ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 3 (2014). С. 28-34.

УДК 517.9

# АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

**А.В. КАРПИКОВА**

**Аннотация.** Для исследования спектральных свойств оператора Штурма—Лиувилля, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = -y'' - vy$ с комплексным потенциалом $v$, и определяемого периодическими краевыми условиями $y(0) = y(2\pi)$, $y'(0) = y'(2\pi)$, используется метод подобных операторов. Получены результаты об асимптотике спектра оператора.

**Ключевые слова:** метод подобных операторов, оператор Штурма—Лиувилля, спектр оператора, асимптотика спектра.

**Mathematics Subject Classification:** 34L20, 34L40, 47E05

## 1. Введение

Пусть $L_2[0, 2\pi]$ — гильбертово пространство комплексных измеримых на $[0, 2\pi]$ и суммируемых с квадратом модуля функций со скалярным произведением вида:

$$(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} x(\tau)\overline{y(\tau)}d\tau, \qquad x, y \in L_2[0, 2\pi].$$

Через $W_2^2[0, 2\pi]$ обозначим пространство Соболева $\{y \in L_2[0, 2\pi] : y'$ абсолютно непрерывна и $y'' \in L_2[0, 2\pi]\}$.

Рассматривается одномерный оператор Штурма-Лиувилля $L : D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$, который определяется дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' - vy,$$

с областью определения $y \in D(L) = \{y \in W_2^2[0, 2\pi] : y(0) = y(2\pi), y'(0) = y'(2\pi)\}$, задаваемой периодическими краевыми условиями. Предполагается, что потенциал $v$ принадлежит $L_2[0, 2\pi]$ и $v(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{ikt}$, $t \in [0, 2\pi]$, – его ряд Фурье.

Оператор $L$ представим в виде $L = A - B$, где оператор $A : D(A) = D(L) \subset L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi]$ задаётся дифференциальным выражением

$$l_0(y) = -y'',$$

а оператор $B$ — оператор умножения на потенциал $v$. Он корректно определён, в силу условия $D(B) \supset D(A)$. Оператор $B$ будет играть роль возмущения.

Оператор $A$ является самосопряженным с компактной резольвентой. Его спектр $\sigma(A)$ имеет вид: $\sigma(A) = \{n^2, n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, $E_n^0 = Span\{e_n^{(1)}, e_n^{(2)}\}$ – собственное подпространство для собственного значения $n^2$ , $n \neq 0$ , где $e_n^{(1)}(t) = e_n(t) = e^{int}, e_n^{(2)}(t) = e_{-n}(t) = e^{-int}$; $E_0^0 = \{\alpha\}, \alpha \in \mathbb{C}$.

---

A.V. Karpikova, Asymptotics for eigenvalues of Sturm-Liouville operator with periodic boundary conditions.

© Карпикова А.В. 2014.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований(гранты 13-01-00378, 14-01-31196).

*Поступила 15 февраля 2014 г.*

В данной статье для исследования спектральных свойств оператора Штурма-Лиувилля используется метод подобных операторов, разработанный в [1]–[6]. Суть этого метода состоит в преобразовании подобия исследуемого оператора в оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. Таким образом существенно упрощается изучение исследуемого оператора $L$.

Одним из основных результатов статьи является теорема 1, в которой получена уточненная асимптотика собственных значений оператора $L$. В доказательстве этой теоремы используются следующие двусторонние последовательности комплексных чисел:

$$c_{n,n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{n-j}\frac{v_{j-n}}{j^2-n^2}, \qquad c_{-n,-n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{-(n+j)}\frac{v_{j+n}}{j^2-n^2},$$

$$c_{-n,n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{-(n+j)}\frac{v_{j-n}}{j^2-n^2}, \qquad c_{n,-n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{n-j}\frac{v_{j+n}}{j^2-n^2}, n\in\mathbb{Z}.$$

Отметим, что $c_{n,n} = c_{-n,-n}$.

