ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 2 (2014). С. 104-112.

УДК 517.956

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСНОВНЫХ СЦЕНАРИЕВ БИФУРКАЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

М.Г. ЮМАГУЛОВ, Д.А. ЯКШИБАЕВА

Аннотация. В работе исследуются основные сценарии бифуркаций функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа с периодической правой частью и нелинейных автономных уравнений с последействием. Используется операторный метод исследования многопараметрических бифуркаций, приводящий к новым достаточным признакам бифуркаций и позволяющий получить приближенные формулы для возникающих решений. В качестве приложения рассмотрены задачи о точках бифуркации для модификаций уравнений Дуффинга и Хатчинсона-Райта.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, системы с запаздыванием, динамические системы, бифуркация, операторный метод, функционализация параметра, асимптотические формулы.

Mathematics Subject Classification: 34C23, 34K05, 34K13, 34K18

1. Постановка задачи

В статье рассматриваются системы функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^\sigma [d_\tau R(t,\tau)]\, x(t-\tau) + \int_0^\sigma [d_\tau Q(t,\tau)]\, \Phi[x(t-\tau)] + F\left(t, x_t\right), \tag{1}$$

где $x \in R^N$. Здесь $\sigma > 0$, $R(t,\tau)$, $Q(t,\tau)$ — это $(N \times N)$ матрицы, элементы которых определены при $-\infty < t < \infty$, $0 \leqslant \tau \leqslant \sigma$, являются функциями ограниченной вариации по τ и непрерывны в среднем по t в следующем смысле: для любого t выполняются равенства

$$\lim_{t'\to t} \int_0^\sigma \|R(t',\tau) - R(t,\tau)\| d\tau = 0, \ \ \lim_{t'\to t} \int_0^\sigma \|Q(t',\tau) - Q(t,\tau)\| d\tau = 0;$$

функции $R(t,\tau)$ и $Q(t,\tau)$ являются T-периодическими по t: $R(t+T,\tau) = R(t,\tau)$, $Q(t+T,\tau) = Q(t,\tau)$. В (1) используется обозначение $x_t = \big(x(t-\phi_1), ..., x(t-\phi_s)\big)$, $0 \leqslant \phi_1 < \phi_2 < ... < \phi_s \leqslant \sigma$, s — натуральное число. Нелинейность $F(t,x_t)$ не представляется в виде некоторого интеграла $\int_0^\sigma [d_\tau A(t,\tau)]\, \Psi[x(t-\tau)]$. Пусть $y = (y_1, y_2, ..., y_s)$; предполагается, что вектор-функции $\Phi(x)$, $F(t,y)$ непрерывно дифференцируемы по совокупности

M.G. Yumagulov, D.A. Yakshibaeva, Study of main scenarios of bifurcation for functional differential time-delay equations.

Работа поддержана Минобрнауки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и частично РФФИ (гранты 11-01-97009 и 12-01-00567-а).

Поступила 25 ноября 2013 г.

переменных и равномерно по t удовлетворяют условиям

$$\| \Phi(x) \| = O\left(\| x \|^2\right), \| x \| \to 0, \quad \| F(t,y) \| = O\left(\| y \|^2\right), \| y \| \to 0;$$

$F(t+T, y) = F(t, y)$. Здесь и всюду ниже через $\| \cdot \|$ обозначается евклидова норма векторов и матриц в пространствах R^N или R^s; интегралы в (1) понимаются в смысле Лебега-Стилтьеса.

К уравнениям вида (1) могут быть сведены многие представляющие интерес уравнения с последействием (см., например, [1]–[3]). В частности, если $R(t,\tau)$, $Q(t,\tau)$ и $F(t, x_t)$ не зависят от t, получим автономное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_0^\sigma [d_\tau R(\tau)]\, x(t-\tau) + \int\limits_0^\sigma [d_\tau Q(\tau)]\, \Phi[x(t-\tau)] + F(x_t)\,. \tag{2}$$

Системы (1) и (2) имеют решение $x \equiv 0$. Важной характеристикой этого решения является свойство гиперболичности. Приведем соответствующие определения.

Рассмотрим сначала уравнение (1). Обозначим через V матрицу монодромии линейной системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_0^\sigma [d_\tau R(t,\tau)]\, x(t-\tau).$$

Решение $x = 0$ системы (1) называют (см., например, [3]) гиперболической точкой равновесия, если матрица V не имеет собственных значений равных 1 по модулю. В противном случае $x = 0$ называют негиперболической точкой равновесия системы (1).

