

# ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ С ТОНКИМИ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

К.П. ИСАЕВ, Р.С. ЮЛМУХАМЕТОВ, А.А. ЮНУСОВ

**Аннотация.** В статье предлагается конструкция целой функции, логарифм модуля которой асимптотически аппроксимирует данную субгармоническую функцию вида  $\tilde{h}(\operatorname{Re} z)$ , где  $\tilde{h}$  — сопряженная по Юнгу к выпуклой функции  $h(t)$  на интервале  $(-1; 1)$ . Такие функции находят применение в вопросах представления рядами экспонент в интегрально-весовых пространствах функций на интервале  $(1; 1)$  с весом  $\exp h(t)$ . При этом чем больше точность аппроксимации, тем в более тонких топологиях можно рассматривать представление рядами экспонент. Для функций  $h$ , удовлетворяющих условию  $(1 - |t|)^n = O(\exp(h(t)))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , соответствующие целые функции были построены ранее. В данной статье рассматриваются функции, удовлетворяющие условию  $\exp(h(t)) = o((1 - |t|)^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . В предлагаемой конструкции учтены необходимые условия на распределение показателей безусловных базисов из экспонент, полученные в предыдущих работах. Поэтому основной результат статьи (теорема 1) следует рассматривать не как инструмент, пригодный для конструкции безусловных базисов из экспонент, а как аргумент в пользу гипотезы об отсутствии таковых.

**Ключевые слова:** целые функции, субгармонические функции, мера Рисса, гильбертовы пространства, базисы Рисса.

**Mathematics Subject Classification:** 30D20

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об аппроксимации субгармонических функций логарифмом модуля аналитической функции возникла в теории целых функций. Первый общий результат по этой задаче был доказан в работе [1]. В работе [2] доказано существенное уточнение теоремы В.С. Азарина.

**Теорема А.** *Для любой субгармонической на плоскости функции и конечного порядка существует целая функция  $f$ , удовлетворяющая условию*

$$|u(z) - \ln |f(z)|| = O(\ln |z|), \quad z \notin E, \quad |z| \rightarrow \infty.$$

*Исключительное множество мало, например, имеет конечную лебегову меру.*

Эта теорема в общем случае неуплучшаема и оптимальна в смысле оценки разности и размеров исключительного множества. Однако, в применениях подобных результатов в смежных вопросах комплексного анализа потребовались более тонкие оценки разности. За счет дополнительных условий на функцию  $u$  и за счет увеличения исключительного множества  $E$  более тонкие оценки разности удалось получить, например, в работах [3]–[5].

---

К.П. ISAEV, R.S. YULMUKHAMETOV, A.A. YUNUSOV, ENTIRE FUNCTIONS WITH FINE ASYMPTOTIC ESTIMATES FOR CONVEX FUNCTIONS.

© ИСАЕВ К.П., ЮЛМУХАМЕТОВ Р.С., ЮНУСОВ А.А. 2014.

Поступила 22 февраля 2014 г.

В последней работе рассматриваются функции вида  $\tilde{h}(z) = \tilde{h}(\operatorname{Re} z)$ , являющиеся преобразованием Юнга выпуклой функции  $h(t)$  на интервале  $(-1; 1)$  вещественной оси. Приближение таких функций имеет применения в вопросах представления рядами экспонент функций из интегрально - весовых гильбертовых пространств на интервалах. В работе [5] удалось построить целые функции достаточно хорошо аппроксимирующие выпуклые функции указанного вида, если  $e^{h(t)}(1 - |t|)^n \rightarrow \infty$  для любого  $n$  при  $|t| \rightarrow 1$ .

Данная статья посвящена построению целой функции, асимптотически аппроксимирующей функции вида  $\tilde{h}$ , когда  $e^{h(t)}(1 - |t|)^n = o(1)$  для любого  $n$  при  $|t| \rightarrow 1$ .

