_2(x)|_S$ (см., например, [19]).

Далее, так как $\Omega_k$ – области с границами Липшица $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, а $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ – соответственно их (открытые) части (куски границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $mes\Gamma_k > 0$, $k = 1, 2$, то [20] существуют некоторые постоянные $C_1$ и $C_2$, зависящие только от данных областей $\Omega_k$, $k = 1, 2$ и от кусков $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ соответственно, такие, что для каждой функции $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ имеют место соотношения:

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \leqslant C_k^2 \left[\int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k\right], \ k = 1, 2. \tag{4}$$

Так как для рассматриваемых областей $\Omega_k$, $k = 1,2$ отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$ в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, то существуют такие постоянные $C_3$ и $C_4$ соответственно, не зависящие от функции $u_k(x)$, что для любых функций $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки [16], [17]:

$$\|u_k\|^2_{L_2(\partial\Omega_k)} \leqslant C^2_{k+2}\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)},\ k=1,2,$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k\subset \partial\Omega_k$, $k = 1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k=1,2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку; $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ совпадает с $W_2^1\,(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k=\emptyset$; $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)=\overset{0}{W}{}_2^1\,(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k=\partial\Omega_k$. Заметим, что для элементов $u_k(x)\in W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ справедливо неравенство [16]

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(x)d\Omega_k \leqslant C_{k+4}(\Omega_k,\overset{\circ}{\Gamma}_k)\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\Big)^2 d\Omega_k,\quad k=1,2,$$

с постоянной $C_{k+4}(\Omega_k,\overset{\circ}{\Gamma}_k)$, зависящей только от $\Omega_k$ и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, при этом «площадь» куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $mes\ \overset{\circ}{\Gamma}_k>0$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\,(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(x) = (u_1(x),u_2(x))$: $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\,(\Omega^{(1,2)}) = \big\{u(x) = (u_1(x),u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1)\times W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)\big\}$ с нормой:

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2\,dS.$$

Под решением прямой задачи (1) при фиксированном управлении $g(x) = \theta(x) \in U$ понимается функция $u(x) \equiv u(x;g) \in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\,(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех $\vartheta \in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ $(\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$\begin{aligned} Q(u,\vartheta) = &\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x)\,q(u)\,\vartheta\right]d\Omega_0+\\ &+\int\limits_S\theta(x)[u][\vartheta]dS = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)\,\vartheta d\Omega_0 = l(\vartheta). \end{aligned}\tag{5}$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *При любом $g \in U$ существует единственное обобщенное решение $u(x) = u(x;g) \in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи* (1)*, определяемое из интегрального тождества* (5)*, причем*

$$\|u(x,g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \leqslant C_{11}\sum_{k=1}^{2}\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)} = C_{12},\quad \forall g\in U,\tag{6}$$

*где $C_{11} = Const > 0$ (см. ниже).*

Доказательство теоремы опирается на теорию монотонных операторов [17], [18], [21], при этом существенно используются введенные выше гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы и также неравенства (см. выше).

Обратимся к тождеству (5). Нетрудно убедиться, что справедлива цепочка неравенств

$$|Q(u,\vartheta)| \leqslant \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \left[\overline{\nu}\sum_{\alpha=1}^{2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|\left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\right| + \overline{d}_0 L_q\,|u|\,|\vartheta|\right] d\Omega_0 + \overline{\theta}_0\int\limits_S \big|[u]\big|\,\big|[\vartheta]\big| dS \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\overline{\nu},\overline{d}_0L_q,\overline{g}_0\}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|^2 d\Omega_0 + \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} u^2 d\Omega_0 + \int\limits_S [u]^2 dS\right]^{1/2}\times$$
$$\times\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left|\frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha}\right|^2 d\Omega_0 + \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} \vartheta^2 d\Omega_0 + \int\limits_S [\vartheta]^2 dS\right]^{1/2}. \tag{7}$$

Используя неравенство (4), нетрудно установить оценку

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|^2 d\Omega_0 + \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} u^2 d\Omega_0 + \int\limits_S [u]^2 dS = \sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} + \int\limits_S [u]^2 dS \leqslant \\ \leqslant C_7^2\left[\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right|^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2 dS\right] = C_7^2\|u\|_*^2,\end{gathered} \tag{8}$$

где $C_7^2 = \max\{1,\, \max(C_1^2, C_2^2\}$. Принимая во внимание (8) и учитывая, что $u_k(x) = 0$ на $\Gamma_k$, $k = 1, 2$, из (7) получаем оценку

$$|Q(u,\vartheta)| \leqslant \max\{\overline{\nu},\overline{d}_0L_q,\overline{g}_0\}C_7^2\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}\|\vartheta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}, \qquad \forall u,\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}.$$

