ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 2 (2014). С. 3-25.

УДК 517.946

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕСТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Э.Р. АНДРИЯНОВА

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для некоторого класса параболических уравнений с двумя нестепенными нелинейностями в цилиндрической области $D = (t > 0)\times\Omega$. Методом галеркинских приближений, предложенным Ф.Х. Мукминовым для параболического уравнения с двойной нелинейностью, доказывается существование сильных решений в пространстве Соболева-Орлича. Установлены принцип максимума, а также оценки сверху и снизу, характеризующие степенное убывание решения при $t\to\infty$ для ограниченных и неограниченных областей $\Omega\subset R_n$.

Ключевые слова: параболическое уравнение, N-функции, существование решения, оценка скорости убывания решения, пространства Соболева-Орлича.

Mathematics Subject Classification: 35D05, 35B50, 35B45, 35K55

1. Введение

Пусть Ω — произвольная область пространства $R_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n\geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\}\times\Omega$ рассматривается уравнение вида

$$(\beta(x,u))_t = \sum_{i=1}^{n}\left(a_{p_i}(x,\nabla u)\right)_{x_i}, \text{ где } a(x,\nabla u) = a(x,p)\Big|_{p=\nabla u}, \tag{1}$$

с краевыми и начальным условиями:

$$u(t,x)\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\}\times\partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{3}$$

Здесь и далее нижние индексы t, x_i, p_i обозначают производные по соответствующим переменным.

Предположим, что функция $a(x,p)$, выпуклая по $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$, удовлетворяет условию Каратеодори при $p\in R_n$ и $x\in\Omega$. Функция $\beta(x,u), \beta(x,0) = 0$,

$$|\beta(x,u)| \leqslant c_\beta|u\beta'_u(x,u)|, \tag{4}$$

абсолютно непрерывна и возрастает по u, а также измерима по $x\in\Omega$ при $u\in R$.

Вопросы существования и единственности решения нелинейных параболических уравнений рассматривались в работах [1] – [4], [7], [19] – [25] и других. В основном рассматривались задачи в предположении ограниченности области Ω и на ограниченном промежутке времени $[0,T]$ с произвольным $T > 0$. В работе [1] было доказано существование слабых

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00081-а).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках базовой части государственного задания организациям высшего образования.

Поступила 14 ноября 2013 г.

E.R. Andriyanova, Estimates of decay rate for solution to parabolic equation with non-power nonlinearities.

решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью в ограниченной области. Существование слабого решения параболического уравнения с двумя переменными нелинейностями в подходящих пространствах Соболева-Орлича при ограниченной области Ω доказано в [2]. В [3] доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для вырождающихся параболических уравнений линейных по ∇u и имеющих переменный показатель нелинейности по u. Существование W- и H-решений для параболических уравнений 2-го порядка с переменным порядком нелинейности было доказано в работе [4].

Работа со слабым решением вызывает затруднение в исследовании, например, убывания решения при $t \to \infty$. В данной работе для построения сильного решения задачи (1) – (3) сразу на всем промежутке времени $[0,\infty)$ использовался метод галеркинских приближений (область Ω может быть неограниченной). Этим методом было построено решение параболического уравнения с двойной нелинейностью в работе [5] на ограниченном промежутке $[0,T]$ при любом $T>0$ и в работе [6] на неограниченном промежутке времени.

Галеркинские приближения являются гладкими функциями, что облегчает доказательство для них необходимых оценок, которые затем предельным переходом распространяются на решение задачи (1) – (3). В настоящей работе получены оценки сверху и снизу, характеризующие степенное убывание решения при $t \to \infty$ в случае как ограниченных, так и неограниченных областей $\Omega \subset R_n$.

Исследованию поведения решения смешанной задачи для изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью при $t \to \infty$ посвящена работа [6], а для анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью — работы [7] – [9]. В работе [10] изучалось свойство вырождения решения нелинейного параболического уравнения с нестандартными анизотропными условиями роста за конечный промежуток времени. Теми же авторами в [11] установлены достаточные условия для взрыва решения однородной задачи Дирихле для анизотропного параболического уравнения с переменной нелинейностью за конечный промежуток времени. В [12] были установлены оценки повышенной суммируемости градиента для слабого решения параболической системы переменного порядка нелинейности. Точные двусторонние оценки скорости убывания нормы решения линейного и квазилинейного параболического уравнения в неограниченной области установлены в работах [13, 14], а для анизотропного параболического уравнения — в [15]. Исследованию поведения решений линейных и квазилинейных параболических уравнений посвящены также работы [16] – [18].

2. Функциональные пространства

Определим здесь используемые в работе функциональные пространства и приведем некоторые известные факты из теории пространств Соболева-Орлича [26].

Будем говорить, что N-функция $B(s)$ удовлетворяет $\triangle_2$-условию при больших значениях s, если существуют такие числа $k>0,\ s_0>0$, что $B(2s) \leqslant kB(s)\ \forall s \geq s_0$. $\triangle_2$-условие эквивалентно выполнению при больших s неравенства

$$B(ls) \leqslant kl^m B(s), \tag{5}$$

где l может быть любым числом, большим единицы, m — больше нуля. Обычно рассматривают только ограниченные области, и тогда достаточно выполнения условия (5) при $s \geq s_0 > 1$. Если же область неограниченная, то (см., например, доказательство леммы 1 ниже) приходится полагать $s_0 = 0$. В дальнейшем в работе предполагается, что все рассматриваемые N-функции удовлетворяют $\triangle_2$-условию при всех значениях $s>0$ (т.е. $s_0 = 0$). Будем обозначать все N-функции заглавными латинскими буквами.

Все постоянные, встречающиеся в работе, положительны.

N-функция

$$\overline{B}(z) = \sup_{t\geq 0}(t|z| - B(t))$$

называется дополнительной. Известно следующее свойство дополнительных функций (см. [26]):

$$|zs| \leqslant B(z) + \overline{B}(s). \tag{6}$$

Для N-функций будем писать $B_1(s) \prec B_2(s)$, если существуют константы s_0, k, такие, что

$$B_1(s) \leqslant B_2(ks), \quad \text{для} \quad s \geq s_0. \tag{7}$$

Пусть при почти всех $x \in \Omega$ функция $\beta_1(x,u)$ абсолютно непрерывна по $u \in R$ и определена равенством

$$\beta'_{1u}(x,u) = u\beta'_u(x,u), \quad \beta_1(x,0) = 0. \tag{8}$$

При этом предполагается, что $\beta'_u(x,u) \geq 0$ — четная по u, ограниченная в каждой ограниченной области значений x, u функция, не равная нулю почти всюду ни в каком интервале по u.

Пусть для любых $u \in R, p \in R^n$ и $x \in \Omega$ выполняются следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{p_i}(x,p)p_i \geq \sum_{i=1}^{n} B_i(p_i); \tag{9}$$

$$\Gamma \sum_{i=1}^{n} B_i(p_i) \geq a(x,p) \geq \delta \sum_{i=1}^{n} a_{p_i}(x,p)p_i; \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{B}_i(a_{p_i}(x,p)) \leqslant c \sum_{i=1}^{n} B_i(p_i); \tag{11}$$

$$u\beta'_{1u}(x,u) \leqslant \alpha\beta_1(x,u), \ \alpha > 0, \ \forall u \in R. \tag{12}$$

Здесь $B_1(z), B_2(z), ..., B_n(z)$ являются N-функциями.

Предполагается существование N-функции $G(s)$ (тогда $G(s^2)$ также является N-функцией) такой, что

$$G(u^2) \leqslant \beta_1(x,u) \leqslant c_1 G(u^2); \tag{13}$$

$$\overline{G}(\beta'_u(x,u)) \leqslant c_2 G(u^2). \tag{14}$$

Здесь и далее через $c_1, c_2, ...$ обозначаем постоянные, которые, вообще говоря, могут не совпадать даже при одинаковых индексах.

Через $L_B(Q)$ обозначим пространство Орлича, соответствующее N-функции $B(s)$, с нормой Люксембурга

$$||u||_{L_B(Q)} = ||u||_{B,Q} = \inf\{k \geq 0 : \int\limits_Q B\left(\frac{u(x)}{k}\right) dx \leqslant 1\}.$$

Ниже в качестве Q могут выступать области Ω, D^T и другие.

Пространства Орлича, соответствующие N-функции $G(s^2)$, будем обозначать $L_{G_2}(Q)$ и через $L_{\overline{G}_2}(Q)$ — сопряженные к ним.

Определим также пространство Соболева-Орлича $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$||u||_{W^1_{G,B}(\Omega)} = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}||_{B_i,\Omega} + ||u||_{G_2,\Omega}.$$

Через $V(D^T)$ будем обозначать пополнение $C_0^\infty(D^T)$ по норме

$$||u||_{V(D^T)} = \sum_{i=1}^{n} ||u_{x_i}||_{B_i,D^T} + ||u||_{G_2,D^T}.$$

Для нормы Люксембурга выполнено неравенство (см. [26])

$$||u(x)||_{L_B(Q)} \leqslant 1 + \int\limits_Q B(u(x))dx. \tag{15}$$

Справедливо следующее простое утверждение.

