ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 2 (2014). С. 78-98.

УДК 517.9

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

М.В. ПЛЕХАНОВА, В.Е. ФЕДОРОВ

Аннотация. Исследованы вопросы управляемости линейных распределённых систем управления, описываемых дифференциальными уравнениями в банаховых пространствах с вырожденным оператором при производной, однородная часть которых обладает вырожденной сильно непрерывной разрешающей полугруппой. Для таких систем с, вообще говоря, зависящим от времени ограниченным оператором при функции управления найдены критерии ε-управляемости за время T и ε-управляемости за свободное время в терминах операторов, входящих в уравнение. Общие результаты использованы при исследовании ε-управляемости систем рассматриваемого вида с конечномерным входом. Полученные критерии проиллюстрированы на примерах систем управления, описываемых различными уравнениями и системами уравнений в частных производных, не разрешимыми относительно производной по времени.

Ключевые слова: система управления, вырожденное эволюционное уравнение, уравнение соболевского типа, управляемость.

Mathematics Subject Classification: 93B05, 34G10, 47N70, 47F05

1. Введение

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{U}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейный и непрерывный из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$), $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ (линейный, замкнутый, плотно определенный в $\mathcal{X}$, действующий в $\mathcal{Y}$), $B : [0, T] \to \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$, $y : [0, T] \to \mathcal{Y}$. Рассмотрим задачу исследования ε-управляемости распределённых систем управления, динамика которых описывается уравнением

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \tag{1}$$

т. е. исследования возможности приведения траектории решения уравнения (1) посредством выбора функции управления $u(\cdot)$ из любого заданного начального состояния x_0 в ε-окрестность произвольной наперед заданной точки при всяком $\varepsilon > 0$.

Говоря в дальнейшем о системе управления, описываемой уравнением, скажем, (1), часто для краткости будем называть ее системой управления (1) или системой (1).

Если оператор L непрерывно обратим, то уравнение (1) можно представить в разрешенном относительно производной виде $\dot{x}(t) = Sx(t) + B_1(t)u(t) + y_1(t)$. Управляемость ($\varepsilon$-управляемость) систем управления, описываемых разрешенным уравнением, вообще говоря, в банаховом пространстве исследовали в своих работах Н.Н. Красовский [1], R.E. Kalman, Y.C. Ho, K.S. Narendra [2], H.O. Fattorini [3], Ф.А. Шолохович [4], А.Б. Куржанский [5], R. Triggiani [6], Б. Шкляр [7, 8] и многие другие (см. также обзоры [9, 10, 11], работы [12, 13]).

Под решением уравнения (1) будем понимать почти всюду на $(0, T)$ удовлетворяющую уравнению функцию $x \in W_q^1(0, T; \mathcal{X})$, $q \geq 1$, – так называемое сильное решение уравнения

M.V. Plekhanova, V.E. Fedorov, On control of degenerate distributed systems.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 14-01-31125 мол_а).

Поступила 12 декабря 2013 г.

[14]. Нас будет интересовать случай $\ker L \neq \{0\}$ при условии сильной (L, p)-радиальности оператора M [15, 16]. В этом случае уравнение (1) редуцируется к системе двух уравнений на взаимно дополнительных подпространствах, одно из которых

$$\dot{x}^1(t) = S_1 x^1(t) + B_1(t)u(t) + y^1(t)$$

является разрешенным относительно производной, а второе, на ядре полугруппы однородной части исходного уравнения (1), имеет нильпотентный оператор G при производной:

$$G\dot{x}^0(t) = x^0(t) + B_0(t)u(t) + y^0(t). \tag{2}$$

Специфика уравнения (1) с вырожденным оператором L обусловлена особенностями уравнения (2) на ядре полугруппы и состоит в том, что, во-первых, функции управления приходится брать более гладкими, чем функции из пространств Лебега. Причем, это ограничение на функции управления по существу: в теореме 3 [14] показано, что необходимые и достаточные условия разрешимости вырожденного уравнения (2) очень близки к условию принадлежности пространству Соболева $W_q^{p+1}(0, T; \mathcal{U})$, где $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ – параметр, характеризующий степень вырожденности системы. При этом согласно следствию 3 [14] в случае управления из пространства $L_2(0, T; \mathcal{U})$ уравнение (2), вообще говоря, не является разрешимым. Другими характерными особенностями вырожденного уравнения (2) являются:

– его однозначная разрешимость при отсутствии заданного начального условия, а потому – необходимость согласования значений функции управления и ее производных в начальный момент времени с начальным состоянием x_0 в случае, когда оно задано заранее;
– независимость решения от начального состояния x_0 в моменты времени $t > 0$;
– не интегральный, а дифференциальный вид решения уравнения, использующий значения производных до порядка p от функции управления в текущий момент времени.

В данной работе рассматриваются свойства ε-управляемости за время T и ε-управляемости за свободное время системы, описываемой уравнением (1). Основным результатом при этом являются необходимые и достаточные условия для ε-управляемости уравнения (1) в смысле сильных решений в терминах операторов, входящих в уравнение. Эти условия достаточно просты, чтобы их можно было проверить для конкретных вырожденных распределённых систем управления, описываемых уравнениями и системами уравнений в частных производных, что продемонстрировано на примерах.

Как частный случай общей ситуации получены критерии ε-управляемости системы (1) в случае, когда $B(t) \equiv B_1$ для всех $t \geq 0$, а также в случае, когда $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $b_i : [0, T] \to \mathcal{Y}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $B(t)u(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i(t)u_i(t)$, то есть для системы вида

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)u_i(t) + y(t). \tag{3}$$

Она называется системой управления с конечномерным входом. Существенным является тот факт, что в случае систем управления с конечномерным входом необходимым условием ε-управляемости является конечномерность ядра полугруппы, на котором задано уравнение (2). Приведены примеры ε-управляемых распределённых систем с конечномерным входом, описываемых уравнениями или системами уравнений в частных производных, не разрешимыми относительно производной по времени, и примеры распределённых систем с конечномерным входом, не являющихся ε-управляемыми (за время T или за свободное время).

Вопросы ε-управляемости за время T вырожденного уравнения (1) с сильно (L, p)-радиальным оператором M ранее исследовались в работах [17, 18], но при этом рассматривался только случай, когда $B(t) \equiv B_1$ для всех $t \geq 0$ и $y \equiv 0$, и использовалось только понятие классического решения уравнения (из пространства $C^1([0,T];\mathcal{U})$). Однако при построении общей теории оптимального управления системами, описываемыми операторно-дифференциальными уравнениями вида (1) в банаховых пространствах, гораздо удобнее использовать сильные решения из $W_q^1(0,T;\mathcal{U})$ (см. [14]). При постоянном операторе B и $y \equiv 0$ некоторые частные результаты об ε-управляемости уравнения (1) в смысле сильных решений получены в [19] и обобщены в данной работе.

Управляемость и ε-управляемость в смысле классических решений вырожденных ($\ker L \neq \{0\}$) систем вида (3) с одномерным или двумерным входом рассматривались в работах [20, 21] в случае существенно более ограничительных, чем в данной работе, условий на параметры в уравнении – когда оператор M (L,p)-ограничен, $b_i(t) \equiv b_{i1}$ при $t \geq 0$, $y \equiv 0$.

Отметим также касающуюся распределенных систем управления (1) с сильно (L,p)-радиальным оператором M работу [22], в которой критерий полной (или точной) управляемости системы в гильбертовом пространстве сформулирован с использованием понятия сильно минимальной последовательности обобщенных экспонент.

2. Задача Коши для вырожденного эволюционного уравнения

В данном параграфе приведены необходимые для дальнейшего изложения результаты о существовании и свойствах сильно непрерывной разрешающей полугруппы линейного операторного дифференциального уравнения первого порядка с вырожденным оператором при производной и о разрешимости задачи Коши в смысле сильных решений для соответствующего неоднородного уравнения. Их доказательства можно найти в работах [14, 16].

Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ – банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Введем также обозначения $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})\}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$.

Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется *сильно (L,p)-радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}$ $(a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0$ $\forall \mu \in (a,+\infty)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})}, \|(L_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует такой плотный в $\mathcal{Y}$ линеал $\overset{\circ}{\mathcal{Y}}$, что для любых $y \in \overset{\circ}{\mathcal{Y}}$, $\mu \in (a,+\infty)$

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1}y\|_{\mathcal{Y}} \leq \frac{\mathrm{const}(y)}{(\mu - a)^{p+2}};$$

(iv) для любого $\mu \in (a,+\infty)$

$$\|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Через $\mathcal{X}^0$ ($\mathcal{Y}^0$) обозначим ядро $\ker(R_\mu^L(M))^{p+1}$ ($\ker(L_\mu^L(M))^{p+1}$), а через $\mathcal{X}^1$ ($\mathcal{Y}^1$) – замыкание образа $\mathrm{im}(R_\mu^L(M))^{p+1}$ ($\mathrm{im}(L_\mu^L(M))^{p+1}$) в норме пространства $\mathcal{X}$ ($\mathcal{Y}$). Через M_k (L_k) будем обозначать сужение оператора M (L) на $\mathrm{dom} M_k = \mathcal{X}^k \cap \mathrm{dom} M$ ($\mathcal{X}^k$), $k = 0,1$.