**Конструкция целой функции.** Пусть  $u(x)$  — неотрицательная дважды дифференцируемая выпуклая функция на  $\mathbb{R}$ ,  $u(0) = 0$ ,  $|x|u''(x)$  убывает при возрастании  $|x|$  и

$$u''(x) = o(1/|x|^2), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (A)$$

Определим две возрастающие последовательности  $T_n$  и  $x_n \in (T_n, T_{n+1})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , по соотношениям

$$T_0 = 0, \quad (T_{n+1} - T_n) \int_{T_n}^{T_{n+1}} du'(x) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0,$$

$$\int_{T_n}^{T_{n+1}} (x - x_n) du'(x) = 0.$$

Положим  $p_n = T_{n+1} - T_n$ . Квадраты

$$P_{k,m} = \left\{ z = x + iy : T_k < x < T_{k+1}, \left| y - p_k \left( m + \frac{1}{2} \right) \right| < \frac{p_k}{2} \right\}$$

попарно не пересекаются и точки  $w_{k,m} = x_k + i \left( m + \frac{1}{2} \right)$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ , являются центрами масс этих квадратов по мере  $du'(x)dy$ . Для  $q \in (0; 1)$  положим

$$P_{k,n}^q = w_{k,n} + q(P_{k,n} - w_{k,n}).$$

**Теорема 1.** *Существует целая функция  $f(z)$  с простыми нулями  $w_{k,m} = x_k + ip_k \left( m + \frac{1}{2} \right)$ ,  $k, m \in \mathbb{Z}$ , удовлетворяющая следующим условиям*

1. *Для всех  $z \in \mathbb{C}$  выполняется оценка*

$$\ln |f(z)| \leq u(\operatorname{Re} z) + O(N(2|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

где  $N(r)$  — считающая функция последовательности  $|x_k|$ :

$$N(r) = \sum_{|x_k| \leq r} 1.$$

2. *Для  $z \notin \bigcup_{k,n} P_{k,n}^q$  выполняется оценка*

$$\ln |f(z)| \geq u(\operatorname{Re} z) - 2 \ln |z| + O(N(2|z|)), \quad |z| > 1, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

### 1. Доказательство теоремы 1.

Можно считать, что  $u(0) = u'(0) = 0$ . Докажем одну предварительную лемму.

**Лемма 1.** *Кусочно-линейная выпуклая функция  $v(x)$  на  $\mathbb{R}$ , определенная из условия: ее производная — кусочно-постоянная функция с точками разрыва  $\{x_n\}$  и с величиной скачка в точке  $x_n$ , равной  $p_n$ , и  $v(0) = v'(0) = 0$ , удовлетворяет условию*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |v(x) - u(x)| < 1.$$

Кроме того, из условий на функцию  $u$  следует, что последовательность  $p_n$  возрастает при  $|n| \rightarrow \infty$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{T_n}{T_{n+1}} = \infty, \quad (1)$$

$$0 \leq T_n < x_n \leq \frac{T_{n+1} + T_n}{2}, \quad n \geq 0, \quad 0 > T_{n+1} > x_n > \frac{T_{n+1} + T_n}{2}, \quad n < 0.$$

*Доказательство.* Методом математической индукции по  $n$  доказывается, что для всех  $n$  верно  $u(T_n) = v(T_n)$ ,  $u'(T_n) = v'(T_n)$ . Следовательно, функция  $v(x)$  есть верхняя огибающая касательных функций к  $u(x)$  в точках  $T_n$  и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x) - v(x)| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} (u(x_n) - v(x_n)).$$

Оценка последнего супремума проводится элементарными методами. □

По этой лемме мы можем доказывать теорему, считая, что  $u$  — кусочно-линейная функция. Через  $\mu$  обозначим меру, ассоциированную с субгармонической функцией  $u(z) = u(\operatorname{Re} z)$ . Отметим сразу, что мера  $\mu$  сосредоточена на вертикалях  $\operatorname{Re} z = x_k$  и на каждой из вертикалей распределена линейно с плотностью  $\frac{1}{p_k}$ . При этом  $\mu$  — мера каждого квадрата  $P_{k,n}$  равна 1, и точки  $w_{k,n}$  являются центрами масс по мере  $\mu$  квадрата  $P_{k,n}$ . Через  $\nu$  обозначим дискретную меру с единичными массами в точках  $w_{k,n}$ . В работе [2] доказано, что при этих условиях вне достаточно малого исключительного множества  $E$  выполняется соотношение

$$\int \ln \left| 1 - \frac{z}{w} \right| d(\nu(w) - \mu(w)) = O(\ln(|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Тем самым, нам достаточно доказать соотношения

$$\int \ln \left| 1 - \frac{z}{w} \right| d(\nu(w) - \mu(w)) \leq O(N(|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty,$$