Лемма 1. *Если $u_j \to u$ в $L_B(\Omega)$ и B удовлетворяет $\triangle_2$-условию, то существует C такое, что*

$$\int\limits_\Omega B(u_j)dx \leqslant C.$$

Доказательство. Поскольку последовательность u_j сходится, то $||u_j||_{L_B(\Omega)} \leqslant c$. Тогда, воспользовавшись $\triangle_2$-условием, получим

$$\int\limits_\Omega B(u_j)dx = \int\limits_\Omega B\left(||u_j||_{L_B(\Omega)}\frac{u_j}{||u_j||_{L_B(\Omega)}}\right)dx \leqslant \int\limits_\Omega B\left(c\frac{u_j}{||u_j||_{L_B(\Omega)}}\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant kc^m \int\limits_\Omega B\left(\frac{u_j}{||u_j||_{L_B(\Omega)}}\right)dx \leqslant kc^m.$$

Лемма доказана. □

Определим функцию $h(s)$ следующим образом

$$h(s) = s^{-\frac{1}{n}}\left(\prod_{i=1}^n \widetilde{B}_i^{-1}(s)\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{16}$$

где

$$\widetilde{B}_i(s) = \left\{ \begin{array}{ll} B_i(s), & \text{при } \ |s| \geq 1, \\ s^\kappa B_i(1), & \text{при } \ |s| \leqslant 1. \end{array}\right.$$

Отметим, что поскольку функции B_i — выпуклые, то выполняется неравенство $B_i'(1+) > B_i(1)$. Выберем $\kappa \in (1, n)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$B_i'(1) > \kappa B_i(1), \ i = 1, 2, ..., n. \tag{17}$$

Определим также N-функцию $B^*(z)$ по формуле

$$(B^*)^{-1}(z) = \int\limits_0^{|z|} \frac{h(s)}{s}ds, \tag{18}$$

если интеграл

$$\int\limits_0^\infty \frac{h(s)}{s}ds \tag{19}$$

расходится к бесконечности и

$$||u||_{B^*,Q} = \sup_Q |u|,$$

если интеграл (19) ограничен. Сходимость последнего интеграла в нуле обеспечена неравенством $\kappa < n$. Известна теорема вложения А. Г. Королева [27], вытекающая из неравенства

$$||u||_{B^*,Q} \leqslant C\sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||_{\widetilde{B}_i,Q}, \tag{20}$$

справедливого для функций $u \in C_0^\infty(Q)$ в случае сходимости интеграла $\int\limits_0^1 \frac{h(s)}{s} ds$ в нуле. Отметим, что неравенство (20), доказанное в [27] для ограниченных областей, справедливо также для неограниченных областей Q, имеющих конечную меру.

3. Формулировка основных результатов

Теорема 1. *Пусть* $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ *и выполняются условия* (9)–(14). *Тогда существует обобщенное решение задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее соотношениям*

$$u \in L_\infty([0,\infty); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)),$$
$$\beta(x,u) \in C([0,\infty); L_{\overline{G}_2}(\Omega)),$$
$$(\beta(x,u))_t \in L_{\overline{G}_2}(D^T),$$
$$(\beta'_u(x,u))^{\frac{1}{2}} u_t \in L_2(D^T), \ \forall T > 0.$$

Единственность решения задачи (1)–(3), со свойствами, установленными в теореме 1, будет доказана в другой работе. Формально можно считать, что в ниже следующих утверждениях речь идет о произвольном решении со свойствами, установленными в теореме 1.

Лемма 2. *Пусть* Ω — *ограниченная область. Если начальная функция ограничена* ($u_0(x) \leqslant b$), *то обобщенное решение задачи* (1)–(3) *является ограниченным, т.е.*

$$\operatorname*{vraisup}_D u(t,x) \leqslant b.$$

Замечание. Если начальная функция удовлетворяет неравенству $u_0(x) \geq -b$, то функция $-u$ будет являться решением некоего другого уравнения, но из того же рассматриваемого класса (ввиду четности $N-$функций). Поэтому, применив лемму к функции $-u$, получим $-u \leqslant b$, или $u \geq -b$.

Лемма 3. *Пусть область* Ω *расположена в полупространстве* $x_1 > 0$ *и* $\int\limits_1^\infty \frac{h(s)}{s} ds = \infty$, *а также выполняется условие*

$$B_1 \prec B^*. \tag{21}$$

Тогда, если начальная функция ограничена ($u_0(x) \leqslant b$), *то обобщенное решение задачи* (1)–(3) *является ограниченным, т.е.*

$$\operatorname*{vraisup}_D u(t,x) \leqslant b. \tag{22}$$

Лемма 4. *Пусть область* Ω *произвольна и* $\int\limits_1^\infty \frac{h(s)}{s} ds < \infty$. *Тогда для любой функции* $u \in V(D^T)$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname*{vraisup}_{D^T} |u(t,x)| \leqslant c, \tag{23}$$

где c — *возрастающая функция от* $||u||_{V(D^T)}$.

При оценке снизу нормы решения задачи (1)–(3) потребуется следующее условие: существуют числа $q > 1, \ c > 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\beta_1^q(x,u) \leqslant c(B^*(u) + 1), \ x \in \Omega, \ u \in R. \tag{24}$$

Теорема 2. *Пусть область* Ω *ограничена и выполнены условия* (9)–(14), *а также условие* (24), *если интеграл* (19) *расходится. Тогда существует положительное число* C ($C = C(u_0)$) *такое, что для решения* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *выполнены неравенства*

$$\int\limits_\Omega G(u^2(t,x))dx \geq \int\limits_\Omega G(u_0^2(x))dx(1+Ct)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \ \text{при } \gamma > 1, \ t \geq 0, \tag{25}$$

$$\int_{\Omega} G(u^2(t,x))dx \geq \int_{\Omega} G(u_0^2(x))dx(1-Ct)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \text{ при } \gamma < 1, \ t \leqslant 1/C, \tag{26}$$

где $\gamma = \frac{1}{\Gamma(\max(2,\alpha))}$.

Замечание. Случай $\gamma = 1$ загрубляем до $\gamma < 1$ увеличением Γ.

В следующем утверждении рассматривается область Ω, расположенная вдоль оси Ox_1. Далее будем использовать обозначение $\Omega_a^b = \{x \in \Omega | a < x_1 < b\}$, при этом значения $a = 0, \ b = \infty$ опускаются. Положим $S(r) = \{x \in \Omega | x_1 = r\}$. Предполагается, что $\Omega_{-\infty}^0 = \oslash$, и существует число $d > 0$ такое, что

$$\operatorname{mes}(\Omega^r) \leqslant r^d, \ r \geq r_0. \tag{27}$$

Для изучения убывания решения задачи (1)–(3) при $x_1 \to \infty$, определим функцию

$$\nu(r) = \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} \sup\{z : \int_{S(r)} B_2(zu)dx' \leqslant \int_{S(r)} B_2(u_{x_2})dx'\}, \tag{28}$$

где $x' = \{x_2, x_3, ..., x_n\}$. Будем считать, что область Ω удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \nu(r)dr = \infty. \tag{29}$$

Предположим, что начальная функция имеет ограниченный носитель:

$$\operatorname{supp} u_0 \subset \Omega^{r_0}, \ r_0 > 0. \tag{30}$$

Пусть

$$B_1(s) \leqslant g B_2(s), \ s < 1, \ g \geq 1. \tag{31}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (9)–(14), (21), (29) − (31), *область* Ω *расположена вдоль оси* Ox_1 *и выполнены неравенства*

$$\nu(r) \leqslant \nu_0, \text{ при } r \geq r_0; \ |u_0(x)| \leqslant v_0, \ x \in \Omega. \tag{32}$$

Тогда решение $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *при всех* $t \geq 0$, $r \geq 2r_0$ *подчиняется оценке*

$$\int_{\Omega_r} \beta_1(x, u(t,x))dx \leqslant M \exp\left(-\lambda \int_{2R_0}^r \nu(\rho)d\rho\right), \tag{33}$$

с некоторыми числами $M, \lambda > 0$.

В следующей теореме предполагается, что существует число $q > 1$ такое, что функция $\beta_1(x,u)$ удовлетворяет соотношению

$$(\beta_1(x,u))^q \leqslant c_3 B_1(u), \forall u \in R. \tag{34}$$

Возьмем μ так, чтобы

$$\mu > m + d(q-1), \tag{35}$$

где m – число из $\triangle_2$-условия (5) для функции B_1 и d из (27). Пусть $r(t)$ произвольная положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$M \exp\left(-\lambda \int_{2r_0}^{r(t)} \nu(\rho)d\rho\right) \leqslant \left(\frac{r^\mu(t)}{(q-1)t}\right)^{\frac{1}{q-1}}, \tag{36}$$

при t настолько больших, что $r(t) \geq 2r_0$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (9)–(14), (21), (29)–(32), (34), *и область* Ω *расположена вдоль оси* Ox_1. *Тогда для решения* $u(t,x)$ *задачи* (1)–(3) *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\Omega} \beta_1(x,u(t,x))dx \leqslant C(r^{\mu}(t)t^{-1})^{\frac{1}{q-1}}, \quad C = 2(q-1)^{\frac{1}{1-q}} \tag{37}$$

при t *таких, что* $r(t) \geq 2r_0$.