Рассмотрим теперь автономное уравнение (2). Определим характеристический квазимногочлен

$$L(p) = \det\left(\int\limits_0^\sigma d_\tau R(\tau) e^{-p\tau} - pI\right), \tag{3}$$

отвечающий линейной части уравнения (2). Решение $x = 0$ называют гиперболической точкой равновесия системы (2), если квазимногочлен (3) не имеет чисто мнимых нулей. В противном случае $x = 0$ называют негиперболической точкой равновесия системы (2).

В приложениях системы (1) и (2) обычно зависят от параметров, изменение которых могут изменять свойства гиперболичности, что приводит к различным бифуркациям в окрестности точки $x = 0$. Исследованию бифуркаций в функционально-дифференциальных уравнениях запаздывающего типа посвящено большое число работ (см., например, [4]–[8]), в которых предложены эффективные подходы, позволяющие получить признаки бифуркаций, приближенное представление решений, исследовать их устойчивость. Эти подходы используют метод нормальных форм Пуанкаре, теорему о центральном многообразии, топологические методы и др.

В настоящей работе исследуются задачи о бифуркации периодических решений уравнений (1) и (2). Для решения этих задач предлагается развитие операторного метода исследования многопараметрических бифуркаций [9]. Указанный метод позволяет установить достаточные условия бифуркации и получить асимптотические формулы для бифурцирующих решений. В отличие от обычно применяемых методов, предлагаемый алгоритм не требует построения нормальных форм и интегральных многообразий, что позволяет во многих случаях упростить приближенное исследование бифуркаций и получить простые признаки бифуркаций непосредственно в терминах исходной задачи.

2. Сценарии бифуркаций для неавтономных систем

Рассмотрим сначала систему вида (1), зависящую от скалярного или векторного параметра θ и с T-периодической по t правой частью:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_0^{\sigma(\theta)} [d_\tau R(\theta, t, \tau)]\, x(t-\tau) + \int\limits_0^{\sigma(\theta)} [d_\tau Q(\theta, t, \tau)]\, \Phi[\theta, x(t-\tau)] + F\left(\theta, t, x_t\right), \tag{4}$$

где $\sigma(\theta)$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $0 < \sigma(\theta) < T$.

Значение $\theta = \theta_0$ называют точкой бифуркации в окрестности решения $x = 0$, если $x = 0$ является негиперболической точкой равновесия уравнения (4) при $\theta = \theta_0$.

Обозначим через $V(\theta)$ матрицу монодромии линеаризованной системы (4). Ниже рассмотрим ситуации, когда матрица монодромии $V(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1 или пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi p i/q}$, где $0 \leqslant \dfrac{p}{q} \leqslant \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{p}{q}$ – рациональная несократимая дробь. В обоих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы $V(\theta_0)$ не равны по модулю 1. В зависимости от этих случаев возможны различные сценарии локальных бифуркаций в окрестности состояния равновесия системы (4).

2.1. Бифуркации вынужденных колебаний.

2.1. Бифуркации вынужденных колебаний. В случае, когда $V(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1 и остальные собственные значения по модулю не равны 1, коразмерность бифуркации равна одному. В этом случае естественно считать, что параметр θ является скалярным. Здесь основным сценарием бифуркации является возникновение (при переходе параметра θ через θ_0) у системы (4) в окрестности точки равновесия $x = 0$ ненулевых T-периодических колебаний малой амплитуды. Данная бифуркация соответствует следующему понятию.

Значение θ_0 параметра θ называют точкой бифуркации вынужденных колебаний системы (4), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\theta = \theta(\varepsilon)$, при котором система (4) имеет ненулевое T-периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем $\theta(\varepsilon) \to \theta_0$ и $\max\limits_t \|x(t,\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Приведем достаточный признак бифуркации вынужденных колебаний. С этой целью по функции $x = x(t)$, заданной на отрезке $[0, T]$, и числу τ, $0 \le \tau \le T$, определим функцию $u(t)$ и оператор $E\left(\frac{\tau}{T}\right)$ равенствами

$$u(t) = x\left(T \cdot t\right) \quad \text{и} \quad E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s) = \begin{cases} u\left(s - \frac{\tau}{T} + 1\right), 0 \leqslant s < \frac{\tau}{T}, \\ u\left(s - \frac{\tau}{T}\right), \frac{\tau}{T} \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$B(\theta) u(t) = u(1) + T \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{\sigma(\theta)} d_\tau R(\theta, Ts, \tau) E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s) \right) ds, \tag{5}$$

который действует и непрерывен в пространстве $L_2[0, 1]$ с плотной областью определения $C[0, 1]$.