Итак, для каждого фиксированного $u \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ форма $Q(u,\vartheta)$ определяет в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ линейный ограниченный относительно $\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ функционал (определяемый функцией $u \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$), который обозначим $\Phi = Au \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$. Этот функционал задается с помощью соотношения

$$<\Phi,\vartheta> = <Au,\vartheta> = (Au,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = Q(u,\vartheta), \qquad \forall \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \tag{9}$$

(где оператор $A : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \to \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ ставит в соответствие каждому элементу $u \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ линейный непрерывный функционал $\Phi = Au$ в пространстве $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ таким образом, что значение функционала $\Phi = Au$ на элементе $\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ определяется соотношением (9)). Рассмотрим теперь правую часть тождества (5). Положим $<F,\vartheta> = l(\vartheta)$. Нетрудно установить, что справедлива оценка

$$|<F,\vartheta>| = |l(\vartheta)| \leqslant \sum_{k=1}^{2}\|f_k\|_{L_2(\Omega_k)}\cdot\|\vartheta_k\|_{L_2(\Omega_k)} \leqslant C_8\sum_{k=1}^{2}\|f_k\|_{L_2(\Omega_k)}\cdot\|\vartheta_k\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}, \tag{10}$$

где $C_8 = \sqrt{2}\max\{C_1, C_2\}$. Таким образом, функционал $F$, определенный с помощью формулы $<F,\vartheta> = l(\vartheta)$, ограничен на $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, и, кроме того, этот функционал линеен, а следовательно, $F \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$. Итак, тождество (5) запишется в виде $<Au,\vartheta> = <F,\vartheta>$, $\forall \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, из которого, в силу произвола $\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, получаем уравнение $Au = F$.

Покажем теперь, что существует единственное решение $u \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, удовлетворяющее тождеству (5). В силу теоремы Браудера [21] достаточно доказать непрерывность и сильную монотонность оператора $A$. Нетрудно убедиться, что справедлива оценка $< Au - A\vartheta, u - \vartheta > \geq \min\{\nu, g_0\} \|u - \vartheta\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$, $\forall u, \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$. Это означает, что оператор $A : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} \to \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ сильно монотонен. Докажем теперь непрерывность, точнее, даже Липшиц-непрерывность оператора $A$. Нетрудно убедиться, что справедлива оценка $\big|< Au - A\vartheta, \eta >\big| \leqslant C_9 \|u - \vartheta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \|\eta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$, $\forall u, \vartheta, \eta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, $C_9 = \max\{\overline{\nu}, \overline{d}_0 L_q, \overline{g}_0\}\, C_7^2$. Поэтому

$$\big\|< Au - A\vartheta, \eta >\big\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = \sup_{\eta \neq 0} \frac{\big|< Au - A\vartheta, \eta >\big|}{\|\eta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}} \leqslant C_9 \|u - \vartheta\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}, \quad \forall u, \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2},$$

т.е. оператор $A$ непрерывен по Липшицу. Следовательно, условия теоремы Браудера выполнены, а значит, уравнение $Au = F$ однозначно разрешимо.

Далее, используя коэрцитивность ($\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ – эллиптичность) формы $Q(u, \vartheta)$ на $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$: $Q(u, u) \geq C_{10} \|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$, $\forall u \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$, $C_{10} = \min\{\nu, g_0\}$ и оценку (10), получим $C_{10} \|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \leqslant Q(u, u) = l(u) \leqslant C_8 \sum\limits_{k=1}^{2} \|f_k\|_{L_2(\Omega_k)} \cdot \|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}$. Откуда следует оценка (6) с константой $C_{11} = C_8 \cdot C_{10}^{-1}$. Теорема доказана.

В дальнейшем при изучении сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию сделаем относительно гладкости решения прямой задачи следующее предположение (аналогичное предположению, сделанному в работе [22], стр. 16, при исследовании там разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), а именно: решение краевой задачи (1) принадлежит $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, принадлежит пространству $\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1,\Gamma_2} (\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2} (\Omega^{(1,2)}) \cap \big\{u = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)\big\}$, и при каждом фиксированном управлении $g \in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{2} \|u_k(x, g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leqslant M \sum_{k=1}^{2} \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}, \qquad \forall g \in U, \quad \text{где } M = Const > 0.$$

**Замечание 1.** Здесь и далее, через $C, C_k$, $k = \overline{1,7}$, $M$ обозначены различные положительные постоянные, независящие от решения $u(r) \equiv u(r; g)$ и управления $g \in U$ (сеточного решения $y(x) \equiv y(x; \Phi_h)$, сеточного управления $\Phi_h \in U_h$).

## 3. Разностная аппроксимация задач оптимизации. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (1)–(3) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [5], [6]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций по состоянию при неограниченном измельчении шага $h$ сетки дискретизации. Для аппроксимации задачи (1)–(3) нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, и в $\overline{\Omega}$. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по $x_1$ и $x_2$: $\widehat{\omega}_\alpha = \big\{x_\alpha^{(i_\alpha)} \in [0, l_\alpha] : \ i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, h_{\alpha i_\alpha} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha}\big\}$, $\alpha = 1, 2$, также введем неравномерную сетку по $x_1$ и $x_2$ в области $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$: $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}_1 \times \widehat{\omega}_2$.