и вне множества  $\bigcup_{k,n} P_{k,n}^q$

$$\int \ln \left| 1 - \frac{z}{w} \right| (d\nu(w) - \mu(w)) \geq -2 \ln |z| + O(N(|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Если  $[x]$  — целая часть  $x$ , то для любого  $p > 0$

$$\left| \frac{x}{p} - \left[ \frac{x}{p} + \frac{1}{2} \right] \right| \leq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\left| \int_0^x \left( \frac{t}{p} - \left[ \frac{t}{p} + \frac{1}{2} \right] \right) dt \right| \leq \frac{p}{8}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Сужение  $\mu_k$  меры  $\mu$  на критическую прямую  $\operatorname{Re} w = x_k + it$  порождается функцией  $\frac{t}{p_k} + C$ , сужение точечной меры  $\nu$  порождается функцией  $\left[ \frac{t}{p_k} + \frac{1}{2} \right] + C$ . Положим

$$\eta_k(t) = \left[ \frac{t}{p_k} + \frac{1}{2} \right] - \frac{t}{p_k},$$

$$L(z, w) = \ln \left| 1 - \frac{z}{w} \right| = \operatorname{Re} \ln \left( 1 - \frac{z}{w} \right).$$

Через  $\eta$  обозначим заряд, сужение которого на вертикаль  $\operatorname{Re} w = x_k$  равно  $\eta_k(t)dt$ . При этих обозначениях нам нужно оценить интеграл

$$\begin{aligned} \int \ln \left| 1 - \frac{z}{w} \right| d(\nu(w) - \mu(w)) &= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} L(z, x_k + it) d\eta_k(t) = \\ &= - \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} L'(z, x_k + it) \eta_k(t) dt = - \int L'(z, w) d\eta(w). \end{aligned}$$

Будем пользоваться следующим представлением ( $w = s + it$ )

$$L'_t(z, w) = \operatorname{Re} \left( \frac{i}{w - z} - \frac{i}{w} \right) = - \operatorname{Im} \frac{z}{(w - z)w} = \operatorname{Im} \frac{1}{w} - \operatorname{Im} \frac{1}{w - z}. \quad (4)$$

Зафиксируем точку  $z = (x + iy) \in P_{n,j}$ , будем считать, что  $x, y \geq 0$ , это значит, что  $P_{n,j}$  лежит в первом квадранте. Возьмем достаточное малое  $\delta > 0$  и введем в рассмотрение квадраты:  $Q(0)$  — квадрат с центром в точке 0, со стороной  $\delta r$ ,  $r = |z|$ , и со сторонами, параллельными осям координат,  $Q(z) = Q(0) + z$ . Квадраты  $Q(0)$  и  $Q(z)$  при достаточно малых  $\delta$  не пересекаются. В самом деле, эти квадраты лежат в кругах с теми же центрами и радиуса  $\sqrt{2}\delta r$ . Следовательно, если  $\delta < 1/\sqrt{8}$ , то не пересекаются указанные круги. Будем считать, что  $2\delta < 1/\sqrt{8}$ . В этом случае расстояние между квадратами

$$\text{dist}(Q(0), Q(z)) > \delta|z|. \quad (5)$$

**Лемма 2.** Пусть  $E$  — внешность двух вертикальных полос с основаниями  $[-\delta r; \delta r]$  (содержит квадрат  $Q(0)$ ) и  $[x - \delta r; x + \delta r]$  (содержит квадрат  $Q(z)$ ). Тогда ( $w = s + it$ )

$$\left| \int_E L'_t(z, w) d\eta(w) \right| = O(1), |z| \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Пусть  $x_k \notin [-\delta r; \delta r] \cup [x - \delta r; x + \delta r]$ . Воспользуемся (2), (4) и неравенством Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(t) L'(z, x_k + it) dt \right| &\leq \frac{|z|}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x_k + it| |x_k + it - z|} dt \leq \\ &\leq \frac{|z|}{2} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|x_k + it|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{|x_k + it - z|^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi|z|}{2\sqrt{|x_k(x - x_k)|}}. \end{aligned}$$

