

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА МНОГООБРАЗИИ С ОТМЕЧЕННЫМ ПОДМНОГООБРАЗИЕМ

Ю.А. КОРДЮКОВ, В.А. ПАВЛЕНКО

Аннотация. Пусть X — компактное многообразие без края и X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности один. В работе вводятся классы интегральных операторов на X с ядрами $K_A(x, y)$, являющимися гладкими функциями при $x \notin X^0$ и $y \notin X^0$ и допускающими асимптотическое разложение определенного вида, если x или y приближается к X^0 . Для операторов из этих классов доказаны теоремы о действии в пространствах конормальных функций и теоремы о композиции. Показано, что функционал следа можно продолжить до функционала регуляризованного следа r-Tr , определенного на некоторой алгебре $\mathcal{K}(X, X^0)$ сингулярных интегральных операторов, описанных выше. Доказана формула для регуляризованного следа коммутатора операторов из данного класса в терминах ассоциированных операторов на X^0 . Доказательства основаны на теоремах о поднятии и опускании конормальных функций при отображениях многообразий с отмеченными подмногообразиями коразмерности один.

Ключевые слова: многообразия, сингулярные интегральные операторы, конормальные функции, регуляризованный след, поднятие, опускание.

Mathematics Subject Classification: 47G10, 58J40, 47C05

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена построению и исследованию некоторых классов сингулярных интегральных операторов на замкнутом гладком многообразии X с отмеченным гладким подмногообразием X^0 коразмерности 1. Характерное свойство операторов из этих классов заключается в том, что их ядра $K_A(x, y)$ являются гладкими функциями при $x \notin X^0$ и $y \notin X^0$, допускающими асимптотическое разложение определенного вида, если x или y приближается к X^0 .

Прежде всего, мы доказываем теоремы о действии в пространствах конормальных функций и теоремы о композиции для операторов из этих классов. Затем мы строим алгебру $\mathcal{K}(X, X^0)$ сингулярных интегральных операторов данного вида и функционал регуляризованного следа r-Tr на ней, который совпадает с функционалом следа на операторах с гладким ядром. Несмотря на то, что построенный функционал не обладает следовым свойством, мы доказываем формулу для регуляризованного следа $\text{r-Tr}[A, B]$ коммутатора операторов A и B , принадлежащих $\mathcal{K}(X, X^0)$, в терминах некоторых интегральных операторов с гладким ядром на X^0 , ассоциированных с A и B .

YU.A. KORDYUKOV, V.A. PAVLENKO, SINGULAR INTEGRAL OPERATORS ON A MANIFOLD WITH A DISTINGUISHED SUBMANIFOLD.

© Кордюков Ю.А., Павленко В.А. 2014.

Работа поддержана РФФИ (гранты 12-01-00519-а).

Поступила 13 марта 2014.

Одной из важнейших мотивировок для наших конструкций является желание обобщить формулу Лефшеца для потока на компактном многообразии, сохраняющем слоение коразмерности один. В случае, когда поток не имеет неподвижных точек, и его орбиты трансверсальны слоям слоения, такая формула была доказана в работе [1]. Существенную роль в работе [1] играет следующий аналитический результат.

Пусть M — замкнутое многообразие и $\mathcal{F}$ — гладкое слоение на M коразмерности один. Предположим, что $X_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$ — поток на M , который отображает каждый слой слоения $\mathcal{F}$ в какой-либо (возможно, другой) слой. Пусть K — послойно сглаживающий оператор на M , то есть оператор в пространстве $C^\infty(M)$, задающийся семейством интегральных операторов с гладким ядром, действующих вдоль слоев слоения.

Для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ определим оператор A_f в пространстве $C^\infty(M)$ по формуле

$$A_f = \int_{\mathbb{R}} X_t^* \cdot f(t) dt \circ K,$$

где X_t^* — оператор в $C^\infty(M)$, индуцированный действием потока X_t , $X_t^* f(x) = f(X_t(x))$. В [1] доказано, что, если орбиты потока X_t трансверсальны к слоям, то для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ оператор A_f является ядерным оператором в гильбертовом пространстве $L^2(M)$. Более того, функционал $f \mapsto \text{tr } A_f$ определяет обобщенную функцию на $\mathbb{R}$. Использование обобщенных функций такого вида позволяет определить число Лефшеца потока X_t как обобщенную функцию на $\mathbb{R}$.

В случае, когда поток X_t имеет конечное число невырожденных неподвижных точек, принадлежащих компактным слоям $\{L_i\}$, и орбиты потока X_t трансверсальны ко всем слоям, кроме $\{L_i\}$, оператор A_f , вообще говоря, не является ядерным оператором. Можно показать, что в данном случае оператор A_f принадлежит алгебре $\mathcal{K}(M, M^0)$, где $M^0 = \cup L_i$, и, тем самым, определен его регуляризованный след $\text{g-Tr}(A_f)$. Этот факт позволяет определить число Лефшеца потока X_t в данном случае. Эти результаты являются частью нашего совместного проекта с Х. Альваресом Лопесом и Э. Лейчтнамом и будут обсуждаться в последующих работах.

Алгебры операторов, ассоциированные с компактным многообразием с отмеченным подмногообразием, строились ранее в работах Б.Ю. Стернина, В.Е. Шаталова и А.Ю. Савина в связи с исследованием краевых задач для эллиптических уравнений на компактном многообразии, для которых граничные условия задаются как на крае многообразия, так и на гладких подмногообразиях (коразмерности ≥ 1), не являющихся краем. Задачи подобного типа впервые рассматривал Соболев [2]. Общая постановка таких задач и их исследование были даны в [3] и, следуя этой работе, они часто называются задачами Соболева. Алгебра операторов, соответствующая задачам Соболева, была построена в работе [4]. Она получается как расширение алгебры псевдодифференциальных операторов с помощью специального класса операторов, ассоциированных с подмногообразием — операторов Грина. В работе [5] было показано, что теория задач Соболева может быть представлена как относительная теория, т.е. она ассоциирована с гладким вложением $i : X \hookrightarrow M$ замкнутых многообразий. Относительные теории являются более простыми и элегантными, чем теории, не обладающие этим свойством. Например, вычисление индекса в относительной теории сводится к вычислению индекса на гладких замкнутых многообразиях M и X ; напротив, в теории классических краевых задач, которая не является относительной (т.к. ассоциирована с многообразием с краем), вычисление индекса весьма громоздко. В работах [6, 7, 8] Б.Ю. Стернин распространил относительную эллиптическую теорию и на случай, когда подмногообразие является стратифицированным подмногообразием, представимым в виде объединения трансверсально пересекающихся гладких подмногообразий (см. также [9, 10]).

Построенная в данной работе теория также является относительной теорией в смысле Б.Ю. Стернина [5]. Для ее построения мы используем методы работ Мельроуза [11, 12, 13], в частности, предложенный в них геометрический подход к построению и исследованию алгебр сингулярных интегральных операторов. Введенные нами классы операторов и понятие регуляризованного следа являются аналогами соответствующих объектов, введенных ранее Мельроузом для многообразий с углами.

План статьи следующий. Во втором разделе мы даем определение конормальных функций и конормальных плотностей на многообразии Z с отмеченным подмногообразием Z^0 и описываем их основные свойства. Подмногообразие Z^0 необязательно является гладким, а представляется в виде объединения гладких связных подмногообразий коразмерности 1, пересекающихся трансверсально. Мы будем называть такие подмногообразия стратифицированными. Одним из основных примеров для нас является следующий: $Z = X \times X$, $Z^0 = (X^0 \times X) \cup (X \times X^0)$, где X — гладкое многообразие и X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности один. Введенное нами понятие конормальной функции является обобщением классического понятия конормальной функции на гладком подмногообразии, введенным Хермандером. Аналогичное понятие было введено Мельроузом для многообразий с углами. В третьем разделе мы строим различные классы сингулярных интегральных операторов и формулируем теоремы о действии в пространствах конормальных функций и о композиции для операторов из этих классов. Доказательства этих теорем приведены в четвёртом разделе. Они используют теоремы о поднятии и опускании для конормальных функций при отображениях многообразий с отмеченными подмногообразиями и конструкции некоторых вспомогательных многообразий. В пятом разделе мы определяем функционал регуляризованного следа и доказываем его основные свойства, в частности, теорему о регуляризованном следе коммутатора. В приложениях А и В мы приводим доказательства теорем о поднятии и опускании.

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

2. КОНОРМАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

В данном разделе мы введем класс конормальных функций на произвольном многообразии X с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 коразмерности один.

2.1. Стратифицированные подмногообразия. Пусть X — гладкое многообразие размерности n . Подмножество $X^0 \subset X$ будем называть стратифицированным подмногообразием многообразия X (коразмерности один), если X^0 представляется в виде объединения конечного числа гладких подмногообразий $X_1, X_2, \dots, X_r$ размерности $n - 1$, которые пересекаются трансверсально. Мы будем предполагать, что подмногообразия $X_1, X_2, \dots, X_r$ связны, и будем называть их компонентами стратифицированного подмногообразия X^0 .

Здесь трансверсальное пересечение понимается в следующем смысле. Пусть $p \in X^0$. Предположим, что p принадлежит ровно ℓ компонентам подмногообразия X^0 , $\ell \geq 1$. Тогда существует локальная система координат $\varkappa : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, определенная в окрестности точки p , такая, что пересечения компонент подмногообразия X^0 , содержащих точку p , с U задаются уравнениями $x_d = 0$ для любого $d \in \{1, \dots, \ell\}$. Любая такая система координат будет называться адаптированной в точке p . Без потери общности, мы можем предполагать, что $\varkappa(U) = D_1 \times D_2$, где $D_1 \subset \mathbb{R}^\ell$ и $D_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$ — некоторые открытые подмножества. Часто для определённости мы будем полагать, что $p \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$, и адаптированная в точке p система координат выбрана таким образом, что для любого $d \in \{1, \dots, \ell\}$ пересечение $X_d \cap U$ задается уравнением $x_d = 0$. Мы будем всегда рассматривать регулярные локальные системы координат, то есть такие системы координат $\varkappa : U \subset X \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых существует

система координат $\mathfrak{K} : V \subset X \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенная в таком открытом множестве V , что $\overline{U} \subset V$.

2.2. Индексные множества и семейства. Обозначим через $\mathbb{Q}_1$ множество рациональных чисел, представимых в виде $z = \frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{Z}$ взаимно просты и q нечетно, и через $\mathbb{Z}_+$ множество целых неотрицательных чисел.

Определение 1. Индексным множеством называется множество $E \subset \mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. E ограничено снизу, т.е. существует такое $N_1 \in \mathbb{Q}_1$, что для любого $(z, p) \in E$ справедливо неравенство: $z \geq N_1$;
2. $(z, p) \in E, p \geq q \Rightarrow (z, q) \in E$;
3. для любого $N_2 \in \mathbb{Q}_1$ множество $E \cap \{(z, p) : z \leq N_2\}$ конечно;
4. $(z, p) \in E, j \in \mathbb{N} \Rightarrow (z + j, p) \in E$.

Определение 2. Скажем, что на стратифицированном подмногообразии $X^0 = X_1 \cup \dots \cup X_r$ задано индексное семейство $\mathcal{E}$, если любой его компоненте X_j поставлено в соответствие индексное множество $\mathcal{E}(X_j) = E_j, j = 1, \dots, r$.

2.3. Конормальные функции и их свойства. Пусть X — гладкое многообразие и $X^0 = X_1 \cup \dots \cup X_r$ — его стратифицированное подмногообразие. Пусть $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_r)$ — некоторое индексное семейство на X^0 . Определение конормальной функции в точке $p_0 \in X^0$ будет дано индукцией по числу ℓ компонент подмногообразия X^0 , содержащих точку p_0 .

База индукции: $\ell = 1$. Предположим, что точка p_0 принадлежит в точности одной компоненте, для определенности, $p_0 \in X_1, p_0 \notin X_2 \cup \dots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p_0 систему координат $\mathfrak{K} : U \subset X \rightarrow \mathfrak{K}(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Определение 3. Функция u называется конормальной в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если существует такая окрестность $V \subset U$ точки p_0 , $\mathfrak{K}(V) = (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$, что функция u определена и является гладкой на $V \setminus X^0$, и

$$u \sim \sum_{(z,q) \in E_1} a_{z,q}(x^0) x^z \ln^q |x|,$$

где $a_{z,q} \in C^\infty(V_2)$. Здесь знак $\sim$ означает, что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+, \beta \in \mathbb{Z}_+^{n-1}$ и $N \in \mathbb{N}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$, что:

$$\left| (x \partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \left(u(x, x^0) - \sum_{\substack{(z,q) \in E_1 \\ z \leq N}} a_{z,q}(x^0) x^z \ln^q |x| \right) \right| < C |x|^{N+1}, \quad (x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V_2, x \neq 0.$$

Шаг индукции. Пусть $\ell \geq 2$. Предположим, что определение конормальной функции в точке дано для любого гладкого многообразия Y с отмеченным стратифицированным подмногообразием Y^0 , на котором задано индексное семейство $\mathcal{E}^0$, и для любой точки $p_1 \in Y^0$ при условии, что p_1 принадлежит в точности k компонентам подмногообразия Y^0 при $k < \ell$.

Предположим теперь, что X — гладкое многообразие с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 и точка $p_0 \in X^0$, причём p_0 принадлежит ровно ℓ компонентам подмногообразия X^0 . Для определённости будем считать, что $p_0 \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$ и $p_0 \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p_0 систему координат $\mathfrak{K} : U \subset X \rightarrow \mathfrak{K}(U) = D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ такую, что X_j задается уравнением $x_j = 0$.

Рассмотрим многообразие $Z = \mathbb{R}^{\ell-1} \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ с координатами $(x_2, \dots, x_\ell, x^0)$, где $x_j \in \mathbb{R}$, $j = 2, \dots, \ell$, $x^0 \in \mathbb{R}^{n-\ell}$, наделенное стратифицированным подмногообразием $Z^0 = \{x_2 = 0\} \cup \dots \cup \{x_\ell = 0\}$. Зададим индексное семейство $\mathcal{E}'$ на Z^0 по формуле $\mathcal{E}'(\{x_j = 0\}) = E_j$, где $j = 2, \dots, \ell$. Z^0 состоит в точности из $(\ell - 1)$ -й компоненты, поэтому понятие конормальности функции в произвольной точке подмногообразия Z^0 определено по предположению индукции.

Определение 4. Функция u называется конормальной в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если существует такая окрестность V точки p_0 , $\kappa(V) = (-\varepsilon, \varepsilon)^\ell \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$, что функция u определена и является гладкой на $V \setminus X^0$, и

$$u \sim \sum_{(z,q) \in E_1} a_{z,q}(x_2, \dots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1|, \quad (1)$$

где функции $a_{z,q}$ являются конормальными функциями на $(-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell-1} \times V_2 \subset Z$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}'$.

Знак $\sim$ означает, что найдутся такие $M_2, \dots, M_\ell \in \mathbb{R}$, что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\ell$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-\ell}$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$, что:

$$\left| (x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \left(u(x_1, x_2, \dots, x_\ell, x^0) - \sum_{\substack{(z,q) \in E_1 \\ z \leq N_1}} a_{z,q}(x_2, \dots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1| \right) \right| < C |x_2|^{M_2} \dots |x_\ell|^{M_\ell} |x_1|^{N+1}, \quad (x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^\ell \times V_2, x_j \neq 0.$$

Можно показать, что определение конормальной функции в точке не зависит от выбора локальной системы координат. В частности, разложение типа (1) имеет место для любой из переменных $x_2, \dots, x_\ell$.

Определение 5. Функция u называется конормальной функцией на многообразии X со стратифицированным подмногообразием X^0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если она является гладкой на $X \setminus X^0$ и конормальной в каждой точке $p_0 \in X^0$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

Класс конормальных функций на многообразии X с отмеченным стратифицированным подмногообразием X^0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ будем обозначать $\mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, X^0)$.

Замечание 1. (1) Если $\mathcal{E}$ — тривиальное индексное семейство, т.е. $\mathcal{E}(X_j) = \{(\ell, 0) : \ell \in \mathbb{Z}_+\}$ для любого $j = 1, \dots, r$, то $\mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, X^0) = C^\infty(X)$.

(2) Для любой функции $u \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1}(X, X^0)$ и любой функции $v \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_2}(X, X^0)$ имеют место включения $u + v \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2}(X, X^0)$, а также $uv \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}(X, X^0)$.

Пример 1. В простейшем примере, когда $X = \mathbb{R}^2$ и $X^0 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$, функция $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ на X не является конормальной в точке $(0, 0)$.

Понятие конормальности легко обобщается на сечения векторного расслоения.

Определение 6. Пусть X — гладкое многообразие, X^0 — стратифицированное подмногообразие, G — гладкое векторное расслоение на X . Скажем, что сечение μ является конормальным сечением, $\mu \in \mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, X^0, G)$, если в любой тривиализации $G|_U \cong U \times \mathbb{C}^r$ расслоения G над координатной окрестностью $U \subset X$ сечение μ имеет вид $\mu(x) = (x, (u_1(x), \dots, u_r(x)), x \in U$, где $u_j \in \mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, X^0)$, $j = 1, \dots, r$.