Очевидно, всегда можно построить сетку $\widehat{\omega}_1$ на $[0, l_1]$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом.

При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и исходя из положения точки $x_1 = \xi$ число узлов находить из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$. Положим $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1, N_1}$ и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Значение $x_1$ в точке $x_1 = \xi$ обозначим через $x_\xi$, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$.

Введем сетки узлов: $\overline{\omega}_1^{(1)} = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : \ i_1 = \overline{0, N_{1\xi}},\ N_{1\xi} h_1 = \xi\big\}$, $\overline{\omega}_1^{(2)} = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : \ i_1 = \overline{N_{1\xi}, N_1},\ N_{1\xi} h_1 = l_1\big\}$, $\omega_1^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$; $\overline{\omega}_2 = \big\{x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : \ i_2 = \overline{0, N_2}, N_2 h_2 = l_2\big\}$, $\omega_2 = \overline{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$ ; $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2$; $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$; $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$; $\overline{\omega} \equiv \overline{\omega}^{(1,2)} = \overline{\omega}^{(1)} \cup \overline{\omega}^{(2)} = \big(\overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}\big) \times \overline{\omega}_2 = \big\{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1,\ i_1 = \overline{0, N_1},\ N_{1\xi} h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi}) h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\big\} \times \overline{\omega}_2$, $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \overline{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$, $\omega^{(1)(+1)} = \omega_1^{(1)+} \times \overline{\omega}_2$; $\gamma_S = \big\{x_1 = \xi,\ x_2 = h_2, 2h_2, \ldots, (N_2 - 1) h_2\big\} = \big\{x_1 = \xi,\ x_2^{(i_2)} = i_2 h_2,\ i_2 = \overline{1, N_2 - 1}\big\}$; $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$; $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \overline{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)} = \overline{\omega}^{(k)} \setminus \omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$. При исследовании сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1 \equiv \overline{\Omega}^-$, обозначим через $H_h^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)})$, а множество сеточных функций $y_2(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2 \equiv \overline{\Omega}^+$, обозначим через $H_h^{(2)}(\overline{\omega}^{(2)})$. Множество $H_h^{(k)}(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, \nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\overline{\omega}^{(k)}} y_k(x)\, \nu_k(x)\, \hbar_1 \hbar_2, \quad \|y_k\|_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = (y_k, y_k)^{1/2}_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$

обозначим через $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$. Здесь $\hbar_1 = \hbar_1(x_1)$ – средний шаг сеток $\overline{\omega}_1^{(1)}$ и $\overline{\omega}_1^{(2)}$, а $\hbar_2 = \hbar_2(x_2)$ – средний шаг сетки $\overline{\omega}_2$, [6]. Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\overline{\omega}^{(1)}$ и $\overline{\omega}^{(2)}$ соответственно, со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, \nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1} \nu_{k\bar{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\bar{x}_2} \nu_{k\bar{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_k, \nu_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})},$$
$$\|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad k = 1, 2,$$

где $\|\nabla y_k\|^2 = \sum\limits_{\omega_1^{(k)+} \times \overline{\omega}_2} y^2_{k\bar{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum\limits_{\overline{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y^2_{k\bar{x}_2} \hbar_1 h_2, \quad k = 1, 2.$

Введем в рассмотрение пространство $V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением $V(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \big\{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})\big\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y, \nu)_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} (y_k, \nu_k)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{V(\overline{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})},$$

$V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Определим сеточные аналоги скалярных произведений следов сеточных функций $y_k(x)$ и $\nu_k(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(k)}$, на границах $\partial\omega^{(k)}$ сеток $\overline{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$ по формулам

$(y_k,\nu_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum\limits_{x\in\partial\omega^{(k)}} y_k(x)\nu_k(x)\tau_k(x)$, $k=1,2$, и сеточные аналоги норм $L_2(\partial\omega^{(k)})$, порождаемые этими скалярными произведениями $\|y_k\|^2_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = (y_k,y_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum\limits_{\partial\omega^{(k)}} y_k^2(x)\tau_k(x)$, $k=1,2$,

$$\tau_1(x) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1\in\omega_1^{(1)},\ x_2=0,l_2; \\ h_2(x_2), & x_2\in\omega_2,\ x_1=0,\xi; \\ \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{2}, & x\in\overset{\square}{\gamma}{}^{(1)}, \end{cases}$$

$$\tau_2(x) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1\in\omega_1^{(1)},\ x_2=0,l_2; \\ h_2(x_2), & x_2\in\omega_2,\ x_1=\xi,l_1; \\ \dfrac{h_1(x_1)+h_2(x_2)}{2}, & x\in\overset{\square}{\gamma}{}^{(2)}, \end{cases}$$