Лемма 1. Если $V(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1, то оператор $B(\theta_0) : L_2 \to L_2$ имеет простое собственное значение 1.

Доказывается лемма несложными вычислениями.

Пусть $e(t)$ – собственная функция оператора $B(\theta_0)$, соответствующая собственному значению 1. Сопряженный оператор $B^*(\theta_0) : L_2 \to L_2$ также имеет собственное значение 1, которому отвечает собственная функция $e^*(t)$. Функции $e(t)$ и $e^*(t)$ выберем в соответствии с условием $(e,e^*)\neq 0$; здесь и всюду ниже $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в L_2.

Теорема 1. Пусть $V(\theta_0)$ имеет простое собственное значение 1, и выполнено соотношение

$$(B'_\theta(\theta_0)e,e^*)\neq 0; \tag{6}$$

тогда значение θ_0 параметра θ является точкой бифуркации вынужденных колебаний уравнения (4).

Здесь B'_θ оператор, полученный дифференцированием оператора $B(\theta)$ по θ.

Доказательство этого и других утверждений работы приводится ниже в п. 4.

2.2. Бифуркация субгармонических колебаний. Рассмотрим теперь случай, когда матрица монодромии $V(\theta_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm 2\pi i\frac{p}{q}}$, где $0\leqslant \dfrac{p}{q}\leqslant \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{p}{q}$ — рациональная несократимая дробь, причем остальные собственные значения матрицы $V(\theta_0)$ не равны по модулю единице. В этом случае коразмерность бифуркации равна двум. Здесь естественным будет предположение, что параметр θ является двумерным, то есть $\theta=(\alpha,\beta)$, где α и β – скалярные параметры. Положим $\theta_0=(\alpha_0,\beta_0)$. Основным сценарием бифуркации является возникновение в окрестности точки равновесия $x=0$ при переходе параметра θ через θ_0 периодических решений периода qT.

Значение θ_0 параметра θ называют точкой бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (4), если каждому $\varepsilon>0$ соответствует такое $\theta=\theta(\varepsilon)$, при котором система (4) имеет ненулевое qT-периодическое решение $x(t,\varepsilon)$, причем $\theta(\varepsilon)\to\theta_0$ и $\max\limits_t\|x(t,\varepsilon)\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Определим оператор $B(\alpha,\beta)$ по аналогии с (5), где вместо значения T, будет значение qT.

Лемма 2. Пусть матрица монодромии $V(\theta_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm 2\pi i\frac{p}{q}}$, где $0\leqslant \dfrac{p}{q}\leqslant \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{p}{q}$ – рациональная несократимая дробь. Пусть при этом матрица $V(\theta_0)$ не имеет других собственных значений, равных 1 по модулю. Тогда оператор $B(\alpha_0,\beta_0):L_2\to L_2$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Обозначим через $e=e(t)$ и $g=g(t)$ линейно независимые собственные функции оператора $B_0=B(\alpha_0,\beta_0):B_0e=e$, $B_0g=g$. Сопряженный оператор B_0^* также имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2, которому отвечают собственные функции $e^*=e^*(t)$ и $g^*=g^*(t)$. Эти функции можно выбрать исходя из соотношений

$$(e,e^*)=(g,g^*)\neq 0,\quad (e,g^*)=(g,e^*)=0. \tag{7}$$

Теорема 2. Пусть в условиях леммы 2 выполнено соотношение

$$\Delta=\det\left[\begin{array}{cc}(B'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)e,e^*) & (B'_\beta(\alpha_0,\beta_0)e,e^*)\\ (B'_\alpha(\alpha_0,\beta_0)e,g^*) & (B'_\beta(\alpha_0,\beta_0)e,g^*)\end{array}\right]\neq 0. \tag{8}$$

Тогда пара чисел (α_0,β_0) является точкой бифуркации субгармонических колебаний системы (4).

Здесь B'_α и B'_β — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\alpha,\beta)$.