Если вместо (29) будет выполнено более сильное требование

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\ln r} \int\limits_1^r \nu(t)dt = \infty, \tag{38}$$

то можно выбрать $r(t) = t^{\frac{1}{2\mu}}$, тогда оценка (37) примет вид

$$\int\limits_{\Omega} \beta_1(x,u(t,x))dx \leqslant Ct^{\frac{-1}{2(q-1)}}. \tag{39}$$

4. Доказательство теоремы существования

Обобщенным решением задачи (1)–(3) назовем функцию $u(t,x)$, принадлежащую пространствам $V(D^T)$ при каждом $T>0$, и удовлетворяющую при $\varphi \in C_0^{\infty}(D_{-1}^T)$ равенству

$$\int\limits_{D^T} \left(-\beta(x,u)\varphi_t(t,x) + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x,\nabla u)\varphi_{x_i}(t,x) \right) dxdt = \int\limits_{\Omega} \beta(x,u_0)\varphi(0,x)dx. \tag{40}$$

Выберем последовательность $\omega_k \in C_0^{\infty}(\Omega)$ линейно независимых функций, линейная оболочка которых плотна в $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$. Положим $I_m = \cup_{k=1}^m \operatorname{supp}\omega_k$. Галеркинские приближения к решению будем искать в виде

$$u_m(t,x) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t)\omega_k(x),$$

где функции $c_{mk}(t)$ определяются из уравнений

$$\int\limits_{\Omega} \left(\omega_j \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_m}{b_m} + \beta(x,u_m) \right) + \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x,\nabla u_m)(\omega_j)_{x_i} \right) dx = 0, \tag{41}$$

$$j = 1,2,...,m.$$

Числа $b_m > 0$ выберем позже. Убедимся, что уравнения (41) разрешимы относительно производных c'_{mk}. Очевидно, что они имеют вид

$$\sum_{k=1}^m A_{jk}(t)c'_{mk} = F_j(c_{m1}, c_{m2}, ..., c_{mm}).$$

Матрица коэффициентов

$$A_{jk}(t) = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{b_m} + \beta'_u(x,u_m) \right) \omega_j\omega_k dx$$

при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ω_k, $k=1,2,...,m$ и поэтому имеет обратную. Из уравнений (41) при начальных условиях $c_{mk}(0)$, подобранных так, чтобы $u_m(0,x) \to u_0(x)$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$, находим функции $c_{mk}(t)$. Сначала эти функции находятся на малом промежутке времени, но установленная ниже ограниченность галеркинских приближений позволяет определить их на бесконечном промежутке времени. Числа b_m выберем так, чтобы $||u_m(0)||_2^2/b_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Установим теперь оценки для галеркинских приближений. Умножим уравнения (41) на $c_{mj}(t)$, просуммируем и воспользуемся формулой (8), тогда

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{u_m^2}{2b_m}\right)_t+\beta'_{1u}(x,u_m)(u_m)_t+\sum_{i=1}^{n}a_{p_i}(x,\nabla u_m)u_{mx_i}\right)dx=0. \tag{42}$$

Воспользовавшись неравенством (9) получим:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{u_m^2}{2b_m}\right)_t+(\beta_1(x,u_m))_t+\sum_{i=1}^{n}B_i(u_{mx_i})\right)dx\leqslant 0.$$

Проинтегрировав по t, ввиду (13), имеем

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{u_m^2(t,x)}{2b_m}+G(u_m^2(t,x))\right)dx+\int\limits_{D_0^t}\sum_{i=1}^{n}B_i(u_{mx_i})dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}\left(\frac{u_m^2(0,x)}{2b_m}+c_1G(u_m^2(0,x))\right)dx.$$

Последний интеграл в правой части ограничен, ввиду выбранных выше сходимостей. Таким образом, получим следующую оценку

$$\int\limits_{\Omega}G(u_m^2(t,x))dx+\int\limits_{D_0^t}\sum_{i=1}^{n}B_i(u_{mx_i})dxdt\leqslant\overline{c}. \tag{43}$$

Теперь из (43) следует ограниченность последовательности u_m в пространстве $L_\infty([0,T];L_{G_2}(\Omega))$ и в пространстве $V(D^T)$ при всех $T>0$.

Далее, умножив уравнения (41) на $c'_{mj}(t)$ и просуммировав, получим:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{1}{b_m}+\beta'_u(x,u_m)\right)(u_m)_t^2+\sum_{i=1}^{n}a_{p_i}(x,\nabla u_m)(u_{mx_i})_t\right)dx=0,$$

или

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{1}{b_m}+\beta'_u(x,u_m)\right)(u_m)_t^2+a(x,\nabla u_m)_t\right)dx=0. \tag{44}$$

Проинтегрируем последнее равенство по t:

$$\int\limits_{D^T}\left(\frac{1}{b_m}+\beta'_u(x,u_m)\right)(u_m)_t^2dxdt+\int\limits_{\Omega}a(x,\nabla u_m(T,x))dx=$$

$$=\int\limits_{\Omega}a(x,\nabla u_m(0,x))dx=I_\Omega. \tag{45}$$

Для оценки интеграла I_Ω воспользуемся неравенством (10) и леммой 1, получим

$$I_\Omega\leqslant\Gamma\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}B_i(u_{mx_i}(0,x))dx\leqslant C.$$

Соединив последнюю оценку и равенство (45), а также применив (10) и (9), получим

$$\int\limits_{D^T}\left(\beta'_u(x,u_m)\right)(u_{mt})^2dxdt+\delta\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}B_i(u_{mx_i}(T,x))dx\leqslant C.$$

Поэтому из последнего неравенства, а также (43) устанавливаем ограниченность последовательности $(\beta'_u)^{\frac{1}{2}}(u_m)_t$ в $L_2(D^T)$ при каждом $T>0$ и последовательности u_m в пространстве $L_\infty([0,\infty];\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega))$.

Установленные факты позволяют диагональным процессом выбрать подпоследовательность u_{m_k}, слабо сходящуюся в указанных ниже пространствах. Для упрощения записи под индекс k в подпоследовательностях будем опускать

$$u_m \to u \text{ слабо в } V(D^T),$$

$$(\beta'_u(x,u_m))^{\frac{1}{2}}\,(u_m)_t \to \tilde{u} \text{ слабо в } L_2(D^T),\ \forall T>0.$$

Покажем, что функционал

$$\widetilde{a}(u_m) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_{p_i}(x,\nabla u_m),$$

в силу (11), ограничен в единичном шаре пространства $V(D^T)$

$$(\widetilde{a}(u_m),v) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{D^T} a_{p_i}(x,\nabla u_m)v_{x_i}dxdt \leqslant \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{D^T}(B_i(v_{x_i})+\overline{B}_i(a_{p_i}(x,\nabla u_m)))dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{D^T}(B_i(v_{x_i})+cB_i(u_{x_i}))dxdt \leqslant c_1,\quad ||v||_{V(D^T)}\leqslant 1.$$

Следовательно, $\widetilde{a}(u_m)$ – ограниченная последовательность в пространстве $(V(D^T))'$, и из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность

$$\tilde{a}(u_m)\to\chi \qquad \text{слабо в } (V(D^T))'.$$

Сходимость имеет место при каждом $T=1,2,...$, причем предельные функции совпадают в общей области определения. Тогда, фактически, сходимость имеет место при любом $T>0$.

Ниже будет доказано, что $\tilde{u}=(\beta'_u(x,u))^{\frac{1}{2}}\,u_t$, $\chi=\tilde{a}(u)$, и функция u является обобщенным решением задачи (1)-(3). Соответствующие рассуждения разобьем на три шага.

Шаг 1. Последовательность $u_m(t)$ ограничена в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ при любом $t>0$:

$$||u_m(t)||_{W^1_{G,B}(\Omega)}\leqslant C,\ m=1,2,...$$

Зафиксируем счетное плотное подмножество $\{t_s\}\subset[0,\infty]$. Можно считать, что $t_0=0$. Для каждой ограниченной области $\Omega^r\subset\Omega$ с гладкой границей известна компактность вложения $W^1_1(\Omega^r)\subset L_1(\Omega^r)$. Так как $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)\subset W^1_1(\Omega^r)$, то диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(t_s)\to h_s$ сильно в $L_1(\Omega^r)$ при всех натуральных s. Выбирая еще раз подпоследовательность, можно считать также (отбрасывая подиндексы), что $u_m(t_s,x)\to h_s(x)$ почти всюду в Ω^r при каждом t_s. В частности, при $t_0=0$ имеем $u_m(0,x)\to u_0(x)$ почти всюду в Ω.

Для следующего шага используем лемму, доказанную в [6].

Лемма 5. *Пусть последовательность $v_m(t)\in C([0,T];L_2(\Omega))$ обладает свойствами:*
1) $v_m(t_s,x)$ сходится почти всюду в Ω^r, при каждом t_s и некотором $r>0$,
2) последовательность v_{mt} ограничена в $L_2(D^T)$.

Тогда можно выделить подпоследовательность v_{m_k}, сходящуюся к функции v в пространстве $C([0,T];L_1(\Omega^r))$, и $v_{m_k}\to v$ почти всюду в $(0,T)\times\Omega^r$.