а $\overset{\square}{\gamma}{}^{(k)}$ – множество угловых точек прямоугольника $\Omega_k$, $k=1,2$. В подробной записи, например, сеточный аналог нормы $L_2(\partial\omega^{(1)})$ будет определяться с помощью выражения

$$\|y_1\|^2_{L_2(\partial\omega^{(1)})} = \sum_{x_2\in\overline{\omega}_2}\left[y_1^2(0,x_2)+y_1^2(\xi,x_2)\right]\hbar_2(x_2) + \sum_{x_1\in\overline{\omega}_1}\left[y_1^2(x_1,0)+y_1^2(x_1,l_2)\right]\hbar_1(x_1).$$

Пусть теперь $\overset{\circ}{\gamma}{}^{(k)} = \partial\omega^{(k)}\cap \overset{\circ}{\Gamma}_k \equiv \gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)}\setminus\gamma_s$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетке $\overline{\omega}^{(k)}\subset\overline{\Omega}_k$, $k=1,2$. Через $L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})$ обозначим нормированное подпространство пространства сеточных функций $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k=1,2$ с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} y_k^2(x)h_1h_2 =$$
$$= \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x_2\in\omega_2} y_k^2(\xi,x_2)h_1h_2, \quad k=1,2,$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k,v_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x)v_k(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} y_k(x)v_k(x)h_1h_2, \quad k=1,2.$$

Нетрудно видеть, что

$$(y_1,v_1)_{L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})} = (y_1,v_1)_{L_2(\omega_1^{(1)+}\times\omega_2)}, \quad (y_2,v_2)_{L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})} = (y_2,v_2)_{L_2(\omega_2^{(2)-}\times\omega_2)}.$$

Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k=1,2$.

Введем в рассмотрение пространства $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x)=(y_1(x),y_2(x))$:

$$\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x)=(y_1(x),y_2(x))\in L_2(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})\times L_2(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})\right\},$$
$$\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x)=(y_1(x),y_2(x))\in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)};\gamma^{(1)})\times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)};\gamma^{(2)})\right\},$$

с нормами $\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = \sum\limits_{k=1}^{2}\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}$, $\|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} = \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}$.

Через $e_1^{(1)}(x_1)$ будем обозначать элементарные ячейки отрезка $[0,\xi]$: $e_1^{(1)}(x_1) = \{r_1 : x_1-0.5h_1\leqslant r_1\leqslant x_1+0.5h_1\}$, $x_1\in\omega_1^{(1)}\subset[0,\xi]$, $e_1^{(1)}(0) = \{r_1 : 0\leqslant r_1\leqslant 0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(\xi) = \{r_1 : \xi-0.5h_1\leqslant r_1\leqslant\xi\}$; а через $e_1^{(2)}(x_1)$ – элементарные ячейки отрезка $[\xi,l_1]$: $e_1^{(2)}(x_1) = \{r_1 : x_1-0.5h_1\leqslant r_1\leqslant x_1+0.5h_1\}$, $x_1\in\omega_1^{(2)}\subset[\xi,l_1]$, $e_1^{(2)}(\xi) =$

$= \{r_1 : \xi \leqslant r_1 \leqslant \xi + 0.5h_1\}$, $e_1^{(2)}(l_1) = \{r_1 : l_1 - 0.5h_1 \leqslant r_1 \leqslant l_1\}$. Введем также элементарные ячейки отрезка $[0, l_2]$: $e_2(x_2) = \{r_2 : x_2 - 0.5h_2 \leqslant r_2 \leqslant x_2 + 0.5h_2\}$, $x_2 \in \omega_2 \subset [0, l_2]$, $e_2(0) = \{r_2 : 0 \leqslant r_2 \leqslant 0.5h_2\}$, $e_2(l_2) = \{r_2 : l_2 - 0.5h_2 \leqslant r_2 \leqslant l_2\}$.

Далее, через $e^{(1)}(x) \equiv e^{(1)}(x_1, x_2) = e_1^{(1)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_1$, будем обозначать элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_1$, а через $e^{(2)}(x) \equiv e^{(2)}(x_1, x_2) = e_1^{(2)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega}_2$ элементарные ячейки области $\overline{\Omega}_2$. Пусть $v(x) = v_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$. Определим для функций $v_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1$ усредняющие операторы по Стеклову $S^{x_\alpha}$ по переменным $x_\alpha$, $\alpha = 1, 2$:

$$S^{x_1} v_1(x) = \frac{1}{\hbar_1} \int\limits_{e_1^{(1)}(x_1)} v_1(r_1, x_2)\, dr_1,\ x_1 \in \overline{\omega}_1^{(1)},\ \hbar_1 = \hbar_1(x_1) = \begin{cases} h_1, x_1 \in \omega_1^{(1)}, \\ 0.5h_1, x_1 = 0, \xi, \end{cases}$$
$$S^{x_2} v_1(x) = \frac{1}{\hbar_2} \int\limits_{e_2(x_2)} v_1(x_1, r_2)\, dr_2,\ x_2 \in \overline{\omega}_2, \quad \hbar_2 = \hbar_2(x_2) = \begin{cases} h_2, x_2 \in \omega_2, \\ 0.5h_2, x_2 = 0, l_2. \end{cases}$$