Пример 1. Рассмотрим модифицированное уравнение Дуффинга

$$y''(t)+\alpha y'(t-1)+\left(\frac{1}{4}+\beta\cos t\right)y(t)=-(y(t-2))^3\sin t. \tag{9}$$

Полагая $x_1 = y'$, $x_2 = y$ и $x = (x_1, x_2)^T$, уравнение (9) представим в виде равносильной системы (4), где

$$R(\alpha,\beta,t,\tau) = \begin{pmatrix} -\alpha h(\tau-1) & -\left(\frac{1}{4}+\beta\cos t\right)h(\tau) \\ h(\tau) & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\alpha,\beta,x) = x^3,$$

$$Q(\alpha,\beta,t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -h(\tau-2)\sin t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(\alpha,\beta,t,x_t) = 0.$$

Здесь $h(\tau)$ — функция Хевисайда.

Изучим вопрос о локальных бифуркациях системы в окрестности точки равновесия $x = 0$. В данном примере $T = 2\pi$. Матрица монодромии линеаризованного уравнения (9) при $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ имеет полупростое собственное значение -1 кратности 2, то есть пару простых собственных значений вида $e^{\pm 2\pi i\frac{p}{q}}$ при $\dfrac{p}{q} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому для уравнения (9) выполняется указанное в теореме 2 необходимое условие бифуркации субгармонических колебаний при $q = 2$.

Простым подсчетом можно убедиться, что в рассматриваемом примере определитель (8) является ненулевым, а именно $\triangle = -4\pi^2$. Следовательно, согласно теореме 2 пара $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = 0$ образует точку бифуркации удвоения периода уравнения (9), то есть в окрестности нулевого решения возникают нестационарные 4π-периодические решения.

3. Сценарий бифуркации для автономных систем

Рассмотрим теперь автономную систему вида (2) с последействием, зависящую от параметра θ:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int\limits_0^{\sigma(\theta)} [d_\tau R(\theta,\tau)]\, x(t-\tau) + \int\limits_0^{\sigma(\theta)} [d_\tau Q(\theta,\tau)]\, \Phi(\theta, x(t-\tau)) + F\left(\theta, x_t\right), \tag{10}$$

где $\sigma(\theta) > 0$. Параметр θ предполагается скалярным.

Значение $\theta = \theta_0$ называют точкой бифуркации в окрестности решения $x = 0$ уравнения (10), если характеристический квазимногочлен $L(p,\theta)$ при $\theta = \theta_0$ имеет чисто мнимые нули $p = \pm i\omega_0$, где $\omega_0 \geq 0$.

Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда $\omega_0 > 0$; этот случай отвечает бифуркации Андронова-Хопфа. Значение $\theta = \theta_0$ называют точкой бифуркации Андронова-Хопфа системы (10), если существуют $\theta_n \to \theta$ такие, что при $\theta = \theta_n$ уравнение (10) имеет нестационарное периодическое решение $x_n(t)$, причем $\max\limits_t \|x_n(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Приведем достаточный признак бифуркации Андронова-Хопфа. Для этого определим действующий в пространстве $L_2[0,1]$ с плотной областью определения $C[0,1]$ оператор

$$B(\theta,T)u(t) = u(1) + T\int\limits_0^t \left(\int\limits_0^{\sigma(\theta)} d_\tau R(\theta,\tau) E\left(\frac{\tau}{T}\right) u(s)\right) ds. \tag{11}$$

Лемма 3. Пусть при некотором $\omega_0 > 0$ выполнено равенство $L(\pm i\omega_0, \theta_0) = 0$, при этом $L(\pm im\omega_0, \theta_0) \neq 0$, $m = 0, 2, 3, \ldots$. Тогда оператор $B(\theta_0, T_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Обозначим через $e = e(t)$, $g = g(t)$, $e = e^*(t)$ и $g = g^*(t)$ собственные функции операторов $B(\theta_0, T_0)$, $B^*(\theta_0, T_0)$ соответственно. Собственные функции выбраны исходя из соотношений (7).

Теорема 3. Пусть в условиях леммы 3 выполнено соотношение

$$\det\begin{bmatrix} (B'_\theta(T_0,\theta_0)e,e^*) & (B'_T(T_0,\theta_0)e,e^*) \\ (B'_\theta(T_0,\theta_0)e,g^*) & (B'_T(T_0,\theta_0)e,g^*) \end{bmatrix} \neq 0, \tag{12}$$

где $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. Тогда значение θ_0 параметра θ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (10).