Из леммы 1 (соотношение (1)) следует, что при некоторых постоянных  $q < 1$ ,  $C > 0$  для всех  $n, m \in \mathbb{Z}$ ,  $nm > 0$ ,  $|m| \leq |n|$  выполняется оценка

$$\frac{T_m}{T_n} \leq Cq^{|n|-|m|},$$

значит,

$$\left| \frac{x_m}{x_k} \right| \leq Cq^{|k|-|m|-2}.$$

Рассмотрим индексы  $k$ , для которых  $x_k \geq x + \delta r$ , пусть  $m > 0$  наименьший из них. Тогда

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_k(t) L'(z, x_k + it) dt \right| \leq \frac{\pi|z|}{2\sqrt{|x_m(x - x_m)|}} \sum_m^{\infty} \sqrt{\left| \frac{x_m(x - x_m)}{x_k(x - x_k)} \right|} \leq \frac{\pi\sqrt{C}(3 - \sqrt{q})}{4(1 - \sqrt{q})\delta} < 1.$$

Аналогичным образом оценивается сумма интегралов по тем индексам  $k$ , для которых  $x_k \leq -\delta r$ . А также сумма интегралов по тем индексам  $k$ , для которых  $\delta r < x_k \leq x - \delta r$ , если такие индексы есть.

Лемма 2 доказана.  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $F = \mathbb{C} \setminus (E \cup Q(0) \cup Q(z))$ . Тогда ( $w = s + it$ )

$$\left| \int_F L'_t(z, w) d\eta(w) \right| = O(N(2|z|)), |z| \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Носитель заряда  $\eta = \nu - \mu$  на множестве  $F$  представляет собой объединение интервалов вида  $x_k + i(\delta r; +\infty)$ ,  $x_k + i(-\infty; -\delta r)$ ,  $x_k \in (-\delta r; \delta r)$ ,  $x_k + i(y + \delta r; +\infty)$ ,  $x_k + i(-\infty; y - \delta r)$ ,  $|x - x_k| \leq \delta r$ , и, возможно, ограниченных интервалов вида  $x_k + i(\delta r; y - \delta r)$ ,  $x_k \in (x - \delta r; \delta r)$ .

Рассмотрим ограниченный интервал вида  $(\delta r; y - \delta r)$ . По представлению (4) и оценке (2) имеем ( $w = x_k + it$ )

$$\left| \int_{\delta r}^{y - \delta r} \eta_k(t) L'(z, x_k + it) dt \right| \leq \frac{|z|}{2} \left| \int_{\delta r}^{y - \delta r} \frac{dt}{|w - z||w|} \right| \leq \frac{1}{2\delta^2}.$$

Рассмотрим интервал вида  $x_k + i(\delta r; +\infty)$ . Если  $w = x_k + it$  и  $x_k \leq x - \delta|z|$ , то  $|w - z| \geq x - x_k \geq \delta|z|$ , поэтому  $|w| \leq |w - z| + |z| \leq \frac{1+\delta}{\delta}|w - z|$ . Таким образом,

$$|w - z| \geq \frac{\delta}{1+\delta}|w|.$$

Отсюда получаем для  $w = x_k + it$ ,  $t \in (\delta r; +\infty)$ , оценку

$$|L'_t(z, x_k + it)| \prec \frac{|z|}{|w|^2},$$

поэтому

$$\left| \int_{\delta r}^{+\infty} \eta_k(t) L'(z, x_k + it) dt \right| \prec \frac{|z|}{2} \int_{\delta r}^{+\infty} \frac{dt}{x_k^2 + t^2} \leq \frac{1}{2\delta}.$$

