ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 108-114.

УДК 517.9

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ АВТОМОРФНЫХ СИСТЕМ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ

А.А. ТАЛЫШЕВ

Аннотация. Настоящая работа содержит некоторые результаты об интегрировании и понижении порядка автоморфных систем конечномерных групп Ли.

Ключевые слова: симметрии Ли, автоморфные системы, дифференциальные инварианты.

Mathematics Subject Classification: 34A05, 35B06, 58A15, 58A17

ВВЕДЕНИЕ

Система дифференциальных уравнений называется автоморфной относительно группы Ли G, если любое решение этой системы получается из одного фиксированного решения посредством действия преобразований группы G [1, §25].

В работе [2] показано, что некоторое конечное продолжение (как правило, нулевого порядка) всякой автоморфной системы конечномерной группы Ли является вполне интегрируемой системой.

В настоящей работе для вполне интегрируемых систем Пфаффа доказаны теоремы: о понижении порядка систем, допускающих симметрию Ли, о последовательном понижении порядка систем, допускающих более, чем однопараметрические симметрии Ли, и об интегрирующем множителе для одномерных систем.

Первая и третья теоремы являются непосредственным обобщением соответствующих теорем для обыкновенных дифференциальных уравнений, описанных в [1, §8]. Другие способы использования допускаемой симметрии Ли для понижения порядка обыкновенных дифференциальных уравнений описаны в работах [3], [4], [5].

Вычисление допускаемой группы для вполне интегрируемой системы Пфаффа (также как и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений), вообще говоря, не проще интегрирования исходной системы. Но автоморфная система конечномерной группы Ли G допускает группу Ли, которая дается «даром»: является ограничением действия группы G на многообразие, определяемое системой.

В дальнейшем все построения локальны, причем в окрестностях точек общего положения, и все рассматриваемые функции достаточно гладкие.

1. Симметрии систем Пфаффа

Рассматривается вполне интегрируемая система Пфаффа

$$\omega = dy - \varphi^1(x,y)\,dx^1 - \dots - \varphi^n(x,y)\,dx^n = 0, \quad x \in R^n, \quad y \in R^m. \tag{1}$$

Система (1) называется вполне интегрируемой в некоторой области пространства $R^n \times R^m$, если через каждую точку этой области проходит n-мерная интегральная поверхность системы (1) (в этом случае через каждую точку проходит только одна такая

A.A. Talyshev, On integration of automorphic systems of finite-dimensional Lie groups.

Поступила 25 ноября 2013 г.

поверхность) [6, §23]. Согласно теореме Фробениуса [6, §26], система (1) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда внешние производные $d\omega$ принадлежат идеалу, порожденному формами ω. Последнее верно тогда и только тогда, когда $d\omega|_{\omega=0} = 0$. А это условие эквивалентно следующим выражениям:

$$[D_i, D_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

где

$$D_i = \partial_{x^i} + \varphi^i \cdot \partial_y, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

Действительно,

$$d\omega|_{\omega=0} = -\sum_{i,j} D_j \varphi^i dx^j \wedge dx^i = -\sum_{j>i} (D_j\varphi^i - D_i\varphi^j)\, dx^j \wedge dx^i.$$

Однопараметрическая группа с инфинитезимальным оператором

$$L = \xi(x, y) \cdot \partial_x + \eta(x, y) \cdot \partial_y \tag{4}$$

допускается системой (1) тогда и только тогда, когда

$$[\tilde{L}, D_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{5}$$

где

$$\tilde{L} = L - \xi^1 D_1 - \dots - \xi^n D_n = (\eta - \xi^1\varphi^1 - \dots - \xi^n\varphi^n) \cdot \partial_y = \tilde{\eta} \cdot \partial_y. \tag{6}$$

Этот факт можно установить непосредственно или воспользоваться аналогичным утверждением для обобщенных симметрий [3, Лемма 5.12]. Дело в том, что для системы (1) обобщенные симметрии совпадают с точечными.