Теорема 1. [16]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathcal{X} = \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^1$, $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$;

(ii) $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $M_k \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^k;\mathcal{Y}^k)$, $k = 0,1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^0;\mathcal{X}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)$;

(iv) *оператор* $G = M_0^{-1}L_0$ *является нильпотентным степени не больше* p, *т. е.* $G^{p+1} = \mathbb{O}$;

(v) *существует вырожденная сильно непрерывная полугруппа операторов* $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$, *разрешающая уравнение* $L\dot{x}(t) = Mx(t)$, *при этом для всех* $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ *выполняется неравенство* $\|X^t\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X})} \le Ke^{at}$ *с константами* K, a *из определения сильной* (L,p)*-радиальности*;

(vi) *оператор* $S_1 = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$ *является инфинитезимальным генератором* C_0*-непрерывной полугруппы* $\{X_1^t = X^t|_{\mathcal{X}^1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^1) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$.

Единица полугруппы $X^0 \equiv P = s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu R_\mu^L(M))^{p+1}$ является проектором вдоль подпространства $\mathcal{X}^0$ на $\mathcal{X}^1$, а $Q = s\text{-}\lim\limits_{\mu\to+\infty}(\mu L_\mu^L(M))^{p+1}$ – проектор вдоль $\mathcal{Y}^0$ на $\mathcal{Y}^1$.

Рассмотрим задачу Коши

$$x(0) = x_0 \in \mathrm{dom}M \tag{4}$$

для уравнения

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + y(t). \tag{5}$$

Сильным решением задачи (4), (5) называется вектор-функция $x \in W_q^1(0,T;\mathcal{X})$, $q \ge 1$, если она удовлетворяет условию (4), почти всюду на $(0,T)$ $x(t) \in \mathrm{dom}M$ и выполняется равенство (5). В силу вложения $W_q^1(0,T;\mathcal{X}) \hookrightarrow C([0,T];\mathcal{X})$ данное определение корректно.

Теорема 2. [14]. *Пусть оператор* M *сильно* (L,p)*-радиален. Тогда при любых* $y \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$ *и*

$$x_0 \in \mathcal{M}_y = \left\{x \in \mathrm{dom}M : (I-P)x = -\sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(0)\right\}$$

существует единственное сильное решение $x \in W_q^1(0,T;\mathcal{X})$ *задачи* (4), (5). *При этом*

$$x(t) = X^t x_0 + \int_0^t X^{t-s}L_1^{-1}Qy(s)ds - \sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1}(I-Q)y^{(k)}(t).$$

3. О связи ε-управляемости вырожденной эволюционной системы и её подсистем

В условиях предыдущего параграфа везде далее будем предполагать сильную (L,p)-радиальность оператора M. Кроме того, часто будут использоваться условия

$$B \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})),\ (I-Q)B \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})),\ T > 0, \tag{6}$$

$$y \in W_q^1(0,T;\mathcal{Y}), \quad (I-Q)y \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y}), \quad T > 0,\ q \ge 1. \tag{7}$$

Функции управления $u(\cdot)$ для системы, описываемой задачей Коши

$$x(0) = x_0 \in \mathrm{dom}M, \tag{8}$$

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t), \tag{9}$$

выбираются из пространства $W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$. Также необходимо выполнение условия $x_0 \in \mathcal{M}_{Bu+y}$ теоремы 2. Множество функций управления, удовлетворяющих этому условию, обозначим

$$H_\partial(x_0,y) \equiv \Big\{u \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y}) : (I-P)x_0 =$$

$$= -\sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0)u^{(l)}(0) + y^{0(k)}(0)\right)\Bigg\},$$

где $B_0 \equiv (I-Q)B$, $y^0 \equiv (I-Q)y$. С помощью теоремы 1 задачу Коши (8), (9) можно редуцировать к двум задачам

$$x^1(0) = Px_0,$$

$$\dot{x}^1(t) = S_1 x^1(t) + L_1^{-1}QB(t)u(t) + L_1^{-1}Qy(t) \tag{10}$$

и

$$x^0(0) = (I-P)x_0,$$
$$G\dot{x}^0(t) = x^0(t) + M_0^{-1}(I-Q)B(t)u(t) + M_0^{-1}(I-Q)y(t), \tag{11}$$

заданным на подпространствах $\mathcal{X}^1$ и $\mathcal{X}^0$ соответственно. Здесь $S_1 = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X}^1)$, $G = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0)$, $x^1(t) = Px(t)$, $x^0(t) = (I-P)x(t)$.

Замечание 1. Согласно теореме 2 (см. также [14, 16]) единственным решением задачи Коши для уравнения (10) является функция

$$x^1(t) = X^t x_0 + \int\limits_0^t X^{t-s}L_1^{-1}Q(B(s)u(s) + y(s))ds,$$

а для уравнения (11) при условии $u \in H_\partial(x_0, y)$ – функция

$$x^0(t) = -\sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1}\left(\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(t)u^{(l)}(t) + y^{0(k)}(t)\right).$$

Замечание 2. Можно ослабить условия (6) на оператор-функцию B, потребовав вместо них выполнения условий

$$B \in W_{q'}^1(0,T;\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})),\ (I-Q)B \in W_{q'}^{p+1}(0,T;\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y})),\ q' = \frac{q}{q-1},$$

при $T > 0$. Тогда $B(\cdot)u(\cdot) \in W_1^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$ и сильные решения нужно искать в пространстве $W_1^1(0,T;\mathcal{X})$.

Говоря об ε-управляемости системы, описываемой некоторым уравнением, будем через $x(T;x_0;u)$ обозначать значение в момент времени T сильного решения задачи Коши для этого уравнения с начальным значением x_0 и функцией управления u.

Система (9) называется ε-управляемой за время $T > 0$, если для любых $x_0 \in \mathrm{dom}M$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ существует такое управление $u \in H_\partial(x_0, y)$, что $\|x(T;x_0;u) - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \le \varepsilon$.

Пусть $\mathcal{E}$ – банахово пространство, $D \subset \mathcal{E}$. Через $\mathrm{span}D$ будем обозначать линейную оболочку множества D, а через $\overline{\mathrm{span}}D$ – ее замыкание в пространстве $\mathcal{E}$.

Лемма 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда если $(I-Q)B \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $(I-Q)y \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$, то из ε-управляемости за время T системы* (11) *следует равенство*

$$\mathrm{span}\left\{\mathrm{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0),\ l = 0,1,\ldots,p\right\} = \mathrm{dom}M_0. \tag{12}$$

Доказательство. Из ε-управляемости системы (11) следует, что для всех $x_0 \in \mathrm{dom}M_0$ должно выполняться включение

$$x^0 = x_0 + \sum_{k=0}^{p} G^kM_0^{-1}y^{0(k)}(0) \in \mathrm{span}\left\{\mathrm{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0),\ l = 0,1,\ldots,p\right\},$$

иначе множество допустимых функций управления $H_\partial(x_0, y)$ окажется пустым. Отсюда и из произвольности элемента $x_0 \in \mathrm{dom}M_0$, а значит и элемента $x^0 \in \mathrm{dom}M_0$, имеем

$$\mathrm{span}\left\{\mathrm{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0),\ l = 0,1,\ldots,p\right\} \supset \mathrm{dom}M_0.$$

Обратное вложение имеет место в силу того, что $G = M_0^{-1}L_0$, поэтому $\mathrm{im}G \subset \mathrm{dom}M_0$. Лемма доказана.

Обозначим через $x^1(T;x_0;u)$ значение в момент времени T сильного решения задачи Коши $x^1(0)=x_0\in \mathrm{dom}M_1$ для уравнения (10), а через $x^0(T;x_0;u)$ – значение в момент времени T сильного решения задачи Коши $x^0(0)=x_0\in\mathrm{dom}M_0$ для уравнения (11). Кроме того, через $x^0(T;u)$ обозначим значение в момент времени T сильного решения уравнения (11), которое согласно теореме 3 [14] однозначно определяется и без условия Коши.

Замечание 3. В случае сильно $(L,0)$-радиального оператора, т. е. при $p=0$, для $T\geq 0$ условие

$$\mathrm{span}\left\{\mathrm{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(T),\ l=0,1,\dots,p\right\}=\mathrm{dom}M_0$$

принимает вид $\mathrm{im}M_0^{-1}(I-Q)B(T)=\mathrm{dom}M_0$ и поэтому равносильно условию $\mathrm{im}(I-Q)B(T)=\mathcal{Y}^0$.