2.4. Конормальные плотности. Мы будем рассматривать операторы, действующие на полуплотностях. Напомним, что гладкая s -плотность μ на гладком многообразии M размерности n записывается в произвольной локальной системе координат в виде $\mu = u(x_1, \dots, x_n) |dx_1 \dots dx_n|^s$, где u — гладкая функция. Гладкие s -плотности являются гладкими сечениями некоторого линейного расслоения Ω_M^s на M . Будем обозначать через $C^\infty(M, \Omega_M^s)$ пространство гладких s -плотностей на M .

Определение 7. Пусть X — гладкое многообразие и $X^0 = X_1 \cup \dots \cup X_r$ — его стратифицированное подмногообразие. s -плотность μ на X называется конормальной относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, если в любой адаптированной локальной системе координат с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$ она имеет вид

$$\mu = \frac{u(x, x^0)}{|x|^s} |dx dx^0|^s = u(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|^s,$$

где u — конормальная функция относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

Пространство конормальных s -плотностей на X относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ естественно изоморфно пространству $\mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, X^0, \Omega_{X, X^0}^s)$ конормальных сечений некоторого линейного расслоения Ω_{X, X^0}^s на X . Конструкция расслоения Ω_{X, X^0}^s аналогична конструкции расслоения b -плотностей на многообразии с углами, предложенной Мельроузом, и мы ее опустим.

3. СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом разделе мы введем классы сингулярных интегральных операторов на многообразии с отмеченным подмногообразием.

3.1. Классы $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$. Пусть X и Y — гладкие компактные многообразия такие, что $\dim X = n$, $\dim Y = m$, X^0, Y^0 — гладкие подмногообразия коразмерности 1 многообразий X и Y соответственно.

Полуплотность $k_A \in C^\infty((X \times Y) \setminus (\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}), \Omega_{X \times Y}^{\frac{1}{2}})$ определяет оператор

$$A : C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}}) \rightarrow C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}}),$$

действие которого на полуплотность $\mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}})$ задаётся формулой:

$$A\mu = \int_Y k_A \mu. \quad (2)$$

Полуплотность k_A называется ядром оператора A .

Поясним смысл выражения, стоящего в правой части формулы (2). Ядро k_A и плотность μ можно записать в виде:

$$k_A = K_A(p_1, p_2) |dv_X(p_1) dv_Y(p_2)|^{\frac{1}{2}}, \quad \mu = u(p_2) |dv_Y(p_2)|^{\frac{1}{2}},$$

где $K_A \in C^\infty((X \times Y) \setminus (\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}))$, $u \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0)$, $|dv_X|$ — некоторая фиксированная положительная гладкая плотность на X и $|dv_Y|$ — некоторая положительная гладкая плотность на Y . Тогда их произведение

$$k_A \mu = K_A(p_1, p_2) u(p_2) |dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}} |dv_Y(p_2)|$$

является плотностью на Y . Ее можно проинтегрировать по Y , и в результате получится полуплотность на X :

$$\int_Y k_A \mu = \left(\int_Y K_A(p_1, p_2) u(p_2) |dv_Y(p_2)| \right) |dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}.$$

Легко видеть, что формула (2) согласуется со стандартным выражением для интегрального оператора с ядром K_A :

$$A\mu = Au(p_1) |dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}, \quad Au(p_1) = \int_Y K_A(p_1, p_2) u(p_2) dv_Y(p_2).$$

Если $p_1 \notin X^0$, то интеграл, стоящий в правой части, сходится.

Рассмотрим стратифицированное подмногообразие $\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}$ многообразия $X \times Y$. Любое индексное семейство $\mathcal{E}$ на $\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}$ записывается в виде $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, где $\mathcal{E}_1$ — индексное семейство на $X^0 \times Y$ и $\mathcal{E}_2$ — индексное семейство на $X \times Y^0$. В дальнейшем мы будем также рассматривать индексное семейство $\mathcal{E}_1$ как индексное семейство на X^0 и $\mathcal{E}_2$ как индексное семейство на Y^0 .

Определение 8. Пусть $\mathcal{E}_1$ — индексное семейство на X^0 , $\mathcal{E}_2$ — индексное семейство на Y^0 и $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ — соответствующее индексное семейство на $\{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}$. Будем говорить, что интегральный оператор A , задаваемый формулой (2), принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$, если

$$k_A \in \mathcal{A}_{phg}^{(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)} \left(X \times Y, \{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}, \Omega_{X \times Y, \{X^0 \times Y\} \cup \{X \times Y^0\}}^{\frac{1}{2}} \right).$$

Очевидно, что $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$ является линейным пространством.

Пример 2. В простейшем примере, когда $X = Y = \mathbb{R}$ и $X^0 = Y^0 = \{0\}$, интегральный оператор A с ядром

$$k_A = C x^\alpha y^\beta \ln^p |x| \ln^q |y| \left| \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \right|^{1/2}, \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$ с $\mathcal{E}_1(X^0) = \{(\alpha + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, p\}$, $\mathcal{E}_2(Y^0) = \{(\beta + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, q\}$.

Для индексного множества E положим $\inf E := \inf \{z : (z, p) \in E\}$. Если $\mathcal{E}$ — индексное семейство на стратифицированном подмногообразии $X^0 = X_1 \cup \dots \cup X_r$ многообразия X , то положим $\inf \mathcal{E} = \inf_{j=1, \dots, r} \inf \mathcal{E}(X_j)$.

Теорема 1. Пусть $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$. Тогда для любого индексного семейства $\mathcal{F}$ на Y^0 , удовлетворяющего условию $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$, оператор A продолжается до оператора

$$A : \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{F}}(Y, Y^0, \Omega_{Y, Y^0}^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1}(X, X^0, \Omega_{X, X^0}^{\frac{1}{2}}).$$

Теорема 2. Если $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$ и $B \in \mathcal{K}^{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3}(Y, Y^0; Z, Z^0)$, то при условии $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}_2) > 0$ их композиция $C = A \circ B$ корректно определена и принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_3}(X, X^0; Z, Z^0)$.

3.2. Нормальные координаты около подмногообразия. Пусть M — компактное многообразие, M^0 — его гладкое подмногообразие. Выберем риманову метрику g_M на M . Рассмотрим нормальное расслоение $N(M^0) := TM/TM^0 \cong (TM^0)^\perp$. Напомним, что экспоненциальное отображение $\exp : N(M^0) \rightarrow M$ римановой метрики g_M для подмногообразия M^0 определяется следующим образом. Пусть $v \in N_x(M^0)$, $x \in M$. Существует единственная геодезическая $\gamma : (-\infty, +\infty) \rightarrow M$, проходящая через точку x с вектором скорости v , то есть, такая, что $\gamma(0) = x$, $\dot{\gamma}(0) = v$. Тогда $\exp(v) := \gamma(1)$.

Можно отождествить M^0 с нулевым сечением расслоения $N(M^0)$, что позволяет рассматривать M^0 как подмногообразие в M , и как подмногообразие в $N(M^0)$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Существует окрестность $U \supset M^0$ в $N(M^0)$, такая что ограничение $\exp|_U$ на U является диффеоморфизмом U на некоторую окрестность $\exp(U)$ подмногообразия M^0 .*

Множество $\exp(U)$ называется трубчатой окрестностью подмногообразия M^0 в M . Без потери общности мы можем предполагать, что $\exp(U)$ является ε -окрестностью подмногообразия M^0 при некотором $\varepsilon > 0$.

Предположим, что подмногообразие M^0 имеет коразмерность один, и нормальное расслоение $N(M^0)$ является тривиальным. Пусть $U \supset M^0$ как в предложении 1. Возьмём точку $p \in \exp U$. Этой точке взаимнооднозначно соответствует пара $(x, x^0) \in N(M^0)$, где $x^0 \in M^0$, $x \in N_{x^0}(M^0)$, $\exp(x) = p$. Поскольку риманова метрика задаёт изоморфизм $N_{x^0}(M^0) \cong \mathbb{R}$, можно считать, что $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, любая точка p , принадлежащая трубчатой окрестности $\exp(U)$, однозначно задаётся набором (x, x^0) , где $x \in \mathbb{R}$, $x^0 \in M^0$. Отображение $\exp(U) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times M^0$, $p \mapsto (x, x^0)$ будем называть нормальной системой координат около M^0 .

3.3. Классы $\mathcal{K}^{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_0}$. Пусть X — гладкое компактное многообразие размерности n , g_X — риманова метрика на X , $X^0 = X_1 \cup \dots \cup X_r$ — его гладкое подмногообразие коразмерности 1. Тем самым, подмногообразия $X_1, \dots, X_r$ попарно не пересекаются. Предположим, что нормальные расслоения подмногообразий $X_1, \dots, X_r$ тривиальны.

Рассмотрим оператор $A : C_0^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}}) \rightarrow C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ с ядром

$$k_A \in C^\infty\left((X \times X) \setminus (\{X^0 \times X\} \cup \{X \times X^0\}), \Omega_{X \times X}^{\frac{1}{2}}\right).$$

Всюду в дальнейшем $|dx^0|$ — фиксированная гладкая положительная плотность на X^0 .

Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности $\exp(U) = V$ подмногообразия X^0 . Пусть (x_1, x_2, x_1^0, x_2^0) — соответствующие координаты на $V \times V$. Положим $\Pi_\varepsilon = \{(x, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < \varepsilon, \left|\frac{x}{s}\right| < \varepsilon\}$. На множестве $(V \setminus X^0) \times (V \setminus X^0)$ введём систему координат $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in \Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ по формулам

$$x = x_1, \quad s = \frac{x_1}{x_2}. \quad (3)$$

Тогда полуплотность

$$k_A = K_A(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0) \left| \frac{dx_1}{x_1} \frac{dx_2}{x_2} dx_1^0 dx_2^0 \right|^{\frac{1}{2}}$$

в локальной системе координат (x, s, x_1^0, x_2^0) записывается в виде:

$$k_A = K_A\left(x, \frac{x}{s}, x_1^0, x_2^0\right) \left| \frac{dx}{x} \frac{ds}{s} dx_1^0 dx_2^0 \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Определим функцию $\tilde{K}_A$ на $\Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ по формуле:

$$\tilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) = K_A(x, \frac{x}{s}, x_1^0, x_2^0). \quad (4)$$

Пусть $\mu \in C_0^\infty(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$, $\text{supp } \mu \subset V$. Запишем $\mu = u(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|^{\frac{1}{2}}$, где $u \in C_0^\infty(V) \cong C_0^\infty((-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0)$. Тогда

$$A\mu \Big|_V = \left(\int_{X^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) u\left(\frac{x}{s}, x_2^0\right) \frac{ds}{s} dx_2^0 \right) \left| \frac{dx}{x} dx_1^0 \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 9. Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — индексные семейства на X^0 , $\mathcal{E}_O = \{\mathcal{E}_{O,ij} : i, j = 1, \dots, r\}$, где $\mathcal{E}_{O,ij}$ — индексное множество для любого $i, j = 1, \dots, r$. Скажем, что оператор A принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, если:

(1) Ядро k_A является кономальной полуплотностью на $(X \times X) \setminus (X^0 \times X^0)$ с отмеченным подмногообразием $\{X^0 \times (X \setminus X^0)\} \cup \{(X \setminus X^0) \times X^0\}$ относительно индексного семейства $\hat{E}_1 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$:

$$\hat{E}_1(X_i \times (X \setminus X^0)) = \mathcal{E}_1(X_i), \quad \hat{E}_1((X \setminus X^0) \times X_j) = \mathcal{E}_2(X_j).$$

(2) Функция $\tilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0)$ на $\Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$ является кономальной на подмногообразии $\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0 \times X^0$ относительно индексного семейства $\hat{E}_2$:

$$\hat{E}_2(\{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}.$$

(3) Функция $\hat{K}_A$ на $\{(x, \tau) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \varepsilon, |x\tau| < \varepsilon\} \times X^0 \times X^0$, определяемая формулой

$$\hat{K}_A(x, \tau, x_1^0, x_2^0) = K_A(x, x\tau, x_1^0, x_2^0),$$

является кономальной на подмногообразии $(\{0\} \times \mathbb{R} \times X^0 \times X^0) \cup ((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \times X^0 \times X^0)$ относительно индексного семейства $\hat{E}_3 = (\mathcal{E}_O, \mathcal{E}_2)$

$$\hat{E}_3(\{0\} \times \mathbb{R} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}, \quad \hat{E}_3((-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_2(X_j).$$

(4) Функция $\hat{\tilde{K}}_A$ на $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : |tx| < \varepsilon, |x| < \varepsilon\} \times X^0 \times X^0$, определяемая формулой

$$\hat{\tilde{K}}_A(t, x, x_1^0, x_2^0) = K_A(tx, x, x_1^0, x_2^0), \quad (t, x, x_1^0, x_2^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R} \times X^0 \times X^0,$$

является кономальной на подмногообразии $(\{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0 \times X^0) \cup (\mathbb{R} \times \{0\} \times X^0 \times X^0)$ относительно индексного семейства $\hat{E}_4 = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_O)$

$$\hat{E}_4(\{0\} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_1(X_i), \quad \hat{E}_4(\mathbb{R} \times \{0\} \times X_i \times X_j) = \mathcal{E}_{O,ij}.$$

Очевидно, что класс $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$ является линейным пространством.

Замечание 2. Можно показать, что $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0) \subset \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, где $\mathcal{E}_{O,ij} = \mathcal{E}_1(X_i) + \mathcal{E}_2(X_j)$.

Пример 3. В простейшем примере, когда $X = \mathbb{R}$ и $X^0 = \{0\}$, интегральный оператор A с ядром

$$k_A = x^\alpha y^\beta (x^2 + y^2)^{\frac{\gamma}{2}} \ln^p |x| \ln^q |y| \ln^r (x^2 + y^2) \left| \frac{dx}{x} \frac{dy}{y} \right|^{1/2},$$

принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, где $\mathcal{E}_1(X^0) = \{(\alpha + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, p\}$, $\mathcal{E}_2(X^0) = \{(\beta + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, q\}$ и $\mathcal{E}_O = \{(\alpha + \beta + \gamma + j, k) : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, p + q + r\}$.

Пусть E_1, E_2 — произвольные индексные множества. Положим

$$E_1 \bar{\cup} E_2 = E_1 \cup E_2 \cup \{(z, p_1 + p_2 + 1) : (z, p_1) \in E_1, (z, p_2) \in E_2\}.$$

Теорема 3. Пусть $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0}(X, X^0)$. Тогда для любого индексного семейства $\mathcal{F}$, удовлетворяющего условию $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$, оператор A продолжается до оператора

$$A : \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{F}}(X, X^0, \Omega_{X, X^0}^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{G}}(X, X^0, \Omega_{X, X^0}^{\frac{1}{2}}),$$

где

$$\mathcal{G}(X_i) = \mathcal{E}_1(X_i) \bar{\cup} \left(\bar{\cup}_j (\mathcal{F}(X_j) + \mathcal{E}_{O, ij}) \right), \quad i = 1, \dots, r.$$

Теорема 4. Пусть $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1^A, \mathcal{E}_2^A, \mathcal{E}_O^A}(X, X^0)$ и $B \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1^B, \mathcal{E}_2^B, \mathcal{E}_O^B}(X, X^0)$, причем $\inf(\mathcal{E}_2^A + \mathcal{E}_1^B) > 0$. Тогда определена композиция $C = A \circ B$, которая принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1^C, \mathcal{E}_2^C, \mathcal{E}_O^C}(X, X^0)$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1^C(X_i) &= \mathcal{E}_1^A(X_i) \bar{\cup} \left(\bigcup_k (\mathcal{E}_{O, ik}^A + \mathcal{E}_1^B(X_k)) \right), \\ \mathcal{E}_2^C(X_j) &= \mathcal{E}_2^B(X_j) \bar{\cup} \left(\bigcup_k (\mathcal{E}_2^A(X_k) + \mathcal{E}_{O, kj}^B) \right), \\ \mathcal{E}_{O, ij}^C &= \left(\bigcup_k (\mathcal{E}_{O, ik}^A + \mathcal{E}_{O, kj}^B) \right) \bar{\cup} (\mathcal{E}_1^A(X_i) + \mathcal{E}_2^B(X_j)). \end{aligned}$$

Замечание 3. По-видимому, полученные результаты можно распространить на случай, когда нормальное расслоение подмногообразия X^0 нетривиально. Для этого необходимо перейти на соответствующее двулистное накрытие и работать с $\mathbb{Z}_2$ -инвариантными операторами. Соответствующая техника была разработана для многообразий с углами в работе [14].