Из соотношений (5) и (6), в частности, следует, что любая линейная комбинация операторов (3) с коэффициентами, зависящими от переменных x, y, допускается системой (1), и эти линейные комбинации образуют идеал алгебры, допускаемой системой (1). Также, очевидно, что компонента ξ поля L является произвольной вектор-функцией переменных x, y.

2. Понижение порядка систем Пфаффа

Теорема 1. *Пусть система Пфаффа (1) вполне интегрируема и допускает однопараметрическую группу Ли с инфинитезимальным оператором (4). Тогда, если $m > 1$, то знание универсального инварианта оператора (6) позволяет понизить на единицу размерность системы (1).*

Доказательство. Универсальный инвариант оператора (6) можно выбрать в виде:

$$x^1, \dots, x^n, \quad J^1(x, y), \dots, J^{m-1}(x, y).$$

Если одномерное отображение $\psi(x, y)$ таково, что $\tilde{L}\psi = 1$, то $\operatorname{rank} \partial(J, \psi)/\partial y = m$ [1, стр. 108], и потому для каждого x отображение

$$y' = J(x, y) = (J^1(x, y), \dots, J^{m-1}(x, y)), \quad y'' = \psi(x, y) \tag{7}$$

будет локальным преобразованием пространства R^m. В силу (5), операторы (3) являются операторами инвариантного дифференцирования для алгебры, порожденной оператором (6). Поэтому отображение DJ является инвариантом этой алгебры и выражается через ее универсальный инвариант, т.е. существует такое отображение θ, что $DJ = \theta(x, J)$. С учетом этого факта система (1) в переменных x, y', y'' запишется в виде:

$$dy' = J_x dx + J_y dy = DJdx = \theta(x, y')dx, \tag{8}$$

$$dy'' = D\psi dx = \vartheta(x, y', y'')dx. \tag{9}$$

Система (8) состоит из $m - 1$ уравнения на $m - 1$ функцию. Уравнение (9) следует интегрировать после интегрирования системы (8). ∎

Замечание. Если функция ψ удовлетворяет дополнительным условиям

$$D_i\psi = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{10}$$

то уравнение (9) принимает вид $dy'' = 0$, т.е. может быть записано в виде конечного соотношения $y'' = \mathrm{const}$. Очевидно, что функция ψ, удовлетворяющая дополнительным условиям (10), всегда существует. Вопрос только в том, чтобы найти ее аналитическое представление. Но этот вопрос касается и универсального инварианта.

3. Дальнейшее понижение порядка

Лемма 1. *Пусть операторы $L_1 = \xi_1 \cdot \partial_z$, $L_2 = \xi_2 \cdot \partial_z$, $D = \eta \cdot \partial_z$ действуют в пространстве R^k и удовлетворяют условиям*

$$[L_1, D] = 0, \quad [L_2, D] = 0.$$

Также пусть отображения $\phi : R^k \to R^{k-1}$, $\psi : R^k \to R$ удовлетворяют условиям

$$L_1\phi = 0, \quad L_1\psi = 1, \quad D\psi = 0, \quad rank\,\partial\phi/\partial x = k - 1,$$

тогда

$$[L_2|_M, D|_M] = [L_2, D]|_M = 0,$$

где многообразие $M = \{z \in R^k : \psi(z) = 0\}$.

Доказательство. После замены переменных

$$z' = \phi(z), \quad z'' = \psi(z)$$

операторы L_2 и D запишутся в виде:

$$L_2' = \xi_2'(z', z'')\partial_{z'} + \xi_2''(z', z'')\partial_{z''}, \quad D' = \eta'(z')\partial_{z'}.$$

Действительно, $D\phi$ является инвариантом оператора L_1 и потому выражается через универсальный инвариант ϕ. Далее

$$\begin{aligned}[L_2', D']|_M &= ((\eta_{z'}'\xi_2'(z', z'') - \xi_{2z'}'(z', z'')\eta') \cdot \partial_{z'} + (\dots)\partial_{z''})|_M = \\ &= (\eta_{z'}'\xi_2'(z', 0) - \xi_{2z'}'(z', 0)\eta') \cdot \partial_{z'} = [L_2'|_M, D'|_M].\end{aligned}$$

Очевидно, что $[L_2', D'] = 0$, и, следовательно, ограничение этого коммутатора на многообразие M также равно нулю. ∎

Из леммы 1 следует теорема, которая позволяет производить последовательное понижение порядка системы при достаточно широкой группе.