Лемма 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален и выполняется условие* (12). *Тогда*

(i) *если выполняются условия* (6), (7) *и для любых $x_0\in\mathrm{dom}M_1$, $\tilde{x}\in\mathcal{X}^1$, $\varepsilon>0$ существует такое $u\in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$, при котором $\|x^1(T;x_0;u)-\tilde{x}\|_{\mathcal{X}}\leq\varepsilon$, то найдется и такое $u_1\in H_\partial(x_0,y)$, что $\|x^1(T;x_0;u_1)-\tilde{x}\|_{\mathcal{X}}\leq\varepsilon$;*

(ii) *если $(I-Q)B\in C^{p+1}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $(I-Q)y\in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$ и для всех $\tilde{x}\in\mathcal{X}^0$, $\varepsilon>0$ существует $u\in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$, для которого выполняется $\|x^0(T;u)-\tilde{x}\|_{\mathcal{X}}\leq\varepsilon$, то для любых $x_0\in\mathrm{dom}M_0$, $\tilde{x}\in\mathcal{X}^0$, $\varepsilon>0$ существует такое $u_1\in H_\partial(x_0,y)$, что $\|x^0(T;x_0;u_1)-\tilde{x}\|_{\mathcal{X}}\leq\varepsilon$.*

Доказательство. Докажем утверждение (i). В силу замечания 1 и условий данной леммы

$$\forall x_0\in\mathrm{dom}M_1\ \forall\tilde{x}\in\mathcal{X}^1\ \forall\varepsilon>0\ \exists u\in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$$

$$\left\|X^Tx_0+\int_0^T X^{T-s}L_1^{-1}Q\left(B(s)u(s)+y(s)\right)ds-\tilde{x}\right\|_{\mathcal{X}}\leq\varepsilon/2.$$

По условию (12) существуют такие $u_0,u_1,\dots u_p\in\mathcal{U}$, что

$$(I-P)x_0+\sum_{k=0}^{p}G^kM_0^{-1}y^{0(k)}(0)=-\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0)u_l.$$

Изменим имеющуюся функцию управления $u(\cdot)$ в правой окрестности нуля гладким образом, чтобы получить новую функцию управления $u_1\in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$, для которой $u_1^{(l)}(0)=u_l$, $l=0,1,\dots,p$. Будем искать такую функцию в виде

$$u_1(t)=\left(\frac{t}{t_0}\right)^{p+1}\sum_{k=0}^{p}a_k\frac{(t-t_0)^k}{k!}+\sum_{k=0}^{p}u_k\frac{t^k}{k!},\quad t\in[0,t_0],$$

$u_1(t)=u(t)$, $t\in[t_0,T]$, при некотором $t_0\in(0,T)$. При любых коэффициентах $a_k\in\mathcal{U}$, $k=0,1,\dots,p$, такая функция удовлетворяет требуемым начальным условиям. Подберем коэффициенты a_k так, чтобы выполнялось $u_1^{(k)}(t_0)=u^{(k)}(t_0)$ для $k=0,1,\dots,p$. Приравнивая производные, получим рекуррентную формулу для коэффициентов

$$a_0=u(t_0)-\sum_{k=0}^{p}u_k\frac{t_0^k}{k!},$$

$$a_n=u^{(n)}(t_0)-\sum_{m=0}^{n-1}C_n^m\frac{(p+1)p(p-1)\dots(p-n+m+2)}{t_0^{n-m}}a_m-\sum_{k=0}^{p-n}u_{k+n}\frac{t_0^k}{k!}$$

для $n = 1, 2, \ldots, p$.

Взяв $t_0 < 1$, получим

$$\|a_0\|_{\mathcal{U}} \leq \|u\|_{W_q^{p+1}(0,t_0;\mathcal{U})} + \sum_{k=0}^{p} \|u_k\|_{\mathcal{U}} = c_0,$$

$$\|a_1\|_{\mathcal{U}} \leq \|u\|_{W_q^{p+1}(0,t_0;\mathcal{U})} + \frac{(p+1)c_0}{t_0} + \sum_{k=0}^{p} \|u_k\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{c_1}{t_0}, \quad \ldots, \quad \|a_p\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{c_p}{t_0^p}.$$

Поэтому

$$\|u_1\|_{C([0,t_0];\mathcal{U})} \leq \sum_{k=0}^{p} \|a_k\|_{\mathcal{U}} |t - t_0|^k + \sum_{k=0}^{p} \|u_k\|_{\mathcal{U}} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p} c_k \left|1 - \frac{t}{t_0}\right|^k + \sum_{k=0}^{p} \|u_k\|_{\mathcal{U}} \leq \sum_{k=0}^{p} c_k + \sum_{k=0}^{p} \|u_k\|_{\mathcal{U}}.$$

Последнее выражение не зависит от t_0, поскольку константы c_k от него не зависят. Поэтому при достаточно малых $t_0 \in (0, \delta]$

$$\|u - u_1\|_{L_1(0,T;\mathcal{U})} \leq \left(\|u\|_{C([0,t_0];\mathcal{U})} + \sum_{k=0}^{p} c_k + \sum_{k=0}^{p} \|u_k\|_{\mathcal{U}} \right) \delta \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2Ke^{|a|T} \|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})} \|B\|_{C([0,\delta];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))}},$$

где K, a – константы из определения сильной (L, p)-радиальности оператора M. Отсюда

$$\left\| X^T x_0 + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Q(B(s)u_1(s) + y(s))ds - \tilde{x} \right\|_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \left\| X^T x_0 + \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Q(B(s)u(s) + y(s))ds - \tilde{x} \right\|_{\mathcal{X}} +$$

$$+ \left\| \int_0^T X^{T-s} L_1^{-1} QB(s)(u_1(s) - u(s))ds \right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Для доказательства утверждения (ii) заметим, что описанная выше замена функции u на u_1 не повлияет на значение решения уравнения (11) в момент времени T (см. вид решения в замечании 1).

Следствие 1. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален и выполняются условия* (6), (7), (12). *Тогда если для всех $x_0 \in \mathrm{dom}M$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ существует $u \in W_q^{p+1}(0, T; \mathcal{U})$, для которого*

$$\left\| x^1(T; Px_0; u) + x^0(T; u) - \tilde{x} \right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon,$$

то существует такое $u_1 \in H_\partial(x_0, y)$, что $\|x(T; x_0; u_1) - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$.

Доказательство. Построив при достаточно малом t_0 функцию управления $u_1 \in H_\partial(x_0, y)$, как при доказательстве леммы 2, получим

$$\|x(T; x_0; u_1) - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \|x^1(T; Px_0; u_1) + x^0(T; (I - P)x_0; u_1) - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leq$$

$$\leq \|x^1(T; Px_0; u) + x^0(T; u) - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} +$$

$$+\left\|\int_0^T X^{T-s}L_1^{-1}QB(s)(u_1(s)-u(s))ds\right\|_{\mathcal{X}} \leq 2\varepsilon,$$

что и доказывает следствие.

Замечание 4. В дальнейшем будем использовать лемму 2 и следствие 1 неявным образом и при доказательстве ε-управляемости довольствоваться существованием подходящей функции управления из всего пространства $W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$, а не из $H_\partial(x_0,y)$.

Следующий результат говорит о том, что управляя двумя системами (10) и (11) посредством одной функции управления, мы, тем не менее, можем привести траектории обеих систем в ε-окрестности нужных точек одновременно.

Теорема 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален и выполняются условия* (6), (7)*. Тогда система* (9) *ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда ε-управляемы за время T системы* (10) *и* (11).

Доказательство. Прямое утверждение теоремы очевидно, поскольку система (9) распадается на две подсистемы на взаимно дополняющих друг друга подпространствах – (10) и (11). Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть

$$\forall x_0^0 \in \mathrm{dom}M_0 \ \forall \tilde{x}^0 \in \mathcal{X}^0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists v \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$$

$$\left\|-\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(T)v^{(l)}(T)-\sum_{k=0}^{p}G^kM_0^{-1}y^{0(k)}(T)-\tilde{x}^0\right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon/3,$$

$$\forall x_0^1 \in \mathrm{dom}M_1 \ \forall \tilde{x}^1 \in \mathcal{X}^1 \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists w \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$$

$$\left\|X^Tx_0^1+\int_0^T X^{T-s}L_1^{-1}Q(B(s)w(s)+y(s))ds-\tilde{x}^1\right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon/3.$$

Для $x_0 \in \mathrm{dom}M$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ возьмем $x_0^0 = (I-P)x_0$, $\tilde{x}^0 = (I-P)\tilde{x}$, $x_0^1 = Px_0$, $\tilde{x}^1 = P\tilde{x}$. По этим векторам и по $\varepsilon > 0$ выберем соответствующие функции управления v, w. Обозначим $u(t) = w(T-t)$ при $t \in [0,T]$, $u_k = (-1)^kv^{(k)}(T)$, $k = 0,1,\ldots,p$, и, как это сделано при доказательстве леммы 2, построим по этим данным функцию $u_1 \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$, для которой $u_1^{(k)}(0) = (-1)^kv^{(k)}(T)$,

$$\|u-u_1\|_{L_1(0,T;\mathcal{U})} \leq \frac{\varepsilon}{3Ke^{|a|T}\|L_1^{-1}Q\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})}\|B\|_{C([0,\delta];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))}}.$$

Выберем теперь для системы (9) функцию управления $v_1(t) = u_1(T-t)$. Тогда $v_1^{(k)}(T) = (-1)^ku_1^{(k)}(0) = v^{(k)}(T)$, поэтому

$$\|x(T;x_0;v_1)-\tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leq 2\varepsilon/3+\left\|\int_0^T X^{T-s}L_1^{-1}QB(v_1(s)-w(s))ds\right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon.$$

Теорема доказана.

4. Соотношения между различными понятиями ε-управляемости

Введем еще 2 определения ε-управляемости, активно используемых при рассмотрении систем вида (10) (см., например, [8, 10]).

Система (9) называется *ε-управляемой в нуль за время $T > 0$*, если для любых $x_0 \in \mathrm{dom}M$, $\varepsilon > 0$ существует такое управление $u \in H_\partial(x_0,y)$, что $\|x(T;x_0;u)\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$.

Система (9) называется *ε-управляемой из нуля за время $T > 0$*, если для любых $\tilde{x} \in \mathcal{X}$, $\varepsilon > 0$ существует такое управление $u \in H_\partial(0,y)$, что выполняется неравенство $\|x(T;0;u)-\tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon$.