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

В данном разделе мы приводим доказательства теорем 1, 2, 3 и 4. Как это уже было сказано во введении, наш подход к построению и исследованию классов сингулярных интегральных операторов является обобщением геометрического подхода, предложенного Мельроузом ([11, 12, 13], см. также [15]). Специфика подхода Мельроуза заключается в том, что классы операторов определяются при помощи некоторых условий на ядро k_A оператора A из данного класса. Эти условия являются условиями конормальности либо для самого ядра k_A , либо для некоторой полуплотности $\hat{k}_A$, являющейся поднятием ядра k_A на некоторое вспомогательное многообразие, ассоциированное с $X \times X$. Для того чтобы связать оператор A с ядром $\hat{k}_A$, действие интегрального оператора A на полуплотностях выражается в терминах операторов поднятия и опускания. Тем самым, исследование данного класса интегральных операторов сводится к использованию операторов поднятия и опускания и их свойств. Поэтому, мы начнем с обсуждения операторов поднятия и опускания.

4.1. Поднятия. Напомним определения оператора поднятия, ассоциированного с отображением гладких многообразий.

Пусть X и Y — гладкие многообразия, $f : X \rightarrow Y$ — гладкое отображение. Для любого векторного расслоения $p : G \rightarrow Y$ на Y определим векторное расслоение $p_1 : f^*G \rightarrow X$ следующим образом:

$$f^*G := \{(x, v) | x \in X; v \in G_{f(x)}\}, \quad p_1(x, v) := x.$$

Определение 10. Оператором поднятия называется линейный оператор

$$f^* : C^\infty(Y, G) \rightarrow C^\infty(X, f^*G),$$

задаваемый для любого $s \in C^\infty(Y, G)$ формулой

$$f^*s(x) = (x, s(f(x))), \quad x \in X.$$

Пусть X, Y — гладкие многообразия размерности n и m соответственно, $X^0 = X_1 \cup \dots \cup X_r$ и $Y^0 = Y_1 \cup \dots \cup Y_{r^0}$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и Y соответственно.

Определение 11. Гладкое отображение $f : X \rightarrow Y$ называется относительным, если для любой точки $p \in X^0$ выполнено следующее условие. Предположим для определенности, что $p \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$, $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$, и $f(p) \in Y_1 \cap \dots \cap Y_{\ell_0}$, $f(p) \in Y_{\ell_0+1} \cup \dots \cup Y_{r^0}$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$, определенную в окрестности U_p , и адаптированную в точке $f(p)$ систему координат с координатами $(y, y^0) \in \mathbb{R}^{\ell_0} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}$. В этих координатах отображение f записывается в виде

$$y_i = f_i(x, x^0), \quad i = 1, \dots, \ell_0; \quad y_i^0 = f_i(x, x^0), \quad i = \ell_0 + 1, \dots, m.$$

Тогда найдутся гладкие функции a_i , $i = 1, \dots, \ell_0$, такие, что $a_i(x, x^0) \neq 0$, и в некоторой окрестности точки p справедливо представление:

$$f_i(x_1, \dots, x_\ell, x^0) = a_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}},$$

где γ_{ij} — целые неотрицательные числа, $i = 1, \dots, \ell_0$, $j = 1, \dots, \ell$.

Числа γ_{ij} зависят только от компонент X_j и Y_i и будут обозначаться через $e_f(X_j, Y_i)$. Отметим, что из определения относительного отображения вытекает, что $f^{-1}(Y^0) \subset X^0$.

Теорема 5. Пусть G — линейное расслоение над Y , $\mathcal{E}^0$ — индексное семейство на подмногообразии Y^0 . Тогда для любого относительного отображения $f : (X, X^0) \rightarrow (Y, Y^0)$ оператор f^* продолжается до оператора

$$f^* : \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}^0}(Y, Y^0, G) \rightarrow \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}}(X, X^0, f^*G),$$

где индексное семейство $\mathcal{E}$ на X^0 имеет вид:

$$\mathcal{E}(X_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_i e_f(X_j, Y_i) z_i, \sum_i q_i \right) \middle| (z_i, q_i) \in \mathcal{E}^0(Y_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \quad (5)$$

где суммирование ведется по таким $i = 1, \dots, r_0$, для которых $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$.

Доказательство теоремы 5 будет дано в приложении А.

4.2. Опускания. Напомним определения оператора опускания, ассоциированного с отображением гладких многообразий.

Обозначим

$$\mathcal{D}'(Y, G) = C_0^\infty(Y, G^*)'.$$

Имеет место включение

$$C_0^\infty(Y, G \otimes \Omega_Y) \subset \mathcal{D}'(Y, G).$$

Для любого $u \in C_0^\infty(Y, G \otimes \Omega_Y)$ вида $u = s \otimes \mu$, где $s \in C_0^\infty(Y, G)$, $\mu \in C_0^\infty(Y, \Omega_Y)$, соответствующий функционал на $C_0^\infty(Y, G^*)$ задается формулой

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_Y \langle s(y), \varphi(y) \rangle \mu(y) \in \mathbb{C}, \quad \varphi \in C_0^\infty(Y, G^*),$$

где $\langle s(y), \varphi(y) \rangle \in \mathbb{C}$ обозначает значение функционала $\varphi(y) \in G_y^*$ на $s(y) \in G_y$.

Определение 12. Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия, G — векторное расслоение на Y . Пусть задано гладкое отображение $f : X \rightarrow Y$. Оператором опускания называется линейный оператор

$$f_* : \mathcal{D}'(X, f^*G) \rightarrow \mathcal{D}'(Y, G),$$

задаваемый для любого $\mu \in \mathcal{D}'(X, f^*G)$ формулой:

$$\langle f_*\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, f^*\varphi \rangle, \quad \varphi \in C^\infty(Y, G^*).$$

Пусть X, Y — гладкие компактные многообразия размерности n и m соответственно, $X^0 = X_1 \cup \dots \cup X_r$ и $Y^0 = Y_1 \cup \dots \cup Y_{r_0}$ — стратифицированные подмногообразия многообразий X и Y соответственно.

Определение 13. Гладкое отображение $f : X \rightarrow Y$ называется *относительным расслоением*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. f — относительное отображение;
2. f сюръективно;
3. Для любой компоненты X_j подмногообразия X^0 найдётся не более одной компоненты Y_i подмногообразия Y^0 такой, что $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$;
4. Пусть $p \in X^0$ такая, что $f(p) = p_0 \notin Y^0$. Предположим, для определенности, что $p \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$. Как в определении 11, запишем отображение f в локальных координатах в виде

$$y_i^0 = f_i(x, x^0), \quad (x, x^0) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Тогда ранг матрицы Якоби $\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1^0, \dots, x_{n-\ell}^0)}$ равен m .

Теорема 6. Пусть $\mathcal{E}$ — такое индексное семейство на X^0 , что для любого $j = 1, \dots, r$, такого что $e_f(X_j, Y_i) = 0$ для любого $i = 1, \dots, r_0$, выполнено неравенство: $\inf \mathcal{E}(X_j) > 0$. Тогда для любого относительного расслоения $f : (X, X^0) \rightarrow (Y, Y^0)$ и для любого линейного расслоения G на Y оператор опускания f_* ограничивается до оператора:

$$f_* : \mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, X^0, f^*G \otimes \Omega_{X, X^0}) \rightarrow \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}^0}(Y, Y^0, G \otimes \Omega_{Y, Y^0}),$$

где индексное семейство $\mathcal{E}^0$ на Y^0 имеет следующий вид:

$$\mathcal{E}^0(Y_i) = \overline{\bigcup_{j: e_f(X_j, Y_i) \neq 0} \left\{ \left(\frac{z}{e_f(X_j, Y_i)}, q \right) : (z, q) \in \mathcal{E}(X_j) \right\}}, \quad i = 1, \dots, r_0.$$

Доказательство теоремы 6 будет дано в приложении В.

4.3. Доказательства теорем 1 и 2. Докажем теорему 1. Непосредственным вычислением легко проверить, что отображение

$$A : C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}}) \rightarrow C^\infty(X \setminus X^0, \Omega_X^{\frac{1}{2}}),$$

определяемое оператором $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2}(X, X^0; Y, Y^0)$, можно представить в виде

$$A\mu = \pi_{1*}(k_A \pi_2^* \mu), \quad \mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}}),$$

где отображения $\pi_1 : X \times Y \rightarrow X$, $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ задаются формулами:

$$\pi_1(x, y) = x; \quad \pi_2(x, y) = y. \quad (6)$$

Пусть индексное семейство $\mathcal{F}$ на Y^0 удовлетворяет условию $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$ и $\mu \in \mathcal{A}_{phg}^\mathcal{F}(Y, Y^0, \Omega_{Y, Y^0}^{\frac{1}{2}})$. Можно показать, что π_2 — относительное отображение, причем $e_{\pi_2}(X^0 \times Y, Y^0) = 0$, $e_{\pi_2}(X \times Y^0, Y^0) = 1$, поэтому по теореме 5 имеем:

$$\pi_2^* \mu \in \mathcal{A}_{phg}^{0, \mathcal{F}}(X \times Y, \{X \times Y^0\} \cup \{X^0 \times Y\}, \pi_2^* \Omega_{Y, Y^0}^{\frac{1}{2}}).$$

Из свойств конормальных функций, отмеченных в замечании 1, следует, что:

$$k_A \pi_2^* \mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 + \mathcal{F}}(X \times Y, \{X \times Y^0\} \cup \{X^0 \times Y\}, \Omega_{X \times Y, \{X \times Y^0\} \cup \{X^0 \times Y\}}^{\frac{1}{2}} \otimes \pi_2^* \Omega_{Y, Y^0}^{\frac{1}{2}}).$$

Имеет место изоморфизм векторных расслоений:

$$\Omega_{X \times Y, \{X \times Y^0\} \cup \{X^0 \times Y\}}^{\frac{1}{2}} \cong \pi_1^* \Omega_{X, X^0}^{\frac{1}{2}} \otimes \pi_2^* \Omega_{Y, Y^0}^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно:

$$k_A \pi_2^* \mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 + \mathcal{F}}(X \times Y, \{X \times Y^0\} \cup \{X^0 \times Y\}, \pi_1^* \Omega_{X, X^0}^{-\frac{1}{2}} \otimes \Omega_{X \times Y, \{X \times Y^0\} \cup \{X^0 \times Y\}}).$$

Так как $\inf(\mathcal{E}_2 + \mathcal{F}) > 0$, и можно показать, что π_1 — относительное расслоение, причем $e_{\pi_1}(X^0 \times Y, X^0) = 1$, $e_{\pi_1}(X \times Y^0, X^0) = 0$, применяя теорему 6 с $G = \Omega_{X, X^0}^{-\frac{1}{2}}$, $f = \pi_1$, получаем, что $A\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}_1}(X, X^0, \Omega_{X, X^0}^{\frac{1}{2}})$, что завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2 доказывается аналогичным образом. Ядро композиции $C = A \circ B$ представляется в виде:

$$k_C = \pi_{2*}(\pi_3^* k_A \pi_1^* k_B),$$

где отображения $\pi_1 : X \times Y \times Z \rightarrow Y \times Z$, $\pi_2 : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Z$, $\pi_3 : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y$ определяются по формулам:

$$\pi_1(x, y, z) = (y, z); \quad \pi_2(x, y, z) = (x, z); \quad \pi_3(x, y, z) = (x, y). \quad (7)$$

Далее остается применить теоремы 5 и 6.

4.4. Доказательство теоремы 3. Пусть X — гладкое компактное многообразие с выделенным подмногообразием X^0 коразмерности 1. Предположим, что на X задана риманова метрика g_X , и нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально.

Мы будем использовать растянутое произведение X_b^2 , которое получается из $X \times X$ раздутием подмногообразия $X^0 \times X^0 \subset X \times X$. Напомним его определение. Прежде всего, введём нормальное расслоение $N(X^0 \times X^0) = T(X \times X)/T(X^0 \times X^0)$ над подмногообразием $X^0 \times X^0$. Заметим, что $\text{rank } N(X^0 \times X^0) = 2$.

Проективизацией расслоения $N(X^0 \times X^0)$ называется расслоение $P(N(X^0 \times X^0))$ над $X^0 \times X^0$, слой которого в точке $p \in X^0 \times X^0$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(X^0 \times X^0)$. Зададим множество

$$V(N(X^0 \times X^0)) = \bigsqcup_{\ell \in P(N(X^0 \times X^0))} V(\ell),$$

где $V(\ell) \subset N(X^0 \times X^0)$ — одномерное линейное пространство, которое соответствует прямой ℓ . Таким образом, элементами множества $V(N(X^0 \times X^0))$ являются наборы (x_1^0, x_2^0, ℓ, v) , где $p = (x_1^0, x_2^0) \in X^0 \times X^0$, $\ell \subset N_p(X^0 \times X^0)$, $v \in V(\ell)$. Можно доказать, что множество $V(N(X^0 \times X^0))$ имеет структуру гладкого многообразия. Введём отображение $\beta_N : V(N(X^0 \times X^0)) \rightarrow N(X^0 \times X^0)$ по формуле:

$$\beta_N : (x_1^0, x_2^0, \ell, v) \mapsto (x_1^0, x_2^0, v).$$

Пусть $g_{X \times X}$ — такая риманова метрика на $X \times X$, которая совпадает с метрикой g_X на множестве $TX \times \{0\}$ и на множестве $\{0\} \times TX$, которые являются подмножествами $TX \times TX = T(X \times X)$. Более того, множества $TX \times \{0\}$ и $\{0\} \times TX$ — взаимно ортогональны.

Согласно предложению 1, существует такая окрестность U множества $X^0 \times X^0$ в $N(X^0 \times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфизмом:

$$\exp_{X \times X} \big|_U : U \xrightarrow{\sim} \exp(U).$$

Введём отношение эквивалентности на множестве $[(X \times X) \setminus (X^0 \times X^0)] \sqcup \beta_N^{-1}(U)$, положив, что точки $(p_1, p_2) \in (X \times X) \setminus (X^0 \times X^0)$ и $(x_1^0, x_2^0, \ell, v) \in \beta_N^{-1}(U)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда точка $(p_1, p_2) \in \exp(U)$ и выполнено равенство $\exp(\beta_N(x_1^0, x_2^0, \ell, v)) = (p_1, p_2)$.

Растянутое произведение X_b^2 определяется как множество классов эквивалентности на множестве $[(X \times X) \setminus (X^0 \times X^0)] \sqcup \beta_N^{-1}(U)$:

$$X_b^2 = [(X \times X) \setminus (X^0 \times X^0)] \sqcup \beta_N^{-1}(U) / \sim,$$

Множество X_b^2 естественным образом наделяется структурой гладкого многообразия.

Определим отображение $\beta : X_b^2 \rightarrow X \times X$ следующим образом: если $(p_1, p_2) \in (X \times X) \setminus (X^0 \times X^0)$, то

$$\beta(p_1, p_2) = (p_1, p_2);$$

если $(x_1^0, x_2^0, \ell, v) \in \beta_N^{-1}(U)$, то

$$\beta(x_1^0, x_2^0, \ell, v) = \exp(\beta_N(x_1^0, x_2^0, \ell, v)).$$

В X_b^2 имеется подмногообразие:

$$X_{Ob}^2 = \{(x_1^0, x_2^0, \ell, v) \in \beta_N^{-1}(U) : v \equiv 0\}.$$

Положим

$$X_{1b}^2 = X^0 \times (X \setminus X^0) \sqcup \{(x_1^0, x_2^0, \ell, v) \in \beta_N^{-1}(U) : \ell = \ell_1\},$$

где ℓ_1 — одномерное подпространство в $N(X^0 \times X^0)$, состоящее из векторов $(v_1, v_2) \in TX \times TX$, таких что $v_1 \in TX^0$. Аналогично определим

$$X_{2b}^2 = (X \setminus X^0) \times X^0 \sqcup \{(x_1^0, x_2^0, \ell, v) \in \beta_N^{-1}(U) : \ell = \ell_2\},$$

где ℓ_2 — одномерное подпространство в $N(X^0 \times X^0)$, состоящее из векторов $(v_1, v_2) \in TX \times TX$, таких что $v_2 \in TX^0$.

Легко видеть, что X_{1b}^2 , X_{2b}^2 и X_{Ob}^2 являются гладкими подмногообразиями в X_b^2 . Эти подмногообразия пересекаются трансверсально, и их объединение является стратифицированным подмногообразием $\mathcal{X}_b^2$ многообразия X_b^2 .

Фундаментальное свойство многообразия X_b^2 приведено в следующем утверждении.

Лемма 1. *Оператор A принадлежит классу $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$ тогда и только тогда, когда подъем $\tilde{k}_A = \beta^* k_A$ ядра k_A при отображении $\beta : X_b^2 \rightarrow X \times X$ является конормальной функцией на X_b^2 относительно индексного семейства $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O)$ на $\mathcal{X}_b^2 = X_{1b}^2 \cup X_{2b}^2 \cup X_{Ob}^2$.*

При помощи леммы 1 доказательство теоремы 3 проводится следующим образом. Определим отображения $\beta_1 : X_b^2 \rightarrow X$, $\beta_2 : X_b^2 \rightarrow X$ по формулам: $\beta_1 = \pi_1 \circ \beta$, $\beta_2 = \pi_2 \circ \beta$, где π_1 и π_2 определены в (6). Прямым вычислением можно показать, что оператор $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$ представляется в виде

$$A\mu = \beta_{1*}(\tilde{k}_A \beta_{2*}^* \mu), \quad \mu \in C_0^\infty(Y \setminus Y^0, \Omega_Y^{\frac{1}{2}}), \quad (8)$$

где $\tilde{k}_A$ определено в лемме 1. Далее доказательство теоремы 3 завершается аналогично доказательству теоремы 1 с использованием теорем 5 и 6.