Аналогично доказывается, что интегралы по неограниченным интервалам остальных видов тоже ограничены. Если вертикаль  $\operatorname{Re} w = x_k$  пересекается с множеством  $Q(0) \cup Q(z)$ , то  $x_k \in (-\delta r; (1+\delta)r)$ , значит количество таких вертикалей не больше  $N(2r)$ . Таким образом, лемма 3 доказана.  $\square$

### Утверждение 1

Пусть  $\zeta = a + ib \in \mathbb{C}$ ,  $\sigma \in (0; 1)$ . Тогда

1. Для любого числа  $d$

$$\left| \operatorname{Im} \int_{b-\sigma p_k}^{b+\sigma p_k} \frac{\left(\frac{t}{p_k} - d\right)}{(x_k + it) - \zeta} dt \right| \leq 2\sigma.$$

2. Если  $\sigma p_k \leq \delta r$ , то

$$\left| \operatorname{Im} \int_{b \pm \sigma p_k}^{b \pm \delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{(x_k + it) - \zeta} \right| \leq \frac{1}{2\sigma}.$$

*Доказательство.* 1. Поскольку

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{b-\sigma p_k}^{b+\sigma p_k} \frac{\left(\frac{t}{p_k} - d\right)}{(x_k - a) + i(t - b)} dt &= \frac{1}{p_k} \operatorname{Im} \int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{(\tau + b - dp_k) d\tau}{(x_k - a) + i\tau} = \\ &= \frac{1}{p_k} \operatorname{Im} \int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{\tau d\tau}{(x_k - a) + i\tau} + \frac{b - dp_k}{p_k} \operatorname{Im} \int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{d\tau}{(x_k - a) + i\tau} \end{aligned}$$

и

$$\operatorname{Im} \int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{d\tau}{(x_k - a) + i\tau} = \int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{-\tau d\tau}{(x_k - a)^2 + \tau^2} = 0,$$

то

$$\left| \operatorname{Im} \int_{b-\sigma p_k}^{b+\sigma p_k} \frac{\eta_k(t) dt}{(x_k - a) + i(t - b)} \right| = \frac{1}{p_k} \left| \operatorname{Im} \int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{\tau d\tau}{(x_k - a) + i\tau} \right| = \frac{1}{p_k} \int_{-\sigma p_k}^{\sigma p_k} \frac{\tau^2 d\tau}{|x_k - a|^2 + \tau^2} \leq 2\sigma.$$

2. Интегрируя по частям получим

$$\int_{b+\sigma p_k}^{b+\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - \zeta} = \left( \int_{b+\sigma p_k}^{b+\delta r} \eta_k(\tau) d\tau \right) \frac{1}{x_k + i\delta r - a} + \int_{b+\sigma p_k}^{b+\delta r} \left( \int_{b+\sigma p_k}^t \eta_k(\tau) d\tau \right) \frac{idt}{(x_k + it - \zeta)^2}.$$

Следовательно, в силу оценки (3)

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Im} \int_{b+\sigma p_k}^{b+\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - \zeta} \right| &\leq \frac{p_k}{4\delta r} + \frac{p_k}{4} \int_{b+\sigma p_k}^{\infty} \frac{dt}{(x_k - a)^2 + (t - b)^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{4\sigma} + \frac{p_k}{4\sigma p_k} \leq \frac{1}{2\sigma}. \end{aligned}$$

Утверждение 1 доказано.  $\square$

**Лемма 4.** *Выполняется соотношение ( $w = s + it$ )*

$$\left| \int_{Q(0)} L'_t(z, w) d\eta(w) \right| = O(N(|z|)), |z| \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Из представления (4) и из оценки (5) видим, что для  $w \in Q(0)$   $|w - z| \geq \delta|z|$ , поэтому

$$\left| \int_{-\delta r}^{\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{(x_k + it) - z} \right| \leq \frac{1}{\delta r} \cdot (2\delta r) = 2.$$