Перечислим соотношения между различными понятиями ε-управляемости для системы (9), временно условившись называть введенное в предыдущем параграфе понятие ε-управляемостью из любой точки в любую.

Утверждение 1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $(I-Q)B \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $(I-Q)y \equiv 0$. Тогда для системы* (11) *понятие ε-управляемости в нуль за время T является бессодержательным.*

Доказательство. Полагая $u \equiv 0 \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$, получим даже точную управляемость ($\varepsilon = 0$) в нуль за любое время $T > 0$ системы (11).

Утверждение 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, при этом $QB \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $Qy \in W_q^1(0,T;\mathcal{U})$. Для системы* (10) *понятия ε-управляемости из нуля и из любой точки в любую за время T эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} - X^T x_0$. Тогда в силу замечания 1 $x(T;x_0;u) - \tilde{x} = x(T;0;u) - \tilde{\tilde{x}}$. Произвольность $\tilde{x}$ означает произвольность $\tilde{\tilde{x}}$ и наоборот. Поэтому понятия ε-управляемости из нуля и из любой точки в любую эквивалентны.

Утверждение 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален и выполняются условия* (6), (7). *Тогда система* (9) *ε-управляема из любой точки в любую за время T в том и только в том случае, когда она ε-управляема из нуля за время T и выполняется условие* (12).

Доказательство. Прямое утверждение очевидно. Для доказательства обратного заметим, что, как показано в теореме 3, ε-управляемость системы (9) равносильна ε-управляемости каждой из подсистем (10) и (11). Для первой из них в силу утверждения 2 ε-управляемость из нуля эквивалентна ε-управляемости из любой точки в любую, решение же второй системы в момент времени $T > 0$ согласно замечанию 1 вообще не зависит от начального состояния системы.

Замечание 5. Аналогичное утверждение, как нетрудно заметить, справедливо и для системы (11).

Утверждение 3 позволяет в дальнейшем ограничиться рассмотрением понятия ε-управлемости из любой точки в любую за время T, которое, как и прежде, будем называть просто ε-управляемостью за время T.

5. Критерий ε-управляемости за время T

Лемма 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $QB \in C^1([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $Qy \in W_q^1(0,T;\mathcal{Y})$. Тогда система* (10) *$\varepsilon$-управляема за время T в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im} X^{T-s} L_1^{-1} QB(s),\, s \in [0,T]\} = \mathcal{X}^1.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу утверждения 2 можно рассматривать только ε-управляемость из нуля. Предположим, что система не является ε-управляемой. Тогда, сделав замену $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} - \int\limits_0^T X^{T-s} L_1^{-1} Qy(s)ds$, получаем, что множество векторов вида

$$\int\limits_0^T X^{T-s} L_1^{-1} QB(s)u(s)ds, \quad \text{где } u \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U}),$$

не является плотным в пространстве $\mathcal{X}^1$. Тогда по теореме Хана – Банаха существует такой функционал $f \in {\mathcal{X}^1}^* \setminus \{0\}$, что

$$0 = f\left(\int\limits_0^T X^{T-s} L_1^{-1} QB(s)u(s)ds\right) = \int\limits_0^T f\left(X^{T-s} L_1^{-1} QB(s)u(s)\right) ds \tag{13}$$

для любых $u \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$.

Для любой функции $v \in L_1(0,T;\mathcal{U})$ найдется последовательность $\{u_n\} \subset W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = v$ в $L_1(0,T;\mathcal{U})$. Отсюда

$$\left|\int_0^T f(X^{T-s}L_1^{-1}QB(s)u_n(s))ds - \int_0^T f\left(X^{T-s}L_1^{-1}QB(s)v(s)\right)ds\right| \le$$

$$\le \int_0^T \left|f\left(X^{T-s}L_1^{-1}QB(s)(u_n(s)-v(s))\right)\right|ds \le$$

$$\le \|f\|_{\mathcal{X}^{1*}} K e^{|a|T}\|L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Y}^1;\mathcal{X}^1)}\|QB\|_{C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))}\int_0^T \|u_n(s)-v(s)\|_{\mathcal{U}}ds \to 0$$

при $n\to\infty$. Поэтому равенство (13) справедливо для всех функций $u \in L_1(0,T;\mathcal{U})$. Возьмем $t_0 \in (0,T)$ и малое $\delta > 0$, $u_\delta(t) = w \in \mathcal{U}$ при $t \in [t_0-\delta, t_0+\delta]$, $u_\delta(t) = 0$ при $t \in [0,T]\setminus[t_0-\delta,t_0+\delta]$. Тогда в силу непрерывности полугруппы $\{X^t \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ и оператор-функции $B(\cdot)$ выполняется равенство

$$0 = \frac{1}{2\delta}\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} f\left(X^{T-s}L_1^{-1}QB(s)w\right)ds = f\left(X^{T-\xi}L_1^{-1}QB(\xi)w\right),$$

где $\xi \in (t_0-\delta, t_0+\delta)$. Переходя к пределу при $\delta \to 0+$, получим равенство $f\left(X^{T-t_0}L_1^{-1}QB(t_0)w\right) = 0$ для всех $t_0 \in (0,T)$, $w \in \mathcal{U}$. Отсюда и из непрерывности функционала f следует, что $f\left(X^{T-s}L_1^{-1}QB(s)w\right) = 0$ для всех $s \in [0,T]$. Значит, множество $\mathrm{span}\{\mathrm{im} X^{T-s}L_1^{-1}QB(s),\ s \in [0,T]\}$ не плотно в пространстве $\mathcal{X}^1$.

Обратное утверждение очевидно в силу интегрального вида решения уравнения (10) и определения интеграла.

Сформулируем критерий ε-управляемости системы (11).

Лемма 4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, и пусть $(I-Q)B \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $(I-Q)y \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$. Тогда система* (11) *$\varepsilon$-управляема за время T в том и только в том случае, когда выполняется условие* (12) *и*

$$\overline{\mathrm{span}}\left\{\mathrm{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(T),\ l=0,1,\ldots,p\right\} = \mathcal{X}^0.$$

Доказательство. Прямое утверждение леммы следует из леммы 1, вида решения системы (11) и произвольности вектора $\tilde{\tilde{x}} = \tilde{x} + \sum\limits_{k=0}^{p} G^kM_0^{-1}y^{0(k)}(T)$ из $\mathcal{X}^0$. Докажем обратное утверждение. В силу линейности используемых операторов для вектора $\tilde{x} + \sum\limits_{k=0}^{p} G^kM_0^{-1}y^{0(k)}(T) \in \mathcal{X}^0$ при любом $\varepsilon > 0$ существуют такие $u_0, u_1, \ldots, u_p \in \mathcal{U}$, что

$$\left\|-\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(T)u_l - \sum_{k=0}^{p}G^kM_0^{-1}y^{0(k)}(T) - \tilde{x}\right\|_{\mathcal{X}} \le \varepsilon.$$

Поэтому для функции $u(t) = \sum\limits_{k=0}^{p}\frac{(t-T)^k}{k!}u_k$ из $W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{U})$ выполняется неравенство $\|x^0(T;x_0;u) - \tilde{x}\|_{\mathcal{X}} \le \varepsilon$. Утверждение леммы доказано.

Теорема 4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален и выполняются условия* (6), (7)*. Тогда система* (9) *ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда выполняется условие* (12),

$$\overline{\text{span}}\{\text{im}X^{T-s}L_1^{-1}QB(s),\, s\in[0,T]\}=\mathcal{X}^1, \tag{14}$$

$$\overline{\text{span}}\left\{\text{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(T),\, l=0,1,\ldots,p\right\}=\mathcal{X}^0. \tag{15}$$

Доказательство. Необходимость условий (12), (14) и (15) следует из лемм 1, 3 и 4. Достаточными они являются в силу тех же лемм и теоремы 3.

Из полученных критериев в случае постоянной оператор-функции B нетрудно получить следующие утверждения.

Следствие 2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, для всех $t\in[0,T]$ $(I-Q)B(t)\equiv B_1$, $(I-Q)y\in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$. Тогда система* (11) *$\varepsilon$-управляема за время T в том и только в том случае, когда*

$$\text{span}\{\text{im}G^kM_0^{-1}B_1,\, k=0,1,\ldots,p\}=\text{dom}M_0. \tag{16}$$

Доказательство. Из ε-управляемости системы (11) по лемме 1 следует условие (12), которое в случае постоянной оператор-функции $(I-Q)B$ имеет вид (16).

Обратно, из условия (16) и плотной определенности оператора M_0 в $\mathcal{X}^0$ (см. теорему 1 (ii)) следует, что $\overline{\text{span}}\{\text{im}G^kM_0^{-1}B_1,\, k=0,1,\ldots,p\}=\mathcal{X}^0$ и согласно лемме 4 получим ε-управляемость системы (11).

Замечание 6. Из последнего утверждения видно, что в случае постоянной оператор-функции $(I-Q)B$ ε-управляемость системы (11) за время T влечет ее ε-управляемость за любое другое время $T_1>0$.

Следствие 3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $B(t)\equiv B_1$ для всех $t\in[0,T]$ и выполняются условия* (7)*. Тогда система* (9) *ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\text{span}}\{\text{im}X^sL_1^{-1}QB_1,\, s\in[0,T]\}=\mathcal{X}^1,$$
$$\text{span}\{\text{im}G^kM_0^{-1}(I-Q)B_1,\, k=0,1,\ldots,p\}=\text{dom}M_0.$$

6. Понятие и критерий ε-управляемости за свободное время

Введем в рассмотрение еще одно понятие управляемости.