С помощью одномерных операторов $S^{x_\alpha}$, действующих по направлению $x_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, определим усредняющий оператор $S^x = S^{x_1} S^{x_2}$ как произведение одномерных усредняющих операторов. Аналогично определяются усредняющие операторы по Стеклову для функций $v(x) = v_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2$. В дальнейшем через $H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \equiv L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)$ будем обозначать пространство сеточных функций $v_{1h}(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup \gamma_S$, заданных на сетке $\omega^{(1)} \cup \gamma_S$, со скалярным произведением и нормой:

$$(v_{1h}, \tilde{v}_{1h})_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} v_{1h}(x) \tilde{v}_{1h}(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} v_{1h}(x) \tilde{v}_{1h}(x) h_1 h_2,$$
$$\|v_{1h}(x)\|^2_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} = (v_{1h}, v_{1h})_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)}.$$

Аналогично вводится пространство сеточных функций $H_h^{(2)}(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) \equiv L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)$.

Задачам оптимального управления (1)–(3) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \overline{\omega}^{(1)}} \left| y(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x) \right|^2 \hbar_1 \hbar_2 = \|y(x, \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}, \tag{11}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) \equiv y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)} \gamma^{(2)}}$ $(\overline{\omega}^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемы) для задачи (1), удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) = (v_1(x, \Phi_h), v_2(x, \Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)} \gamma^{(2)}}$ $(\overline{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered} Q_h(y, v) = \Bigg\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\overline{x}_1} v_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg( \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\overline{x}_2} v_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) v_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \Bigg) \Bigg\} + \\ + \Bigg\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\overline{x}_1} v_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg( \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\overline{x}_2} v_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \end{gathered} \tag{12}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2) y_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2) v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2) h_1 h_2\Bigg)\Bigg\} + \sum_{\omega_2} \Phi_h(x)\big[y(\xi,x_2)\big]\big[v(\xi,x_2)\big] h_2+$$
$$+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x)) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2) q_1(y_1(\xi,x_2)) v_1(\xi,x_2) h_1 h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x)) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2) q_2(y_2(\xi,x_2)) v_2(\xi,x_2) h_1 h_2\Bigg)\Bigg\} =$$
$$= \Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi,x_2) v_1(\xi,x_2) h_1 h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi,x_2) v_2(\xi,x_2) h_1 h_2\Bigg)\Bigg\} = l_h(v),$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$, $x\in\gamma_S$ таковы, что

$$\Phi_h(x)\in U_h = \big\{\Phi_h\in L_2(\gamma_S) = H_h : 0 < g_0 \leqslant \Phi_h(x) \leqslant \overline{g}_0, x\in\gamma_S\big\}, \tag{13}$$

где $L_2(\gamma_S) = H_h$ – пространство сеточных управлений $\Phi_h$, заданных на сетке $\gamma_S\subset S$ со скалярным произведением и нормой

$$\big(\Phi_h,\tilde{\Phi}_h\big)_{L_2(\gamma_S)} = \sum_{x\in\gamma_S} h_2\Phi_h(x)\tilde{\Phi}_h(x), \quad \|\Phi_h(x)\|^2_{L_2(\gamma_S)} = \big(\Phi_h,\Phi_h\big)_{L_2(\gamma_S)}.$$

Здесь $a_{\alpha h}^{(1)}(x)$, $a_{\alpha h}^{(2)}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $f_{1h}(x)$, $f_{2h}(x)$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha^{(1)}(r)$, $k_\alpha^{(2)}(r)$, $d_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $f_1(r)$, $f_2(r)$, $u_0^{(1)}(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$a_{1h}^{(\alpha)}(x_1,x_2) = \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(\alpha)}(x_1-0.5h_1,r_2)\,dr_2, \quad x\in\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2, \alpha=1,2;$$
$$a_{2h}^{(\alpha)}(x_1,x_2) = \frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_2^{(\alpha)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \quad x\in\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+, \alpha=1,2;$$
$$a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_2^{(1)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \quad x_2\in\omega_2^+;$$
$$a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2^{(2)}(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1, \quad x_2\in\omega_2^+;$$
$$d_{\alpha h}(x) = \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{\alpha}(x)} d_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x\in\omega^{(\alpha)}, \alpha=1,2;$$

$$d_{1h}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x_2\in\omega_2;$$

$$d_{2h}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x_2\in\omega_2;$$

$$f_{\alpha h}(x) = \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} f_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x\in\omega^{(\alpha)},\ \alpha=1,2;$$

$$f_{1h}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} f_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x_2\in\omega_2;$$

$$f_{2h}(\xi,x_2) = \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x_2\in\omega_2;$$

$$u_{0h}^{(1)}(x) = \frac{1}{\hbar_1\hbar_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, \quad x\in\overline{\omega}^{(1)}=\overline{\omega}_1^{(1)}\times\overline{\omega}_2.$$