Здесь B'_θ и B'_T — операторы, полученные дифференцированием оператора $B(\theta,T)$ по θ и T соответственно.

Пример 2. Рассмотрим уравнение Хатчинсона-Райта (см.[11]) вида

$$x'(t) = -\frac{\pi}{2}x(t-\theta)[1+x(t)], \quad \theta \geq 0\,, \tag{13}$$

В этом уравнении параметром является запаздывание θ.

В рассматриваемом примере имеем

$$\sigma(\theta)=\theta,\quad R(\theta,\tau) = -\frac{\pi}{2}H(\tau-\theta),\quad Q(\theta,\tau)=0,\quad F\left[x(t),x(t-\phi_1(\theta))\right] = -\frac{\pi}{2}x(t)x(t-\theta)\,.$$

Из первого условия теоремы 3 получаем систему

$$\begin{cases} \int\limits_0^{\theta_0} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}\tau\right) d_\tau H(\tau-\theta_0) = 0, \\ \int\limits_0^{\theta_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}\tau\right) d_\tau H(\tau-\theta_0) = \frac{4}{T_0}, \end{cases}$$

которая имеет решение $\theta_0 = 1+4n$, $n\geq 0$, n — целое и $T_0 = 4$.

Пусть, например, $\theta_0 = 1$ и $T_0 = 4$. Тогда проверка соотношения (12) приводит к равенству

$$\det\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ -\frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{16} \end{bmatrix} = \frac{\pi}{32}.$$

Таким образом, условия теоремы 3 выполненыб и, следовательно, число $\theta_0 = 1$ является точкой бифуркации Андронова-Хопфа уравнения (13).

4. Доказательство основных утверждений

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теорем 1–3 используется операторный метод исследования локальных бифуркаций операторных уравнений (см. [9] и [12]).

Перейдем к операторному уравнению.

$$u(t) = B(\theta)u(t) + b[\theta,u(t)], \tag{14}$$

где $B(\theta)$ – оператор (5), а $b[\theta,u(t)]$ – оператор:

$$b[\theta,u(t)] = T\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{\sigma(\theta)}\left[d_\tau Q(\theta,Ts,\tau)\right]E\left(\frac{\tau}{T}\right)\Phi[\theta,u(s)]\right)ds +$$

$$+\,T\int\limits_0^t\left(F\left(\theta,Ts,E\left(\frac{\phi_1}{T}\right)u(s),...,E\left(\frac{\phi_s}{T}\right)u(s)\right)\right)ds. \tag{15}$$

Простая поверка показывает, что T-периодические решения $x(t)$ уравнения (4) совпадают с решениями $u(t)$ уравнения (14).

В основе процедуры построения бифурцирующих решений уравнения (14) положим метод функционализации параметра [13] и модифицированный метод Ньютона-Канторовича с возмущениями [14].

На первом этапе рассматривается функционализированное уравнение
$$u = B(\theta(u))u + b[\theta(u), u], \tag{16}$$
где $\theta(u)$ — непрерывный функционал, который предлагается выбрать в виде
$$\theta(u) = \frac{\theta_0}{\varepsilon}(u, e^*),$$
где e^* — собственная функция оператора B^*, $\varepsilon > 0$ — вспомогательный малый параметр. Если u^* — решение уравнения (16), то u^* решение уравнения (14) при $\theta = \theta(u^*)$.

На втором этапе уравнение (16) изучается методом Ньютона-Канторовича. Для этого (16) представляется в виде
$$G(u) + W(u) = 0, \tag{17}$$
где $G(u) = u - B[\theta(u)]u$, $W(u) = -b[\theta(u), u]$.