Количество  $x_k \in (-\delta r; \delta r)$  равно  $N(\delta r)$ , значит

$$\left| \int_{Q(0)} \frac{1}{w - z} d\eta(w) \right| = O(N(\delta|z|)), |z| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Положим  $\sigma = \frac{1}{2}$ , если  $\frac{p_k}{2} < \delta r$  и  $\sigma = \frac{\delta r}{p_k}$ , если  $\frac{p_k}{2} \geq \delta r$ . Применим утверждение 1 при  $\zeta = 0$ ,  $d = 0$ . В первом случае получим

$$\left| \operatorname{Im} \int_{-\delta r}^{\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it} \right| \leq \left| \operatorname{Im} \int_{-\frac{p_k}{2}}^{\frac{p_k}{2}} \frac{t dt}{x_k + it} \right| + \left| \int_{\frac{p_k}{2} \leq |t| < \delta r} \operatorname{Im} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it} \right| \leq 3,$$

а во втором случае

$$\left| \operatorname{Im} \int_{-\delta r}^{\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it} \right| \leq 1.$$

Таким образом, во всех случаях имеем ( $w = x_k + it$ )

$$\left| \operatorname{Im} \int_{-\delta r}^{\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{w} \right| \leq 3.$$

Отсюда с учетом соотношения (6) получаем утверждение леммы.

Лемма 4 доказана. □

**Лемма 5.** *Выполняется оценка сверху ( $w = s + it$ )*

$$-\operatorname{Im} \int_{Q(z)} L'_t(z, w) d\eta(w) = O(N(|z|)), |z| \rightarrow \infty.$$

*Доказательство.* Снова воспользуемся представлением (4). Поскольку для  $w \in Q(z)$   $|w| \geq |z| - |w - z| \geq (1 - \delta)|z|$ , то

$$\left| \operatorname{Im} \int_{y - \delta r}^{y + \delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it} \right| \leq \frac{1}{(1 - \delta)r} \cdot (2\delta r) = \frac{2\delta}{1 - \delta}.$$

Количество  $x_k \in (x - \delta r; x + \delta r)$  не превосходит  $N((1 + \delta)r)$ , значит

$$\left| \operatorname{Im} \int_{Q(z)} \frac{1}{w} d\eta(w) \right| = O(N(2|z|)), |z| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Зафиксируем некоторое число  $\sigma_0 \in (0; \frac{1}{4})$  и множество индексов  $k$ , таких, что  $x_k \in (x - \delta r; x + \delta r)$  разобьем на две части:

$J$  — это те индексы, для которых в отрезке  $[(y - \sigma_0 p_k); (y + \sigma_0 p_k)]$  найдется точка вида  $p_k(m + \frac{1}{2})$ , где  $m$  — некоторое целое число;

$J_1$  — все остальные индексы.

1. Для  $k \in J_1$  применим утверждение 1, взяв в качестве  $\sigma = \sigma_0$ , если  $\sigma_0 p_k < \delta r$  и  $\sigma = \frac{\delta r}{p_k}$ , если  $\sigma_0 p_k \geq \delta r$ . Во втором случае получим

$$\left| \operatorname{Im} \int_{y - \delta r}^{y + \delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - z} \right| \leq 2\sigma_0,$$

а в первом случае

$$\left| \operatorname{Im} \int_{y-\delta r}^{y+\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - z} \right| \leq \left| \operatorname{Im} \int_{y-\sigma_0 p_k}^{y+\sigma_0 p_k} \frac{\left(m - \frac{t}{p_k}\right) dt}{x_k + it - z} \right| + \left| \int_{\sigma_0 p_k \leq |y-t| < \delta r} \operatorname{Im} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - z} \right| \leq 2\sigma_0 + \frac{1}{\sigma_0}.$$

Имея в виду оценку (7), получим

$$\left| \sum_{k \in J_1} \int_{y-\delta r}^{y+\delta r} L'_t(x_k + it, z) \eta_k(t) dt \right| = O(N(2|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Таким образом,

$$\int \ln \left| 1 - \frac{z}{w} \right| d(\nu(w) - \mu(w)) = \sum_{k \in J} \operatorname{Im} \int_{y-\delta r}^{y+\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - z} + O(N(2|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (8)$$