Шаг 2. К последовательности $v_m=f(x,u_m)=\int\limits_0^{u_m}(\beta'_u(x,\tau))^{\frac{1}{2}}d\tau$ применим лемму 5. Тогда $(v_m)_t=(\beta'_u)^{\frac{1}{2}}(u_m)_t$. Принадлежность $v_m(t)$ к $L_2(\Omega)$ при каждом $t>0$ следует из ограниченности носителя функции $u_m(t)$, ее гладкости и ограниченности $\beta'_u(x,u)$ на ограниченном множестве значений аргументов. Благодаря произвольности $r > 0$ и $T = 1, 2, ...$, диагональным процессом можно выделить подпоследовательность v_{m_k}, сходящуюся в D почти всюду. Так как β'_u не зануляется целиком на интервалах, то $f(x, u_m)$ возрастающая по u_m функция и имеет обратную, $u_m = f^{-1}(x, v_m)$. Тогда из сходимости последовательности v_{m_k} следует сходимость последовательности u_{m_k} почти всюду в D к u. То, что предельная функция будет именно u, вытекает из следующего утверждения (см. [19, гл.1, §1.4, лемма 1.3]):

Лемма 6. *Пусть последовательность g_m сходится к g почти всюду в Q и ограничена в $L_q(Q)$. Тогда $g_m \to g$ слабо в $L_q(Q)$.*

Неравенство $\int\limits_{\Omega^r} u^2 dx \leqslant \int\limits_{\Omega^r} (G(u^2) + \overline{G}(1))dx$ влечет непрерывность вложения $V(D^T) \subset L_2([0,T] \times \Omega^r)$. Поэтому слабая сходимость $u_m \to u$ в $V(D^T)$ влечет слабую сходимость $u_m \to u$ в $L_2([0,T]\times\Omega^r)$. Из леммы 6 следует также, что $v_{m_k} \to v = \int\limits_0^u (\beta'_u(x,\tau))^{\frac{1}{2}} d\tau$ слабо в $L_2(D^T)$ при каждом $T > 0$.

Из леммы 5 известно, что $v_{m_k}(T) \to v(T)$ в $L_1(\Omega^r)$. Тогда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в Ω^r: $v_{m_k}(T,x) \to v(T,x) \;\Rightarrow\; u_{m_k}(T,x) \to u(T,x)$ почти всюду в Ω^r (а, следовательно, и в Ω). Ограниченность последовательности $u_m(T)$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega)$ позволяет выделить подпоследовательность такую, что

$$u_{m_k}(T) \to u(T) \;\text{ слабо в }\; \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega), \;\text{при фиксированном } T. \tag{46}$$

Отсюда следует, что $u \in L_\infty([0,\infty); \overset{\circ}{W}{}^1_{G,B}(\Omega))$.

Далее, $((v_m)_t, \varphi)_{D^T} = -(v_m, \varphi_t)_{D^T}$, $\varphi \in C_0^\infty(D^T)$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получим

$$(\tilde{u}, \varphi)_{D^T} = -(v, \varphi_t)_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{u} = v_t = (\beta'_u(x,u))^{\frac{1}{2}} u_t$.

Покажем, что последовательность $\beta'_u(x,u_m)(u_m)_t$ ограничена в $L_{\overline{G}_2}(D^T)$. В самом деле,

$$|(\beta'_u(x,u_m)(u_m)_t, \varphi)_{D^T}| = |((\beta'_u))^{\frac{1}{2}}(u_m)_t, \varphi(\beta'_u)^{\frac{1}{2}})_{D^T}| \leqslant c||\varphi(\beta'_u)^{\frac{1}{2}}||_{L_2(D^T)} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \left(\int\limits_{D^T} G(\varphi^2)dxdt + \int\limits_{D^T} \overline{G}(\beta'_u(u_m))dxdt \right)^{\frac{1}{2}} < c_2, \;\; ||\varphi||_{G_2, D^T} \leqslant 1,$$

поскольку последний интеграл оценивается по формуле (14). Тогда можно считать, что $\beta'_u(x,u_m)(u_m)_t \to \overline{u}$ слабо в $L_{\overline{G}_2}(D^T)$.

Покажем теперь, что $\beta(x, u(t,x))$ принадлежит пространству $C([0,\infty]; L_{\overline{G}_2}(\Omega))$. Рассмотрим функционал

$$l(\varphi) = \int\limits_\Omega \varphi(x)\beta(x,u(t,x))dx.$$

Используя (4), покажем его ограниченность в единичном шаре пространства $L_{G_2}(\Omega)$

$$|l(\varphi)| \leqslant c_\beta \int\limits_\Omega |\varphi u \beta'_u(x,u)|dx \leqslant c_\beta \int\limits_\Omega \left(\overline{G}(\beta'_u(x,u)) + G(|\varphi u|)\right) dx. \tag{47}$$

Первый из интегралов в правой части неравенства ограничен благодаря условию (14). Оценим второй интеграл

$$G(|\varphi u|) \leqslant G(\frac{\varphi^2 + u^2}{2}) \leqslant G(\varphi^2) + G(u^2).$$

Поскольку $\int\limits_{\Omega} G(\varphi^2)dx \leqslant 1$, получаем ограниченность второго интеграла в правой части (47). Ограниченность функционала постоянной, не зависящей от $t \in [0, \infty)$, обеспечивает принадлежность $\beta(x, u)$ пространству $L_\infty([0, \infty); L_{\overline{G}_2}(\Omega))$. Переходя к пределу в равенстве

$$(\beta(x, u_m), \varphi_t)_{D^T} = -(\beta'_u(x, u_m)(u_m)_t, \varphi)_{D^T},$$

получаем, что

$$(\beta(x, u), \varphi_t)_{D^T} = -(\overline{u}, \varphi)_{D^T},$$

то есть $(\beta(x, u))_t = \overline{u} \in L_{\overline{G}_2}(D^T)$. Следовательно, ввиду произвольности $T > 0$, $\beta(x, u) \in C([0, \infty);\, L_{\overline{G}_2}(\Omega))$. При этом

$$\beta(x, u(0)) = \beta(x, u_0). \tag{48}$$

В самом деле, в шаге 1 отмечалась сходимость $u_m(0, x) \to u_0(x)$ почти всюду в Ω. Далее, по лемме 5 сходимость $v_m(0) \to v(0)$ в $L_1(\Omega^r), r > 0$, влечет сходимость $u_m(0, x) = f^{-1}(x, v_m(0, x)) \to u(0, x)$ почти всюду в Ω по подходящей подпоследовательности, что обеспечивает равенство (48).

Шаг 3. Переходим к доказательству равенства $\chi = \tilde{a}(u)$. Умножим уравнение (41) на гладкую функцию $d_j(t)$, проинтегрируем по t и перейдем к пределу при $m \to \infty$, обозначив $d_j(t)\omega_j(x)$ через φ в конечном выражении

$$(\beta_t(x, u), \varphi)_{D^T} + (\chi, \varphi)_{D^T} = 0. \tag{49}$$

Отметим, что

$$(\frac{(u_m)_t}{b_m}, \varphi)_{D^T} = \frac{1}{b_m}(-(u_m, \varphi_t)_{D^T} + (u_m(T), \varphi(T))_\Omega - (u_m(0), \varphi(0))_\Omega) \to 0$$

в силу ограниченности u_m в $L_\infty([0, T]; L_{G_2}(\Omega))$ и того, что $b_m \to \infty$. Легко видеть также, что любая функция из $V(D^T)$ может быть приближена линейными комбинациями вида

$$\sum_{i=1}^{N} d_j(t)\omega_j(x).$$

Поэтому (49) справедливо и для функций φ из пространства $V(D^T)$. Таким образом, u будет являться обобщенным решением задачи (1)–(3), если будет установлено, что $\chi = \tilde{a}(u)$.

Пусть $w_m = (\beta_1(x, u_m))^{\frac{1}{2}}$, $w_m \to w = (\beta_1(x, u))^{\frac{1}{2}}$ почти всюду в D. Если будет установлено, что $w \in L_2(D^T)$ имеет обобщенную производную $w_t \in L_2(D^T)$, то будет выполнено тождество

$$\int\limits_0^T \frac{\partial}{\partial t}||w||_2^2 dt = ||w(T)||_{L_2(\Omega)} - ||w(0)||_{L_2(\Omega)}. \tag{50}$$

Воспользуемся (13)

$$\int\limits_{\Omega} \beta_1(x, u_m(T, x))dx \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega} G(u_m^2(T, x))dx < c_2. \tag{51}$$

Значит последовательность $w_m(T)$ ограничена в $L_2(\Omega)$, и по лемме 6 из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к $w(T)$ слабо в $L_2(\Omega)$. Заметим, что тогда $||w||_2^2 = \lim(w, w_m) \leqslant \liminf ||w||_2||w_m||_2$. Откуда следует неравенство

$$\liminf ||\beta_1(x, u_m(T))||_{L_1(\Omega)} \geq ||\beta_1(x, u(T))||_{L_1(\Omega)}. \tag{52}$$

Проинтегрировав неравенство (51) по T, получаем, что последовательность w_m ограничена в $L_2(D^T)$, и по лемме 6 из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к w слабо в $L_2(D^T)$.

Для доказательства того, что $w_t \in L_2(D^T)$, применим условие (12), тогда

$$\int\limits_{D^T} \left((\beta_1^{\frac{1}{2}}(x,u_m))_t\right)^2 dxdt = \int\limits_{D^T} \left(\frac{\beta'_{1u}(x,u_m)(u_m)_t}{2\beta_1^{\frac{1}{2}}(x,u_m)}\right)^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^T} \frac{\alpha(\beta'_{1u}(x,u_m))^2(u_m)_t^2}{4u\beta'_{1u}(x,u_m)} dxdt = \frac{\alpha}{4}\int\limits_{D^T} \beta'_u(x,u_m)(u_m)_t^2 dxdt < c.$$

Последнее неравенство следует из (45). Следовательно, $(w_m)_t$ слабо сходится к $\overline{w}$ в $L_2(D^T)$. Далее, $(w_m,\varphi_t)_{D^T} = -((w_m)_t,\varphi)_{D^T}$, $\varphi \in C_0^\infty(D^T)$. Переходя к пределу, получим $(w,\varphi_t)_{D^T} = -(\overline{w},\varphi)_{D^T}$. Значит $\overline{w} = w_t$.

