ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 59-68.

УДК 917.53, 917.98

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР ДАНКЛА

И.И. КАРАМОВ, В.В. НАПАЛКОВ

Аннотация. В статье введен обобщённый оператор Данкла, действующий в пространстве целых функций на $\mathbb{C}$, изучены задачи гармонического анализа, связанные с этим оператором, и показана его взаимосвязь с оператором обобщённого дифференцирования Гельфонда-Леонтьева.

Ключевые слова: Оператор Данкла, собственная функция, оператор свертки Данкла, преобразование Данкла, характеристическая функция, гиперциклический оператор.

Mathematics Subject Classification: 47B38

1. Введение

Пусть $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах, $H^*(\mathbb{C})$ – сильное сопряженное пространство к $H(\mathbb{C})$, $P_{\mathbb{C}}$ – пространство целых функций экспоненциального типа. Известно, что пространство $H^*(\mathbb{C})$ изоморфно пространству $H_0(\{\infty\})$ – пространству аналитических функций в окрестности бесконечно удаленной точки, обращающихся в точке ∞ в нуль (см., например, [1]). Более того, если $F \in H^*(\mathbb{C})$ и $g_F \in H_0(\{\infty\})$ – соответствующая функция (согласно указанному изоморфизму), то

$$(F, f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C f(z) g_F(z)\, dz, \tag{1.1}$$

где $f \in H(\mathbb{C})$, C – замкнутый спрямляемый контур, охватывающий все особенности функции g_F и лежащий в области аналитичности этой функции.

Рассмотрим обобщённый оператор Данкла Λ на $H(\mathbb{C})$

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.2}$$

где $\alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}}$, $j = \overline{0, m-1}$, $f \in H(\mathbb{C})$, m – фиксированное натуральное число, причем $m \geqslant 2$. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $c = 1$.

Этот оператор обобщает ранее изученный в работе [2] оператор Данкла

$$Df(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z}(f(z) - f(-z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Операторы Данкла (см. [3]) – это дифференциально-разностные операторы, связанные с конечными группами отражений в некотором евклидовом пространстве. Эти операторы играют важную роль в различных задачах математики и физики (см., например, [4]). Изучим задачи гармонического анализа, связанные с оператором (1.2) (операторы сдвига Данкла, свертка Данкла, преобразование Данкла и т. д.).

I.I. Karamov, V.V. Napalkov, Generalized Dunkl operator.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-97019).

Поступила 26 декабря 2013 г.

Рассмотрим функцию $g \in H_0(\{\infty\})$:

$$g(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi ij}{m}}}{z - \frac{2\pi ij}{m}}.$$

Согласно вышеуказанному изоморфизму, этой функции соответствует функционал $F \in H^*(\mathbb{C})$. Возьмём преобразование Лапласа данного функционала: $\widehat{F}(\mu) = (F, e^{\mu z})$. Применяя (1.1), преобразование $\widehat{F}$ можно записать в виде:

$$\widehat{F}(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C e^{\mu z} g(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C e^{\mu z} \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi ij}{m}}}{z - \frac{2\pi ij}{m}} \right) dz =$$

$$= \mu + \sum_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi ij}{m}(\mu+1)}. \quad (1.3)$$

Здесь контур C охватывает начало координат и точки $\frac{2\pi ij}{m}$, $j = \overline{0, m-1}$.
Введём теперь функцию

$$y(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)}. \quad (1.4)$$

Во втором разделе изучаются свойства собственной функции y_λ оператора Λ, соответствующей собственному значению λ и удовлетворяющей условию $y_\lambda(0) = 1$, и будет показано, что функция y_λ определяется соотношением $y_\lambda(z) = y(\lambda z)$, где функция y имеет вид (1.4).

Далее по (1.2) строится оператор сдвига Данкла τ_w (раздел 3):

$$(\tau_w f)(z) = f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)} \Lambda^k f(z), \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

Тогда оператор свертки Данкла функционала $T \in H^*(\mathbb{C})$ и функции $f \in H(\mathbb{C})$ определяется следующим образом:

$$M_T[f](z) = T * f(z) = \langle T_w, (\tau_w f)(z) \rangle, \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (1.6)$$

В завершение вводится преобразование Данкла функционала $T \in H^*(\mathbb{C})$:

$$\mathfrak{D}(T)(\lambda) = \breve{T}(\lambda) = \langle T, y(\lambda z) \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (1.7)$$

которое устанавливает топологический изоморфизм пространств $H^*(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$, а также рассматриваются уравнения обобщенной свертки (однородное и неоднородное).