Теорема 2. *Любая симметрия системы (1), подвергнутая преобразованию (7) с последующим ограничением на пространство переменных (x, y'), допускается системой (8).*

4. Первый порядок ($m = 1$)

Теорема 3. *Пусть система Пфаффа (1) вполне интегрируема, допускает однопараметрическую группу Ли с инфинитезимальным оператором (4) и $m = 1$, т.е. имеется одно уравнение Пфаффа. Тогда $\mu = 1/\tilde{\eta}$ является интегрирующим множителем для этого уравнения Пфаффа.*

Доказательство. Для доказательства теоремы требуется установить существование такой функции $u(x, y)$, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\tilde{\eta}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\varphi^i}{\tilde{\eta}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

В свою очередь, такая функция u существует, если

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\tilde{\eta}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\varphi^i}{\tilde{\eta}} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\varphi^i}{\tilde{\eta}} - \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\varphi^j}{\tilde{\eta}} = 0, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Эти условия выполняются в силу (2), (5). Действительно, левая часть первого из выражений (11) после проведения дифференцирования записывается в виде $\tilde{\eta}^{-2}(\tilde{\eta}_{x_i} + \tilde{\eta}_y \varphi^i - \varphi^i_y \tilde{\eta})$ и с точностью до множителя совпадает с левой частью выражения (5). Левая часть второго из выражений (11) после проведения дифференцирования записывается в виде $\tilde{\eta}^{-2}(\varphi^i_{x_j}\tilde{\eta} - \varphi^i \tilde{\eta}_{x_j} - \varphi^j_{x_i}\tilde{\eta} + \varphi^j \tilde{\eta}_{x_i})$ и после подстановки выражений $\tilde{\eta}_{x_i}$, $\tilde{\eta}_{x_j}$ из (5) и $\varphi^i_{x_j}$ из (2) обращается в ноль. ∎

5. Автоморфные системы

Ограничение системы Пфаффа

$$dy_\alpha - \sum_{j=1}^{n} y_{\alpha+\gamma_j} dx_j = 0, \quad 0 \leqslant |\alpha| < k$$

на многообразие, определяемое автоморфной (относительно r-параметрической группы Ли G^r) системой порядка k, дает вполне интегрируемую систему Пфаффа [2]. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндексы, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ и $|\gamma_i| = 1$, причем единице равна компонента с номером i.

Ограничение k-го продолжения группы G^r на многообразие, определяемое автоморфной системой, очевидно, будет допускаться системой Пфаффа. Применение теорем 1–3 позволяет понизить порядок этой системы Пфаффа (или полностью проинтегрировать при достаточном ранге группы).

6. Пример 1

Система Пфаффа

$$\begin{aligned}
du &= -\left(u + c\sqrt{p/\rho}\right) u_1 dt + u_1 dx,\\
d\rho &= -\left(\rho + u(c^2-\gamma+1)/c\sqrt{\rho^3/p}\right) u_1 dt +\\
&+ (c^2-\gamma+1)/c\sqrt{\rho^3/p}\, u_1 dx,\\
dp &= -\left(\gamma p + uc\sqrt{\rho p}\right) u_1 dt + c\sqrt{\rho p} u_1 dx,\\
du_1 &= -(\gamma+1)/2 u_1^2 dt
\end{aligned} \tag{12}$$

эквивалентна автоморфной системе

$$\begin{gathered}
u_t + uu_x + \rho^{-1} p_x = 0, \quad \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad p_t + up_x + \gamma p u_x = 0,\\
p_x = c\sqrt{\rho p}\, u_x, \quad \rho_x = (c^2-\gamma+1)/c\sqrt{\rho^3/p}\, u_x, \quad u_{xx} = 0
\end{gathered}$$

из примера 1 работы [2]. Здесь константа c_4 ($c_4^2 \neq \gamma$) из [2] заменена на константу c. Далее рассматривается случай $\gamma \neq 1$.