2. Для каждого индекса  $k \in J$  найдется целое число  $m = m(k)$ , такое, что  $|y - p_k(m + \frac{1}{2})| \leq \sigma_0 p_k$ . Введем обозначение  $y_k^* := p_k(m(k) + \frac{1}{2})$ . По второму пункту утверждения 1 при  $|z| \rightarrow \infty$

$$\sum_{k \in J} \operatorname{Im} \int_{y-\delta r}^{y+\delta r} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - z} = \sum_{k \in J} \operatorname{Im} \int_{y-\sigma_0 p_k}^{y+\sigma_0 p_k} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - z} + O(N(2|z|)).$$

Заметим, что если  $k_1 = \min\{k \in J\}$ ,  $k_2 = \max\{k \in J\}$ , то

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1} p_k = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} (T_{k+1} - T_k) = T_{k_2} - T_{k_1} \leq (x + \delta r) - (x - \delta r) = 2\delta r,$$

поэтому

$$p_k \leq 2\delta r, \quad k \in J.$$

Положим  $I_k := (y - \frac{p_k}{2}; y + \frac{p_k}{2})$ , если  $p_k \leq 2\delta r$  и  $I_k := (y - \delta r; y + \delta r)$  в противном случае. В силу оценки на  $p_k$  последний вариант может случиться только для  $k = k_1, k_2$ , если эти индексы входят в  $J$ . Таким образом, при  $|z| \rightarrow \infty$

$$\int \ln \left| 1 - \frac{z}{w} \right| d(\nu(w) - \mu(w)) = \sum_{k \in J} \operatorname{Im} \int_{I_k} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - z} + O(N(2|z|)). \quad (9)$$

Нам остается оценить интегралы по отрезкам  $I_k$ ,  $k \in J$ .

3. Пусть  $k \in J$ ,  $I_k = (a_k; b_k)$  и для некоторого целого  $m$

$$\eta_k(t) = \begin{cases} m - \frac{t}{p_k}, & a_k < t \leq y_k^*, \\ m + 1 - \frac{t}{p_k}, & y_k^* < t \leq b_k. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \int_{I_k} \frac{\eta_k(t) dt}{x_k + it - z} &= \operatorname{Im} \int_{a_k}^{y_k^*} \frac{\left(m - \frac{t}{p_k}\right) dt}{x_k + it - z} + \operatorname{Im} \int_{y_k^*}^{b_k} \frac{\left(m + 1 - \frac{t}{p_k}\right) dt}{x_k + it - z} = \\ &= \operatorname{Im} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\left(m - \frac{t}{p_k}\right) dt}{x_k + it - z} + \int_{y_k^*}^{b_k} \frac{(y-t) dt}{(x_k - x)^2 + (y-t)^2}. \end{aligned}$$

Первый интеграл оценивается по утверждению 1

$$\left| \operatorname{Im} \int_{a_k}^{b_k} \frac{\left(m - \frac{t}{p_k}\right) dt}{x_k + it - z} \right| \leq 4. \quad (10)$$

Второй интеграл вычисляется

$$\int_{y_k^*}^{b_k} \frac{(y-t)dt}{(x_k-x)^2+(y-t)^2} dt = -\ln \sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}}.$$

По условию для  $k \in J$ ,  $k \neq k_1, k_2$ , имеем  $|y_k^* - y| < \sigma_0 p_k < \frac{p_k}{4}$ , поэтому  $|b_k - y| \geq |b_k - y_k^*| - |y_k^* - y| \geq \frac{p_k}{2} - \frac{p_k}{4} = \frac{p_k}{4} > |y_k^* - y|$ , тем самым

$$\ln \sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \geq 0.$$

Отсюда и из (9), (10) получим

$$\int \ln \left| 1 - \frac{z}{w} \right| d(\nu(w) - \mu(w)) \leq O(N(2|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Лемма 5 доказана. □