Система (9) называется *ε-управляемой за свободное время,* если для любых $x_0\in\text{dom}M$, $\tilde{x}\in\mathcal{X}$ и $\varepsilon>0$ существует время $T>0$ и функция управления $u\in H_\partial(x_0,y)$, такие, что $\|x(T;x_0;u)-\tilde{x}\|_{\mathcal{X}}\leq\varepsilon$.

Замечание 7. Очевидно, что из ε-управляемости за время T следует ε-управляемость за свободное время.

Лемма 5. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда если $(I-Q)B\in C^{p+1}([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, для всех $T>0$ $(I-Q)y\in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$, то из ε-управляемости за свободное время системы* (11) *следует равенство* (12).

Доказательство. При доказательстве аналогичной леммы 1 время T не играло никакой роли.

Теорема 5. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, для любого $T>0$ $y\in W_q^1(0,T;\mathcal{Y})$, $(I-Q)y\in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$, $B\in C^1([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $(I-Q)B\in C^{p+1}([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$. Тогда система* (9) *$\varepsilon$-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда ε-управляемы за свободное время системы* (10) *и* (11).

Доказательство. Прямое утверждение теоремы очевидно, докажем обратное. Возьмем $x_0 \in \mathrm{dom} M_0$, $\tilde{x} \in \mathcal{X}$. Тогда существует время $T > 0$ и управление $u \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$ для приведения траектории системы (10) в ε-окрестность точки $P\tilde{x}$. Изменив функцию u в достаточно малой левой окрестности точки T, как при доказательстве теоремы 3, получим управление $u_1 \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y})$, которое также за время T приводит траекторию системы (10) в ε-окрестность точки $P\tilde{x}$, при этом за время T траектория системы (11) приходит в ε-окрестность точки $(I-P)\tilde{x}$. Тем самым траектория системы (9) приходит в ε-окрестность точки $\tilde{x} = P\tilde{x} + (I-P)\tilde{x}$ и теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $(I-Q)B(t) \equiv B_1$, $(I-Q)y \equiv 0$ для всех $t \geq 0$. Тогда система (11) ε-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда она ε-управляема за время T при любом $T > 0$.*

Доказательство. Обратное утверждение теоремы 6 очевидно, докажем прямое утверждение. Пусть система (11) ε-управляема из нуля за свободное время, то есть для любых $\tilde{x} \in \mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $T_{\tilde{x},\varepsilon} > 0$ и управление $u \in W_q^{p+1}(0,T_{\tilde{x},\varepsilon};\mathcal{U})$, такие, что

$$\left\| -\sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1} B_1 u^{(k)}(T_{\tilde{x},\varepsilon}) - \tilde{x} \right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon.$$

Покажем, что система (11) ε-управляема за время T. Если $T > T_{\tilde{x},\varepsilon}$, то возьмем функцию управления $v(t) = u(t - T + T_{\tilde{x},\varepsilon})$ при $t \in [T - T_{\tilde{x},\varepsilon}, T]$,

$$v(t) = \sum_{k=0}^{p} u^{(k)}(0) \frac{(t - T + T_{\tilde{x},\varepsilon})^k}{k!},\ t \in [0, T - T_{\tilde{x},\varepsilon}].$$

Если $T \leq T_{\tilde{x},\varepsilon}$, достаточно взять $v(t) = u(t - T + T_{\tilde{x},\varepsilon})$ при $t \in [0,T]$.

Критерии ε-управляемости за свободное время рассматриваемых систем докажем только в случае $y \equiv 0$.

Лемма 6. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, и пусть $Qy \equiv 0$, $QB \in C^1([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$. Тогда система (10) ε-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\mathrm{span}}\{\mathrm{im} X^{s_1} L_1^{-1} Q B(s_2),\ s_1, s_2 \geq 0\} = \mathcal{X}^1.$$

Доказательство. Рассуждая от противного, как при доказательстве леммы 3, получим равенство $f\left(X^{T-t_0} L_1^{-1} Q B(t_0) w\right) = 0$ для всех $T > 0$, $t_0 \in [0,T]$, $w \in \mathcal{U}$. Отсюда следует, что $f\left(X^{s_1} L_1^{-1} Q B(s_2) w\right) = 0$ для всех $s_1, s_2 \geq 0$ в силу произвольности $T \geq 0$. Поэтому из предположения о том, что система (10) не является ε-управляемой за свободное время, следует, что множество $\mathrm{span}\{\mathrm{im} X^{s_1} L_1^{-1} Q B(s_2),\ s_1, s_2 \geq 0\}$ не плотно в пространстве $\mathcal{X}^1$.

Прямое утверждение леммы следует из интегрального вида решения и определения интеграла.

Лемма 7. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, и пусть $(I-Q)B \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $(I-Q)y \equiv 0$. Тогда система (11) ε-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда*

$$\mathrm{span}\left\{ \mathrm{im} \sum_{k=l}^{p} \frac{k! G^k M_0^{-1}}{l!(k-l)!} B_0^{(k-l)}(0),\ l = 0,1,\ldots,p \right\} = \mathrm{dom} M_0. \tag{17}$$

Доказательство. Из ε-управляемости системы (11) следует условие (17) в силу леммы 5.

Рассуждая, как при доказательтве леммы 4, нетрудно показать, что ε-управляемость за свободное время системы (11) равносильна выполнению условия

$$\bigcup_{T>0}\overline{\text{span}}\left\{\text{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(T),\, l=0,1,\dots,p\right\}=\mathcal{X}^0. \tag{18}$$

В силу замкнутости подпространства $\mathcal{X}^0$ и непрерывности оператор-функций $B_0^{(k)}$, $k=0,1,\dots,p$, множество (18) совпадает со множеством

$$\bigcup_{T\geq 0}\overline{\text{span}}\left\{\text{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(T),\, l=0,1,\dots,p\right\}$$

и поэтому содержит множество

$$\overline{\text{span}}\left\{\text{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0),\, l=0,1,\dots,p\right\}.$$

Из сильной (L,p)-радиальности оператора M следует, что оператор M_0 плотно определен в $\mathcal{X}^0$, поэтому и в силу проведенных рассуждений из равенства (17) следует равенство (18), а значит, и ε-управляемость за свободное время системы (11). □

Замечание 8. С помощью лемм 4 и 7 нетрудно получить другое доказательство теоремы 6.

Из теоремы 5 и лемм 6, 7 следует критерий ε-управляемости за свободное время системы (9).

Теорема 7. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $y\equiv 0$, оператор $B\in C^1([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$, $(I-Q)B\in C^{p+1}([0,+\infty);\mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{Y}))$. Тогда система* (9) *$\varepsilon$-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\text{span}}\{\text{im}X^{s_1}L_1^{-1}QB(s_2),\, s_1,s_2\geq 0\}=\mathcal{X}^1, \tag{19}$$

$$\text{span}\left\{\text{im}\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}B_0^{(k-l)}(0),\, l=0,1,\dots,p\right\}=\text{dom}M_0. \tag{20}$$

Как и в случае ε-управляемости за время T, для постоянного оператора B последнее утверждение примет более простой вид.

Следствие 4. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $B(t)\equiv B_1$ для всех $t\geq 0$, $y\equiv 0$. Тогда система* (9) *ε-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\text{span}}\{\text{im}X^{s}L_1^{-1}QB_1,\, s\geq 0\}=\mathcal{X}^1,$$
$$\text{span}\{\text{im}G^kM_0^{-1}(I-Q)B_1,\, k=0,1,\dots,p\}=\text{dom}M_0.$$

7. Управляемость уравнения Дзекцера

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим систему управления, описываемую уравнением Дзекцера

$$(\lambda-\Delta)w_t(x,t)=\alpha\Delta w(x,t)-\beta\Delta^2 w(x,t)+c(t)\triangle u(x,t),\ (x,t)\in\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{21}$$

$\lambda,\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}_+$, $c:\overline{\mathbb{R}}_+\to\mathbb{R}$, с краевыми условиями

$$\nu\frac{\partial}{\partial n}w+(1-\nu)w=\nu\frac{\partial}{\partial n}\Delta w+(1-\nu)\Delta w=0,\ (x,t)\in\partial\Omega\times\overline{\mathbb{R}}_+, \tag{22}$$

где $\nu\in\mathbb{R}$. Для ее редукции к системе вида (9) выберем

$$\mathcal{X}=H_\nu^2(\Omega)=\left\{v\in W_2^2(\Omega):\nu\frac{\partial}{\partial n}v(x)+(1-\nu)v(x)=0,\, x\in\partial\Omega\right\},$$

$$\mathcal{Y} = L_2(\Omega), \quad L = \lambda - \Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y}), \quad M = \alpha\Delta - \beta\Delta^2 \in \mathcal{C}l(\mathcal{X};\mathcal{Y}),$$

$$\mathrm{dom}M = H_\nu^4(\Omega) = \left\{ v \in W_2^4(\Omega) : \left(\nu\frac{\partial}{\partial n} + 1 - \nu\right) v(x) = \right.$$

$$\left. = \left(\nu\frac{\partial}{\partial n} + 1 - \nu\right) \Delta v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \right\}.$$

При этом $B(t) = c(t)\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ при любом $t \geq 0$.