Ограничения первых продолжений операторов допускаемой группы на многообразие, определяемое системой, запишутся в виде:

$$\begin{gathered}
L_1 = \partial_t, \quad L_2 = \partial_x, \quad L_3 = t\partial_x + \partial_u, \quad L_4 = t\partial_t + x\partial_x - u_1\partial_{u_1},\\
L_5 = t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho - u_1\partial_{u_1}, \quad L_6 = p\partial_p + \rho\partial_\rho.
\end{gathered}$$

Ниже для понижения порядка системы последовательно используются операторы L_6, L_3 и L_2. На каждом шаге указываются универсальный инвариант, функция ψ, новые представления операторов D_t, D_x и оставшихся операторов $\tilde{L}$. Новое представление системы Пфаффа не указывается — оно вполне определяется операторами D_t, D_x. Верхний индекс обозначает номер шага. При написании универсального инварианта сразу вводятся обозначения новых переменных. Функция ψ на каждом шаге удовлетворяет условиям (10).

Шаг первый (оператор $\tilde{L}_6$).
Универсальный инвариант: $t, x, u, u_1, p_1 = p/\rho$.

$$\begin{aligned}
\psi^1 &= \ln\rho - 2(c^2-\gamma+1)/(\gamma-1)\ln\left(2c\sqrt{p/\rho}\right) + 2(c^2-\gamma)/(\gamma+1)\ln u_1,\\
D_t^1 &= \partial_t - u_1(c\sqrt{p_1}+u)\partial_u - u_1^2(\gamma+1)/2\partial_{u_1} + p_1u_1(1-\gamma)(1+u/(c\sqrt{p_1}))\partial_{p_1},\\
D_x^1 &= \partial_x + u_1\partial_u + p_1u_1(\gamma-1)/(c\sqrt{p_1})\partial_{p_1},\\
\tilde{L}_3^1 &= (1-tu_1)\partial_u + (p_1tu_1(1-\gamma))/(c\sqrt{p_1})\partial_{p_1},\\
\tilde{L}_2^1 &= -u_1\partial_u - p_1u_1(\gamma-1)/(c\sqrt{p_1})\partial_{p_1}.
\end{aligned}$$

Шаг второй (оператор $\tilde{L}_3^1$).
Универсальный инвариант: $t, x, u_1, p_2 = 2\sqrt{p_1} - tuu_1(\gamma-1)/(c(tu_1-1))$.

$$\begin{aligned}
\psi^2 &= u - 2c\sqrt{p_1}/(\gamma-1),\\
D_t^2 &= \partial_t - u_1^2(\gamma+1))/2\partial_{u_1} + (p_2u_1(\gamma-1))/(2(tu_1-1))\partial_{p_2},\\
D_x^2 &= \partial_x + (u_1(-\gamma+1))/(c(tu_1-1))\partial_{p_2},\\
\tilde{L}_2^2 &= (u_1(\gamma-1))/(c(tu_1-1))\partial_{p_2}.
\end{aligned}$$

Шаг третий (оператор $\tilde{L}_2^2$).
Универсальный инвариант: t, x, u_1.

$$\begin{aligned}
\psi^3 &= (2cp_2tu_1 - 2cp_2 - \gamma^2tu_1 + 2\gamma u_1x + 2\gamma + tu_1 - 2u_1x - 2)/(2u_1(\gamma-1)),\\
D_t^3 &= \partial_t - u_1^2(\gamma+1)/2\partial_{u_1},\\
D_x^3 &= \partial_x.
\end{aligned}$$

В итоге получается одномерная система Пфаффа

$$du_1 + u_1^2(\gamma+1)/2\,dt = 0,$$

которая легко интегрируется: $u_1 = 2/((\gamma+1)t + c_4)$, где c_4 — некоторая константа.