4.5. Доказательство теоремы 4. Теорема 4 доказывается следующим образом. Сначала определяется многообразие X_b^3 , которое является раздутием стратифицированного подмногообразия $\hat{X}^0 = (X \times X^0 \times X^0) \cup (X^0 \times X \times X^0) \cup (X^0 \times X^0 \times X)$ в $X \times X \times X$, затем отображения $\gamma_i : X_b^3 \rightarrow X_b^2$, $i = 1, 2, 3$, являющиеся аналогами проекций π_i , $i = 1, 2, 3$ (см. (7)). Можно доказать, что ядро композиции k_C представимо в виде:

$$k_C = \gamma_{2*}(\gamma_3^* k_A \gamma_1^* k_B),$$

где $\gamma_3^* k_A$, $\gamma_1^* k_B$ — подъём ядер на X_b^3 . Важным фактом является утверждение о том, что существует такое стратифицированное подмногообразие $\mathcal{X}_b^3$ в X_b^3 , что отображения $\gamma_i : (X_b^3, \mathcal{X}_b^3) \rightarrow (X_b^2, \mathcal{X}_b^2)$ являются относительными расслоениями. После этого доказательство завершается с помощью теорем 5 и 6.

Опишем конструкции многообразия X_b^3 , подмногообразия $\mathcal{X}_b^3$ и отображений γ_i . Рассмотрим нормальное расслоение $N(X^0 \times X^0 \times X^0) = T(X \times X \times X)/T(X^0 \times X^0 \times X^0)$ над подмногообразием $X^0 \times X^0 \times X^0$ ранга 3. Проективизацией расслоения $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ называется расслоение $P(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ над $X^0 \times X^0 \times X^0$, слой которого в точке $p \in X^0 \times X^0 \times X^0$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(X^0 \times X^0 \times X^0)$. Зададим множество:

$$V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) = \bigsqcup_{\ell \in P(N(X^0 \times X^0 \times X^0))} V(\ell),$$

где $V(\ell) \subset N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ — одномерное линейное пространство, которое соответствует подпространству ℓ как элементу $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$. Таким образом, элементами множества $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ являются наборы (p, ℓ, v) , где $p \in X^0 \times X^0 \times X^0$, $\ell \subset N_p(X^0 \times X^0 \times X^0)$ и $v \in V(\ell)$. Нетрудно показать, что множество $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ имеет структуру гладкого многообразия.

Определим подмногообразие V_0 в $V(N(X^0 \times X^0 \times X^0))$ по формуле

$$V_0 = \{(p, \ell, v) \in V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) : v = 0\}.$$

Введём отображение $\gamma_N : V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) \rightarrow N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ по формуле

$$\gamma_N : (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1^0, x_2^0, x_3^0, v).$$

Нетрудно показать, что ограничение γ_N на $V \setminus V_0$ определяет диффеоморфизм

$$\gamma_N \Big|_{V \setminus V_0} : V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) \setminus V_0 \xrightarrow{\sim} N(X^0 \times X^0 \times X^0) \setminus (X^0 \times X^0 \times X^0).$$

Аналогично двумерному случаю можно ввести понятие раздутия подмногообразий $\widehat{X}_1 = X \times X^0 \times X^0$, $\widehat{X}_2 = X^0 \times X \times X^0$ и $\widehat{X}_3 = X^0 \times X^0 \times X$ многообразия $X \times X \times X$.

Рассмотрим нормальное расслоение $N(\widehat{X}_1)$ подмногообразия $\widehat{X}_1$, слой которого в точке $p \in \widehat{X}_1$ имеет вид $N_p(\widehat{X}_1) = T_p(X \times X \times X)/T_p(\widehat{X}_1)$ для любого $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$. Определено отображение

$$pr_1 : N(\widehat{X}_1) \rightarrow N(X^0 \times X^0), (x_1, x_2^0, x_3^0, v_1) \mapsto (x_2^0, x_3^0, v_1),$$

задающее изоморфизм $N_p(\widehat{X}_1) \cong N_{(x_2^0, x_3^0)}(X^0 \times X^0)$.

Введём расслоение $P(N(\widehat{X}_1))$ над $\widehat{X}_1$, слой которого в точке $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$ состоит из одномерных линейных подпространств в $N_p(\widehat{X}_1)$. Зададим множество:

$$V(N(\widehat{X}_1)) = \bigsqcup_{\ell \in P(N(\widehat{X}_1))} V(\ell),$$

где $V(\ell) \subset N(\widehat{X}_1)$ — одномерное линейное подпространство, которое соответствует ℓ как элементу $N(\widehat{X}_1)$. Таким образом, элементами множества $V(N(\widehat{X}_1))$ являются наборы (p, ℓ, v) , где $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$, $\ell \subset N_p(\widehat{X}_1)$ и $v \in V(\ell)$.

Введём отображение

$$\gamma_{N_1} : V(N(\widehat{X}_1)) \rightarrow N(\widehat{X}_1), (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell_1, v_1) \mapsto (x_1, x_2^0, x_3^0, v_1).$$

Аналогичные объекты можно ввести для подмногообразий $\widehat{X}_2$ и $\widehat{X}_3$. В частности, определены отображения $\gamma_{N_i} : V(N(\widehat{X}_i)) \rightarrow N(\widehat{X}_i)$ и $pr_i : N(\widehat{X}_i) \rightarrow N(X^0 \times X^0)$, $i = 2, 3$.

Определим подмногообразие V_i в $V(N(\widehat{X}_i))$, $i = 1, 2, 3$, по формуле

$$V_i = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_i)) : v = 0\}.$$

Нетрудно показать, что ограничение γ_{N_i} на $V \setminus V_i$, $i = 1, 2, 3$, определяет диффеоморфизм

$$\gamma_{N_i} \Big|_{V \setminus V_i} : V(N(\widehat{X}_i)) \setminus V_i \xrightarrow{\sim} N(\widehat{X}_i) \setminus \widehat{X}_i.$$

Пусть $g_{X \times X \times X}$ — такая риманова метрика на $X \times X \times X$, которая совпадает с метрикой g_X на подрасслоениях $TX \times \{0\} \times \{0\}$, $\{0\} \times TX \times \{0\}$, $\{0\} \times \{0\} \times TX$ расслоения $TX \times TX \times TX = T(X \times X \times X)$. Согласно предложению 1, существует такая окрестность U множества $X^0 \times X^0 \times X^0$ в $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфизмом:

$$\exp := \exp_{X \times X \times X} \Big|_U : U \xrightarrow{\sim} \exp_{X \times X \times X}(U) \subset X \times X \times X,$$

а также существует такая окрестность U_1 множества $X^0 \times X^0$ в $N(X^0 \times X^0)$, что следующее отображение является диффеоморфным:

$$\exp_{X \times X} \Big|_{U_1} : U_1 \xrightarrow{\sim} \exp_{X \times X}(U_1) \subset X \times X.$$

Для любого $i = 1, 2, 3$ композиция отображения $\exp_{X \times X}$ с pr_i определяет диффеоморфизм

$$\exp_i : pr_i^{-1}(U_1) \subset N(\widehat{X}_i) \xrightarrow{\sim} \exp_i(pr_i^{-1}(U_1)) \subset X \times X \times X.$$

Введём отношение эквивалентности $\sim$ на множестве $(X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0) \sqcup \gamma_N^{-1}(U) \sqcup \gamma_{N_1}^{-1}(U_1) \sqcup \gamma_{N_2}^{-1}(U_1) \sqcup \gamma_{N_3}^{-1}(U_1)$, положив, что:

- Точки $(p_1, p_2, p_3) \in X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0$ и $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \in \gamma_N^{-1}(U)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $(p_1, p_2, p_3) \in \exp(U)$ и

$$\exp(\gamma_N(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v)) = (p_1, p_2, p_3).$$

- Для любого $i = 1, 2, 3$, точки $(p_1, p_2, p_3) \in X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0$ и $(p, \ell_1, v_1) \in \gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда точки $(p_1, p_2, p_3) \in \exp_i(pr_i^{-1}(U_1))$ и

$$\exp_i(\gamma_{N_i}(p, \ell_1, v_1)) = (p_1, p_2, p_3).$$

- Для любого $i = 1, 2, 3$, точки $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \in \gamma_N^{-1}(U)$ и $(p, \ell_1, v_1) \in \gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = p,$$

и (ℓ, v) отображается в (ℓ_1, v_1) при естественном отображении $N(X) \rightarrow N(\widehat{X}_i)$.

Определим множество X_b^3 как множество классов эквивалентности:

$$X_b^3 = (X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0) \sqcup \gamma_N^{-1}(U) \sqcup \gamma_{N_1}^{-1}(U_1) \sqcup \gamma_{N_2}^{-1}(U_1) \sqcup \gamma_{N_3}^{-1}(U_1) / \sim.$$

Легко проверить, что множество X_b^3 является гладким многообразием.

Введем следующие подмножества в X_b^3 :

$$X_0^3 = \{(p, \ell, v) \in V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) : v = 0\} \subset \gamma_N^{-1}(U),$$

$$X_{O_i}^3 = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_i)) : v = 0\} \subset \gamma_{N_i}^{-1}(U_1), \quad i = 1, 2, 3.$$

Определим подмножество X_1^3 в X_b^3 , задав его пересечения с компонентами X_b^3 :

$$X_1^3 \cap (X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0) = X^0 \times (X \setminus X^0) \times (X \setminus X^0),$$

$$X_1^3 \cap \gamma_N^{-1}(U) = \{(p, \ell, v) \in V(N(X^0 \times X^0 \times X^0)) : \ell \subset TX^0 \times TX \times TX\},$$

$$X_1^3 \cap \gamma_{N_1}^{-1}(U_1) = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_1)) : p \in X^0 \times X^0 \times X^0\},$$

$$X_1^3 \cap \gamma_{N_2}^{-1}(U_1) = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_2)) : \ell \subset TX^0 \times TX \times TX\},$$

$$X_1^3 \cap \gamma_{N_3}^{-1}(U_1) = \{(p, \ell, v) \in V(N(\widehat{X}_3)) : \ell \subset TX^0 \times TX \times TX\}.$$

Аналогично определим подмножества X_2^3 и X_3^3 .

Легко видеть, что все введенные выше подмножества являются гладкими подмногообразиями в X_b^3 . Эти подмногообразия пересекаются трансверсально, и их объединение является стратифицированным подмногообразием в X_b^3 , которое мы обозначим через $\mathcal{X}_b^3$:

$$\mathcal{X}_b^3 = X_0^3 \cup X_1^3 \cup X_2^3 \cup X_3^3 \cup X_{O1}^3 \cup X_{O2}^3 \cup X_{O3}^3.$$

Отображения $\gamma_i : X_b^3 \rightarrow X_b^2$, $i = 1, 2, 3$, определяются следующим образом.

Для $(p_1, p_2, p_3) \in X \times X \times X \setminus \widehat{X}^0$:

$$\gamma_i(p_1, p_2, p_3) = \pi_i(p_1, p_2, p_3),$$

где отображения $\pi_i : X \times X \times X \rightarrow X \times X$ определены в (7).

Для $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \in \gamma_N^{-1}(U)$:

$$\gamma_1 : (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_2^0, x_3^0, \ell_1, v_2, v_3),$$

$$\gamma_2 : (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1^0, x_3^0, \ell_2, v_1, v_3),$$

$$\gamma_3 : (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1^0, x_2^0, \ell_3, v_1, v_2),$$

где ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 — образы ℓ при проекциях $N(X^0 \times X^0 \times X^0)$ на $N(X^0 \times X^0)$: $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, v) \mapsto (x_2^0, x_3^0, v_2, v_3)$, $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, v) \mapsto (x_1^0, x_3^0, v_1, v_3)$, $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, v) \mapsto (x_1^0, x_2^0, v_1, v_2)$ соответственно.

Для $(p, \ell, v) \in \gamma_{N_1}^{-1}(U_1)$, где $p = (x_1, x_2^0, x_3^0) \in \widehat{X}_1$, $\ell \subset N_p(\widehat{X}_1)$ и $v \in V(\ell)$:

$$\gamma_1 : (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_2^0, x_3^0, pr_1(\ell), pr_1(v)),$$

$$\gamma_2 : (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1, \exp_X(v_3)),$$

$$\gamma_3 : (x_1, x_2^0, x_3^0, \ell, v) \mapsto (x_1, \exp_X(v_2)).$$

Для $(p, \ell, v) \in \gamma_{N_i}^{-1}(U_1)$ отображения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ определяются аналогично.

5. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ СЛЕД

Операторы из класса $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, вообще говоря, не являются ядерными. Оказывается, что если индексное семейство $\mathcal{E}_O$ удовлетворяет следующему условию:

$$\inf \mathcal{E}_O \geq 0, \text{ причём, если } (0, q) \in \mathcal{E}_O, \text{ то } q = 0, \quad (9)$$

то можно ввести функционал на $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, называемый функционалом регуляризованного следа, который совпадает с функционалом следа на ядерных операторах.

Прежде чем дать определение регуляризованного следа, введем понятие регуляризованного интеграла для конормальных плотностей.

5.1. Регуляризованный интеграл. Пусть μ — конормальная относительно индексного семейства $\mathcal{E}$ плотность, заданная на компактном многообразии X с отмеченным гладким подмногообразием X^0 коразмерности 1. Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально, и индексное семейство $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию (9). На многообразии X зададим риманову метрику g_X . Определим непрерывную функцию r на X по формуле $r(p) = \varrho(p, X^0)$, где ϱ — геодезическое расстояние от точки p до подмногообразия X^0 .

Определение 14. Регуляризованный интеграл от плотности μ по X определяется формулой

$$\int_X \mu = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\substack{X \\ r(p) > \varepsilon}} \mu + 2 \ln \varepsilon \int_{X^0} \mu|_{X^0} \right). \quad (10)$$

Здесь $\mu|_{X^0}$ — плотность на X^0 , определяемая следующим образом. В нормальной системе координат $\exp(U) \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$, $p \mapsto (x, x^0)$ около X^0 запишем $\mu = u(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|$, где u — конормальная функция на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ с отмеченным подмногообразием $\{0\} \times X^0$, $|dx^0|$ — фиксированная гладкая плотность на X^0 . Поскольку индексное семейство $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию (9), легко видеть, что u продолжается до непрерывной функции на $(-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$. Положим

$$\mu|_{X^0} = u(0, x^0)|dx^0|.$$

Легко проверить, что $\mu|_{X^0}$ не зависит от выбора плотности $|dx^0|$.

Можно показать, что предел в правой части равенства (10) существует. Следует отметить, что регуляризованный интеграл зависит от выбора римановой метрики g_X .

5.2. Регуляризованный след. Пусть X — компактное многообразие и $A : C^\infty(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}}) \rightarrow C^\infty(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ — интегральный оператор с гладким ядром $k_A \in C^\infty(X \times X, \Omega_{X \times X}^{\frac{1}{2}})$, действие которого на полуплотность $\mu \in C^\infty(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$ задаётся формулой (2). Напомним, что такой оператор A определяет ограниченный оператор в пространстве $L^2(X, \Omega_X^{\frac{1}{2}})$. Этот оператор является ядерным, причём

$$\text{Tr}(A) = \int_X k_A|_\Delta, \quad (11)$$

где $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$.

Здесь гладкая плотность $k_A|_\Delta$ на X определяется следующим образом. Пусть dv_X — гладкая положительная плотность на X . Запишем

$$k_A = K_A(p_1, p_2)|dv_X(p_1)|^{\frac{1}{2}}|dv_X(p_2)|^{\frac{1}{2}}, \quad p_1, p_2 \in X,$$

где $K_A \in C^\infty(X \times X)$. Положим

$$k_A|_\Delta = K_A(p, p)|dv_X(p)|.$$

Легко проверить, что это определение не зависит от выбора плотности dv_X .

Пусть X — компактное многообразие, X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности 1, g_X — риманова метрика на X . Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально. Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$ с ядром $k_A \in C^\infty(X \times X \setminus (X^0 \times X) \cup (X \times X^0), \Omega_{X \times X}^{\frac{1}{2}})$. Предположим, что индексное семейство $\mathcal{E}_O$ удовлетворяет условию (9).

Определение 15. Регуляризованный след оператора A определяется по формуле

$$\text{r-Tr}(A) = \int_X k_A|_\Delta.$$

Можно показать, что $k_A|_\Delta$ является конормальной плотностью на (X, X^0) относительно индексного семейства $\mathcal{E}_O$, и потому регуляризованный интеграл от $k_A|_\Delta$ по X корректно определён.