Операторы G и W действуют в пространстве $L_2[0,1]$ и зависят от параметра $\varepsilon > 0$, но для простоты изложения в обозначениях операторов ε не используется. Пространство L_2 можно представить в виде $L_2 = H_0 \oplus H^0$, где H_0 — собственное подпространство, отвечающее простому собственному значению 1 оператора B_0 : $B_0 = B(\theta_0)$, а H^0 — дополнительное инвариантное для B_0 подпространство. Положим $G'(\varepsilon e)h = h - B(\theta_0)h - \theta_0(h, e^*)B'(\theta_0)e$ и $u_0 = \varepsilon e$; из условия (7) следует, что существует ограниченный оператор $\Gamma_0 = [G'(u_0)]^{-1} : L_2 \to L_2$, при этом оператор Γ_0 не зависит от ε. Оператор Γ_0 может быть вычислен по формуле $\Gamma_0 y = h_0 + h^0$, где
$$h_0 = -\frac{(y, e^*)e}{\theta_0(B'(\theta_0)e, e^*)},$$
$$h^0 = (I - B_0)^{-1}\left[y - \frac{(y, e^*)B'(\theta_0)e}{(B'(\theta_0)e, e^*)}\right].$$

Лемма 4. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, при всех малых $\varepsilon > 0$ уравнение (17) имеет нетривиальное решение $u(\varepsilon)$, которое может быть получено как предел последовательных приближений
$$u_{n+1} = u_n - \Gamma_0 G(u_n) - \Gamma_0 W(u_n), n = 0, 1, 2, ..., \tag{18}$$
где $u_0 = u_0(t) = \varepsilon e(t)$.

Из приведенных выше построений следует, что уравнение (14) при $\theta = \theta[u(\varepsilon)]$ имеет ненулевые решения $u(\varepsilon)$, такие что $\| u(\varepsilon) - \varepsilon e \| = o(\varepsilon)$, $\theta[u(\varepsilon)] \to \theta_0$ при $\varepsilon \to 0$. Это завершает доказательство теоремы 1.

Отметим, что из леммы 4 следует существование функции $\theta(\varepsilon) = \theta[x(\varepsilon)]$ такой, что при $\theta = \theta(\varepsilon)$ уравнение (4) имеет ненулевое T-периодическое решение $x(t, \varepsilon)$: $x(0, \varepsilon) = x(\varepsilon)$. При этом значения функций $\theta(\varepsilon)$ и $x(\varepsilon)$ могут быть построены итерациями (18), где $u(t) = x(T \cdot t)$.

Доказательство теоремы 2. Задача о бифуркации субгармонических колебаний уравнения (4) равносильна задаче о бифуркации малых ненулевых решений операторного уравнения
$$u(t) = B(\alpha, \beta)u(t) + b(\alpha, \beta, u(t)), \tag{19}$$
где $B(\alpha, \beta)$ и $b[\alpha, \beta, u(t)]$ определяются как (5) и (15) соответственно.

На первом этапе доказательства рассматривается функционализированное уравнение
$$u = B(\alpha(u), \beta(u))u + b[\alpha(u), \beta(u), u], \tag{20}$$
где $\alpha(u)$ и $\beta(u))$ — непрерывные функционалы, которые предлагается выбрать в виде
$$\alpha(u) = \alpha_0 + \frac{1}{\varepsilon}[(u, e^*) - \varepsilon], \quad \beta(u) = \beta_0 + \frac{1}{\varepsilon}(u, g^*);$$
здесь $\varepsilon > 0$ вспомогательный малый параметр.

На втором этапе уравнение (20) изучается методом Ньютона-Канторовича. Для этого (20) представляется в виде (17), где $G(u) = u - B[\alpha(u), \beta(u)]u$, $W(u) = -b[\alpha(u), \beta(u), u]$.

Пространство L_2 можно представить в виде $L_2 = H_0 \oplus H^0$, где H_0 – собственное подпространство, отвечающее полупростому собственному значению 1 кратности 2 оператора $B_0 : B_0 = B(\alpha_0, \beta_0)$, а H^0 – дополнительное инвариантное для B_0 подпространство. Положим $G'(\varepsilon e)h = h - [(h, e^*)B'_\alpha(\theta_0)e + (h, g^*)B'_\beta(\theta_0)e] - B_0 h$ и $u_0 = \varepsilon e$; из условия (8) теоремы следует, что существует ограниченный оператор $\Gamma_0 = [G'(u_0)]^{-1} : L_2 \to L_2$, при этом оператор Γ_0 не зависит от ε. Оператор Γ_0 может быть вычислен по формуле $\Gamma_0 y = h_0 + h^0$, где

$$h_0 = J_\alpha(y)e + J_\beta(y)g,$$
$$h^0 = (I - B_0)^{-1}[y + J_\alpha(y)B'_\alpha(\theta_0)e + J_\beta(y)B'_\beta(\theta_0)e].$$