**Теорема 1.** *Существует число $m\in\mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора $L$ представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left( \bigcup_{n\geq m+1} \sigma_n \right), \tag{1}$$

*где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}$, $n\geq m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенствами*

$$\lambda_n^{\pm} = n^2 + v_0 - \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq0}} \frac{v_k v_{-k}}{k} \pm \sqrt{v_{2n}v_{-2n}} + \frac{\beta_n^{\pm}}{\sqrt{n}}, \qquad n\geq m+1, \tag{2}$$

*где последовательность $\beta_n^{\pm}$ обладает свойством $\sum\limits_{n\geq m+1} |\beta_n^{\pm}|^{\frac{4}{3}} < \infty$.*

Отметим, что в статье В.Ткаченко [7; теорема 3.6] была приведена асимптотика спектра оператора $L$ вида:

$$\lambda_n^{\pm} = n^2 + v_0 + \alpha_n^{\pm}, \qquad n\to\infty, \tag{3}$$

где $v_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(t)dt$— среднее потенциала $v$, а $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |\alpha_n^{\pm}|^2 < \infty$.

Асимптотика спектра из теоремы 1 является более точной по порядку, по сравнению с асимптотикой в формуле (3), так как выписывается еще одно вычислимое приближение, за счет которого повышается порядок остатка.

В случае вещественного потенциала $v$, асимптотика спектра оператора $L$ приводилась в монографии Марченко В.А. [8; теорема 1.5.2]. Если потенциал $v$ вещественный, то имеет место

**Теорема 2.** *Существует число $m\in\mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора $L$ представим в виде*

$$\sigma(L) = \sigma_{(m)} \bigcup \left( \bigcup_{n\geq m+1} \sigma_n \right), \tag{4}$$

*где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества $\sigma_n = \{\lambda_n^+, \lambda_n^-\}$, $n\geq m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенствами*

$$\lambda_n^{\pm} = n^2 + v_0 - \frac{1}{2n}\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq0}} \frac{|v_k|^2}{k} \pm |v_{2n}| + \frac{\beta_n^{\pm}}{n}, \qquad n\geq m+1, \tag{5}$$

*где последовательность $\beta_n^{\pm}$ обладает свойством $\sum\limits_{n\geq m+1} |\beta_n^{\pm}| < \infty$.*

## 2. Предварительные преобразования подобия

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство. Через $\mathrm{End}\mathcal{H}$ обозначим банахову алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Компактный оператор $X \in \mathrm{End}\mathcal{H}$ называется оператором Гильберта–Шмидта (см.[9], с.138), если след самосопряжённого оператора $XX^*$ конечен, т.е. $tr(XX^*) < \infty$. Совокупность операторов Гильберта–Шмидта образует двусторонний идеал $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$(см.[9], с.138) из алгебры $\mathrm{End}\mathcal{H}$. Идеал $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $< X, Y >= tr(X, Y^*)$, $X, Y \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$.

Символом $\|X\|_2$ обозначается норма Гильберта–Шмидта оператора $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$, т.е. $\|X\|_2^2 = tr(XX^*)$. Отметим, что если $e_1, e_2, ..., e_n, ...$— произвольный ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, то оператор $X \in \mathrm{End}\mathcal{H}$ является оператором Штурма-Лиувилля тогда и только тогда, когда $\|X\|_2^2 = \sum\limits_{i,j\geq 1} |(Xe_j, e_i)|^2 < \infty$ (см.[9], с.138). Здесь можно ввести идеал $\mathfrak{S}_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов.

**Определение 1.** *Два линейных оператора* $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, *называются* подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор* $U \in End\mathcal{H}$ *такой, что* $UD(\mathcal{A}_2) = D(\mathcal{A}_1)$ *и* $\mathcal{A}_1 Ux = U\mathcal{A}_2 x$ ,$x \in D(\mathcal{A}_2)$. *Оператор* $U$ *называется* оператором преобразования *оператора* $\mathcal{A}_1$ *в* $\mathcal{A}_2$.

Важно отметить, что подобные операторы имеют одинаковый спектр. Этот факт постоянно используется здесь при приводимых преобразованиях подобия.