5.3. Регуляризованный след коммутатора. Как и выше, пусть X — компактное многообразие, X^0 — его гладкое подмногообразие коразмерности 1, g_X — риманова метрика на X . Предположим, что нормальное расслоение подмногообразия X^0 тривиально. Функционал регуляризованного следа r-Tr на алгебре $\mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$ не является следовым функционалом, т.е. регуляризованный след $\text{r-Tr}([A, B])$ коммутатора операторов $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$ и $B \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_O}(X, X^0)$, вообще говоря, не равен нулю. Основным результатом этого раздела является формула, дающая выражение для регуляризованного

следа коммутатора $\text{r-Tr}([A, B])$ в терминах некоторых интегральных операторов на подмногообразии X^0 , ассоциированных с операторами A и B .

Начнем с определения класса операторов, для которого справедлива упомянутая выше формула.

Определение 16. Скажем, что $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, если $A \in \mathcal{K}^{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0}(X, X^0)$ для некоторых индексных семейств $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_0$ и выполнены следующие условия:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое что, если $\varrho(x, X^0) > \varepsilon$, $\varrho(y, X^0) < \delta$ или $\varrho(y, X^0) > \varepsilon$, $\varrho(x, X^0) < \delta$, то $k_A(x, y) = 0$.
2. $\mathcal{E}_0$ удовлетворяет условию (9).
3. Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности X^0 . Существуют такие $m, M, 0 < m < M < \infty$, что носитель функции $\tilde{K}_A$, определённой формулой (4), содержится в множестве всех $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in \Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$, таких, что $m < |s| < M$.

Используя теорему 4, нетрудно показать, что $\mathcal{K}(X, X^0)$ является алгеброй.

Прежде чем сформулировать утверждение о регуляризованном следе коммутатора, введем понятия определяющего оператора и определяющего семейства, ассоциированных с оператором $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, которые необходимы нам для формулировки данной теоремы.

Из условия (2) определения 16 следует, что для оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ существует предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) =: \tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0), \quad (12)$$

где $\tilde{K}_A$ — функция, определяемая формулой (4).

Определение 17. Определяющим оператором, ассоциированным с оператором $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$, называется оператор:

$$I(A) : C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega_{\mathbb{R} \setminus \{0\} \times X^0}^{\frac{1}{2}}) \rightarrow C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega_{\mathbb{R} \setminus \{0\} \times X^0}^{\frac{1}{2}}),$$

действие которого на полуплотность $\mu = u(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0, \Omega_{(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times X^0}^{\frac{1}{2}})$ задаётся формулой:

$$I(A)\mu = I(A)u(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|^{\frac{1}{2}},$$

где

$$I(A)u(x, x^0) = \int_{X^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{K}_A(0, s, x^0, x_1^0) u\left(\frac{x}{s}, x_1^0\right) \frac{ds}{s} dx_1^0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x^0 \in X^0.$$

Следующее понятие является аналогом известного понятия конормального символа (см., например, [13, 16]) в рассматриваемой ситуации.

Определение 18. Определяющими семействами оператора $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ называются семейства $\{I^\pm(A, \lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ интегральных операторов на X^0 с гладкими ядрами, задающимися формулами:

$$K_{I^+(A, \lambda)}(x_1^0, x_2^0) = \int_0^{+\infty} s^{-i\lambda} \tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \frac{ds}{s},$$

$$K_{I^-(A, \lambda)}(x_1^0, x_2^0) = \int_{-\infty}^0 |s|^{-i\lambda} \tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \frac{ds}{|s|}.$$

Функция $\lambda \mapsto K_{I^+(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$ (соотв. $\lambda \mapsto K_{I^-(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$) является преобразованием Меллина функции $\tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0)$ (соотв. $\tilde{K}_A(0, -s, x_1^0, x_2^0)$) по переменной s на полуоси $(0, +\infty)$. Поскольку $\tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0)$ является гладкой финитной функцией по $s \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ при фиксированных $x_1^0, x_2^0 \in X^0$, по теореме Пэли-Винера функции $K_{I^\pm(A,\lambda)}(x_1^0, x_2^0)$ корректно определены для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ и являются целыми функциями.

Справедливы следующие свойства определяющих операторов:

1. $I(A \circ B) = I(A) \circ I(B)$.
2. $I^+(A \circ B, \lambda) = I^+(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda) + I^-(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda)$.
3. $I^-(A \circ B, \lambda) = I^+(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda) + I^-(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda)$.

Теорема 7. Если $A \in \mathcal{K}(X, X^0)$ и $B \in \mathcal{K}(X, X^0)$, то

$$\text{r-Tr}([A, B]) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\partial_\lambda I^+(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda) + \partial_\lambda I^-(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda)) d\lambda,$$

где знак tr означает след интегрального оператора на X^0 .

Доказательство. По определению имеем:

$$\text{r-Tr}([A, B]) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\substack{X \\ r(p) > \varepsilon}} (k_{AB} - k_{BA})|_\Delta + 2 \ln \varepsilon \int_{X^0} ((k_{AB} - k_{BA})|_\Delta) \Big|_{X^0} \right).$$

Определим отображение $R : X \times X \rightarrow X \times X$ по формуле $R(p_1, p_2) = (p_2, p_1)$. Тогда можно записать

$$\int_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{AB})|_\Delta = \int_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} \left(\int_X k_A(p_1, p_2) k_B(p_2, p_1) \right) = \int_{\substack{X \times X \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2),$$

где последний интеграл следует понимать как интеграл от плотности $k_A R^* k_B$ на $X \times X$ по множеству $\{(p_1, p_2) \in X \times X : r(p_1) > \varepsilon\}$. Аналогично,

$$\int_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA})|_\Delta = \int_{\substack{X \times X \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_B R^* k_A(p_1, p_2) = \int_{\substack{X \times X \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2).$$

Выберем нормальную систему координат с координатами $(x, x^0) \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times X^0$ в некоторой трубчатой окрестности $V = \exp(U)$ подмногообразия X^0 . В частности, $V = \{p \in X : r(p) < \varepsilon_1\}$. Получаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA} - k_{AB})|_\Delta &= \int_{\substack{X \times X \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int_{\substack{X \times X \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) = \\ &= \int_{\substack{V \times V \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int_{\substack{V \times V \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) + \\ &+ \int_{\substack{V \times (X \setminus V) \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int_{\substack{(X \setminus V) \times V \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\substack{(X \setminus V) \times X \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int_{\substack{X \times (X \setminus V) \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2).$$

Легко видеть, что для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$:

$$\int_{\substack{(X \setminus V) \times X \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) = \int_{(X \setminus V) \times X} k_A R^* k_B(p_1, p_2).$$

$$\int_{\substack{X \times (X \setminus V) \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) = \int_{X \times (X \setminus V)} k_A R^* k_B(p_1, p_2).$$

По условию (1) определения 16 существует такое $\varepsilon_2 > 0$, что если $p_1 \notin V$ и $r(p_2) < \varepsilon_2$ или $r(p_1) < \varepsilon_2$ и $p_2 \notin V$, то $k_A(p_1, p_2) = k_B(p_1, p_2) = 0$. Следовательно, для любого $0 < \varepsilon < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

$$\int_{\substack{(X \setminus V) \times V \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) = \int_{(X \setminus V) \times V} k_A R^* k_B(p_1, p_2).$$

$$\int_{\substack{V \times (X \setminus V) \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) = \int_{V \times (X \setminus V)} k_A R^* k_B(p_1, p_2).$$

Следовательно, получаем:

$$\int_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA} - k_{AB})|_{\Delta} = \int_{\substack{V \times V \\ r(p_1) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2) - \int_{\substack{V \times V \\ r(p_2) > \varepsilon}} k_A R^* k_B(p_1, p_2). \quad (13)$$

В окрестности $(V \setminus X^0) \times (V \setminus X^0)$ возьмем локальную систему координат $(x, s, x_1^0, x_2^0) \in \Pi_\varepsilon \times X^0 \times X^0$, задаваемую формулами (3). В этих координатах отображение R записывается в виде

$$R(x, s, x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{x}{s}, \frac{1}{s}, x_2^0, x_1^0 \right).$$

Равенство (13) примет вид

$$\int_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA} - k_{AB})|_{\Delta} = \int_{X^0 \times X^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon|s|} \tilde{K}_A(x, s, x_1^0, x_2^0) \tilde{K}_B \left(\frac{x}{s}, \frac{1}{s}, x_2^0, x_1^0 \right) \frac{dx}{|x|} \right) \frac{ds}{|s|} dx_1^0 dx_2^0,$$

где функции $\tilde{K}_A$ и $\tilde{K}_B$ определяются формулой (4).

Используя условия (2) и (3) определения 16, отсюда нетрудно вывести, что существует предел

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA} - k_{AB})|_{\Delta} &= \\
&= \int_{X^0 \times X^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\varepsilon}^{\varepsilon|s|} \tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \tilde{K}_B\left(0, \frac{1}{s}, x_2^0, x_1^0\right) \frac{dx}{|x|} \right) \frac{ds}{|s|} dx_1^0 dx_2^0 = \\
&= 2 \int_{X^0 \times X^0} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln |s| \tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \tilde{K}_B\left(0, \frac{1}{s}, x_2^0, x_1^0\right) \frac{ds}{|s|} dx_1^0 dx_2^0.
\end{aligned}$$

В частности, отсюда следует, что

$$\int_{X^0} \left((k_{AB} - k_{BA}) \Big|_{\Delta} \right) \Big|_{X^0} = 0.$$

Используя связь преобразования Меллина с преобразованием Фурье и равенство Парсеваля для преобразования Фурье, можно доказать, что, если $f_1, f_2 \in L^2((0, +\infty), \frac{ds}{s})$, то преобразования Меллина $M(f_1), M(f_2)$ принадлежат $L^2(\mathbb{R})$, и имеет место формула

$$\int_0^{+\infty} f_1(s) \overline{f_2(s)} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [M(f_1)](\lambda) \overline{[M(f_2)](\lambda)} d\lambda.$$

Применяя эту формулу в случае, когда

$$f_1(s) = \ln |s| \tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0), \quad f_2(s) = \overline{\tilde{K}_B(0, \frac{1}{s}, x_2^0, x_1^0)}, \quad s > 0,$$

получим, что

$$\int_0^{+\infty} \ln |s| \tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \tilde{K}_B(0, \frac{1}{s}, x_2^0, x_1^0) \frac{ds}{s} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{\lambda} K_{I^+(A, \lambda)}(x_1^0, x_2^0) K_{I^+(B, \lambda)}(x_2^0, x_1^0) d\lambda.$$

Аналогично имеем

$$\int_{-\infty}^0 \ln |s| \tilde{K}_A(0, s, x_1^0, x_2^0) \tilde{K}_B(0, \frac{1}{s}, x_2^0, x_1^0) \frac{ds}{|s|} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{\lambda} K_{I^-(A, \lambda)}(x_1^0, x_2^0) K_{I^-(B, \lambda)}(x_2^0, x_1^0) d\lambda.$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 \text{r-Tr}([A, B]) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\substack{X \\ r(p_1) > \varepsilon}} (k_{BA} - k_{AB})|_{\Delta} = \\
 &= -\frac{1}{\pi i} \int_{X^0 \times X^0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\partial_{\lambda} K_{I^+(A, \lambda)}(x_1^0, x_2^0) K_{I^+(B, \lambda)}(x_2^0, x_1^0) \\
 &\quad + \partial_{\lambda} K_{I^-(A, \lambda)}(x_1^0, x_2^0) K_{I^-(B, \lambda)}(x_2^0, x_1^0)) d\lambda dx_1^0 dx_2^0 = \\
 &= -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(\partial_{\lambda} I^+(A, \lambda) \circ I^+(B, \lambda) + \partial_{\lambda} I^-(A, \lambda) \circ I^-(B, \lambda)) d\lambda.
 \end{aligned}$$

□

А. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5

Пусть $u \in \mathcal{A}_{phg}^{\varepsilon_0}(Y, Y^0, G)$. Необходимо показать, что $f^*u \in \mathcal{A}_{phg}^{\varepsilon}(X, X^0, f^*G)$.

Прежде всего, отметим, что ограничение отображения f на $f^{-1}(Y \setminus Y^0)$ определяет отображение $f : f^{-1}(Y \setminus Y^0) \rightarrow Y \setminus Y^0$. Поскольку u является гладким сечением на $Y \setminus Y^0$, f^*u является гладким на $f^{-1}(Y \setminus Y^0)$, в частности, поскольку $f^{-1}(Y^0) \subset X^0$, на $X \setminus X^0$.

Остается доказать, что сечение f^*u является конормальным в произвольной точке $p \in X^0$. Предположим, для определенности, что точка $p \in X_1 \cap \dots \cap X_{\ell}$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$. Пусть $f(p) = p_0$. Предположим, что $p_0 \in Y_1 \cap \dots \cap Y_{\ell_0}$ и $p_0 \notin Y_{\ell_0+1} \cup \dots \cup Y_{r_0}$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x_1, \dots, x_{\ell}, x^0) \in D_1 \times D_2$ и адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1, \dots, y_{\ell_0}, y^0) \in D_1^0 \times D_2^0$, где $D_1 \subset \mathbb{R}^{\ell}$; $D_2 \subset \mathbb{R}^{m-\ell}$; $D_1^0 \subset \mathbb{R}^{\ell_0}$; $D_2^0 \subset \mathbb{R}^{n-\ell_0}$. Без потери общности, мы можем предполагать, что ограничение расслоения G на заданную окрестность точки p_0 тривиально, следовательно, мы можем отождествить ограничение сечения u на эту окрестность с функцией. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что u — скалярная функция.

Случай $\ell_0 = \ell = 0$ был уже рассмотрен в начале доказательства. В этом случае $p_0 \in Y \setminus Y^0$ и $p \in X \setminus X^0$.

Рассмотрим случай, когда $\ell_0 = 0$ и $\ell > 0$. В этом случае $p_0 \in Y \setminus Y^0$ и $p \in X^0$. Так как $p_0 \in Y \setminus Y^0$, имеют место равенства

$$e_f(X_j, Y_i) = 0; \quad \forall i = 1, \dots, r_0; \quad \forall j = 1, \dots, \ell. \quad (14)$$

Так как $f^*u \in C^{\infty}(f^{-1}(Y \setminus Y^0), f^*G)$, f^*u является гладкой в точке p , поэтому f^*u — конормальная в точке p относительно тривиального индексного семейства, что в силу (14) согласуется с формулой (5).

Дальнейшее доказательство теоремы проведём индукцией по $\ell_0 \geq 1$. Поскольку $f^{-1}(Y^0) \subset X^0$, $\ell > 0$.

База индукции: $\ell_0 = 1$. В этом случае имеем:

$$\begin{aligned}
 e_f(X_j, Y_1) &= 0; \quad \forall j = \ell + 1, \dots, r; \\
 e_f(X_j, Y_i) &= 0; \quad \forall i = 2, \dots, r_0; \quad \forall j = 1, \dots, \ell.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Так как u конормальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}^0$, справедливо разложение:

$$u(y_1, y^0) \sim \sum_{(z, q) \in E_1^0} a_{z, q}(y^0) y_1^z \ln^q |y_1|,$$

где $a_{z, q} \in C^{\infty}(D_2^0)$, $E_1^0 = \mathcal{E}^0(Y_1)$.

Так как f — относительное отображение, в локальных координатах отображение f записывается в виде:

$$f : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \rightarrow D_1^0 \times D_2^0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}, \quad f : (x, x^0) \mapsto (y_1, y^0),$$

где

$$y_1 = b_1(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j}}, \quad y^0 = g(x, x^0), \quad (16)$$

b_1 — гладкая, нигде не обращающаяся в ноль функция на $D_1 \times D_2$ и $g : D_1 \times D_2 \rightarrow D_2^0$ — гладкое отображение.

Пусть N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Обозначим: $u = u_N + r_N$, где

$$u_N(y_1, y^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leq N}} a_{z,q}(y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Соответственно, получаем, что $f^*u = f^*u_N + f^*r_N$. Имеем:

$$\begin{aligned} f^*u_N(x_1, \dots, x_\ell, x^0) &= \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leq N}} (g^*a_{z,q})(x, x^0) b_1^z(x, x^0) x_1^{\gamma_{11}z} \dots x_\ell^{\gamma_{1\ell}z} \times \\ &\quad \times (\ln |b_1(x, x^0)| + \gamma_{11} \ln |x_1| + \dots + \gamma_{1\ell} \ln |x_\ell|)^q. \end{aligned}$$

Так как $g : D_1 \times D_2 \rightarrow D_2^0$ — гладкое отображение и $a_{z,q} \in C^\infty(D_2^0)$, мы имеем $g^*a_{z,q} \in C^\infty(D_1 \times D_2)$. Поэтому f^*u_N можно записать в виде:

$$f^*u_N(x_1, \dots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1^0 \\ z \leq N}} d_{z,q}(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j}z} \ln^q |x_j|,$$

где $d_{z,q} \in C^\infty(D_1 \times D_2)$. Отсюда сразу получается, что f^*u_N конормальна относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, задаваемого формулой (5).