2. Собственная функция оператора Λ

Предложение 1. *а) Собственная функция y_λ оператора Λ, соответствующая собственному значению λ и удовлетворяющая условию $y_\lambda(0) = 1$, единственна и определяется по формуле* (1.4).
б) Функция $y(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, причем ее тип $\sigma = 1$.

Доказательство. а) Действительно, пусть y имеет вид (1.4), тогда

$$\Lambda(y(\lambda z)) = \Lambda \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k \Lambda(z^k)}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)}. \quad (2.1)$$

Учитывая, что

$$\Lambda(z^k) = \frac{d}{dz}z^k + \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j\left(\alpha_j^k z^k\right) = kz^{k-1} + \frac{1}{z}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j^{k+1}z^k =$$

$$= \left(k + \sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j^{k+1}\right)z^{k-1} = \widehat{F}(k)z^{k-1}, \quad k\in\mathbb{N},\ \widehat{F}(0)=0, \quad (2.2)$$

получим

$$\Lambda(y(\lambda z)) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k z^{k-1}}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)}\widehat{F}(k) = \lambda\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k z^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)}\right) = \lambda y(\lambda z).$$

Докажем теперь единственность собственной функции. Пусть $d\in H(\mathbb{C})$ такова, что $\Lambda(d(\lambda z)) = \lambda d(\lambda z)$. Если $d(z) = \sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k$, где $b_0 = 1$, то

$$\Lambda(d(\lambda z)) = \sum_{k=0}^{\infty}b_k\lambda^k\Lambda(z^k) = \sum_{k=1}^{\infty}b_k\lambda^k\widehat{F}(k)z^{k-1} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}b_k\widehat{F}(k)(\lambda z)^k. \quad (2.3)$$

С другой стороны,

$$\Lambda(d(\lambda z)) = \lambda\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\lambda z)^k. \quad (2.4)$$

Так как $b_0 = 1$, из (2.3) и (2.4) следует, что

$$b_k = \frac{1}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)},\ k = 1,2,\ldots.$$

Следовательно, $d(\lambda z)\equiv y(\lambda z)$.

б) Напомним, что функция $f\in H(\mathbb{C})$ – целая функция экспоненциального типа, если

$$\exists\ C, a>0\colon\ |f(z)|\leqslant Ce^{a|z|}, \quad z\in\mathbb{C}.$$

Из (1.4) следует

$$|y(z)|\leqslant 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^k}{|\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)|}. \quad (2.5)$$

Оценим выражение $|\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)|$. Имеем

$$|\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)| = |\widehat{F}(1)||\widehat{F}(2)|\ldots|\widehat{F}(k)| =$$

$$= \left|1+\sum_{j=0}^{m-1}e^{\frac{4\pi ij}{m}}\right|\left|2+\sum_{j=0}^{m-1}e^{\frac{6\pi ij}{m}}\right|\ldots\left|k+\sum_{j=0}^{m-1}e^{\frac{2(k+1)\pi ij}{m}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(1+\sum_{j=0}^{m-1}\left|e^{\frac{4\pi ij}{m}}\right|\right)\left(2+\sum_{j=0}^{m-1}\left|e^{\frac{6\pi ij}{m}}\right|\right)\ldots\left(k+\sum_{j=0}^{m-1}\left|e^{\frac{2(k+1)\pi ij}{m}}\right|\right) =$$

$$= (1+m)(2+m)\ldots(k+m) = \frac{(k+m)!}{m!}.$$

Поскольку $\widehat{F}(k)$ принимает следующие значения:

$$\widehat{F}(k) = \begin{cases} k+m,\ \text{если}\ k = lm-1,\ l\in\mathbb{N};\\ k,\ \text{если}\ k\neq lm-1,\ l\in\mathbb{N},\end{cases}$$

то, очевидно,

$$|\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)|\geqslant k!. \quad (2.6)$$

Таким образом,

$$k! \leqslant |\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)| \leqslant \frac{(k+m)!}{m!}. \tag{2.7}$$

Из (2.6) получаем

$$|y(z)| \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} = e^{|z|}. \tag{2.8}$$

Рассмотрим функцию $\psi(z) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{m!}{(k+m)!} z^k$. Вычислим её порядок. Напомним, что порядок произвольной целой функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ можно вычислить по формуле (см. [5])

$$\rho_f = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k \ln k}{\ln |\frac{1}{a_k}|}.$$

Следовательно,

$$\rho_\psi = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k\ln k}{\ln \frac{(k+m)!}{m!}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k \ln k}{\ln (k+m)! - \ln m!} =$$
$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k\ln k}{\ln k!} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k \ln k}{\ln \sqrt{2\pi k} + k(\ln k - 1)} = 1.$$