Вернемся к рассмотрению дифференциального оператора $L = A - B$. Далее рассматривается гильбертово пространство $\mathcal{H} = L_2[0, 2\pi]$ и система ортопроекторов $P_n : L_2[0, 2\pi] \to L_2[0, 2\pi], n \in \mathbb{Z}_+$, вида:

$$P_n x = (x, e_n)e_n + (x, e_{-n})e_{-n}, n \in \mathbb{N}, \qquad P_0 x = (x, e_0)e_0. \tag{6}$$

Отметим, что $AP_n = \lambda_n P_n, n \geq 0$.

Символом $\Gamma B$ обозначим оператор Гильберта–Шмидта

$$((\Gamma B)x)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} G(s, \tau)x(\tau)d\tau, \qquad x \in \mathcal{H},$$

где

$$G(s, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{4}(-u(\frac{s+\tau}{2}) + 2(\frac{s-\tau}{2\pi})u_2(\frac{s+\tau}{2})), & \tau \leqslant s, \\ \frac{1}{4}(u(\frac{s+\tau}{2}) + 2(\frac{s-\tau}{2\pi})u_2(\frac{s+\tau}{2})), & \tau > s, \end{cases} \tag{7}$$

$$u(s) = u_1(s) + u_2(s), u_1(s) = \sum_{\substack{k\in 2\mathbb{Z}+1 \\ k\neq 0}} \frac{v_k}{ik}e^{iks}, u_2(s) = \sum_{\substack{k\in 2\mathbb{Z} \\ k\neq 0}} \frac{v_k}{ik}e^{iks}.$$

В дальнейшем, делается предположение $v_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(t)dt = 0$, которое не является ограничительным, так как сдвиг потенциала на постоянную сдвигает спектр на ту же постоянную и не меняет его собственных функций. Однако в формулировке теорем об асимптотике собственных значений эта постоянная учитывается.

В лемме 1 используется наряду с $\Gamma B$ оператор $JB \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ вида

$$((JB)x)(s) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v(s+\tau)x(\tau)d\tau, \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Введем в рассмотрение операторы, где используется проектор $P_k$, определенный равенством (6),

$$J_k B = JB - J(P_{(k)}BP_{(k)}) + P_{(k)}BP_{(k)}, \tag{8}$$

$$\Gamma_k B = \Gamma B - \Gamma(P_{(k)}BP_{(k)}), \tag{9}$$

где $P_{(k)} = \sum\limits_{|j| \leqslant k} P_j$.

Ясно, что $J_0 B = JB, \Gamma_0 B = \Gamma B$. Из определения операторов $J_k B$ и $\Gamma_k B$ получаем следующие представления

$$J_k B = JB - P_{(k)} JBP_{(k)} + P_{(k)} BP_{(k)}, \qquad \Gamma_k B = \Gamma B - (P_{(k)} \Gamma BP_{(k)}), \tag{10}$$

из которых следует, что $J_k B, \Gamma_k B \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ для всех $k \geq 0$.

Доказательство следующей леммы фактически дублирует доказательство леммы 7 статьи [6].

**Лемма 1.** *Операторы $\Gamma B, JB, B$ удовлетворяют следующим условиям:*
*(**a**)$\Gamma B \in End\mathcal{H}$ и $\|\Gamma B\| < 1$; (**b**)$(\Gamma B)D(A) \subset D(A)$; (**c**)$B\Gamma B, (\Gamma B)JB \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$; (**d**) $A(\Gamma B)x - (\Gamma B)Ax = Bx - (JB)x$, $x \in D(A)$; (**e**) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$, такое, что $\|B(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\| < \varepsilon$.*

Доказательство следующей теоремы проводится аналогичным образом, что и в теореме 2 статьи [6].