**Теорема 2.** *Задача о нахождении решения разностной схемы* (12) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h\in U_h$ *эквивалентна решению операторного уравнения* $A_hy=F_h$, *где* $A_h$ *– разностный оператор, действующий из* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *в* $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, *а сеточная функция* $F_h\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ *определяются равенствами*

$$\left(A_hy,v\right)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = Q_h(y,v), \quad \left(F_h,v\right)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = l_h(v), \forall y,v\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}. \tag{14}$$

*Задача (разностная схема)* (12) *однозначно разрешима для любого сеточного управления* $\Phi_h\in U_h$, *причем справедлива априорная оценка*

$$\|y(x;\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant M\sum_{k=1}^{2}\|f_{kh}\|_{L_2(\omega^{(k)}\cup\gamma_S)}, \quad \forall\Phi_h\in U_h. \tag{15}$$

**Доказательство.** Используя ограничения на входные данные краевой задачи (1), неравенства Коши-Буняковского и Гельдера, разностные аналоги теорем вложения, можно убедиться, что форма $Q_h(y,v)$ и $l_h(v)$ для любого фиксированного $y\in\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и для $\forall\Phi_h\in U_h$ определяют линейные ограниченные функционалы в пространстве сеточных функций $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и, следовательно, однозначно представимы в виде (14). Отсюда и из (12), в силу произвольности $v$, получим, что сумматорное тождество (12) определяет операторное уравнение $A_hy=F_h$ – разностную схему. Кроме того, можно убедиться, что оператор $A_h$ разностной схемы (12) сохраняет основные свойства дифференциального оператора исходной задачи (1) – сильную монотонность и липшиц-непрерывность. Следовательно, условия теоремы Браудера [21] выполнены, а значит, уравнение $A_hy=F_h$ однозначно разрешимо. Оценка (15) следует из коэрцитивности оператора $A_h$. Теорема доказана.

Задача (12) является сеточным аналогом исходной задачи для состояния (1) с разрывными коэффициентами и решением (состоянием).

Установим связь между $u(r;g)$ – решением прямой задачи (1) с разрывными коэффициентами и решением $y(x,\Phi_h) = (y_1(x;\Phi_h), y_2(x;\Phi_h))$ – решением аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (12) при $h \to 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где $U$ и $U_h$ – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (1)-(3) и (11)-(13) соответственно. Пусть $u(r;g) = (u_1(r;g), u_2(r;g)) \in \widehat{\overset{\circ}{V}}_{\Gamma_1\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ – решение прямой задачи (1), отвечающее допустимому управлению $g \in U$, а $y(x,\Phi_h) = (y_1(x;\Phi_h), y_2(x;\Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ – решение задачи (12), отвечающее сеточному допустимому управлению $\Phi_h \in U_h$. Обозначим через $z(x) \equiv z(x;g,\Phi_h) = (z_1(x;g,\Phi_h), z_2(x;g,\Phi_h)) = (y_1(x;\Phi_h) - u_1(r;g), y_2(x;\Phi_h) - u_2(r;g))$ – погрешность метода по состоянию.

Для определения погрешности $z(x)$ разностной задачи (12) получаем, очевидно, уравнение $A_h y - A_h u = \psi_h$, где сеточная функция $\psi_h$ – погрешность аппроксимации разностной схемы (12) определяется соотношением

$$(\psi_h, v)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = (F_h - A_h u, v)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = l_h(v) - Q_h(u,v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)}).$$

Априорную оценку погрешности метода по состоянию устанавливает

**Теорема 3.** *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r;g)$ и $y(x,\Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах* (1)–(3) *и* (11)–(13). *Тогда для любых $h > 0$ справедлива оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи* (1)–(3)*:*

$$\begin{aligned}\|y(x;\Phi_h) - u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} \leqslant C\Big\{|h|\Big[\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\|k_1^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \\ + \|k_2^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\Big)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \\ + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_2)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Big] + \|S^{x_2}\theta(x_2) - \Phi_h(x_2)\|_{L_\infty(\omega_2)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Big\}.\end{aligned}$$