Далее используется обозначение A_ν для самосопряженного оператора из $\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения $\mathrm{dom}A_\nu = H_\nu^2(\Omega)$, $A_\nu z = \Delta z$, $z \in \mathrm{dom}A_\nu$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ будут обозначаться ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A_ν, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности. При этом используется тот известный факт, что спектр $\sigma(A_\nu)$ оператора A_ν дискретен, конечнократен и сгущается только к $-\infty$.

Теорема 8. *Пусть $\beta > 0$, $\alpha\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, $c \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$. Тогда система* (21), (22) *ε-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда $c(0) \neq 0$. Если $c(0) \neq 0$, $c(T) \neq 0$, то система* (21), (22) *ε-управляема за время $T > 0$.*

Доказательство. В теореме 5 [23] доказана сильная $(L,0)$-радиальность оператора M, где L, M соответствуют классу краевых задач, в который входит задача (21), (22). Согласно этому результату, если $\beta > 0$, $\alpha\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, то оператор M сильно $(L,0)$-радиален, где L, M – определенные в данном параграфе операторы. При этом $Q = \sum\limits_{\lambda_k \neq \lambda} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$, $I - Q = \sum\limits_{\lambda_k = \lambda} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k$.

Нетрудно заметить, что в рассматриваемой ситуации если $c(t) \neq 0$ для некоторого $t \geq 0$, то $\mathrm{im}B(t) = \mathcal{Y}$, $\mathrm{im}QB(t) = \mathcal{Y}^1$, $\mathrm{im}(I-Q)B(t) = \mathcal{Y}^0$, $\mathrm{im}M_0^{-1}(I-Q)B(t) = \mathrm{dom}M_0$.

Таким образом, если $c(0) \neq 0$, то с учетом замечания 3 выполняется условие (20) теоремы 7, при этом в силу гомеоморфности оператора $L_1 : \mathcal{X}^1 \to \mathcal{Y}^1$ справедливо равенство $\mathrm{im}L_1^{-1}QB(0) = \mathcal{X}^1$. Поэтому выполняется условие (19) и система (21), (22) ε-управляема за свободное время. Обратно, если $c(0) = 0$, то не имеет места равенство (20) и по теореме 7 система (21), (22) не является ε-управляемой за свободное время.

Пусть $c(0) \neq 0$, $c(T) \neq 0$, тогда выполняется условие (15) и при этом $\mathrm{im}L_1^{-1}QB(T) = \mathcal{X}^1$. Следовательно, условие (14) теоремы 4 также выполняется и система (21), (22) ε-управляема за время T.

Замечание 9. Отметим, что условие $c(T) \neq 0$ не является необходимым для ε-управляемости за время $T > 0$ системы (21), (22).

8. Линеаризованная квазистационарная система уравнений фазового поля

Исследуем управляемость линеаризованной квазистационарной системы уравнений фазового поля

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}z(x,t) = \Delta z(x,t) - \Delta\theta(x,t) + a_{11}(t)u_1(x,t) + a_{12}(t)u_2(x,t), \\ \Delta\theta(x,t) - \beta\theta(x,t) + z(x,t) + a_{21}(t)u_1(x,t) + a_{22}(t)u_2(x,t) = 0, \\ \hfill (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \end{array} \tag{23}$$

с краевыми условиями

$$\begin{array}{l} \nu\frac{\partial}{\partial n}z(x,t) + (1-\nu)z(x,t) = 0, \\ \nu\frac{\partial}{\partial n}\theta(x,t) + (1-\nu)\theta(x,t) = 0, \end{array} \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{24}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\nu, \beta \in \mathbb{R}$. Возьмем $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{U} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left((L_2(\Omega)^2\right), \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ I & -\beta I + \Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}l\left((L_2(\Omega)^2\right),$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left((L_2(\Omega)^2\right), \quad t \geq 0.$$

Теорема 9. *Пусть $\beta \notin \sigma(A_\nu)$, $a_{ij} \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$, $i,j = 1,2$. Тогда при условии выполнения неравенства $a_{11}(0)a_{22}(0) - a_{12}(0)a_{21}(0) \neq 0$ система* (23), (24) *ε-управляема за свободное время. Если выполняются неравенства $a_{21}^2(0) + a_{22}^2(0) \neq 0$, $a_{11}(T)a_{22}(T) - a_{12}(T)a_{21}(T) \neq 0$, то система* (23), (24) *ε-управляема за время T.*

Доказательство. В работе [24] показано, что при $\beta \notin \sigma(A_\nu)$ оператор M сильно $(L,0)$-радиален,

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ (\beta I - A_\nu)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & -A_\nu(\beta I - A_\nu)^{-1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{X}^1 = \mathrm{im}P = \{(v, (\beta I - A_\nu)^{-1}v) : v \in L_2(\Omega)\},$$
$$\mathcal{X}^0 = \ker P = \{0\} \times L_2(\Omega), \quad \mathcal{Y}^1 = \mathrm{im}Q = L_2(\Omega) \times \{0\},$$
$$\mathcal{Y}^0 = \ker Q = \{(v,w) \in (L_2(\Omega))^2 : \, v = A_\nu(\beta I - A_\nu)^{-1}w\}.$$

Нетрудно показать, что оператор $B(t)$ в данной задаче таков, что при $t \geq 0$ $\mathrm{im}B(t) = \mathcal{Y}$ тогда и только тогда, когда $a_{11}(t)a_{22}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t) \neq 0$; кроме того, $\mathrm{im}(I-Q)B(t) = \mathcal{Y}^0$, если и только если $a_{21}^2(t) + a_{22}^2(t) \neq 0$.

Поэтому в случае $a_{11}(0)a_{22}(0) - a_{12}(0)a_{21}(0) \neq 0$ имеем $\mathrm{im}QB(0) = \mathcal{Y}^1$, $\mathrm{im}(I-Q)B(0) = \mathcal{Y}^0$ и с учетом замечания 3 и гомеоморфности оператора L_1 по теореме 7 система (23), (24) ε-управляема за свободное время.

Условие $a_{21}^2(0) + a_{22}^2(0) \neq 0$ при этом в точности означает выполнение необходимого условия (12) ε-управляемости системы (23), (24) за время T. Условие $a_{11}(T)a_{22}(T) - a_{12}(T)a_{21}(T) \neq 0$ в силу вышесказанного в рамках данной задачи означает, что $\mathrm{im}QB(T) = \mathcal{Y}^1$, $\mathrm{im}(I-Q)B(T) = \mathcal{Y}^0$. Поэтому условие (15) выполняется с учетом замечания 3. Осталось заметить, что условие (14) выполняется, поскольку имеет место цепочка вложений

$$\mathcal{X}^1 \supset \mathrm{span}\{\mathrm{im}X^{T-s}L_1^{-1}QB(s) : s \in [0,T]\} \supset \mathrm{im}L_1^{-1}QB(T) = \mathcal{X}^1.$$

9. Управляемость алгебро-дифференциальной системы уравнений с частными производными

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{array}{l} v_{1t}(x,t) = \triangle v_1(x,t) + \alpha(t)u_1(x,t), \\ v_{3t}(x,t) = \triangle v_2(x,t) + \beta(t)u_2(x,t), \\ \quad 0 = \triangle v_3(x,t) + \gamma(t)u_3(x,t), \end{array} \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{25}$$

с краевыми условиями

$$v_i(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad i = 1,2,3. \tag{26}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, функции $\alpha, \beta, \gamma : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathbb{R}$.

Возьмем $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \mathcal{U} = (L_2(\Omega))^3$, $\mathrm{dom}M = \left(H_0^2(\Omega)\right)^3$,

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \, M = \begin{pmatrix} \triangle & 0 & 0 \\ 0 & \triangle & 0 \\ 0 & 0 & \triangle \end{pmatrix}, \, B(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 & 0 \\ 0 & \beta(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{pmatrix}$$

при $t \geq 0$. В работе [17] была показана сильная $(L,1)$-радиальность оператора M, где L, M – определенные выше операторы, и найдены подпространства

$$\mathcal{X}^0 = \mathcal{Y}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega), \quad \mathcal{X}^1 = \mathcal{Y}^1 = L_2(\Omega) \times \{0\} \times \{0\}$$

и операторы $L_1^{-1} = I : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$,

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \triangle^{-1} & 0 \\ 0 & \triangle^{-1} \end{pmatrix}, \ G = \begin{pmatrix} 0 & \triangle^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ GM_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \triangle^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вырожденная подсистема (11) в данной ситуации имеет вид

$$\begin{pmatrix} \triangle^{-1} v_{3t}(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2(x,t) + \beta(t)\triangle^{-1} u_2(x,t) \\ v_3(x,t) + \gamma(t)\triangle^{-1} u_3(x,t) \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Лемма 8. *Пусть $\beta \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$, $\gamma \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$. Тогда система* (26), (27) *ε-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда $\beta(0)\gamma(0) \neq 0$. Система* (26), (27) *ε-управляема за время T в том и только в том случае, когда $\beta(0)\gamma(0)\beta(T)\gamma(T) \neq 0$.*

Доказательство. Критерий ε-управляемости за свободное время для системы (26), (27) согласно лемме 7 (условие (17)) имеет вид

$$\operatorname{span}\left\{\operatorname{im}\begin{pmatrix} \beta(0)\triangle^{-1} & \gamma'(0)\triangle^{-2} \\ 0 & \gamma(0)\triangle^{-1} \end{pmatrix}, \operatorname{im}\begin{pmatrix} 0 & \gamma(0)\triangle^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = (H_0^2(\Omega))^2.$$

Очевидно, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\beta(0) \neq 0$, $\gamma(0) \neq 0$.