**Теорема 3.** *Если число $k \in \mathbb{Z}_+$ таково, что*

$$\|\Gamma_k B\|_2 < 1, \tag{11}$$

*то оператор $L = A - B$, где $A = L_0, B$ — оператор умножения на потенциал $v$, подобен оператору*

$$\widetilde{L} = L_0 - \widetilde{B},$$

*где*

$$\widetilde{B} = \widetilde{B}_k = J_k B + (I + \Gamma_k B)^{-1}(B\Gamma_k B - (\Gamma_k B)J_k B),$$

*причем имеет место равенство*

$$(A - B)(I + \Gamma_k B) = (I + \Gamma_k B)(A - \widetilde{B}). \tag{12}$$

*Операторы $J_k B, \Gamma_k B, B\Gamma_k B, (\Gamma_k B)(J_k B), \widetilde{B}, \widetilde{B}_k$ являются операторами Гильберта–Шмидта из $\mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$, оператор $\widetilde{B}$ из (12) представим в виде*

$$\widetilde{B} = JB + B\Gamma B - (\Gamma B)JB + C \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi]), \tag{13}$$

*где оператор $C$ принадлежит идеалу $\mathfrak{S}_1(L_{2,\pi})$ ядерных операторов [9], определенных на $L_2[0, 2\pi]$.*

Полученный в теореме 3 результат позволяет свести изучение оператора $L = A - B$ к изучению оператора $A - \widetilde{B}$, где оператор $\widetilde{B}$, есть оператор Гильберта–Шмидта. Таким образом, $\sigma(A - B) = \sigma(A - \widetilde{B})$.

Для формулировки теоремы 4 введем в рассмотрение трансформаторы (т.е. линейные операторы в пространстве линейных операторов; терминология М.Г.Крейна) $J, \Gamma : \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi]) \to \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$ со следующими свойствами:

1) $J$– проектор, $\|J\| = 1$, и он представим в виде безусловно сходящегося в равномерной операторной топологии ряда

$$JX = \sum_{n=0}^{\infty} P_n X P_n = X_0, \qquad X \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi]). \tag{14}$$

2) Трансформатор $\Gamma$ на любом операторе $X \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$ корректно определен равенством (см. [6])

$$\Gamma X = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i \neq j}} \frac{P_i X P_j}{\lambda_i - \lambda_j}. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что

$$\|JX\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|P_n X P_n\| \leqslant \|X\|_2^2, \qquad \|\Gamma X\|_2^2 = \sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i\neq j}} \frac{\|P_i X P_j\|_2^2}{|\lambda_i - \lambda_j|^2} \leqslant \gamma_0^{-1}\|X\|_2^2,$$

где $\gamma_0 = \inf\limits_{\substack{i\neq j\\ i,j\geq m}} |\lambda_i - \lambda_j|$.

Далее рассмотрим последовательности трансформаторов $(J_m), (\Gamma_m), m \in \mathbb{Z}_+$, определенные равенствами

$$J_m X = P_{(m)} X P_{(m)} + \sum_{|k|\geq m+1} P_k X P_k = J(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)},$$

$$\Gamma_m X = \Gamma(X - P_{(m)} X P_{(m)}),$$

где $X \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Отметим, что $J_m$– проектор. Поскольку он является самосопряженным оператором, то $\|J_m\| = 1$. Трансформатор $\Gamma_m$ является антисамосопряженным оператором, т.е. $\Gamma_m^* = -\Gamma_m$ и $\|\Gamma_m\| = \gamma_0^{-1} = (\inf\limits_{\substack{i\neq j\\ i,j\geq m}} |\lambda_i - \lambda_j|)^{-1}$.

Отметим, что при доказательстве теоремы 1 будут использоваться следующие свойства трансформаторов $J_k, \Gamma_k$

$$J_k\left((\Gamma_k X)(J_k Y)\right) = 0, \qquad J_k\left((\Gamma_k X) J_k(Y\Gamma_k X)\right) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{16}$$

где $X, Y \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$.