По условию, для любых $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\beta_0 \in \mathbb{Z}_+^{m-1}$ существует такая постоянная C_1 , что:

$$\left| (y_1 \partial_{y_1})^{\alpha_0} \partial_{y^0}^{\beta_0} r_N(y_1, y^0) \right| \leq C_1 |y_1|^{N+1}.$$

Отсюда, используя представление (16), получаем для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^\ell$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{n-\ell}$ существует такая постоянная C_3 , что:

$$\left| (x \partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta f^*r_N \right| \leq C_3 |x_1|^{\gamma_{11}(N+1)}. \quad (17)$$

Пусть N_1 — произвольное натуральное число. Поскольку f^*u_N конормальна в точке p относительно индексного семейства $\mathcal{E}$, справедливо разложение:

$$f^*u_N(x_1, \dots, x_\ell, x^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1 \\ z \leq N_1}} h_{z,q}^N(x_2, \dots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1| + \varrho_{N,N_1},$$

где $h_{z,q}^N$ — конормальные функции относительно индексного семейства $\mathcal{E}' = (\mathcal{E}(X_2), \dots, \mathcal{E}(X_r))$ и ϱ_{N,N_1} удовлетворяет оценкам

$$\left| (x \partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta \varrho_{N,N_1} \right| \leq C_6 |x_2|^{M_2} \dots |x_\ell|^{M_\ell} |x_1|^{N_1+1} \quad (18)$$

При заданном N_1 выберем N таким, чтобы было выполнено неравенство:

$$N_1 + 1 < \gamma_{11}(N + 1). \quad (19)$$

В силу неравенств (17), (18), (19) имеем:

$$\left| (x\partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta (f^* r_N + \varrho_{N,N_1}) \right| \leq C_7 |x_2|^{M_2^0} \dots |x_\ell|^{M_\ell^0} |x_1|^{N_1+1},$$

где $M_j^0 = \min(0, M_j) \quad \forall j = 2, \dots, \ell$. Окончательно получаем, что:

$$f^* u = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1 \\ z \leq N_1}} h_{z,q}^N(x_2, \dots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1| + f^* r_N + \varrho_{N,N_1},$$

откуда следует, что $h_{z,q}^N$ не зависит от N при $N_1 + 1 < \gamma_{11}(N + 1)$. Обозначим $h_{z,q}^N(x_2, \dots, x_\ell, x^0) = h_{z,q}(x_2, \dots, x_\ell, x^0)$. Следовательно:

$$f^* u \sim \sum_{(z,q) \in E_1} h_{z,q}(x_2, \dots, x_\ell, x^0) x_1^z \ln^q |x_1|,$$

и тем самым $f^* u$ является кономальной функцией относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

Шаг индукции. Зафиксируем $\ell > 1$. Предположим, что верно следующее утверждение. Пусть Z, W — гладкие многообразия, Z^0 и W^0 — стратифицированные подмногообразия Z и W соответственно. Пусть задано относительное отображение $h : (Z, Z^0) \rightarrow (W, W^0)$ и произвольное векторное расслоение H над W . Пусть на подмногообразии W^0 задано индексное семейство $\mathcal{F}^0$. Пусть также точка $p \in Z_1 \cap \dots \cap Z_\ell$ и $p \notin Z_{\ell+1} \cup \dots \cup Z_r$. Пусть $h(p) = p_0$. Пусть $p_0 \in W_1 \cap \dots \cap W_{k_0}$ и $p_0 \notin W_{k_0+1} \cup \dots \cup W_{r_0}$, при этом $k_0 < \ell_0$. Пусть u кономальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{F}^0$, тогда $h^* u$ кономальна в точке p относительно индексного семейства $\mathcal{F}$, где каждое индексное множество $\mathcal{F}(Z_j)$ индексного семейства $\mathcal{F}$ на Z^0 имеет вид:

$$\mathcal{F}(Z_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_i e_h(Z_j, W_i) z_i, \sum_i q_i \right) \middle| (z_i, q_i) \in \mathcal{F}^0(W_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

где суммирование ведется по таким $i = 1, \dots, r_0$, для которых $e_f(Z_j, W_i) \neq 0$.

Пусть функция u , отображение f , точки p и p_0 такие, как в формулировке теоремы. Докажем, что $f^* u$ является кономальной функцией в точке p . По условию, имеем:

$$\begin{aligned} e_f(X_j, Y_i) &= 0; \quad \forall i = 1, \dots, \ell_0; \quad \forall j = \ell + 1, \dots, r; \\ e_f(X_j, Y_i) &= 0; \quad \forall i = \ell_0 + 1, \dots, r_0; \quad \forall j = 1, \dots, r. \end{aligned} \tag{20}$$

Так как u кономальна в точке p_0 относительно индексного семейства $\mathcal{E}^0$, существует такая окрестность V точки p_0 , $\varkappa_0(V) = (-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0} \times V_2$, где $V_2 \subset \mathbb{R}^{m-\ell_0}$, что функция u определена и является гладкой на множестве $V \setminus X^0$, и для любого $(y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0) \in (-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0-1} \times V_2$ имеет место асимптотическое разложение при $y_1 \rightarrow 0$:

$$u(y, y^0) \sim \sum_{(z,q) \in E_1^0} a_{z,q}(y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0) y_1^z \ln^q |y_1|,$$

где $E_1^0 = \mathcal{E}^0(Y_1)$, функции $a_{z,q}$ кономальные на $(-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0-1} \times V_2 \subset Z$ относительно индексного семейства $\mathcal{E}'_0$.

Здесь мы рассматриваем многообразие $Z = \mathbb{R}^{\ell_0-1} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}$ с координатами $(y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0)$, где $y_j \in \mathbb{R}$, $j = 2, \dots, \ell_0$, $y^0 \in \mathbb{R}^{m-\ell_0}$, наделенное стратифицированным подмногообразием $Z^0 = \{y_2 = 0\} \cup \dots \cup \{y_{\ell_0} = 0\}$. Индексное семейство $\mathcal{E}'_0$ на Z^0 задается формулой $\mathcal{E}'_0(\{y_j = 0\}) = E_j^0$, где $j = 2, \dots, \ell_0$.

Так как f — относительное отображение, в локальных координатах отображение f записывается в виде:

$$f : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{\ell_0} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}, \quad (x, x^0) \mapsto (y_1, \dots, y_{\ell_0}, y^0),$$

где

$$y_i = b_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}}, \quad i = 1, \dots, \ell_0, \quad y^0 = F(x, x^0),$$

b_i — гладкие, нигде не обращающиеся в ноль на X функции.

Введём отображение

$$g : D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^{\ell} \times \mathbb{R}^{n-\ell} \rightarrow \mathbb{R}^{\ell_0-1} \times \mathbb{R}^{m-\ell_0}, \quad (x, x^0) \mapsto (y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0),$$

где

$$y_i = b_i(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{ij}}, \quad i = 2, \dots, \ell_0, \quad y^0 = F(x, x^0).$$

Заметим, что g является относительным отображением, причём

$$e_g(X_j, Y_i) = e_f(X_j, Y_i); \quad \forall j = 1, \dots, \ell; \quad \forall i = 2, \dots, \ell_0. \quad (21)$$

Пусть N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Обозначим: $u = u_N + r_N$, где

$$u_N(y, y^0) = \sum_{\substack{(z, q) \in E_1^0 \\ z \leq N}} a_{z, q}(y_2, \dots, y_{\ell_0}, y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Соответственно, получаем, что $f^*u = f^*u_N + f^*r_N$. Имеем:

$$\begin{aligned} f^*u_N(x_1, \dots, x_{\ell}, x^0) &= \sum_{\substack{(z, q) \in E_1^0 \\ z \leq N}} (g^*a_{z, q})(x, x^0) b_1^z(x, x^0) x_1^{\gamma_{11}z} \dots x_{\ell}^{\gamma_{1\ell}z} \times \\ &\quad \times (\ln |b_1(x, x^0)| + \gamma_{11} \ln |x_1| + \dots + \gamma_{1\ell} \ln |x_{\ell}|)^q. \end{aligned}$$

Существует такая окрестность U точки p , $\varkappa(U) = (-\delta, \delta)^{\ell} \times U_2$, где окрестность $U_2 \subset \mathbb{R}^{n-\ell}$, что $g(U) \subset V$. Так как g — относительное отображение, $a_{z, q} \in \mathcal{A}_{phg}'((-\varepsilon, \varepsilon)^{\ell_0-1} \times V_2)$, в силу (21) и предположения индукции, получаем, что: $g^*a_{z, q} \in \mathcal{A}_{phg}^{\tilde{\mathcal{E}}}((-\delta, \delta)^{\ell} \times U_2)$, где индексное множество $\tilde{\mathcal{E}}(X_j)$ индексного семейства $\tilde{\mathcal{E}}$ имеет вид:

$$\tilde{\mathcal{E}}(X_j) = \left\{ \left(\eta + \sum_{i=2}^{r_0} e_f(X_j, Y_i) z_i, \sum_{i=2}^{r_0} q_i \right) \mid (z_i, q_i) \in \mathcal{E}^0(Y_i), \eta \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

где суммирование ведётся по таким $i = 2, \dots, r_0$, для которых $e_f(X_j, Y_i) \neq 0$.

Следовательно, f^*u_N можно записать в виде:

$$f^*u_N(x_1, \dots, x_{\ell}, x^0) = \sum_{\substack{(z, q) \in E_1^0 \\ z \leq N}} d_{z, q}(x, x^0) \prod_{j=1}^{\ell} x_j^{\gamma_{1j}z} \ln^q |x_j|,$$

где $d_{z, q} \in \mathcal{A}_{phg}^{\tilde{\mathcal{E}}}((-\delta, \delta)^{\ell} \times U_2)$. Отсюда следует, что f^*u_N — конормальная относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

По условию, найдутся вещественные числа $M_2, \dots, M_{\ell_0}$, такие что для любых $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{\ell_0}$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^{m-\ell_0}$ существует такая постоянная $C = C_{\alpha\beta N}$ такая, что:

$$\left| (y \partial_y)^{\alpha} \partial_{y^0}^{\beta} r_N(y, y^0) \right| \leq C |y_2|^{M_2} \dots |y_{\ell_0}|^{M_{\ell_0}} |y_1|^{N+1}.$$

Отсюда следует, что при $|x_j| < 1$:

$$\begin{aligned} |f^*r_N(x, x^0)| &\leq C_1 |x_2|^{M_2^0 + \gamma_{12}(N+1)} \dots |x_{\ell}|^{M_{\ell}^0 + \gamma_{1\ell}(N+1)} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1) + M_1^0} \\ &\leq C_4 |x_2|^{M_2^0} \dots |x_{\ell}|^{M_{\ell}^0} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1) + M_1^0}. \end{aligned}$$

где

$$M_j^0 = \sum_{i=2}^{\ell_0} \gamma_{ij} M_i, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Аналогичные оценки справедливы для производных:

$$\left| (x \partial_x)^\alpha \partial_{x^0}^\beta f^* r_N \right| \leq C_5 |x_2|^{M_2^0} \dots |x_\ell|^{M_\ell^0} |x_1|^{\gamma_{11}(N+1)+M_1^0}. \quad (22)$$

Аналогично случаю $\ell = 1$, отсюда выводится, что f^*u является конормальной функцией относительно индексного семейства $\mathcal{E}$.

В. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6

Пусть $\mu \in \mathcal{A}_{phg}^\mathcal{E}(X, X^0, f^*G \otimes \Omega_X)$. Покажем, что $f_*\mu$ корректно определена и $f_*\mu \in \mathcal{A}_{phg}^{\mathcal{E}^0}(Y, Y^0, G \otimes \Omega_Y)$.

Пусть $p_0 \notin Y^0$. Покажем, что $f_*\mu$ — гладкая плотность в точке p_0 . В окрестности точки p_0 возьмём локальную систему координат с координатами $y^0 \in D_2^0 \subset \mathbb{R}^m$. Возьмём произвольную точку $p \in X$ такую, что $f(p) = p_0$. Предположим, что $p \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$. Зададим адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$. Так как f — относительное расслоение, в локальных координатах отображение f имеет вид $y^0 = f(x, x^0)$, где $\text{rank} \left(\frac{\partial f}{\partial x^0} \right) = m$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p систему координат, что f имеет вид проекции:

$$y^0 = f(x, x^0) = (x_1^0, \dots, x_m^0), \quad x \in D_1, \quad x^0 \in D_2. \quad (23)$$

В силу компактности X , существует такое конечное семейство окрестностей V_{p_s} , $s = 1, \dots, d$, что $X = (X \setminus f^{-1}(p_0)) \cup \bigcup_{s=1}^d V_{p_s}$. Пусть $\psi_s \in C^\infty(X)$, $s = 0, \dots, d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\text{supp } \psi_0 \subset X \setminus f^{-1}(p_0)$, $\text{supp } \psi_s \subset V_{p_s}$ для $s = 1, \dots, d$, $\psi_s \geq 0$, $\sum_{s=0}^d \psi_s = 1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0 , что $\sum_{s=1}^d \psi_s(m) = 1$ для любого $m \in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и в доказательстве теоремы 5, без потери общности, можно предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X . В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu = \mu(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\text{supp } \varphi \subset U_{p_0}$. Тогда $f^*\varphi \in C^\infty(X)$, причем

$$\langle f_*\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, f^*\varphi \rangle = \int_{f^{-1}(U_{p_0})} \mu(m) \varphi(f(m)).$$

Используя разбиение единицы и локальные координаты, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi \rangle = \sum_{s=1}^d \int_{D_1 \times D_2} \psi_s(x, x^0) \mu(x, x^0) \varphi(f(x, x^0)) \frac{dx}{x} dx^0. \quad (24)$$

Принимая во внимание формулу (23), формула переписывается в виде

$$\langle f_*\mu, \varphi \rangle = \int_{U_{p_0}} F(y^0) \varphi(y^0) dy^0, \quad (25)$$

где F задается формулой

$$F(y^0) = \sum_{s=1}^d \int_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell-m}} \psi_s(x, y^0, x_{m+1}^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \times \\ \times \mu(x, y^0, x_{m+1}^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \frac{dx}{x} dx_{m+1}^0 \dots dx_{n-\ell}^0. \quad (26)$$

Так как $p \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$ и $f(p) \notin Y^0$, имеем $e_f(X_j, Y_i) = 0$, если $j = 1, \dots, \ell$, $i = 1, \dots, r_0$. Отсюда получаем, что $\inf \mathcal{E}(X_j) > 0$ для любого $j = 1, \dots, \ell$. Следовательно, справедлива оценка

$$|\mu(x, y^0, x_{m+1}^0, \dots, x_{n-\ell}^0)| < C |x_1|^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot |x_\ell|^{\varepsilon_\ell},$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell$ — некоторые положительные числа. Отсюда следует, что интеграл, стоящий в правой части (26), сходится равномерно, и, тем самым, функция F является гладкой в окрестности точки p_0 . Согласно (25), ограничение плотности $f_*\mu$ на U_{p_0} корректно определено и совпадает с гладкой плотностью $F(y^0)|dy^0|$. Поэтому $f_*\mu$ корректно определена как гладкая плотность на $Y \setminus Y^0$.

Пусть $p_0 \in Y^0$. Предположим, что $p_0 \in Y_1 \cup \dots \cup Y_{\ell_0}$ и $p_0 \notin Y_{\ell_0+1} \cup \dots \cup Y_{r_0}$, $\ell_0 \neq 0$. Докажем, что $f_*\mu$ — кономальная в точке p_0 .

Случай $\ell_0 = 1$. Возьмём адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1, y^0) \in D_1^0 \times D_2^0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$. Возьмём точку $p \in X$ такую, что $f(p) = p_0$. Предположим, что $p \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$. В данных системах координат отображение f записывается в виде: $(y_1, y^0) = f(x, x^0)$, где: $y_1 = b_1(x, x^0)x_1^{\gamma_{11}} \dots x_\ell^{\gamma_{1\ell}}$, функция b_1 — гладкая и нигде не обращается в ноль; $y^0 = g(x, x^0)$. Так как $f(p) = p_0$, хотя бы одно из чисел $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1\ell}$ больше нуля. Пусть для определённости $\gamma_{11} > 0$. Тогда, без потери общности, можно считать, что $b_1(x, x^0) \equiv 1$, так как в окрестности нуля можно сделать замену переменных:

$$\tilde{x}_1 = b_1(x, x^0)^{\frac{1}{\gamma_{11}}} x_1; \quad \tilde{x}_j = x_j, \quad \forall j = 2, \dots, \ell; \quad \tilde{x}^0 = x^0.$$

Якобиан данной замены обозначим через $w(x, x^0)$. Легко видеть, что $w(0, x^0) \neq 0$ для любого $x^0 \in D_2$.