В то же время это условие является необходимым для ε-управляемости за время T системы (26), (27). При его выполнении критерием ε-управляемости за время T в силу леммы 4 является равенство

$$\operatorname{span}\left\{\operatorname{im}\begin{pmatrix} \beta(T)\triangle^{-1} & \gamma'(T)\triangle^{-2} \\ 0 & \gamma(T)\triangle^{-1} \end{pmatrix}, \operatorname{im}\begin{pmatrix} 0 & \gamma(T)\triangle^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = (H_0^2(\Omega))^2.$$

Лемма доказана.

Теорема 10. *Пусть $\alpha, \beta \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$, $\gamma \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$. Тогда если $\alpha(t)\beta(0)\gamma(0) \neq 0$ при некотором $t \geq 0$, то система* (25), (26) *ε-управляема за свободное время. Если $\beta(0)\gamma(0)\alpha(T)\beta(T)\gamma(T) \neq 0$, то система* (25), (26) *ε-управляема за время T.*

Доказательство. По теореме 7 критерием ε-управляемости за свободное время системы (25), (26) является совокупность двух условий: $\beta(0)\gamma(0) \neq 0$ (согласно лемме 8) и $\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} X^{s_1} QB(s_2),\, s_1, s_2 \geq 0\} = \mathcal{Y}^1$. Это равенство в данной ситуации выполняется, если не является тождественно нулевой функция α, умножением на значение $\alpha(t)$ которой задается действие оператора $QB(t)$ при $t \geq 0$.

Далее, имеем вложение

$$\overline{\operatorname{im}} L_1^{-1} QB(T) \subset \overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} X^{T-s} L_1^{-1} QB(s),\, 0 \leq s \leq T\}.$$

Если $\alpha(T) \neq 0$, то $\operatorname{im} QB(T) = \mathcal{Y}^1$, поэтому $\operatorname{im} L_1^{-1} QB(T) = \mathcal{X}^1$ и выполняется условие (14) из теоремы 4. При $\beta(0)\gamma(0)\beta(T)\gamma(T) \neq 0$ с учетом леммы 8 получаем в таком случае ε-управляемость за время T системы (25), (26).

Замечание 10. Таким образом, если $\beta(0)\gamma(0) = 0$, то система (25), (26) не является ε-управляемой даже за свободное время.

Замечание 11. Если строго следовать результатам параграфов 4 и 5, то в лемме 8 и в теореме 10 надо требовать выполнение условия $\beta \in C^2(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$. Однако, непосредственно исследуя данную систему, можно заметить, что достаточно, чтобы выполнялось условие $\beta \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathbb{R})$, а требование излишней гладкости наследовано из абстрактной постановки задачи.

10. Об ε-управляемости вырожденных систем с конечномерным входом

Предположим теперь, что заданы вектор-функции $y : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{Y}$, $b_i : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \mathcal{Y}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Рассмотрим систему управления

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t)u_i(t) + y(t). \tag{28}$$

Она является частным случаем системы (9). Чтобы убедиться в этом, достаточно взять $\mathcal{U} = \mathbb{R}^m$, $B(t)u(t) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i(t)u_i(t)$ при $t \geq 0$. Такие системы управления называются системами с конечномерным входом. Понятно, что при всех $t \geq 0$ для оператора заданного вида $B(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathcal{Y})$.

Согласно теореме 1 уравнение (28) редуцируется к системе двух уравнений

$$\dot{x}^1(t) = S_1 x^1(t) + L_1^{-1} \sum_{i=1}^{m} b_i^1(t)u_i(t) + L_1^{-1} y^1(t), \tag{29}$$

$$G\dot{x}^0(t) = x^0(t) + M_0^{-1} \sum_{i=1}^{m} b_i^0(t)u_i(t) + M_0^{-1} y^0(t). \tag{30}$$

Здесь $b_i^1(t) = Qb_i(t)$, $b_i^0(t) = (I - Q)b_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $x^1(t) = Qx(t)$, $x^0(t) = (I - Q)x(t)$, $y^1(t) = Qy(t)$, $y^0(t) = (I - Q)y(t)$, $t \geq 0$. Решение задачи Коши $x(0) = x_0$ для уравнения (28) имеет вид

$$x(t) = X^t x_0 + \int_0^t X^{t-s} L_1^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^1(s)u_i(s) + y^1(s) \right) ds -$$

$$- \sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^0(t)u_i(t) + y^0(t) \right)^{(k)}.$$

При этом первые два слагаемых дают решение уравнения (29), а последняя сумма – решение уравнения (30). Вектор-функции управления $u = (u_1, \ldots, u_m)$ будут выбираться из пространства $W_q^{p+1}(0, T; \mathbb{R}^m)$, $q \geq 1$, с некоторым $T > 0$. Через $H_\partial(x_0, y)$ обозначим множество вектор-функций $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in W_q^{p+1}(0, T; \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющих условию

$$(I - P)x_0 = - \sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i^0 u_i + y^0 \right)^{(k)} (0) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!(k-l)!} G^k M_0^{-1} b_i^{0(k-l)}(0) u_i^{(l)}(0) - \sum_{k=0}^{p} G^k M_0^{-1} y^{0(k)}(0),$$

которое необходимо для разрешимости задачи Коши для уравнения (28) (см. теорему 2).

Лемма 9. *Пусть оператор M сильно (L, p)-радиален, $b_i^0 \in C^{p+1}([0, T]; \mathcal{Y}^0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $y^0 \in W_q^{p+1}(0, T; \mathcal{Y}^0)$. Если система (30) ε-управляема за время T, то $\mathcal{X}^0$ не более, чем $(p + 1)m$-мерно, при этом*

$$\mathrm{span} \left\{ \sum_{k=l}^{p} \frac{k! G^k M_0^{-1}}{l!(k-l)!} b_i^{0(k-l)}(0),\ l = 0, 1, \ldots p,\ i = 1, 2, \ldots, m \right\} = \mathrm{dom} M_0 = \mathcal{X}^0. \tag{31}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует первое равенство в (31). Второе равенство следует из доказанной таким образом конечномерности области определения $\mathrm{dom}M_0$ и ее плотности в $\mathcal{X}^0$.

Следствие 5. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $b_i^0 \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y}^0)$, $i=1,2,\dots,m$, $y^0 \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y}^0)$. Тогда ε-управляемость системы* (30) *за время T равносильна ее точной управляемости за время T.*

Доказательство. В конечномерном пространстве ε-управляемость системы эквивалентна ее точной управляемости ($\varepsilon = 0$).

Следствие 6. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $b_i^0 \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y}^0)$, $i=1,2,\dots,m$, $y^0 \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y}^0)$. Тогда из ε-управляемости за свободное время системы* (30) *следует, что $M_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{X}^0;\mathcal{Y}^0)$.*

Доказательство. Утверждение следствия сразу следует из второго равенства в (31) и замкнутости оператора M_0.

Лемма 10. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $b_i^0 \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y}^0)$, $i=1,2,\dots,m$, $y^0 \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y}^0)$. Тогда система* (30) *$\varepsilon$-управляема за время T в том и только в том случае, когда выполняется* (31) *и*

$$\mathrm{span}\left\{\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}b_i^{0(k-l)}(T),\, l=0,1,\dots p,\, i=1,2,\dots,m\right\} = \mathrm{dom}M_0 = \mathcal{X}^0.$$

Доказательство. Из леммы 9 следует равенство (31), а из леммы 4 – равенство

$$\mathcal{X}^0 = \overline{\mathrm{span}}\left\{\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}b_i^{0(k-l)}(T),\, l=0,1,\dots p,\, i=1,2,\dots,m\right\} =$$
$$= \mathrm{span}\left\{\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}b_i^{0(k-l)}(T),\, l=0,1,\dots p,\, i=1,2,\dots,m\right\},$$

поскольку система векторов конечна.

Обратно, пусть для любого $x^0 \in \mathrm{dom}M_0 = \mathcal{X}^0$ существуют такие $c_i^l \in \mathbb{R}$, $l=0,1,\dots,p$, $i=1,2,\dots,m$, что $x^0 = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{l=0}^{p}c_i^l\sum\limits_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}b_i^{0(k-l)}(T)$. Выберем такие константы для $x^0 = -\tilde{x} - \sum\limits_{k=0}^{p}G^kM_0^{-1}y^{0(k)}(T)$ и, построив вектор-функцию управления с помощью равенств

$$u_i(t) = -\sum_{l=0}^{p}c_i^l\frac{(t-T)^l}{l!}, \quad i=1,2,\dots,m,$$

получим $x(T;u) = \tilde{x}$. Доказана точная управляемость рассматриваемой системы за время T.

Из лемм 9, 10 получим критерий ε-управляемости за время T системы (28).