В дальнейшем используется компактный самосопряженный оператор $A_0$ вида:

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} P_k + P_0.$$

**Теорема 4** ([1],[3],[6])**.** *Для любого числа $k \in \mathbb{Z}_+$, для которого выполнено неравенство*

$$\|\widetilde{B}\|_2 = \|\widetilde{B}_k\|_2 < \frac{2k+3}{4}, \tag{17}$$

*оператор $A - \widetilde{B}$ подобен оператору $A - J_k\widetilde{X}$, где оператор $\widetilde{X}$ является решением (нелинейного) уравнения*

$$X = \widetilde{B}\Gamma_k X - (\Gamma_k X)(J_k \widetilde{B}) - (\Gamma_k X) J_k(\widetilde{B}\Gamma_k X) + \widetilde{B} = \Phi(X), \tag{18}$$

*рассматриваемого в $\mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$. Решение $\widetilde{X}$ представимо в виде $X_0 A_0^{-\frac{1}{2}}$, где $X_0 \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$ и его можно найти методом простых итераций. Преобразование подобия оператора $A - \widetilde{B}$ в оператор $A - J_k\widetilde{X}$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma_k\widetilde{X} \in \mathrm{End}(L_2[0, 2\pi])$.*

## 3. Доказательство теоремы 1

Дальнейший выбор числа $k \in \mathbb{Z}_+$ обусловлен выполнением условия (17) теоремы 4, обозначения которой мы далее используем.

Применяя трансформатор $J_k$ к обеим частям уравнения (18), а также используя свойство (16) трансформаторов $J_k, \Gamma_k$, получаем:

$$\begin{aligned} J_k\widetilde{X} &= J_k(\widetilde{B}\Gamma_k\widetilde{X}) + J_k\widetilde{B} = J_k\widetilde{B} + J_k(\widetilde{B}\Gamma_k\widetilde{B}) + J_k(\widetilde{B}\Gamma_k(\widetilde{X} - \widetilde{B})) = \\ &= J_k\widetilde{B} + J_k(\widetilde{B}\Gamma\widetilde{B}) + K = J_k B + J_k(B\Gamma B) + T_1 = JB + J(B\Gamma B) + T_2, \end{aligned}$$

где операторы $K, T_1, T_2$ представимы в виде $K = K_0 A_0^{-\frac{1}{2}}, T_1 = T_{1,0} A_0^{-\frac{1}{2}}, T_2 = T_{2,0} A_0^{-\frac{1}{2}}$ и операторы $K_0, T_{1,0}, T_{2,0}$ принадлежат идеалу ядерных операторов $\mathfrak{S}_1(L_2[0, 2\pi])$. Ясно, что

$J_kT_j = T_j, j = 0, 1$. При получении этих равенств также использовались следующие свойства: произведение двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором, а операторы $J_kX - JX, \Gamma_kX - \Gamma X, X \in \mathfrak{S}_2(L_2[0, 2\pi])$ , $k \geq 0$, являются операторами конечного ранга.

Таким образом, применяя теоремы 3 и 4 к рассматриваемому оператору $L = A - B$, получаем, что оператор $A - B$ подобен оператору $A - (JB + J(B\Gamma B) + T_1) = A - B_0$ и $\sigma(A - B) = \sigma(A - B_0)$, где $B_0 = JB + J(B\Gamma B) + T_1, T_1 \in \mathfrak{S}_1(L_2[0, 2\pi])$.

Матрица сужения $B_n$ оператора $P_nB_0P_n$ на $\mathcal{H}_n$ в базисе $e_n, e_{-n}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & v_{2n} \\ v_{-2n} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{n,n} & c_{n,-n} \\ c_{-n,n} & c_{-n,-n} \end{pmatrix} + \frac{1}{n} \begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) \\ f_3(n) & f_4(n) \end{pmatrix},$$

где $f_1, f_2, f_3, f_4$ – суммируемые последовательности.