Подставляя в (49) $\varphi = u$ и применяя (50), получаем

$$(-\chi,u)_{D^T} = ((\beta(x,u))_t,u)_{D^T} = \int\limits_{D^T} \beta'_{1u}(x,u)u_t dxdt = \tag{53}$$

$$= \int\limits_0^T \frac{\partial}{\partial t}||\beta_1^{\frac{1}{2}}(x,u)||_2^2 dt = ||\beta_1(u(T))||_{L_1(\Omega)} - ||\beta_1(u(0))||_{L_1(\Omega)}.$$

Далее используется монотонность оператора $\widetilde{a}$. Легко проверить (см. [19, гл.2, §1, предложение 1.1]), что

$$X_m = \int\limits_0^T (\tilde{a}(u_m(t)) - \tilde{a}(h(t)), u_m(t) - h(t))_\Omega dt \geq 0, \qquad \forall h \in V(D^T).$$

Из уравнений (41) легко выводятся соотношения

$$(\tilde{a}(u_m),u_m)_{D^T} = ||\beta_1(u_m(0))||_{L_1(\Omega)} - ||\beta_1(u_m(T))||_{L_1(\Omega)} + \tag{54}$$

$$+\frac{1}{2b_m}\left(||u_m(0)||_2^2 - ||u_m(T)||_2^2\right).$$

Поэтому

$$X_m = ||\beta_1(u_m(0))||_{L_1(\Omega)} - ||\beta_1(u_m(T))||_{L_1(\Omega)} + \frac{1}{2b_m}(||u_m(0)||_2^2 - ||u_m(T)||_2^2) -$$

$$-(\tilde{a}(u_m),h)_{D^T} - (\tilde{a}(h),u_m-h)_{D^T}.$$

Далее, пользуясь (52), выводим

$$0 \leq \limsup X_m \leqslant ||\beta_1(u(0))||_{L_1(\Omega)} - ||\beta_1(u(T))||_{L_1(\Omega)} -$$

$$-(\chi,h)_{D^T} - (\tilde{a}(h),u-h)_{D^T}.$$

Применив (53), получим

$$(\chi - \tilde{a}(h), u-h)_{D^T} \geq 0.$$

Положим $h = u - \lambda\omega$, $\lambda > 0$, $\omega \in V(D^T)$, тогда

$$\lambda(\chi - \tilde{a}(u-\lambda\omega),\omega)_{D^T} \geq 0.$$

Устремляя $\lambda \to 0$, будем иметь $(\chi - \tilde{a}(u),\omega) \geq 0$, $\forall\omega$. Отсюда $\chi = \tilde{a}(u)$.

Для дальнейшего использования запишем (53) в виде

$$||\beta_1(u(T))||_{L_1(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (a_{p_i}(x,\nabla u),u_{x_i})_{D^T} = ||\beta_1(u(0))||_{L_1(\Omega)}. \tag{55}$$

5. Доказательство лемм 2–4

Пусть $\{u > b\}$ обозначает множество $\{(t,x) \in D^T | u(t,x) > b\}$. Отметим, что

$$\mathrm{mes}\{u > b\} < \frac{c}{G(b^2)}, \ u \in L_{G_2}(D^T). \tag{56}$$

Действительно,

$$c > \int\limits_{D^T} G(u^2)dxdt > \int\limits_{D^T \cap \{u>b\}} G(b^2)dxdt = G(b^2)\mathrm{mes}\{u > b\},$$

откуда и следует неравенство (56).

Для области, расположенной вдоль оси Ox_1, докажем следующее нервенство

$$\int\limits_{\Omega^r} B_1(v(x))dx \leqslant \int\limits_{\Omega^r} B_1(rv_{x_1}(x))dx, \ v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{57}$$

Пусть $f(x_1) \in C[0,r], \ f(0) = 0$. Воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница, получим

$$|f(x_1)| = |\int\limits_0^{x_1} f'(x_1)dx_1| \leqslant \int\limits_0^r |f'(x_1)|dx_1, \quad x_1 \in [0,r].$$

Теперь применим интегральное неравенство Йенсена (см. [26, гл.2, §8.2, нер.-во 8.2]), тогда

$$B_1\left(\frac{f(x_1)}{r}\right) \leqslant B_1\left(\frac{\int_0^r |f'(x_1)|dx_1}{r}\right) \leqslant \frac{1}{r}\int\limits_0^r B_1(f'(x_1))dx_1.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по x_1

$$\int\limits_0^r B_1\left(\frac{f(x_1)}{r}\right)dx_1 \leqslant \int\limits_0^r B_1(f'(x_1))dx_1.$$

Тогда, после подстановки $f(x_1) = rv(x)$ и интегрирования по $x' = \{x_2, ..., x_n\}$, получим (57).

Доказательство лемм 2,3. Покажем, что если $u_0(x) \leqslant b$ для п.в. $x \in \Omega$, то выполняется (22). Положим $u^{(b)}(t,x) = \max(u(t,x) - b, 0)$. Воспользуемся тождеством (49) при $\varphi = u^{(b)}(t,x)\xi(x)$, где $\xi(x)$ – липшицева финитная функция,

$$\big((\beta(x,u))_t, u^{(b)}(t,x)\xi(x)\big)_{D^T} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{p_i}(x, \nabla u), u^{(b)}(t,x)\xi(x)\right)_{D^T} = 0,$$

$$\big((\beta(x,u))_t, u^{(b)}(t,x)\xi(x)\big)_{D^T} + \sum_{i=1}^n \big(a_{p_i}(x,\nabla u), u^{(b)}_{x_i}(t,x)\xi(x)\big)_{D^T} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \big(a_{p_i}(x,\nabla u), u^{(b)}(t,x)\xi_{x_i}(x)\big)_{D^T} = 0. \tag{58}$$

Выберем $\xi = \eta(x_1)$, где

$$\eta(\rho) = \begin{cases} 1, & \text{при} \ \ \rho < r, \\ 0, & \text{при} \ \ \rho > R, \\ \frac{R-\rho}{R-r}, & \text{при} \ \ \rho \in [r, R]. \end{cases}$$

Тогда $|\xi_{x_1}| \leqslant \frac{1}{R-r}$. Заметим, что $u^{(b)}(0,x) = u_0^{(b)}(x) = 0$, для почти всех $x \in \Omega$. Далее оцениваем интегралы, входящие в равенство (58), по условию (9)

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{D^T} a_{p_i}(x,\nabla u) u_{x_i}^{(b)}(t,x)\xi(x)dxdt \geq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{D^T \cap \{u>b\}} B_i(u_{x_i})\xi(x)dxdt. \qquad (59)$$

Теперь преобразуем первый интеграл в (58)

$$I_1 = \int\limits_{D^T} \beta_t(x,u)u^{(b)}(t,x)\xi(x)dxdt = \int\limits_{D^T \cap \{u>b\}} \beta'_u(x,u)u_t(t,x)u^{(b)}(t,x)\xi(x)dxdt =$$

$$= \int\limits_{D^T \cap \{u>b\}} \beta'_u(x, b+u^{(b)})(u^{(b)})_t u^{(b)}\xi(x)dxdt.$$

Положим $h(x,y) = \int\limits_0^y \beta'_u(x,b+v)vdv$, тогда $h'_y(x,u^{(b)}) \geq 0$, поскольку $\beta'_u \geq 0$. Таким образом, интеграл I_1 приводится к виду

$$I_1 = \int\limits_{\Omega} \xi(x)h(x,u^{(b)}(t,x))|_0^T dx = \int\limits_{\Omega} \xi(x)u^{(b)}h'_y(x,\theta(x)u^{(b)})|_{t=T}dx \geq 0, \qquad (60)$$

где $0 < \theta(x) < 1$.

В случае ограниченной области Ω выбираем r так, чтобы она содержалась в шаре радиуса r. Тогда $\xi_{x_i} = 0$ в D^T и из (58), (59) выводим неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{D^T \cap \{u>b\}} B_i(u_{x_i})\xi(x)dxdt \leqslant 0.$$

Отсюда имеем

$$B_i(u_{x_i}) = 0, \ i = 1,2,...,n, \qquad (61)$$

для почти всех $t,x \in D^T \cap \{u > b\} \cap \{x_1 < r\}$. Применив неравенство (57) к функции $u^{(b)}(t,x)$, находим

$$\int\limits_{\Omega^r} B_1(u^{(b)}(t,x))dx \leqslant \int\limits_{\Omega^r} B_1(ru_{x_1}^{(b)}(t,x))dx = 0, \text{ при почти всех } t \in (0,T).$$

Следовательно, $u^{(b)}(t,x) = 0$ при почти всех $x \in \Omega^r$, $t \in (0,T)$.