Теорема 11. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, вектор-функции $b_i \in C^1([0,T];\mathcal{Y})$, $i=1,2,\dots,m$, $y \in W_q^1(0,T;\mathcal{Y})$ таковы, что $b_i^0 \in C^{p+1}([0,T];\mathcal{Y}^0)$, $i=1,2,\dots,m$, $y^0 \in W_q^{p+1}(0,T;\mathcal{Y}^0)$. Тогда система* (28) *$\varepsilon$-управляема за время T в том и только в том случае, когда выполняется условие* (31),

$$\overline{\mathrm{span}}\{X^{T-s}L_1^{-1}b_i^1(s),\, s\in[0,T],\, i=1,2,\dots,m\} = \mathcal{X}^1,$$
$$\mathrm{span}\left\{\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}b_i^{0(k-l)}(T),\, l=0,1,\dots p,\, i=1,2,\dots,m\right\} = \mathrm{dom}M_0 = \mathcal{X}^0.$$

Замечание 12. При $m = 1$ и $m = 2$ и постоянных $b_1, b_2 \in \mathcal{Y}$ из теоремы 11 следуют основные результаты работы [21].

Аналогичные результаты об ε-управляемости систем (28), (30) за свободное время следуют из леммы 7 и теоремы 7. Критерий ε-управляемости системы (28) за свободное время, как и в случае систем с оператором управления общего вида, имеет более простой вид, чем критерий ε-управляемости за время T.

Теорема 12. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $b_i \in C^1([0,+\infty);\mathcal{Y})$ таковы, что $b_i^0 \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathcal{Y}^0)$, $i = 1,2,\ldots,m$, $y \equiv 0$. Тогда система (28) ε-управляема за свободное время в том и только в том случае, когда*

$$\overline{\mathrm{span}}\{X^{s_1}L_1^{-1}b_i^1(s_2),\, s_1,s_2 \geq 0,\, i = 1,2,\ldots,m\} = \mathcal{X}^1,$$

а пространство $\mathcal{X}^0$ не более, чем $(p+1)m$-мерно, при этом

$$\mathrm{span}\left\{\sum_{k=l}^{p}\frac{k!G^kM_0^{-1}}{l!(k-l)!}b_i^{0(k-l)}(0),\, l = 0,1,\ldots p,\, i = 1,2,\ldots,m\right\} = \mathrm{dom}M_0 = \mathcal{X}^0.$$

11. Примеры систем с конечномерным входом

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ рассмотрим систему управления с конечномерным входом

$$(\lambda - \triangle)v_t(x,t) = \alpha\triangle v(x,t) - \beta\triangle^2 v(x,t) + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_i(x,t)u_i(t), \quad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{32}$$

снабженную краевыми условиями (22). Здесь $\hat{b}_i(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$ при $t \geq 0$, $i = 1,2,\ldots,m$.

Утверждение 4. *Пусть $\beta > 0$, $\alpha\lambda - \beta\lambda^2 \neq 0$, функции $\hat{b}_i \in C^1([0,+\infty);L_2(\Omega))$, $i = 1,2,\ldots,m$. Если система (32), (22) ε-управляема за свободное время, то система векторов*

$$\left\{\sum_{\lambda_k=\lambda}\langle\hat{b}_i(\cdot,0),\varphi_k\rangle\varphi_k,\, i = 1,2,\ldots,m\right\} \subset L_2(\Omega)$$

содержит базис подпространства $\mathcal{Y}^0 = \mathrm{span}\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\}$.

Доказательство. Выберем операторы L, M, как в §7. По теореме 12 с учетом замечания 3 в случае ε-управляемости за свободное время системы (32), (22) выполняется равенство $\mathrm{dom}M_0 = \mathrm{span}\{M_0^{-1}b_i^0(0),\, i = 1,2,\ldots,m\}$, которое равносильно равенству $\mathcal{Y}^0 = \mathrm{span}\{b_i^0(0),\, i = 1,2,\ldots,m\}$, при этом $b_i^0(0) = \sum\limits_{\lambda_k=\lambda}\langle\hat{b}_i(\cdot,0),\varphi_k\rangle\varphi_k$.

Замечание 13. В частности из утверждения 4 следует, что если система (32), (22) ε-управляема за свободное время, то кратность собственного значения $\lambda \in \sigma(A_\nu)$ не больше m. Действительно, по лемме 12 подпространство $\mathcal{X}^0$, а значит и $\mathcal{Y}^0$, в этом случае не более, чем m-мерно.

Для системы уравнений

$$\begin{aligned}
&v_{1t}(x,t) = \Delta v_1(x,t) + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_i^1(x,t)u_i(t),\\
&v_{3t}(x,t) = \Delta v_2(x,t) + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_i^2(x,t)u_i(t), \qquad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+,\\
&0 = \Delta v_1(x,t) + \sum_{i=1}^{m}\hat{b}_i^3(x,t)u_i(t),
\end{aligned}$$

где при $t \geq 0$ $\hat{b}_i^j(\cdot,t) \in L_2(\Omega)$, $i = 1,2,\ldots,m$, $j = 1,2,3$, с краевыми условиями (26) подпространство $\mathcal{X}^0 = \{0\} \times L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ бесконечномерно (см. §9). Поэтому условия теоремы 12 не выполняются и эта система не является ε-управляемой даже за свободное время ни при каком $m \in \mathbb{N}$. То же самое можно сказать про линеаризованную квазистационарную систему уравнений фазового поля (см. §8)

$$\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}z(x,t) = \Delta z(x,t) - \Delta\theta(x,t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \hat{b}_i^1(x,t)u_i(t), \\ \Delta\theta(x,t) - \beta\theta(x,t) + z(x,t) + \sum\limits_{i=1}^{m} \hat{b}_i^2(x,t)u_i(t) = 0, \end{array} \qquad (x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+,$$

с краевыми условиями (24).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* Наука. 1968. 359 с.
2. R.E. Kalman, Y.C. Ho, K.S. Narendra *Controllability of linear dynamical systems* // Contrib. Different. Equat. Vol. 1, № 2. 1963. P. 189–213.
3. H.O. Fattorini *On complete controllability of linear systems* // J. Different. Equat. 1967. Vol. 3. P. 391–402.
4. Шолохович Ф.А. *Об управляемости в гильбертовом пространстве* // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 3. С. 479–484.
5. Куржанский А.Б. *К управляемости в банаховых пространствах* // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 9. С. 1715–1718.
6. R. Triggiani *Controllability and observability in Banach space with bounded operators* // SIAM J. on Control. 1975. Vol. 13, № 2. P. 462–491.
7. Шкляр Б.Ш. *К управляемости линейных систем с распределёнными параметрами* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 3. С. 467–471.
8. B. Shklyar *Exact null controllability of abstract differential equations by finite-dimensional control and strongly minimal families of exponentials* // Differential Equations and Applications. 2011. Vol. 2, № 3. P. 171–188.
9. R.F. Curtain *The Salamon–Weiss class of well-posed infinite dimensional linear systems: a survey* // IMA J. Math. Control Inform. 1997. Vol. 14. P. 207-–223.
10. Шолохович Ф.А. *Об управляемости линейных динамических систем* // Изв. УрГУ. 1998. Т. 10, № 1. С. 103–126.
11. J. Klamka *Controllability of dynamical systems. A survey* // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. 2013. Vol. 61, № 2. P. 335–342.
12. D. Salamon *On controllability and observability of time delay systems* // IEEE Transactions on Automatic Control. 1984. Vol. AC-29, № 5. P. 432–439.
13. R. Rebarber, G. Weiss *Necessary conditions for exact controllability with a finite-dimensional input space* // Systems and Control Letters. 2000. Vol. 40. P. 217–227.
14. Плеханова М.В., Фёдоров В.Е. *О существовании и единственности решений задач оптимального управления линейными распределёнными системами, не разрешенными относительно производной по времени* // Изв. РАН. Сер. мат. 2011. Т. 75, № 2. С. 177–194.
15. Фёдоров В.Е. *Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами* // Докл. Академии наук. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.
16. V.E. Fedorov *Degenerate strongly continuous semigroups of operators* // St. Petersbg. Math. J. 2001. Vol. 12, № 3. P. 471–489.
17. Рузакова О.А., Фёдоров В.Е. *Об ε-управляемости линейных уравнений, не разрешенных относительно производной в банаховых пространствах* // Вычислит. технологии. 2005. Т. 10, № 5. С. 90–102.
18. Фёдоров В.Е., Рузакова О.А. *Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно p-радиальными операторами* // Изв. вузов. Математика. 2002. № 7. С. 54–57.
19. Рузакова О.А. *Управляемость линейных уравнений соболевского типа в смысле сильных решений* // Аналитическая механика, устойчивость и управление движением: тр. IX Междунар. Четаевской конф., посвящ. 100-летию Н.Г. Четаева. Иркутск: Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН, 2007. С. 168–180.

20. Фёдоров В.Е., Рузакова О.А. *Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа* // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 8. С. 1137–1139.
21. Фёдоров В.Е., Рузакова О.А. *Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах* // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 618–628.
22. Фёдоров В.Е., Шкляр Б. *Полная нуль-управляемость вырожденных эволюционных уравнений скалярным управлением* // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 12. С. 137–156.
23. Фёдоров В.Е., Рузакова О.А. *О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа* // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 4. С. 189–217.
24. Фёдоров В.Е., Уразаева А.В. *Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений* // Тр. Воронежск. зимн. мат. шк. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2004. С. 161–172.

Марина Васильевна Плеханова,
ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет»
(научно-исследовательский университет),
пр. Ленина, 76,
454080, г. Челябинск, Россия
E-mail: mariner79@mail.ru

Владимир Евгеньевич Федоров,
ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»,
ул. Братьев Кашириных, 129,
454001, г. Челябинск, Россия
E-mail: kar@csu.ru