Собственные значения $\mu_n^{\pm}$ оператора $B_n$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu_n^{\pm} = c_{n,n} + \frac{f_1(n) + f_4(n)}{2n} \pm \\ \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{f_1(n) - f_4(n)}{n}\right)^2 + 4\left(v_{2n} + c_{n,-n} + \frac{f_2(n)}{n}\right)\left(v_{-2n} + c_{-n,n} + \frac{f_3(n)}{n}\right)} = \\ = c_{n,n} + \frac{f_1(n) + f_4(n)}{2n} \pm \frac{\sqrt{4(v_{2n} + c_{n,-n})(v_{-2n} + c_{-n,n})}}{2} \pm \\ \pm (\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{f_1(n) - f_4(n)}{n}\right)^2 + 4\left(v_{2n} + c_{n,-n} + \frac{f_2(n)}{n}\right)\left(v_{-2n} + c_{-n,n} + \frac{f_3(n)}{n}\right)} - \\ - \frac{\sqrt{4(v_{2n} + c_{n,-n})(v_{-2n} + c_{-n,n})}}{2}). \end{aligned}$$

Тогда $\mu_n^{\pm} = c_{n,n} \pm \sqrt{\widetilde{\omega}_n} + \beta_n^{\pm}$, где $\beta_n^{\pm} = \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}, \sum\limits_{|n| \geq m+1} |\alpha(n)|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Последовательность $c_{n,n}, n = 0, 1, ...,$ можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} c_{n,n} = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ |j| \neq |n|}} v_{n-j} \frac{v_{j-n}}{j^2 - n^2} = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{v_k v_{-k}}{k(k + 2n)} = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{v_k v_{-k}}{k} - \\ - \frac{1}{2n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0 \\ k \neq -2n}} \frac{v_k v_{-k}}{k + 2n} = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{v_k v_{-k}}{k} - \frac{1}{2n} \frac{v_{2n} v_{-2n}}{-2n} - \\ - \frac{1}{2n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -2n}} \frac{v_k v_{-k}}{k + 2n} = \frac{1}{2n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \frac{v_k v_{-k}}{k} + \omega_n' + \frac{\alpha_n'}{n^2}, \end{aligned}$$

где $\omega_n' = -\frac{1}{2n} \sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -2n}} \frac{v_k v_{-k}}{k + 2n}, (\alpha_n')$ – некоторая суммируемая последовательность.

Докажем, что $\sum\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq -2n}} \left|\frac{v_k v_{-k}}{k+2n}\right|^2 < \infty$. Для этого рассмотрим свертку

$$(\omega * \gamma)(n) = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \omega(k)\gamma(n - k), n \in \mathbb{Z},$$

последовательности

$\omega : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, w(k) = v_k v_{-k}, k \in \mathbb{Z}$, со свойством $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\omega(k)| < \infty$, с последовательностью $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\gamma(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0 \end{cases}$ со свойством $\sum\limits_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0}} |\gamma(k)|^2 < \infty$. Тогда последовательность $\omega_n' = -(\omega * \gamma)(-2n), n \in \mathbb{Z}$, как свертка суммируемой последовательности и последовательности, суммируемой с квадратом, является последовательностью, суммируемой с квадратом.

Таким образом получаем доказываемое представление (2).

В случае вещественного потенциала $v$ последовательность $\alpha$ будет суммируемой, и поэтому верно утверждение теоремы 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ линейных операторов.* Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та. 1987. 165 с.
2. Баскаков А.Г. *Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов* // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 1. С. 21–39.
3. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных неквазипериодических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 3–32.
4. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями* // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 8. С. 1424–1433.
5. Баскаков А.Г. *Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений* // Известия АН СССР. сер. матем. 1986. Т. 50. № 3. С. 435–457.
6. Баскаков А.Г. *Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом* // Известия РАН. сер. матем. 2011. Т. 75. № 3. С. 3–28.
7. F. Gesztesy, V. Tkachenko *A criterion for Hill operators to be spectral operators of scalar type* // Journal d'Analyse Mathe'matique. 2009. P. 287–353.
8. Марченко В.А. *Операторы Штурма Лиувилля и их приложения.* М.: Наука. 1977. 330 с.
9. Гохберг И.Ц. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* М.: Наука. 1965. 448 с.

Алина Вячеславовна Карпикова,
Воронежский государственный университет,
ул. Университетская площадь, 1,
394000, г. Воронеж, Россия
E-mail: KarpikovaAV@mail.ru