После возвращения к исходным переменным с использованием выражений для инвариантов и соотношений $\psi^i = c_i$, $i = 1, 2, 3$, где c_i — некоторые константы, получается общее решение системы (12):

$$u = (c_2(\gamma-1)t + 2x + c_4 - 2c_3 + c_2c_4)/((\gamma+1)t + c_4),$$

$$\rho = c_1(4c^2p_1)^{c^2/(\gamma-1)-1}u_1^{2(\gamma-c^2)/(\gamma+1)}, \quad p = p_1\rho, \quad u_1 = 2/((\gamma+1)t + c_4),$$

где $p_1 = (\gamma-1)^2(x - c_2t + c_4/2 - c_3)^2/(c(c_4 + (\gamma+1)t))^2$.

7. Пример 2

В работе [7] найдена допускаемая группа и построено групповое расслоение для уравнения Кармана-Гудерлея

$$-u_xu_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \tag{13}$$

по бесконечномерной части допускаемой группы. Здесь для построения автоморфной системы используется конечномерная подгруппа допускаемой группы, которая порождается операторами

$$\begin{gathered}
L_1 = \partial_x, \quad L_2 = \partial_y, \quad L_3 = \partial_z, \quad L_4 = z\partial_y - y\partial_z,\\
L_5 = y\partial_y + z\partial_z - 2u\partial_u, \quad L_6 = x\partial_x + 3u\partial_u.
\end{gathered} \tag{14}$$

Решения уравнения (13), которые под действием группы, порожденной операторами (14), образуют в продолженных пространствах шестимерные орбиты, удовлетворяют одной из следующих двух автоморфных систем.

$$
\begin{aligned}
&u_x = (3/2)^{2/3}(u_y^2 + u_z^2)^{1/3}, \quad u_{xx} = (3/2)^{1/3}(u_y^2 + u_z^2)^{2/3}/u,\\
&u_{xy} = (3/2)^{2/3}(u_y^2 + u_z^2)^{1/3}u_y/u, \quad u_{xz} = (3/2)^{2/3}(u_y^2 + u_z^2)^{1/3}u_z/u,\\
&u_{yy} = 3/2\, u_y^2/u, \quad u_{yz} = 3/2\, u_y u_z/u, \quad u_{zz} = 3/2\, u_z^2/u;
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&u_x = (3/2)^{1/3}(u_y^2 + u_z^2)^{1/3}, \quad u_{xx} = (3/2)^{-1/3}(u_y^2 + u_z^2)^{2/3}/u,\\
&u_{xy} = (3/2)^{1/3}(u_y^2 + u_z^2)^{1/3}u_y)/u, \quad u_{xz} = (3/2)^{1/3}(u_y^2 + u_z^2)^{1/3}u_z/u,\\
&u_{yy} = (3u_y^2 - u_z^2)/(2u), \quad u_{yz} = (2u_y u_z)/u, \quad u_{zz} = (-u_y^2 + 3u_z^2)/(2u).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Далее для понижения порядка автоморфной системы (15) последовательно используются операторы L_2, L_4. Систему Пфаффа, эквивалентную системе (15), можно записать в виде:

$$
\begin{aligned}
&du - (3/2)^{2/3}(v^2 + w^2)^{1/3}dx - vdy - wdz = 0,\\
&dv - (3/2)^{2/3}(v^2 + w^2)^{1/3}vdx - 3/(2u)v^2dy - 3/(2u)vwdz = 0,\\
&dw - (3/2)^{2/3}(v^2 + w^2)^{1/3}wdx - 3/(2u)vwdy - 3/(2u)w^2dz = 0.
\end{aligned}
$$