Для оценки последнего интеграла в (58) в случае неограниченной области Ω последовательно воспользуемся неравенствами (6), (11)

$$\int\limits_{D^T} a_{p_1}(x,\nabla u)u^{(b)}(t,x)\xi_{x_1}(x)dxdt \leqslant \frac{1}{R-r}\int\limits_{D^T} |a_{p_1}(x,\nabla u)u^{(b)}(t,x)|dxdt \leqslant \qquad (62)$$

$$\leqslant \frac{1}{R-r}\int\limits_{D^T} \left(\overline{B}_1(a_{p_1}(x,\nabla u)) + B_1(u^{(b)}(t,x))\right)dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{R-r}\int\limits_{D^T} \left(c\sum_{i=1}^{n} B_i(u_{x_i}) + B_1(u^{(b)}(t,x))\right)dxdt.$$

Учитывая (58)–(60), (62), выводим

$$\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{D^T\cap\{u>b\}} B_i(u_{x_i}(t,x))\xi(x)dxdt \leqslant \frac{c}{R-r}\int\limits_{D^T}\left(\sum_{i=1}^{n}B_i(u_{x_i})+B_1(u^{(b)})\right)dxdt. \quad (63)$$

Покажем теперь ограниченность интеграла $\int\limits_{D^T} B_1(u^{(b)}(t,x))dxdt$. Воспользуемся условиями (21),(5) и (20)

$$\int\limits_{D^T} B_1(u^{(b)})dxdt \leqslant \int\limits_{D^T\cap\{u^{(b)}>s_0\}} B^*(ku^{(b)})dxdt + \int\limits_{D^T\cap\{u>b\}} B_1(s_0)dxdt \leqslant \quad (64)$$

$$\leqslant \int\limits_{D^T} B^*\left(k||u^{(b)}||_{B^*,D^T}\frac{u^{(b)}}{||u^{(b)}||_{B^*,D^T}}\right)dxdt + B_1(s_0)\mathrm{mes}\{u>b\} \leqslant$$

$$\leqslant k^*(k||u^{(b)}||_{B^*,D^T})^m + c_3 \leqslant k^*\left(Ck\sum_{i=1}^{n}||u^{(b)}_{x_i}||_{\widetilde{B}_i,D^T}\right)^m + c_3,$$

где k, s_0 взято из определения (7), а k^*, m – из определения (5).

Покажем теперь, что

$$\sum_{i=1}^{n}||u^{(b)}_{x_i}||_{\widetilde{B}_i,D^T} \leqslant c_4. \quad (65)$$

Применив (56), а также неравенство (15), получим

$$\sum_{i=1}^{n}||u^{(b)}_{x_i}||_{\widetilde{B}_i,D^T} \leqslant n + \int\limits_{D^T\cap\{u>b\}}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{B}_i(u_{x_i})dxdt =$$

$$= n + \int\limits_{D^T\cap\{|u_{x_i}|>1\}\cap\{u>b\}}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{B}_i(u_{x_i})dxdt + \int\limits_{D^T\cap\{|u_{x_i}|\leqslant 1\}\cap\{u>b\}}\sum_{i=1}^{n}\widetilde{B}_i(u_{x_i})dxdt \leqslant$$

$$\leqslant n + \int\limits_{D^T\cap\{|u_{x_i}|>1\}}\sum_{i=1}^{n}B_i(u_{x_i})dxdt + \int\limits_{D^T\cap\{u>b\}}\sum_{i=1}^{n}B_i(1)dxdt \leqslant c_4.$$

Ограниченность интеграла $\int\limits_{D^T} B_1(u^{(b)}(t,x))dxdt$ доказана.

Таким образом, правая часть в (63) стремится к нулю при $R\to\infty$. Поэтому (61) справедливо и для неограниченной области Ω. Тогда $u^{(b)}(t,x)=0$ почти всюду в $(0,T)\times\Omega^r$. Ввиду произвольности $r>0$, $T>0$, отсюда следует, что $u(t,x)\leqslant b$ для почти всех $(t,x)\in D$.

Доказательство леммы 4. Возьмем произвольное $b>0$ и воспользуемся (20) и (65), получим

$$||u^{(b)}||_{\infty,D^T} \leqslant C\sum_{i=1}^{n}||u^{(b)}_{x_i}||_{\widetilde{B}_i,D^T} \leqslant c_4.$$

Поскольку $u(t,x)\leqslant b+u^{(b)}(t,x)$, то (23) установлено.

6. Доказательство теоремы 2

Пусть теперь область Ω ограничена. Установим оценки снизу скорости убывания решения задачи (1)–(3) при $t \to \infty$.

Введем обозначения

$$e_m(t) = e(t) = \int\limits_\Omega \left(\beta_1(x, u_m(t,x)) + \frac{u_m^2(t,x)}{2b_m}\right) dx,$$

$$h(t) = \int\limits_\Omega a(x, \nabla u_m) dx,$$

опуская индекс m там, где это допустимо. Из формулы (42) следует, что

$$e'(t) = -\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m) u_{mx_i} dx. \tag{66}$$

Далее, из (44) имеем

$$-h'(t) = \int\limits_\Omega \left(\frac{1}{b_m} + \beta_u'(x, u_m)\right) u_{mt}^2 dx.$$

Поэтому

$$(e'(t))^2 = \left(\int\limits_\Omega \left(\beta_{1u}'(x, u_m)(u_m)_t + \frac{u_m(t) u_{mt}(t)}{b_m}\right) dx\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(||(u_m)_t (\beta_u'(x,u_m))^{\frac12}||_2 ||u_m (\beta_u'(x,u_m))^{\frac12}||_2 + \frac{||u_m(t)||_2 ||u_{mt}(t)||_2}{b_m}\right)^2.$$

Применим теперь неравенство Коши-Буняковского для скалярного произведения в $\mathbb{R}_2$ и воспользуемся условием (12). Тогда

$$(e'(t))^2 \leqslant \int\limits_\Omega \left(\beta_u'(x,u_m)((u_m)_t)^2 + \frac{u_{mt}^2(t)}{b_m}\right) dx \int\limits_\Omega \left(\beta_u'(x,u_m) u_m^2 + \frac{u_m^2(t)}{b_m}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant -\overline{\alpha} h'(t) e(t), \quad \overline{\alpha} = \max(\alpha, 2).$$

При помощи (66) перепишем последнее в виде

$$e'(t) \left(\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m) u_{mx_i} dx\right) \geq \overline{\alpha} h'(t) e(t).$$

Отсюда, используя левое неравенство в (10), а также (9), получим

$$\frac{e'(t)}{e(t)} \geq \frac{\overline{\alpha} h'(t)}{h(t)} \frac{h(t)}{\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n a_{p_i}(x, \nabla u_m) u_{mx_i} dx} \geq \overline{\alpha}\Gamma \frac{h'(t)}{h(t)},$$

или

$$\gamma \frac{e'(t)}{e(t)} \geq \frac{h'(t)}{h(t)}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{1}{\overline{\alpha}\Gamma}.$$

После интегрирования имеем

$$h(t) \leqslant \frac{h(0) e^\gamma(t)}{e^\gamma(0)}.$$

Тогда, ввиду (66) и условия (10),

$$e'(t) \geq -h(t)/\delta \geq -\frac{h(0)e^{\gamma}(t)}{\delta e^{\gamma}(0)},$$

или

$$\frac{e'}{e^{\gamma}} \geq -\frac{h(0)}{\delta e^{\gamma}(0)}.$$

Отсюда имеем

$$e^{1-\gamma}(t) - e^{1-\gamma}(0) \leqslant (\gamma-1)\frac{h(0)t}{\delta e^{\gamma}(0)}, \text{ для случая } \gamma > 1;$$

$$e^{1-\gamma}(t) - e^{1-\gamma}(0) \geq -(1-\gamma)\frac{h(0)t}{\delta e^{\gamma}(0)} \text{ для случая } \gamma < 1.$$

Таким образом, получаем

$$e(t) \geq e(0)\left(1+(\gamma-1)\frac{h(0)t}{\delta e(0)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \text{ для } \gamma > 1; \tag{67}$$

$$e(t) \geq e(0)\left(1-(1-\gamma)\frac{h(0)t}{\delta e(0)}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}, \text{ для } \gamma < 1, \quad t \in \left[0, \frac{\delta e(0)}{(1-\gamma)h(0)}\right). \tag{68}$$

Докажем предельный переход

$$\int\limits_{\Omega} \beta_1(x, u_m)dx \to \int\limits_{\Omega} \beta_1(x, u)dx. \tag{69}$$

Если интеграл (19) сходится, то, по лемме 4, $|u_m| \leqslant c$. Тогда теорема Лебега об ограниченной сходимости позволяет совершить предельный переход (69). Пусть теперь интеграл (19) расходится, и выполнено условие (24). Сходимость $u_m(t,x) \to u(t,x)$ при почти всех $x \in \Omega$ по теореме Егорова влечет равномерную сходимость на множестве $\Omega_\delta \subset \Omega$, $\operatorname{mes} \Omega/\Omega_\delta < \delta$. Если при достаточно больших m выполнено неравенство

$$|u_m(t,x) - u(t,x)| < \varepsilon, \ x \in \Omega_\delta,$$

то

$$\beta_1(x, u_m) \leqslant c_1 G(u_m^2(t,x)) \leqslant c_1 G((|u(t,x)| + \varepsilon)^2).$$

Поэтому теорема Лебега об ограниченной сходимости позволяет совершить предельный переход $\int\limits_{\Omega_\delta} \beta_1(x, u_m)dx \to \int\limits_{\Omega_\delta} \beta_1(x, u)dx$. Далее,

$$I_{m,\delta} = \int\limits_{\Omega/\Omega_\delta} |\beta_1(x, u_m)|dx \leqslant ||\beta_1(x, u_m)||_{L_q(\Omega)} ||1||_{L_{\overline{q}}(\Omega/\Omega_\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{1/\overline{q}} ||\beta_1(x, u_m)||_{L_q(\Omega)}.$$

Пользуясь условием (24), а также рассуждениями (64) и (65), получим

$$I_{m,\delta} \leqslant c\delta^{1/\overline{q}} \left(\int\limits_{\Omega} (B^*(u_m) + 1)dx\right)^{1/q} \leqslant \overline{c}\delta^{1/\overline{q}}.$$

Теперь нетрудно завершить доказательство предельного перехода (69).