По условию (4) определения 13 имеем $\text{rank} \left(\frac{\partial g}{\partial x^0} \right) = m - 1$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p систему координат, что g имеет вид проекции:

$$y^0 = g(x, x^0) = (x_1^0, \dots, x_{m-1}^0), \quad x \in D_1, \quad x^0 \in D_2.$$

В силу компактности X , существует такое конечное семейство окрестностей V_{p_s} , $s = 1, \dots, d$, что $X = (X \setminus f^{-1}(p_0)) \cup \bigcup_{s=1}^d V_{p_s}$. Пусть $\psi_s \in C^\infty(X)$, $s = 0, \dots, d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\text{supp } \psi_0 \subset X \setminus f^{-1}(p_0)$, $\text{supp } \psi_s \subset V_{p_s}$ для $s = 1, \dots, d$, $\psi_s \geq 0$, $\sum_{s=0}^d \psi_s = 1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0 , что $\sum_{s=1}^d \psi_s(m) = 1$ для любого $m \in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и выше, будем предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X . В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu = \mu(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\text{supp } \varphi \subset U_{p_0}$. Тогда $f^*\varphi \in C^\infty(X)$, причем

$$\langle f_*\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, f^*\varphi \rangle = \int_{f^{-1}(U_{p_0})} \mu(m) \varphi(f(m)).$$

Используя разбиение единицы и локальные координаты, получаем

$$\langle f_*\mu, \varphi \rangle = \sum_{s=1}^d \int_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \psi_s(x, x^0) \mu(x, x^0) \varphi(x_1^{\gamma_{11}} \dots x_\ell^{\gamma_{1\ell}}, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0) \frac{dx}{x} dx^0. \quad (27)$$

Так как $\ell_0 = 1$, по определению 11 хотя бы одно из чисел $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1\ell}$ больше нуля. Пусть для определённости числа $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1k_1} > 0$, $\gamma_{1,k_1+1} = \dots = \gamma_{1\ell} = 0$, где $k_1 \leq \ell$. Обозначим: $\mu_s(x, x^0) = \frac{1}{\gamma_{11}} \psi_s(x, x^0) \mu(x, x^0)$. Равенство (27) записывается в виде

$$\langle f_*\mu, \varphi \rangle = \gamma_{11} \sum_{s=1}^d \int_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(x, x^0) \varphi(x_1^{\gamma_{11}} x_2^{\gamma_{12}} \dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, x_1^0, \dots, x_{m-1}^0) \frac{dx}{x} dx^0.$$

Сделав замену переменных

$$y_1 = x_1^{\gamma_{11}} \dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, \quad t_j = x_j \quad \forall j = 2, \dots, \ell; \quad y^0 = (x_1^0, \dots, x_{m-1}^0)$$

в интеграле, получаем

$$\begin{aligned} \langle f_*\mu, \varphi \rangle = \sum_{s=1}^d \int_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \times \\ \times \varphi(y_1, y^0) \frac{dy_1}{y_1} \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_\ell}{t_\ell} dy^0 dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого (y_1, y^0) из некоторой окрестности точки p_0 плотность $f_*\mu$ задается формулой

$$f_*\mu = \sum_{s=1}^d \nu_s(y_1, y^0) \left| \frac{dy_1}{y_1} dy^0 \right|,$$

где функции $\nu_s(y_1, y^0)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \nu_s(y_1, y^0) = \int_{\mathbb{R}^{\ell-1} \times \mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \\ \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_\ell}{t_\ell} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0, \end{aligned}$$

Так как при $j = k_1 + 1, \dots, \ell$ выполнено условие $\inf E_j > 0$, интеграл в последней формуле сходится, следовательно, ν_s — гладкая функция при $y_1 \neq 0$.

Зафиксируем s . Докажем конормальность функции ν_s при $y_1 = 0$ относительно индексного множества E_1^0 . Запишем

$$\nu_s(y_1, y^0) = \int_{\mathbb{R}^{\ell-k_1}} \mu_s^1(y_1, t_{k_1+1}, \dots, t_\ell, y^0) \frac{dt_{k_1+1}}{t_{k_1+1}} \dots \frac{dt_\ell}{t_\ell}, \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_s^1(y_1, t_{k_1+1}, \dots, t_\ell, y^0) = \\ = \int_{\mathbb{R}^{k_1-1} \times \mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{-\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{-\frac{\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0. \end{aligned} \quad (29)$$

Доказательство теоремы 6 при $\ell_0 = 1$ завершается при помощи следующего утверждения.

Предложение 2. Если функция $\mu_s(x_1, \dots, x_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0)$ финитна и конормальна по переменным $(x_1, \dots, x_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1, \dots, E_\ell)$ и $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1k_1} > 0$, то функция μ_s^1 , задаваемая формулой (29), конормальна по переменным $(y_1, t_{k_1+1}, \dots, t_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0, E_{k_1+1}, \dots, E_\ell)$, где

$$E_1^0 = \overline{\bigcup_{j=1, \dots, k_1} \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{1j}}, q \right) : (z, q) \in E_j \right\}}.$$

Если предложение 2 доказано, то, применяя утверждение теоремы 6 к функции μ_s^1 в случае $\ell_0 = 0$ и принимая во внимание, что при $j = k_1 + 1, \dots, \ell$ выполнено условие $\inf E_j > 0$, из формулы (28) получаем, что функция ν_s является конормальной при $y_1 = 0$, что завершает доказательство теоремы 6 при $\ell_0 = 1$.

Доказательство предложения 2. Так как при $y_1 \neq 0$ подынтегральное выражение — гладкая, финитная функция, интеграл абсолютно сходится, и μ_s^1 является гладкой функцией.

Докажем конормальность функции μ_s^1 при $y_1 = 0$.

Случай $k_1 = \ell = 1$. В этом случае функция μ_s^1 имеет вид:

$$\mu_s^1(y_1, y^0) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0. \quad (30)$$

Так как μ_s — конормальная функция при $x_1 = 0$ относительно индексного множества E_1 , мы имеем:

$$\mu_s(x_1, x^0) \sim \sum_{(z,q) \in E_1} a_{z,q}(x^0) x_1^z \ln^q |x_1|,$$

где $a_{z,q}$ — гладкие функции. Обозначим $\mu_s = \mu_N + r_N$, где

$$\mu_N(x_1, x^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1 \\ z \leq N}} a_{z,q}(x^0) x_1^z \ln^q |x_1|,$$

N — натуральное число, которое будет выбрано позже. Согласно формуле (30), функция μ_s^1 представляется в виде $\mu_s^1 = \nu_N + \tilde{r}_N$, где

$$\nu_N(y_1, y^0) = \frac{1}{\gamma_{11}^q} \sum_{\substack{(z,q) \in E_1 \\ z \leq N}} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} a_{z,q}(y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) y_1^{\frac{z}{\gamma_{11}}} \ln^q |y_1| dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0$$

и

$$\tilde{r}_N(y_1, y^0) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} r_N(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}}, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0.$$

Имеем

$$\nu_N(y_1, y^0) = \sum_{\substack{(z,q) \in E_1 \\ z \leq N}} h_{z,q}(y^0) y_1^{\frac{z}{\gamma_{11}}} \ln^q |y_1|,$$

где

$$h_{z,q}(y^0) = \frac{1}{\gamma_{11}^q} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} a_{z,q}(y^0, x_m^0, \dots, x_{n-1}^0) dx_m^0 \dots dx_{n-1}^0.$$

Поскольку $a_{z,q}$ являются гладкими финитными функциями, функция ν_N конормальна при $y_1 = 0$ относительно индексного множества $E_1^0 = \{(\frac{z}{\gamma_{11}}, q) : (z, q) \in E_1\}$.

По определению, для любого $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мульти-индекса β_0 найдётся постоянная C_1 , такая что

$$\left| \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_0} \partial_{x_0}^{\beta_0} r_N(x_1, x^0) \right| < C_1 |x_1|^{N+1}.$$

Поэтому, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мульти-индекса β найдётся постоянная C_2 , такая что

$$\left| \left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{\alpha} \partial_{y_0}^{\beta} \tilde{r}_N(y_1, y^0) \right| < C_2 |y_1|^{\frac{N+1}{\gamma_{11}}}.$$

Отсюда немедленно получаем, что

$$\mu_s^1(y_1, y^0) \sim \sum_{(z,q) \in E_1^0} h_{z,q}(y^0) y_1^z \ln^q |y_1|.$$

Рассмотрим случай $k_1 = \ell = 2$. В этом случае функция μ_s^1 имеет вид:

$$\mu_s^1(y_1, y^0) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m-1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-2}^0) \frac{dt}{t} dx_m^0 \dots dx_{n-2}^0. \quad (31)$$

Так как функция $\mu_s(x_1, x_2, x^0)$ конормальна в точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1, E_2) , мы имеем:

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) \sim \sum_{(z_1, q_1) \in E_1} a_{z_1, q_1}(x_2, x^0) x_1^{z_1} \ln^{q_1} |x_1|,$$

где $a_{z_1, q_1}(x_2, x^0)$ — конормальные функции при $x_2 = 0$ относительно индексного множества E_2 . По определению, для любого натурального N_1 имеет место представление

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) = \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leq N_1}} a_{z_1, q_1}(x_2, x^0) x_1^{z_1} \ln^{q_1} |x_1| + r_{N_1}(x_1, x_2, x^0).$$

Функция $a_{z_1, q_1}(x_2, x^0)$ допускает асимптотическое разложение

$$a_{z_1, q_1} \sim \sum_{(z_2, q_2) \in E_2} b_{z_1, q_1, z_2, q_2}(x^0) x_2^{z_2} \ln^{q_2} |x_2|,$$

b_{z_1, q_1, z_2, q_2} — гладкие функции. Поэтому для любого натурального N_2 имеет место представление

$$a_{z_1, q_1}(x_2, x^0) = a_{z_1 q_1 N_2}(x_2, x^0) + r_{z_1 q_1 N_2}(x_2, x^0),$$

где

$$a_{z_1 q_1 N_2} = \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leq N_2}} b_{z_1, q_1, z_2, q_2}(x^0) x_2^{z_2} \ln^{q_2} |x_2|.$$

Таким образом, получаем представление

$$\mu_s(x_1, x_2, x^0) = \mu_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) + r_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0),$$

где

$$\mu_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) = \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leq N_1}} \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leq N_2}} b_{z_1, q_1, z_2, q_2}(x^0) x_2^{z_2} x_1^{z_1} \ln^{q_2} |x_2| \ln^{q_1} |x_1|,$$

$$r_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) = r_{N_1}(x_1, x_2, x^0) + \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leq N_1}} r_{z_1 q_1 N_2}(x_2, x^0) x_1^{z_1} \ln^{q_1} |x_1|,$$

N_1, N_2 — натуральные числа, которые будут выбраны позже.

По условию существует M_1 такое, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1 такая, что:

$$\left| (x_1 \partial_{x_1})^{\alpha_1} (x_2 \partial_{x_2})^{\alpha_2} \partial_{x^0}^{\beta_2} r_{N_1}(x_1, x_2, x^0) \right| < C_1 |x_1|^{M_1} |x_2|^{N_2+1}.$$

Более того, для любого $\alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_2 , такая что

$$\left| (x_2 \partial_{x_2})^{\alpha_2} \partial_{x^0}^{\beta_2} r_{z_1 q_1 N_2}(x_2, x^0) \right| < C_2 |x_2|^{N_2+1}.$$

Отсюда следует, что существует $\tilde{M}_1$ такое, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1 , такая что

$$\left| (x_1 \partial_{x_1})^{\alpha_1} (x_2 \partial_{x_2})^{\alpha_2} \partial_{x^0}^{\beta_2} r_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) \right| < C_1 |x_1|^{\tilde{M}_1} |x_2|^{N_2+1}. \quad (32)$$

Учитывая тот факт, что $\mu_s(x_1, x_2, x^0) = 0$ при $|x_1| > \varepsilon$ или $|x_2| > \varepsilon$, согласно (31), получаем представление

$$\mu_s^1(y_1, y^0) = \nu_{N_1 N_2}(y_1, y^0) + \tilde{r}_{N_1 N_2}(y_1, y^0),$$

где

$$\begin{aligned} \nu_{N_1 N_2}(y_1, y^0) = & \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leq N_1}} \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leq N_2}} \int_{\mathbb{R}^{n-m-1}} \left(\int_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}} \varepsilon - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}^{\varepsilon} b_{z_1, q_1, z_2, q_2}(y^0, x_m^0, \dots, x_{n-2}^0) \right. \\ & \left. t^{z_2 - \frac{z_1 \gamma_{12}}{\gamma_{11}}} y_1^{\frac{z_1}{\gamma_{11}}} \ln^{q_2} |t| \left(\gamma_{11} \ln |y_1| - \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11}} \ln |t| \right)^{q_1} \frac{dt}{t} \right) dx_m^0 \dots dx_{n-2}^0. \end{aligned}$$

$$\tilde{r}_{N_1 N_2}(y_1, y^0) = \int_{\mathbb{R}^{n-m-1}} \left(\int_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}} \varepsilon - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}^{\varepsilon} r_{N_1 N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-2}^0) \frac{dt}{t} \right) dx_m^0 \dots dx_{n-2}^0.$$

Вычисляя явно интеграл по t , можно показать, что функция $\nu_{N_1 N_2}(y_1, y^0)$ записывается в виде:

$$\begin{aligned} \nu_{N_1 N_2}(y_1, y^0) = & \sum_{\substack{(z_1, q_1) \in E_1 \\ z_1 \leq N_1}} d_{z_1, q_1}^1(y^0) y_1^{\frac{z_1}{\gamma_{11}}} \ln^{q_1} |y_1| + \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leq N_2}} d_{z_2, q_2}^2(y^0) y_1^{\frac{z_2}{\gamma_{12}}} \ln^{q_2} |y_1| + \\ & + \sum d_{z_1, q_1, z_2, q_2}^3(y^0) y_1^{\frac{z_2}{\gamma_{12}}} \ln^{q_1+q_2+1} |y_1|, \end{aligned}$$

где третья сумма берется по всем наборам $(z_1, q_1) \in E_1, z_1 \leq N_1, (z_2, q_2) \in E_2, z_2 \leq N_2$ таким, что $\frac{z_1}{\gamma_{11}} = \frac{z_2}{\gamma_{12}}$.

Оценим $\tilde{r}_{N_1 N_2}$. Разбив интеграл по t в сумму двух интегралов, получаем

$$\tilde{r}_{N_1 N_2}(y_1, y^0) = \tilde{r}_{N_1 N_2}^1(y_1, y^0) + \tilde{r}_{N_1 N_2}^2(y_1, y^0),$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{r}_{N_1 N_2}^1(y_1, y^0) &= \int_{\mathbb{R}^{n-m-1}} \left(\int_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{12}}} \varepsilon - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}}}^{y_1^{\frac{1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}}}} r_{N_1 N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-2}^0) \frac{dt}{t} \right) dx_m^0 \dots dx_{n-2}^0. \\ \tilde{r}_{N_1 N_2}^2(y_1, y^0) &= \int_{\mathbb{R}^{n-m-1}} \left(\int_{y_1^{\frac{1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}}}}^{\varepsilon} r_{N_1 N_2}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-2}^0) \frac{dt}{t} \right) dx_m^0 \dots dx_{n-2}^0.\end{aligned}$$

Используя (32), получаем оценку

$$|\tilde{r}_{N_1 N_2}^1(y_1, y^0)| < C \left(|y_1|^{\frac{\tilde{M}_1 + N_2 + 1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_2 + 1}{\gamma_{12}}} \right).$$

Чтобы оценить $\tilde{r}_{N_1 N_2}^2$, воспользуемся аналогичным представлением

$$r_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) = \tilde{r}_{N_2}(x_1, x_2, x^0) + \sum_{\substack{(z_2, q_2) \in E_2 \\ z_2 \leq N_2}} \tilde{r}_{z_2 q_2 N_1}(x_1, x^0) x_2^{z_2} \ln^{q_2} |x_2|,$$

откуда следует, что существует $\tilde{M}_2$ такое, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1 , такая что

$$\left| (x_1 \partial_{x_1})^{\alpha_1} (x_2 \partial_{x_2})^{\alpha_2} \partial_{x^0}^{\beta_2} r_{N_1 N_2}(x_1, x_2, x^0) \right| \leq C_1 |x_1|^{N_1 + 1} |x_2|^{\tilde{M}_2}. \quad (33)$$

Используя (33), получаем оценку

$$|\tilde{r}_{N_1 N_2}^2(y_1, y^0)| < C \left(|y_1|^{\frac{\tilde{M}_2 + N_1 + 1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_1 + 1}{\gamma_{12}}} \right).$$

Таким образом, имеем

$$|\tilde{r}_{N_1 N_2}(y_1, y^0)| < C \left(|y_1|^{\frac{\tilde{M}_1 + N_2 + 1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_2 + 1}{\gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{\tilde{M}_2 + N_1 + 1}{\gamma_{11} + \gamma_{12}}} + |y_1|^{\frac{N_1 + 1}{\gamma_{12}}} \right).$$

Отсюда легко следует кономальность функции $\mu_s^1(y_1, y^0)$ при $y_1 = 0$ относительно индексного множества

$$E_1^0 = \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{11}}, q \right) : (z, q) \in E_1 \right\} \overline{\cup} \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{12}}, q \right) : (z, q) \in E_2 \right\}.$$