**Доказательство.** Пользуясь разностными формулами суммирования по частям, Грина, используя идеи работ [1]–[5], [10]–[13], приведем погрешность аппроксимации $\psi_h(x)$, после довольно громоздких преобразований, к специальному виду:

$$(\psi_h, v)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2}(\overline{\omega}^{(1,2)})} = -\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\eta_1^{(\alpha)}(x)v_{\alpha\overline{x}_1}h_1h_2 - \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(\alpha)}(x)v_{\alpha\overline{x}_2}h_1h_2 -$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(1)}(\xi,x_2)v_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 - \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+}\eta_2^{(2)}(\xi,x_2)v_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2 + \\ + \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega^{(\alpha)}}\eta_3^{(\alpha)}(x)v_\alpha(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\eta_3^{(1)}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\eta_3^{(2)}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2 - \sum_{\omega_2}\eta_4(x_2)[v(\xi,x_2)]\cdot h_2,\end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned}
&\eta_1^{(\alpha)}(x) = a_{1h}^{(\alpha)}(x)u_{\alpha\overline{x}_1}(x) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(\alpha)}(x_1-0.5h_1,r_2)\times\\
&\times\frac{\partial u_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)}{\partial r_1}dr_2,\ x\in\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2, \alpha=1,2;\\
&\eta_2^{(\alpha)}(x) = a_{2h}^{(\alpha)}(x)u_{\alpha\overline{x}_2}(x) - \frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_2^{(\alpha)}(r_1,x_2-0.5h_2)\times\\
&\times\frac{\partial u_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)}{\partial r_2}dr_1,\ x\in\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^{+}, \alpha=1,2;\\
&\eta_2^{(1)}(\xi,x_2) = a_{2h}^{(1)}(\xi,x_2)u_{1\overline{x}_2}(\xi,x_2) - \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_2^{(1)}(r_1,x_2-0.5h_2)\times\\
&\times\frac{\partial u_1(r_1,x_2-0.5h_2)}{\partial r_2}dr_1,\ x_2\in\omega_2^{+};
\end{aligned}\qquad(17)$$

$$\begin{aligned}
&\eta_2^{(2)}(\xi,x_2) = a_{2h}^{(2)}(\xi,x_2)u_{2\overline{x}_2}(\xi,x_2) - \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2^{(2)}(r_1,x_2-0.5h_2)\times\\
&\times\frac{\partial u_1(r_1,x_2-0.5h_2)}{\partial r_2}dr_1,\ x_2\in\omega_2^{+};\\
&\eta_3^{(\alpha)}(x) = d_{\alpha h}(x)q_\alpha(u_\alpha(x)) - \frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r)q_\alpha(u_\alpha(r))dr, \quad x\in\omega^{(\alpha)}, \alpha=1,2;\\
&\eta_3^{(1)}(\xi,x_2) = d_{1h}(\xi,x_2)q_1(u_1(\xi,x_2)) - \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r)q_1(u_1(r))dr,\ x_2\in\omega_2;\\
&\eta_3^{(2)}(\xi,x_2) = d_{2h}(\xi,x_2)q_2(u_2(\xi,x_2)) - \frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r)q_2(u_2(r))dr,\ x_2\in\omega_2;\\
&\eta_4(x_2) = \Phi_h(x_2)\big[u(\xi,x_2)\big] - \frac{2}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} \theta(r_2)\big[u(\xi,x_2)\big]\,dr_2,\ x_2\in\omega_2.
\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнения для погрешности $A_hy - A_hu = \psi_h$, представление (16), а также разностные аналоги теорем вложения Соболева, эквивалентные нормировки пространства $V_{\gamma^1\gamma^2(\overline{\omega}^{(1,2)})}$ (см. выше), неравенства Коши-Буняковского и Гельдера, получим оценку

$$\begin{aligned}
&\|z(x;g,\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2(\overline{\omega}^{(1,2)})}} = \|y(x;\Phi_h)-u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^1\gamma^2(\overline{\omega}^{(1,2)})}} \leqslant\\
&\leqslant M\Bigg\{\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\Bigg(\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}(\eta_1^{(\alpha)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^{+}}(\eta_2^{(\alpha)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} +\\
&+\Bigg(\sum_{\omega_2^{+}}(\eta_2^{(\alpha)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} + \Bigg(\sum_{\omega^{(\alpha)}}(\eta_3^{(\alpha)}(x))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2} +\\
&+\Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_3^{(\alpha)}(\xi,x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}\Bigg] + \Bigg(\sum_{\omega_2}(\eta_4(x_2))^2h_1h_2\Bigg)^{1/2}\Bigg\}.
\end{aligned}\qquad(18)$$