Функции

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{mk}(t)\omega_k$$

принадлежат линейной оболочке функций $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_m$. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому

$$\int\limits_{\Omega} u_m^2(t)dx \leqslant c_m \|u_m(t)\|^2_{L_{G_2}(\Omega)} \leqslant \widetilde{c_m}, \forall t > 0.$$

Выберем числа b_m так, чтобы $\widetilde{c_m} \leqslant b_m/m$. Тогда, пользуясь (69), при помощи формулы (13), получим

$$e_m(t) \to \int\limits_{\Omega} \beta_1(x,u)dx \leqslant c_1 \int\limits_{\Omega} G(u^2(t))dx.$$

После предельного перехода в (67) и (68) при $m \to \infty$, где $e(t) = e_m(t)$, получим оценки (25),(26).

6.1. Доказательство теоремы 3. Пусть $\theta(\rho)$, $\rho > 0$ — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $\rho \geq r$, нулю при $\rho \leq r_0$, линейная при $\rho \in [r_0, 2r_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(\rho) = \lambda\nu(\rho)\theta(\rho), \quad \rho \in (2r_0, r), \tag{70}$$

(постоянную λ определим позднее). Решая это уравнение, находим

$$\theta(\rho) = \exp\left(-\lambda \int\limits_{\rho}^{r} \nu(t)dt\right), \quad \rho \in (2r_0, r).$$

При $\rho \in (r_0, 2r_0)$ имеем

$$\theta'(\rho) = \frac{\theta(2r_0)}{r_0} = \frac{1}{r_0}\exp\left(-\lambda \int\limits_{2r_0}^{r} \nu(t)dt\right), \quad \rho \in (r_0, 2r_0). \tag{71}$$

Пусть $\xi(x)$–липшицева неотрицательная срезающая функция.
Подставив в (49) $\varphi = u\xi$, получим

$$(\beta(x,u)_t, u\xi)_{D^T} + (\chi, u\xi)_{D^T} = 0.$$

Перепишем это в виде

$$\int\limits_{D^T} \left(\beta'_{1u}(x,u)u_t\xi + \sum_{i=1}^{n} a_{p_i}(x,\nabla u)(u\xi)_{x_i}\right) dxdt = 0.$$

Положим $\xi(x) = \theta(x_1)$. Используя (9) и учитывая, что носители ξ и u_0 не пересекаются, после интегрирования первого слагаемого по t и применения (70), (71) получим

$$\int\limits_{\Omega} \beta_1(x,u(T))\theta(x_1)dx + \int\limits_{D^T} \sum_{i=1}^{n} B_i(u_{x_i})\theta(x_1)dxdt \leqslant \tag{72}$$

$$\leqslant \int\limits_{D^T} |ua_{p_1}(x,\nabla u)\theta'(x_1)|dxdt \leqslant \int\limits_{D^T\cap\{2r_0<x_1<r\}} |ua_{p_1}(x,\nabla u)\lambda\nu(x_1)\theta(x_1)|dxdt +$$

$$+ \int\limits_{D^T\cap\{r_0<x_1<2r_0\}} \left|ua_{p_1}(x,\nabla u)\frac{\theta(2r_0)}{r_0}\right| dxdt = I_1 + I_2.$$

Отметим, что $B(su) \leqslant sB(u)$, при $s \leqslant 1$. Далее, пользуясь ограниченностью функций ν ($\nu \leqslant \nu_0$) и u ($|u| \leqslant v_0$) (см. (32)), при помощи (6), (11), (31) оценим первый интеграл

$$I_1 \leqslant \int\limits_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} \theta(x_1) \left(\overline{B}_1(\varepsilon a_{p_1}(x, \nabla u)) + B_1(u\nu \frac{\lambda}{\varepsilon}) \right) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} \theta(x_1) \left(\varepsilon c \sum_{i=1}^{n} B_i(u_{x_i}) + gB_2(u\nu \frac{\lambda}{\varepsilon}) \right) dxdt.$$

Выберем теперь $\varepsilon = \frac{1}{2c}$, а также λ так, чтобы $\frac{\lambda}{\varepsilon}\nu_0 v_0 \leqslant 1$ и $\frac{\lambda}{\varepsilon} g \leqslant \frac{1}{2}$, тогда, воспользовавшись определением функции ν, получим

$$I_1 \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} \theta(x_1) \sum_{i=1}^{n} B_i(u_{x_i}) dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^T dt \int\limits_{2r_0}^{r} dx_1 \theta(x_1) \int\limits_{\gamma(x_1)} B_2(u\nu) dx' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{D^T \cap \{2r_0 < x_1 < r\}} \theta(x_1) \sum_{i=1}^{n} B_i(u_{x_i}) dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^T dt \int\limits_{2r_0}^{r} dx_1 \theta(x_1) \int\limits_{\gamma(x_1)} B_2(u_{x_2}) dx' \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{D^T} \theta(x_1) \left(\sum_{i=1}^{n} B_i(u_{x_i}) + B_2(u_{x_2}) \right) dxdt.$$

Для I_2, используя неравенство (11), выводим оценку

$$I_2 \leqslant \frac{\theta(2r_0)}{r_0} \int\limits_{D^T \cap \{r_0 < x_1 < 2r_0\}} (B_1(u) + \overline{B}_1(a_{p_1}(x, \nabla u))) dxdt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\theta(2r_0)}{r_0} \int\limits_{D^T \cap \{r_0 < x_1 < 2r_0\}} (B_1(u) + c \sum_{i=1}^{n} B_i(u_{x_i})) dxdt.$$

Далее, ввиду (57), (5)

$$\int\limits_{D^T \cap \{x_1 < 2r_0\}} B_1(u) dxdt \leqslant \int\limits_{D^T \cap \{x_1 < 2r_0\}} B_1(2r_0 u_{x_1}) dxdt \leqslant c \int\limits_{D^T} B_1(u_{x_1}) dxdt.$$

Теперь, используя оценки для I_1, I_2, из (72) находим

$$\int\limits_{\Omega} \beta_1(x, u(T)) \theta(x_1) dx \leqslant \frac{\theta(2r_0)}{r_0} \int\limits_{D^T} c_1 \sum_{i=1}^{n} B_i(u_{x_i}) dxdt.$$

Ограниченность последнего интеграла получается из (43) предельным переходом по $m \to \infty$. Поскольку $\theta(x_1) = 1$ при $x_1 \geq r$, то имеем неравенство (33).

6.2. Доказательство теоремы 4. Выберем положительное число $r \geq 2r_0$. Введем обозначение

$$\varepsilon(r) = M \exp(-\lambda \int\limits_{2r_0}^{r} \nu(t) dt)$$

и, пользуясь (33), запишем соотношение

$$\Phi(t) \equiv \int\limits_{\Omega} \beta_1(x, u(t, x)) dx \leqslant \int\limits_{\Omega^r} \beta_1(x, u(t, x)) dx + \varepsilon(r).$$

Пусть t_r такая точка интервала $(0,\infty)$, что $\Phi(t_r)=\varepsilon(r)$. Если такой точки нет, то либо $\Phi(t)>\varepsilon(r)$ при всех $t>0$, тогда полагаем $t_r=\infty$, либо $\Phi(t)<\varepsilon(r)$ при всех $t\geq 0$. В последнем случае желаемая оценка (74) выполнена. Из (55) следует невозрастание функции $\Phi(t)$, поэтому

$$0\leqslant \Phi(t)-\varepsilon(r)\leqslant \int\limits_{\Omega^r}\beta_1(x,u(t,x))dx,\quad t\in[0,t_r). \tag{73}$$

Пользуясь условием (34), (27), запишем неравенства

$$\Phi(t)-\varepsilon(r)\leqslant \left(\int\limits_{\Omega^r}\beta_1(x,u(t,x))^q dx\right)^{1/q}(\mathrm{mes}\Omega^r)^{1/\overline{q}}\leqslant$$

$$\leqslant \left(c_3\int\limits_{\Omega^r}B_1(u(t,x))dx\right)^{1/q}r^{d/\overline{q}},\ \ r\geq r_0.$$

Воспользуемся теперь неравенством (57), а также $\triangle_2$-условием (5),(9), (35) и (55), получим

$$\Phi(t)-\varepsilon(r)\leqslant \left(c_3\int\limits_{\Omega^r}B_1(ru_{x_1})dx\right)^{1/q}r^{d/\overline{q}}\leqslant$$

$$\leqslant c_4 r^{d/\overline{q}}\left(\int\limits_{\Omega^r}r^m B_1(u_{x_1})dx\right)^{1/q}.$$

Будем считать, что числа $\mu,\ r_0$ выбраны так, что выполнено неравенство $c_4 r^{d/\overline{q}+m/q}\leqslant r^{\mu/q}$ при $r\geq r_0$. Тогда

$$\Phi(t)-\varepsilon(r)\leqslant r^{\mu/q}\left(\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^n a_{p_i}(x,\nabla u)u_{x_i}dx\right)^{1/q}=$$

$$=r^{\mu/q}\left(-\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\beta_1(x,u(t))dx\right)^{1/q}.$$

Решая это дифференциальное неравенство, находим

$$\Phi(t)\leqslant\varepsilon(r)+\left(\frac{r^{\mu}}{(q-1)t}\right)^{\frac{1}{q-1}}. \tag{74}$$

Последнее неравенство справедливо при всех $r\geq 2r_0$. Выбирая $r=r(t)$ (см. (36)), получаем (37). Теорема доказана.