Для того чтобы закончить доказательство теоремы 1, нам остается получить нижнюю оценку вне множества  $\bigcup_{k,m} P_{k,m}^q$  в предположении, что  $z \in P_{n,j}$ . В силу оценок (9), (10) нам достаточно доказать нижнюю оценку для суммы интегралов

$$\sum_{k \in J} \int_{y_k^*}^{b_k} \frac{(y-t)dt}{(x_k-x)^2+(y-t)^2} dt = -\sum_{k \in J} \ln \sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}}.$$

Разобьем множество индексов  $J$  на три части:  $J_0 = \{k \in J, 0 \leq x_k < x\}$ ,  $J_- = \{k \in J, x_k < 0\}$ ,  $J_+ = \{k \in J, x < x_k\}$ . Очевидно,

$$\ln \sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq \ln \sqrt{1 + \frac{p_k^2}{4(x-x_k)^2}}.$$

Пусть  $z \in P_{n,j}$ , но  $z \notin P_{n,j}^q$ . Если  $k \in J_0$   $k \neq n$ , то  $x - x_k \geq \frac{p_k}{2}$ , поэтому

$$\ln \sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq \ln \sqrt{2}.$$

Если  $n \in J_0$  и  $k = n$ , то в силу условия  $z \notin P_{n,j}^q$  имеем  $x - x_n \leq \frac{qp_k}{2}$ , поэтому

$$\ln \sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq \ln \sqrt{1 + \frac{1}{q^2}}.$$

Из последних двух оценок получаем

$$\sum_{k \in J_0} \operatorname{Im} \int_{I_k} \frac{\eta_k(t)dt}{x_k + it - z} = O(N(2|z|)), \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Если  $k \in J_+$ ,  $k \neq n$ , то  $x - x_{k+1} \geq \frac{p_k}{2}$ , поэтому, считая  $|x - x_n| \geq 1$ , имеем

$$\sum_{k \in J_+} \ln \sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq N(2r) + \ln \prod_{k \in J_+} \frac{p_k}{2(x_k-x)} = N(2r) + \ln \delta r.$$

Аналогичным образом получим

$$\sum_{k \in J_-} \ln \sqrt{\frac{(x_k-x)^2+(y-b_k)^2}{(x_k-x)^2+(y-y_k^*)^2}} \leq N(2r) + \ln \prod_{k \in J_-} \frac{p_k}{2(x_k-x)} = 1 + \ln \delta r.$$

Из последних двух неравенств вместе с (11) имеем

$$\sum_{k \in J} \ln \sqrt{\frac{(x_k - x)^2 + (y - b_k)^2}{(x_k - x)^2 + (y - y_k^*)^2}} \leq 2 \ln r + 2N(2r).$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азарин В.С. *О лучах вполне регулярного роста целой функции* // Матем. сб., 1969, Т.79(121), №4(8). С. 463–476 (Mi msb3599)
2. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica. 1985. 11:3. С. 257–282.
3. Любарский Ю.И., Содин М.Л. *Аналоги функций типа синуса для выпуклых областей*. Препринт №17 ФТИНТ, Украинская АН. Харьков. 1986.
4. Yu. Lyubarskii, E. Malinnikova *On approximation of subharmonic functions* // Journal D'Analyse Mathematique. 2001. V. 83. P. 121–149.
5. Башмаков Р.А., Путинцева А.А., Юлмухаметов Р.С. *Целые функции типа синуса и их применение* // Алгебра и анализ. 2010. 22:5. С. 49–68.

Константин Петрович Исаев,  
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,  
ул. Чернышевского, 112,  
450077, г. Уфа, Россия  
E-mail: orbit81@list.ru

Ринад Салаватович Юлмухаметов,  
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,  
ул. Чернышевского, 112,  
450077, г. Уфа, Россия  
E-mail: Yulmukhametov@mail.ru

Артур Айратович Юнусов,  
Башкирский государственный университет,  
ул. З. Валиди, 32,  
450076, г. Уфа, Россия  
E-mail: mc.yunusov@gmail.com