Для оценки левой части неравенства (18) через параметр $h$ и, тем самым, получения оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию, достаточно установить оценки величин (17):

$$\begin{aligned}
&\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}}\sum_{\omega_2}\big(\eta_1^{(\alpha)}(x)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_1^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\\
&\sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+}\big(\eta_2^{(\alpha)}(x)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_2^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\\
&\sum_{\omega_2^+}\big(\eta_2^{(\alpha)}(\xi,x_2)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2\|k_2^{(\alpha)}\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\\
&\sum_{\omega^{(\alpha)}}\big(\eta_3^{(\alpha)}(x)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2L^2\|d_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;\\
&\sum_{\omega_2}\big(\eta_3^{(\alpha)}(\xi,x_2)\big)^2 h_1h_2 \leqslant M^2L^2\|d_\alpha\|^2_{L_\infty(\Omega_\alpha)}|h|^2\|u_\alpha\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)}, \alpha=1,2;
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\sum_{\omega_2}\eta_4^2(x_2)h_2 \leqslant M^2\left[h_2^2\|\theta\|^2_{L_\infty(0,l_2)}+\|S^{x_2}\theta-\Phi_h\|^2_{L_\infty(\omega_2)}\right]\sum_{k=1}^2\|u_k\|^2_{W_2^2(\Omega_\alpha)},$$

доказательства которых содержат громоздкие выкладки. Поэтому мы ограничимся доказательством, например, первой из оценок в (19) при $\alpha=1$. Нетрудно убедиться, что справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
&\left|\eta_1^{(1)}(x)\right| = \left|\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{e_2(x_2)} k_1^{(1)}(x_1-0.5h_1,r_2)\Bigg[\int\limits_{x_1-0.5h_1}^{r_1}\frac{\partial^2 u_1(m,r_2)}{\partial m^2}dm-\right.\\
&\left.-\int\limits_{x_2}^{r_2}\frac{\partial^2 u_1(r_1,s)}{\partial r_1\partial s}ds\Bigg]dr_1dr_2\right| \leqslant (h_1h_2)^{-1/2}\|k_1^{(1)}\|_{L_\infty(\Omega_1)}\times\Bigg[h_1\Bigg(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\\
&\int\limits_{e_2(x_2)}\left|\frac{\partial^2 u_1(m,r_2)}{\partial m^2}\right|^2 dmdr_2\Bigg)^{1/2} + h_2\Bigg(\int\limits_{x_1-h_1}^{x_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\left|\frac{\partial^2 u_1(r_1,s)}{\partial r_1\partial s}\right|^2 dr_1ds\Bigg)^{1/2}\Bigg]\leqslant\\
&\leqslant 2^{1/2}\|k_1^{(1)}\|_{L_\infty(\Omega_1)}|h|(h_1h_2)^{-1/2}\|u_1\|_{W_2^2((x_1-h_1,x_2)\times e_2(x_2))},\quad x\in\omega_1^{(1)+}\times\omega_2.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание 2.** На основе установленных в настоящей работе оценок точности аппроксимаций по состоянию будут исследованы в дальнейшем проблемы сходимости аппроксимаций по функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев Ф. П. *Методы оптимизации.* М.: Факториал Пресс. 2002.
2. Ишмухаметов А. З. *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления.* М.: ВЦ РАН. 1999.
3. Ишмухаметов А. З. *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами.* М.: ВЦ РАН. 2001.
4. Потапов М. М. *Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболиче- ские уравнения.* М.: Изд-во МГУ. 1985.
5. Лубышев Ф. В. *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных.* Уфа: БГУ. 1999.
6. Самарский А. А., Андреев В. Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений.* М.: Наука. 1976.

7. Самарский А. А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989.
8. Цурко В. А. *О точности разностных схем для параболических уравнений с разрывным решением* // Дифференц. ур-ния. 2000. Т. 36. № 7. С. 986–992.
9. Цурко В. А. *Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и решениями* // Дифференц. ур-ния. 2005. Т. 41. № 2. С. 274–280.
10. Лубышев Ф. В. *Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах* // Докл. РАН. Т. 349. № 5. 1996. С. 598–602.
11. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э. *Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 41. № 8. 2001. С. 1148–1164.
12. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р. *О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 47. № 3. 2007. С. 376–396.
13. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р. *Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных* // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. Т. 53. № 1. 2013. С. 20–46.
14. Карташов Э. М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел.* М.: Высшая школа. 1985.
15. Соболев С. Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Новосибирск: СО АН СССР. 1962.
16. Ладыженская О. А. *Краевые задачи математической физики.* М.: Наука. 1973.
17. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир. 1978.
18. Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения.* М.: Наука. 1988.
19. Гилбарг Д., Трудингер Н. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* М.: Наука. 1989.
20. Ректорис К. *Вариационные методы в математической физике и технике.* М.: Мир. 1985.
21. Браудер Ф. Е. *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными.* Новосибирск. 1963.
22. Дренска Н. Т. *Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах* // Вестник Московск.университета. Сер. 15. Вычислит. матем. и кибернетика. № 4. 1981. С. 15–21.

Айгуль Рашитовна Манапова,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: aygulrm@mail.ru

Федор Владимирович Лубышев,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: aygulrm@mail.ru