Рассмотрим случай $k_1 = 2, \ell > k$. Сначала предположим, что $k_1 = 2, \ell = 3$. В этом случае функция μ_s^1 имеет вид:

$$\mu_s^1(y_1, t_3, y^0) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m-2}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t_2, t_3, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-3}^0) \frac{dt_2}{t_2} dx_m^0 \dots dx_{n-3}^0. \quad (34)$$

Так как функция $\mu_s(x_1, x_2, x_3, x^0)$ кономальна в точке $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1, E_2, E_3) , мы имеем:

$$\mu_s(x_1, x_2, x_3, x^0) \sim \sum_{(z_3, q_3) \in E_3} a_{z_3, q_3}(x_1, x_2, x^0) x_3^{z_3} \ln^{q_3} |x_3|,$$

где $a_{z_3, q_3}(x_1, x_2, x^0)$ — кономальные функции в точке $(x_1, x_2) = (0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1, E_2) . По определению, для любого натурального N имеет место представление

$$\mu_s(x_1, x_2, x_3, x^0) = \sum_{\substack{(z_3, q_3) \in E_3 \\ z_3 \leq N}} a_{z_3, q_3}(x_1, x_2, x^0) x_3^{z_3} \ln^{q_3} |x_3| + r_N(x_1, x_2, x_3, x^0).$$

Согласно формуле (34), функция μ_s^1 представляется в виде $\mu_s^1 = \nu_N + \tilde{r}_N$, где

$$\nu_N(y_1, t_3, y^0) = \sum_{\substack{(z_3, q_3) \in E_3 \\ z_3 \leq N}} b_{z_3, q_3}(y_1, y^0) t_3^{z_3} \ln^{q_3} |t_3|,$$

где

$$b_{z_3, q_3}(y_1, y^0) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m-2}} a_{z_3, q_3}(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t_2, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-3}^0) \frac{dt_2}{t_2} dx_m^0 \dots dx_{n-3}^0.$$

и

$$\tilde{r}_N(y_1, t_3, y^0) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-m-2}} r_N(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}}, t_2, t_3, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-3}^0) \frac{dt_2}{t_2} dx_m^0 \dots dx_{n-3}^0.$$

Согласно предложению 2 в случае $k_1 = \ell = 2$, функции $b_{z_3, q_3}(y_1, y^0)$ являются кономальными в точке $y_1 = 0$ относительно индексного множества E_1^0 . Поэтому, функция $\nu_N(y_1, t_3, y^0)$ является кономальной в точке $(y_1, t_3) = (0, 0)$ относительно индексного множества (E_1^0, E_3) .

По определению существуют такие M_1 и M_2 , что для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β_2 найдётся постоянная C_1 , такая что

$$\left| (x_1 \partial_{x_1})^{\alpha_1} (x_2 \partial_{x_2})^{\alpha_2} (x_3 \partial_{x_3})^{\alpha_3} \partial_{x_0}^{\beta_2} r_N(x_1, x_2, x_3, x^0) \right| < C_1 |x_1|^{M_1} |x_2|^{M_2} |x_3|^{N+1}.$$

Используя эти оценки, можно показать, что существует такая постоянная M , что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_+$ и для любого мультииндекса β найдётся постоянная C_1 , такая что

$$\left| (y_1 \partial_{y_1})^{\alpha_1} (t_3 \partial_{t_3})^{\alpha_2} \partial_{y_0}^{\beta} \tilde{r}_N(y_1, t_3, y^0) \right| < C_1 |y_1|^M |t_3|^{N+1}.$$

Это завершает доказательство предложения 2 в случае $k_1 = 2, \ell = 3$.

Случай $k_1 = 2$ и произвольного $\ell > k$ доказывается аналогичным образом индукцией по ℓ .

Доказательство предложения 2 при произвольных k_1 и $\ell \geq k_1$ завершается при помощи индукции по k_1 .

Предположим, что утверждение предложения 2 верно при любом $k_1 < k$, при любом $\ell \geq k_1$ и для любой функции μ_s . Докажем утверждения предложения 2 при $k_1 = k$, при любом $\ell \geq k_1$ и для любой функции μ_s .

Начнем с рассмотрения случая $k_1 = \ell = k$. В этом случае представим функцию μ_s^1 , задаваемую формулой (29), в следующем виде

$$\mu_s^1(y_1, y^0) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\mu}(y_1 t_k^{-\gamma_{1k}}, t_k, y^0) \frac{dt_k}{t_k},$$

где

$$\begin{aligned} & \tilde{\mu}(z_1, t_k, y^0) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-2} \times \mathbb{R}^{n-m-k+1}} \mu_s(z_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k-1}^{\frac{-\gamma_{1, k-1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_k, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-k}^0) \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_{k-1}}{t_{k-1}} dx_m^0 \dots dx_{n-k}^0. \end{aligned}$$

Из утверждения предложения 2 в случае, когда $k_1 = k - 1, \ell = k$ следует, что функция $\tilde{\mu}(z_1, t_k)$ конормальна по (z_1, t_k) относительно индексного семейства $(\tilde{E}_1^0, E_k)$, где

$$\tilde{E}_1^0 = \overline{\bigcup_{j=1, \dots, k-1} \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{1j}}, q \right) : (z, q) \in E_j \right\}}.$$

Применяя утверждение предложения 2 в случае, когда $k_1 = \ell = 2$, получаем, что функция $\nu_s(y_1, y^0)$ конормальна по переменной y_1 относительно индексного семейства

$$\tilde{E}_1^0 \overline{\bigcup \left\{ \left(\frac{z}{\gamma_{1k}}, q \right) : (z, q) \in E_k \right\}} = E_1^0.$$

Случай $k_1 = k$ и произвольного $\ell > k_1$ доказывается аналогично как выше индукцией по ℓ . Доказательство предложения 2 закончено. $\square$

Докажем теорему 6 в случае $\ell_0 = 2$. Возьмём адаптированную в точке p_0 систему координат с координатами $(y_1, y_2, y^0) \in D_1^0 \times D_2^0 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{m-2}$. Возьмём точку $p \in X$ такую, что $f(p) = p_0$. Предположим, что $p \in X_1 \cap \dots \cap X_\ell$ и $p \notin X_{\ell+1} \cup \dots \cup X_r$. Выберем адаптированную в точке p систему координат с координатами $(x, x^0) \in D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}$. По условию без потери общности можно предполагать, что в данных системах координат отображение f записывается в виде: $(y_1, y_2, y^0) = f(x, x^0)$, где $y_1 = b_1(x, x^0)x_1^{\gamma_{11}} \dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}$, $y_2 = b_2(x, x^0)x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \dots x_{k_2}^{\gamma_{2k_2}}$; функции b_1 и b_2 — гладкие, нигде не обращаются в ноль; числа $\gamma_{11}, \dots, \gamma_{1k_1}, \gamma_{2,k_1+1}, \dots, \gamma_{2k_2} > 0, k_1 < k_2 \leq \ell; y^0 = g(x, x^0)$. Как и в случае $\ell_0 = 1$, не ограничивая общность, можно положить, что $b_1(x, x^0) \equiv b_2(x, x^0) \equiv 1$.

По условию (4) определения 13 имеем $\text{rank} \left(\frac{\partial g}{\partial x^0} \right) = m - 2$. Следовательно, можно выбрать такую адаптированную в точке p_0 систему координат, что g имеет вид проекции:

$$g(x, x^0) = (x_1^0, \dots, x_{m-2}^0), \quad x \in D_1, \quad x^0 \in D_2.$$

В силу компактности X существует такое конечное семейство окрестностей $V_{p_s}, s = 1, \dots, d$, что $X = (X \setminus f^{-1}(p_0)) \cup \bigcup_{s=1}^d V_{p_s}$. Пусть $\psi_s \in C^\infty(X), s = 0, \dots, d$ — гладкое разбиение единицы, подчиненное данному покрытию: $\text{supp } \psi_0 \subset X \setminus f^{-1}(p_0), \text{supp } \psi_s \subset V_{p_s}$ для $s = 1, \dots, d, \psi_s \geq 0, \sum_{s=0}^d \psi_s = 1$. Существует такая окрестность U_{p_0} точки p_0 , что $\sum_{s=1}^d \psi_s(m) = 1$ для любого $m \in f^{-1}(U_{p_0})$.

Как и выше, будем предполагать, что расслоение G тривиально и μ — плотность на X . В координатной окрестности V_{p_s} плотность μ записывается в виде

$$\mu = \mu(x, x^0) \left| \frac{dx}{x} dx^0 \right|.$$

Возьмём $\varphi \in C_0^\infty(Y)$, такую что $\text{supp } \varphi \subset U_{p_0}$. Обозначая

$$\mu_s(x, x^0) = \frac{1}{\gamma_{11}\gamma_{2,k_1+1}} \psi_s(x, x^0) \mu(x, x^0),$$

получаем:

$$\begin{aligned} \langle f_* \mu, \varphi \rangle &= \gamma_{11} \gamma_{2,k_1+1} \sum_{s=1}^d \int_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(x, x^0) \times \\ &\quad \times \varphi(x_1^{\gamma_{11}} \dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}, x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \dots x_{k_2}^{\gamma_{2k_2}}, x_1^0, \dots, x_{m-2}^0) \frac{dx}{x} dx^0. \end{aligned}$$

Сделав замену переменных

$$y_1 = x_1^{\gamma_{11}} \dots x_{k_1}^{\gamma_{1k_1}}; \quad y_2 = x_{k_1+1}^{\gamma_{2,k_1+1}} \dots x_{k_2}^{\gamma_{2k_2}}; \quad y^0 = (x_1^0, \dots, x_{m-2}^0);$$

$$t_j = x_j \quad \forall j = 2, \dots, k_1, k_1 + 2, \dots, \ell;$$

в интеграле, получаем

$$\begin{aligned} \langle f_*\mu, \varphi \rangle = & \sum_{s=1}^d \int_{\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^{n-\ell}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{\frac{-\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1}, \\ & y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{\frac{-\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_{k_2}^{\frac{-\gamma_{2k_2}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \varphi(y_1, y_2, y^0) \\ & \frac{dy_1}{y_1} \frac{dy_2}{y_2} \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}} \frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}} \dots \frac{dt_\ell}{t_\ell} dy^0 dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого (y_1, y_2, y^0) плотность $f_*\mu$ задаётся формулой

$$f_*\mu = \sum_{s=1}^d \nu_s(y_1, y_2, y^0) \left| \frac{dy_1}{y_1} \frac{dy_2}{y_2} dy^0 \right|,$$

где функции $\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \nu_s(y_1, y_2, y^0) = & \int_{\mathbb{R}^{\ell-2} \times \mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{\frac{-\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1}, \\ & y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{\frac{-\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_{k_2}^{\frac{-\gamma_{2k_2}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \\ & \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}} \frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}} \dots \frac{dt_\ell}{t_\ell} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0. \end{aligned}$$

Так как при $j = k_2 + 1, \dots, \ell$ выполнено условие $\inf E_j > 0$, интеграл в последней формуле сходится, следовательно, $\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ — гладкая функция при $y_1 y_2 \neq 0$.

Докажем конормальность функции $\nu_s(y_1, y_2, y_0)$ в точке $(0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1^0, E_2^0) . Запишем функцию $\nu_s(y_1, y_2, y_0)$ в виде:

$$\nu_s(y_1, y_2, y^0) = \int_{\mathbb{R}^{\ell-k_2}} \chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0) \frac{dt_{k_2+1}}{t_{k_2+1}} \dots \frac{dt_\ell}{t_\ell},$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0) = \\ = \int_{\mathbb{R}^{k_2-k_1-1}} \chi \left(y_1, y_2^{\frac{1}{\gamma_{2,k_1+1}}} t_{k_1+2}^{\frac{-\gamma_{2,k_1+2}}{\gamma_{2,k_1+1}}} \dots t_\ell^{\frac{-\gamma_{2\ell}}{\gamma_{2,k_1+1}}}, t_{k_1+2}, \dots, t_\ell, y^0 \right) \frac{dt_{k_1+2}}{t_{k_1+2}} \dots \frac{dt_{k_2}}{t_{k_2}}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \chi(y_1, \tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell, y^0) = & \int_{\mathbb{R}^{k_1-1} \times \mathbb{R}^{n-m-\ell+1}} \mu_s(y_1^{\frac{1}{\gamma_{11}}} t_2^{\frac{-\gamma_{12}}{\gamma_{11}}} \dots t_{k_1}^{\frac{-\gamma_{1k_1}}{\gamma_{11}}}, t_2, \dots, t_{k_1}, \\ & \tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell, y^0, x_m^0, \dots, x_{n-\ell}^0) \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_{k_1}}{t_{k_1}} dx_m^0 \dots dx_{n-\ell}^0. \end{aligned}$$

Из предложения 2 следует, что функция $\chi(y_1, \tau_{k_1+1}, \tau_{k_1+2}, \dots, \tau_\ell, y^0)$ является конормальной по переменным $(y_1, \tau_{k_1+1}, \dots, \tau_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0, E_{k_1+1}, \dots, E_\ell)$ и функция $\chi_1(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell, y^0)$ является конормальной по переменным $(y_1, y_2, t_{k_2+1}, \dots, t_\ell)$ относительно индексного семейства $(E_1^0, E_2^0, E_{k_2+1}, \dots, E_\ell)$. Конормальность функции

$\nu_s(y_1, y_2, y^0)$ в точке $(y_1, y_2) = (0, 0)$ относительно индексного семейства (E_1^0, E_2^0) следует из утверждения теоремы 6 в случае $\ell_0 = 0$, принимая во внимание условие $\inf E_j > 0$, $\forall j = k_2 + 1, \dots, \ell$. Тем самым, случай $\ell_0 = 2$ доказан.

Доказательство теоремы 6 в случае произвольного $\ell_0 > 2$ проводится аналогичным образом индукцией по ℓ_0 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.Álvarez López, Yu.A. Kordyukov *Distributional Betti numbers of transitive foliations of codimension one*. In: *Foliations: Geometry and Dynamics*. (Warsaw, 2000). P. 159–183. World Sci. Publishing. River Edge, NJ, 2002.
2. Соболев С.Л. *Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений* // Матем. сб., 2(44):3. 1937. С. 465–499.
3. Стернин Б.Ю. *Эллиптические и параболические задачи на многообразиях с границей, состоящей из компонент различной размерности* // Тр. ММО, 15, УРСС. М. 1966. С. 38–108.
4. Стернин Б.Ю., Шаталов В.Е. *Относительная эллиптическая теория и задача Соболева* // Матем. сб. 187:11. 1996. С. 115–144.
5. Стернин Б.Ю. *Относительная эллиптическая теория и проблема С.Л. Соболева* // Доклады АН СССР. 230:2. 1976. С. 287–290.
6. Стернин Б.Ю. *Проблемы типа С.Л. Соболева в случае подмногообразий с многомерными особенностями* // Доклады АН СССР. 189. 1969. С. 732–735.
7. Стернин Б.Ю. *Эллиптические морфизмы (оснащения эллиптических операторов) для подмногообразий с особенностями* // Доклады АН СССР. 200. 1971. С. 45–48.
8. Стернин Б.Ю. *Эллиптическая теория на компактных многообразиях с особенностями*. МИЭМ, М. 1974. 108 с.
9. Стернин Б.Ю., Савин А.Ю. *Эллиптические трансляторы на многообразиях с многомерными особенностями* // Дифференциальные уравнения. 49:4. 2013. С. 513–527.
10. Стернин Б.Ю., Савин А.Ю. *Индекс задач Соболева на многообразиях с многомерными особенностями* // Дифференциальные уравнения. 50:2. 2014. С. 229–241.
11. R.B. Melrose *Pseudodifferential operators, corners and singular limits* // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990) P. 217–234, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991.
12. R.B. Melrose *Calculus of conormal distributions on manifolds with corners* // Internat. Math. Res. Notices 1992. no. 3. P. 51–61.
13. R.B. Melrose *The Atiyah-Patodi-Singer index theorem. Research Notes in Mathematics, 4*. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1993.
14. Назайкинский В.Е., Савин А.Ю., Стернин Б.Ю. *Некоммутативная геометрия и классификация эллиптических операторов* // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН. 29. РУДН. М. 2008. С. 131–164.
15. D. Grieser *Basics of the b-calculus* // Approaches to singular analysis (Berlin, 1999). P. 30–84. Oper. Theory Adv. Appl. 125. Birkhauser. Basel. 2001.
16. V.E. Nazaikinskii, A.Yu. Savin, B.W. Schulze, B.Yu. Sternin *Elliptic theory on singular manifolds*. Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL. 2006.

Юрий Аркадьевич Кордюков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: yurikor@matem.anrb.ru

Виктор Александрович Павленко,
ФГБОУ ВПО Башкирский государственный аграрный университет,
ул. 50-летия Октября, 4,
450080, г. Уфа, Россия
E-mail: PVA100186@mail.ru