Здесь $J_\alpha(y)$ и $J_\beta(y)$ вычисляются по формуле

$$\begin{pmatrix} J_\alpha(y) \\ J_\beta(y) \end{pmatrix} = -\begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (y, e^*) \\ (y, g^*) \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при всех малых $\varepsilon > 0$ уравнение (17) имеет решение $u(\varepsilon)$, которое может быть получено как предел последовательных приближений

$$u_{n+1} = u_n - \Gamma_0 G(u_n) - \Gamma_0 W(u_n), n = 0, 1, 2, ..., \tag{21}$$

где $u_0 = u_0(t) = \varepsilon e(t)$. Из приведенных построений следует, что уравнение (19) при $\alpha = \alpha[u(\varepsilon)]$ и $\beta = \beta[u(\varepsilon)]$ имеет ненулевые решения $u(\varepsilon)$, так что $\| u(\varepsilon) - \varepsilon e \| = o(\varepsilon)$, $\alpha[u(\varepsilon)] \to \alpha_0$, $\beta[u(\varepsilon)] \to \beta_0$ при $\varepsilon \to 0$. Это завершает доказательство теоремы 2.

Отметим, что из леммы 5 следует существование функций $\alpha(\varepsilon) = \alpha[x(\varepsilon)]$ и $\beta(\varepsilon) = \beta[x(\varepsilon)]$ таких, что при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ уравнение (4) имеет ненулевое qT-периодическое решение $x(t, \varepsilon)$ такое, что $x(0, \varepsilon) = x(\varepsilon)$. При этом значения функций $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$ и $x(\varepsilon)$ могут быть построены итерациями (21).

Доказательство теоремы 3. Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2. Основным при этом является операторное уравнение

$$u(t) = B(\theta, T)u(t) + b[\theta, T, u(t)],$$

где оператор $B(\theta, T)$ определяется равенством (11), а нелинейность $b[\theta, T, u(t)]$ – равенством

$$b[\theta, u(t)] = T \int_0^t \left(\int_0^{\sigma(\theta)} [d_\tau Q(\theta, \tau)]\, E\left(\frac{\tau}{T}\right) \Phi[\theta, u(s)] \right) ds +$$
$$+ T \int_0^t \left(F\left(\theta, E\left(\frac{\phi_1}{T}\right) u(s), ..., E\left(\frac{\phi_s}{T}\right) u(s)\right)\right) ds.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К.Л. *Дифференциально-разностные уравнения.* М.: Мир. 1967. 548 с.
2. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* М.: Наука, 1972. 352 с.
3. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* М.: Мир, 1984. 421 с.
4. B. Balachandran, T. Kalmar-Nagy, D. Gilsinn *Delay Differential Equations. Recent Advances and New Directions.* Springer, New York, NY, 2009.
5. Колесов Ю.С. *Обоснование метода квазинормальных форм для уравнения Хатчинсона с малым коэффициентом диффузии* // Известия РАН. Сер. матем., 2001. Т. 65, № 4. С. 111–132.

6. D. Roose, R. Szalai *Continuation and bifurcation analysis of delay differential equations* // Numerical continuation methods for dynamical systems. Springer, Dordrecht, 2007. P. 359–399.
7. D. Schley *Bifurcation and stability of periodic solutions of differential equations with state-dependent delays* // European Journal of Applied Mathematics. 2003. V. 14, № 1. P. 3–14.
8. Каменский М.И., Лысакова Ю.В., Нистри П. *О бифуркации периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием* // Автоматика и телемеханика, 2008, № 12, С. 41–46.
9. Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С, Муртазина С.А., Юмагулов М.Г *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в мноопараметрических динамических системах* // Уфимский математический журнал, 2010. Т. 2, №4. С. 3–26.
10. Красносельский М.А. *Оператор сдвига по траекторяим дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1966. 332 с.
11. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла.* М.: Мир. 1985. 280 с.
12. Ибрагимова Л.С., Юмагулов М.Г. *Функционализация параметра и ее приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем* // Автоматика и телемеханика, 2007. № 4. С. 3–12.
13. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* М.: Наука. 1975. 512 с.
14. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Наука. 1969. 456 с.

Марат Гаязович Юмагулов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: yum_mg@mail.ru

Дина Ахатовна Якшибаева,
Сибайский институт (филиал) Башкирский государственный университет,
ул. Белова, 21,
453837, г. Сибай, Россия
E-mail: K_dina_a@mail.ru