7. Примеры

Приведем теперь примеры уравнений, удовлетворяющих условиям (4), (9)−(14), (24), (34).

7.1. Пример 1. Введем следующее обозначение

$$t^{[a,b]} = \begin{cases} |t|^a, & \text{при} \quad |t| < 1, \\ |t|^b, & \text{при} \quad |t| \geq 1. \end{cases}$$

Пусть $n = 2$. Выберем N-функции $B_1(s), B_2(s), G(s)$, а также функции $\beta(x,u), a(x,p)$ следующим образом

$$B_1(s) = s^{[2,5/2]},\ B_2(s) = s^{[5/4,3/2]},\ G(s) = s^{[5/4,11/10]},$$
$$\sum_{i=1}^{2} a_{p_i}(x,p)p_i = B_1(p_1) + B_2(p_2)\frac{2+|x|}{1+|x|}.$$

Понятно, что зависимость от x может быть и у функции $\beta(x,u)$, но, чтобы не загромождать формулы, здесь ограничимся простейшим примером включения зависимости от x.

$$\beta(u) = \begin{cases} \frac{5}{3}|u|^{\frac{3}{2}}, & \text{при} \quad |u| < 1, \\ \frac{5}{3} + \frac{11}{6}(|u|^{\frac{6}{5}} - 1), & \text{при} \quad |u| \geq 1. \end{cases}$$

По формуле (8) найдем функцию

$$\beta_1(u) = u^{[5/2,11/5]}.$$

Несложно проверить, что для данных функций выполнены условия (4),(9)–(14), (24), (31), (34). Далее, по формуле (16) при $\kappa = \frac{3}{2}$ получим

$$\widetilde{B}_1(s) = s^{[3/2,5/2]}, \widetilde{B}_2(s) = |s|^{3/2}, h(s) = s^{[1/6,1/30]}.$$

Тогда, поскольку интеграл (19) расходится к бесконечности, по формуле (18) найдем

$$(B^*)^{-1}(z) = \begin{cases} 6z^{\frac{1}{6}}, & \text{при} \quad |z| < 1, \\ 30z^{\frac{1}{30}} - 24, & \text{при} \quad |z| \geq 1, \end{cases}$$

$$B^*(s) = \begin{cases} (\frac{s}{6})^6, & \text{при} \quad |s| < 6, \\ \left(\frac{|s|+24}{30}\right)^{30}, & \text{при} \quad |s| \geq 6. \end{cases}$$

Из условий (10),(12) легко видеть, что можно взять $\Gamma = \frac{8}{5},\ \alpha = \frac{5}{2}$. Таким образом, из (26) получим оценку в случае произвольной ограниченной области Ω

$$\int\limits_\Omega G(u^2(t,x))dx \geq \int\limits_\Omega G(u_0^2(x))dx(1-Ct)^{\frac{4}{3}},\ \text{при } t \leqslant 1/C.$$

Теперь в качестве Ω выберем следующую область

$$\Omega(f) = \{x | x_1 > 0,\ -x_1^{\frac{1}{2}} + f(x_1) \leqslant x_2 \leqslant x_1^{\frac{1}{2}} + f(x_1)\},$$

где f – произвольная непрерывная функция. Тогда $\operatorname{mes} \Omega^r(f) = \frac{4}{3}r^{\frac{3}{2}} \leqslant r^2,\ r \geq 2$. Из (28) найдем $\nu(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}$. Несложно проверить, что область $\Omega(f)$ удовлетворяет условиям (29),(38). Далее, в условии (34) можно выбрать $q = \frac{25}{22}$. Тогда из (39) найдем оценку сверху

$$\int\limits_{\Omega(f)} \beta_1(u(t,x))dx \leqslant Ct^{\frac{-11}{3}}.$$

7.2. Пример 2. Пусть $n = 2$. Выберем N-функции $B_1(s), B_2(s), G(s)$, а также функции $\beta(x,u), a(x,p)$ следующим образом

$$B_1(s) = s^{[9/2,6]},\ B_2(s) = s^{[17/4,6]},\ G(s) = s^{[3/2,2]}, \sum_{i=1}^{2} a_{p_i}(p)p_i = B_1(p_1) + B_2(p_2);$$

$$\beta(u) = \begin{cases} \frac{3}{2}|u|^2, & \text{при } |u| < 1, \\ \frac{3}{2} + \frac{4}{3}(|u|^3 - 1), & \text{при } |u| \geq 1. \end{cases}$$

По формуле (8) найдем функцию

$$\beta_1(u) = u^{[3,4]}.$$

Несложно проверить, что для данных функций выполнены условия (4),(9)–(14),(31), (34). Далее, по формуле (16) при $\kappa = \frac{3}{2}$ получим

$$\widetilde{B}_1(s) = s^{[3/2,6]}, \widetilde{B}_2(s) = s^{[3/2,6]}, h(s) = s^{[1/6,-1/3]}.$$

Таким образом, интеграл (19) сходится.

Из условий (10),(12) легко видеть, что можно взять $\Gamma = \frac{4}{17}$, $\alpha = 4$. Тогда из (25) получим оценку в случае произвольной ограниченной области Ω

$$\int_\Omega G(u^2(t,x))dx \geq \int_\Omega G(u_0^2(x))dx(1+Ct)^{-16}, \text{ при } t \geq 0.$$

Далее, в условии (34) можно выбрать $q = \frac{3}{2}$. Тогда из (39) найдем оценку сверху

$$\int_{\Omega(f)} \beta_1(u(t,x))dx \leqslant Ct^{-1}.$$

Комментарий. Поскольку при $|u| < 1$ и $|u| \geq 1$ функции имеют разные показатели роста, то степенные оценки сверху и снизу также имеют разные показатели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаптев Г.И. *Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 9. С. 83–112.
2. S. Antontsev, S. Shmarev *Parabolic equations with double variable nonlinearities* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 33–48.
3. Антонцев С.Н., Шмарев С.И. *Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности* // Фундамент. и прикл. матем. 2006. Т. 12, № 4. С. 3–19.
4. Алхутов Ю.А., Жиков В.В. *Теоремы существования решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 21–32.
5. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 3. С.3—14.
6. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решения параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Математический сборник. Москва. 2013. Т. 204, № 7. С. 3–28.
7. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *О решениях анизотропных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях* // Матем. сб. 2014. Т. 205, № 1. С. 9–46.
8. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях* // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5, № 1. С. 63–82.
9. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Решения анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью в неограниченных областях* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. Т. 1(30). С. 82–89.

10. S.N. Antontsev, S.I. Shmarev *Extinction of Solutions of Parabolic Equations with Variable Anisotropic Nonlinearities*
Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2008. Т. 261. С. 16–25.
11. S. Antontsev, S. Shmarev *On the blow-up of solutions to anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2010. Т. 270. С. 33–48.
12. Жиков В.В., Пастухова С.Е. *О свойстве повышенной суммируемости для параболических систем переменного порядка нелинейности* // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 179–200.
13. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях* // Изв. РАН. Сер. матем. 2010. Т. 74, № 2. С. 109–130.
14. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами* // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 9. С. 3–26.
15. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Стабилизация решений анизотропного квазилинейного параболического уравнения в неограниченных областях* // Труды МИАН. М., Наука. 2012. Т. 278, № 3. С. 114–128.
16. Гущин А.К. *Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка, Краевые задачи для дифференциальных уравнений* // III, Сборник работ под редакцией В.П. Михайлова, Тр. МИАН СССР . 1973. Т. 126. С. 5–45.
17. N. Alikakos, R. Rostamian *Gradient estimates for degenerate diffusion equation* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1982. V. 91, № 3-4. P. 335–346.
18. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44, № 10. С. 1441–1450.
19. Лионс Ж.А. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* Издательство "Мир". Москва. 1972. 587 с.
20. P.A. Raviart *Sur la resolution de certaines equations paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. 5. 1970. P. 209–328.
21. O. Grange, F. Mignot *Sur la resolution d'une equation et d'une inequation paraboliques non lineaires* // J. Funct. Anal. 11. 1972. P. 77–92.
22. A. Bamberger *Etude d'une equation doublement non lineaire* // J. Funct. Anal. 24. 1977. P. 148–155.
23. F. Bernis *Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains* // Math. Ann. 279. 1988. P. 373–394.
24. Жиков В.В., Пастухова С.Е. *Об уравнениях Навье–Стокса: теоремы существования и энергетические равенства* // Дифференциальные уравнения и динамические системы. Сборник статей. Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 75–95.
25. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3, № 4. С. 64–85.
26. Рутицкий Я.Б., Красносельский М.А. *Выпуклые функции и пространства Орлича.* Гос. издательство физ.-мат. лит.-ры. Москва. 1958. 587 с.
27. Королев А.Г. *Теоремы вложения анизотропных пространств Соболева-Орлича* // Вестн. Москов. ун.-та, выпуск 4. 1983.

Элина Радиковна Андриянова,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: Elina.Andriyanov@mail.ru