Тогда ограничения первых продолжений операторов L_2, L_4 на многообразие, определяемое системой (15) с последующей факторизацией по идеалу, запишутся в виде.

$$
\begin{aligned}
\tilde{L}_2 &= -v\partial_u - 3/(2u)(v^2\partial_v + vw\partial_w),\\
\tilde{L}_4 &= (-vz + wy)\partial_u + (2uw - 3v^2z + 3vwy)/(2u)\partial_v +\\
&+ (-2uv - 3vwz + 3w^2y)/(2u)\partial_w.
\end{aligned}
$$

Шаг первый (оператор $\tilde{L}_2$).
Универсальный инвариант: $x, y, z, v_1 = v/u^{3/2}, w_1 = w/u^{3/2}$.

$$
\begin{aligned}
\psi^1 &= 2u/v + y + zw/v,\\
D_x^1 &= \partial_x + (3/2)^{2/3}(v_1^2 + w_1^2)^{1/3}(\partial_u + v_1\partial_{v_1} + w_1\partial_{w_1}),\\
D_y^1 &= \partial_y, \quad D_z^1 = \partial_z, \quad \tilde{L}_4^1 = w_1\partial_{v_1} - v_1\partial_{w_1}.
\end{aligned}
$$

Шаг второй (оператор $\tilde{L}_4^1$).
Универсальный инвариант: $x, y, z, v_2 = \sqrt{v_1^2 + w_1^2}$.

$$
\begin{aligned}
\psi^2 &= \operatorname{arctg}(v_1/w_1) + 3^{2/3}2^{-5/3}x - 3/2(v_1^2 + w_1^2)^{-1/3},\\
D_x^2 &= \partial_x - (3/2)^{2/3}/2v_2^{5/3}\partial_{v_2}, \quad D_y^2 = \partial_y, \quad D_z^2 = \partial_z.
\end{aligned}
$$

В итоге получается одномерная система Пфаффа $dv_2 + (3/2)^{2/3}/2v_2^{5/3}dx = 0$, которая легко интегрируется: $v_2 = (x/\sqrt[3]{12} + c_3)^{-3/2}$. После возвращения к исходным переменным с использованием выражений для инвариантов и соотношений $\psi^i = c_i$, $i = 1, 2$, где c_i — некоторые константы, получается общее решение системы (15):

$$
u = 4(x/\sqrt[3]{12} + c_3)^3/(y\sin(c_2) + z\cos(c_2) + c_1)^2. \tag{17}
$$

Аналогичным образом можно получить общее решение системы (16):

$$
u = 2/9(x + c_1)^3/((y + c_2)^2 + (z + c_3)^2). \tag{18}
$$

Замечание. Представленные примеры решений демонстрируют применение результатов этой заметки и не претендуют на то, что не могут быть получены какими-либо другими известными методами. В частности, решения (17), (18) при $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ равны

$x^3/(3z^2)$, $2/9x^3/(y^2+z^2)$, соответственно, и являются автомодельными решениями уравнения (13). Таким образом, решения (17), (18) могут быть получены из автомодельных решений действием преобразований сдвигов и вращения.

При проведении объемных вычислений использовалась система аналитических вычислений «Reduce 3.8» (http://reduce-algebra.sourceforge.net).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1978. 400 с.
2. Талышев А.А. *Об автоморфных системах конечномерных групп Ли*// Уфимский математический журнал. 2012. Т. 4, № 4. С. 130–138.
3. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Пер. с англ. М.: Мир. 1989. 639 с.
4. Ибрагимов Н.Х. *Азбука группового анализа.* М.: Знание. 8. 1989.
5. Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Знание. 7. 1991.
6. Рашевский П.К. *Геометрическая теория уравнений с частными производными.* М.: Гостехиздат, 1947. 354 с.
7. Головин С.В. *Групповое расслоение и точные решения уравнений трасзвукового движения газа*// ПМТФ. 2003, Т. 44. №3 С. 51–63.

Александр Алексеевич Талышев,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: tal@academ.org