Поскольку $\dfrac{1}{|\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)|} \geqslant \dfrac{m!}{(k+m)!}$, то порядки соответствующих функций удовлетворяют неравенству $\rho_y \geqslant \rho_\psi$. Используя оценку (2.8), заключаем, $1 \leqslant \rho_y \leqslant 1$. Последнее означает, что порядок функции y также равен 1.
Вычислим тип y. Так как $\rho_y = 1$, то для вычисления типа можно использовать формулу (см. [5])

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} k^{\frac{1}{\rho_f}} \sqrt[k]{|a_k|} = (\sigma_f e \rho_f)^{\frac{1}{\rho_f}}, \tag{2.9}$$

где a_k – коэффициенты функции $f \in H(\mathbb{C})$, $0 < \rho_f < \infty$ и σ_f – порядок и тип f соответственно.
В нашем случае

$$a_k = \frac{1}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)},\ k = 1, 2, \dots,\ a_0 = 1.$$

Тогда, используя оценку (2.6) и формулу Стирлинга $k! \approx \sqrt{2\pi k}(\frac{k}{e})^k$, выводим

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} k^{\frac{1}{\rho_y}} \sqrt[k]{|a_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} k \sqrt[k]{\frac{1}{|\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)|}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} k \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} =$$
$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} k \frac{e}{k(2\pi k)^{\frac{1}{2k}}} = e\, \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{(2\pi k)^{\frac{1}{2k}}} = e.$$

Применяя (2.9), находим, что $\sigma_y e = e$. Следовательно, $\sigma_y = 1$.
Таким образом, $y \in P_{\mathbb{C}}$.

Предложение 2. *Имеет место следующая формула произведения*

$$y(\lambda z) \cdot y(\lambda w) = \tau_w(y(\lambda.))(z), \quad z, w \in \mathbb{C}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Используя (1.4), получим

$$y(\lambda z)\cdot y(\lambda w)=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k w^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)}\right)\cdot y(\lambda z)=y(\lambda z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)}\lambda^k y(\lambda z).$$

Так как $\Lambda^k y(\lambda z)=\lambda^k y(\lambda z)$, то

$$y(\lambda z)\cdot y(\lambda w)=y(\lambda z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)}\lambda^k y(\lambda z)=$$

$$=y(\lambda z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{w^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)}\Lambda^k y(\lambda z)=\tau_w(y(\lambda.))(z).$$

3. Оператор сдвига Данкла. Свертка Данкла

Рассмотрим вначале свойства оператора (1.2).

Предложение 3. *Оператор Λ осуществляет непрерывное отображение из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$.*

Доказательство. Пусть $f\in H(\mathbb{C})$. Не теряя общности, можно положить $f(0)=1$. Запишем (1.2) в следующем виде:

$$\Lambda f(z)=f'(z)+\frac{1}{z}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j(f(\alpha_j z)-1)+\frac{1}{z}\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j=$$

$$=f'(z)+\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j\frac{(f(\alpha_j z)-1)}{z}=f'(z)+\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j^2\int_0^1 f'(\alpha_j zt)dt. \quad (3.1)$$

Тогда для любого $R>0$, используя интегральную формулу Коши, получаем

$$\|\Lambda f\|_R\leqslant\|f'\|_R+\sum_{j=0}^{m-1}|\alpha_j|^2\|f'\|_R=(m+1)\|f'\|_R\leqslant(m+1)\frac{\|f\|_{2R}}{R},$$

где $\|f\|_R=\max\limits_{|z|\leqslant R}|f(z)|$. Таким образом, Λ: $H(\mathbb{C})\to H(\mathbb{C})$ – непрерывный оператор.

Теорема 1. *Если $f\in H(\mathbb{C}), f(0)=1$, то f представляется в следующем виде:*

$$f(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\Lambda^k f)(0)}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)}z^k,\quad z\in\mathbb{C}.$$

Доказательство. Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ a_0=1,\ z\in\mathbb{C}. \quad (3.2)$$

Тогда в силу непрерывности оператора Λ для любого $k\in\mathbb{N}$

$$(\Lambda^k f)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\Lambda^k(z^n),$$

$$\Lambda^k(z^n)=\widehat{F}(n)\widehat{F}(n-1)\dots\widehat{F}(n-k+1)z^{n-k},\quad k=\overline{1,n},\quad n=1,2,\dots.$$

В частности, $\Lambda^k(z^k) = \widehat{F}(k)\widehat{F}(k-1)\dots\widehat{F}(1)$ и $\Lambda^k(z^n) = 0$ при $n < k$ или $n > k$. Следовательно,

$$(\Lambda^k f)(0) = a_k \widehat{F}(k)\widehat{F}(k-1)\dots\widehat{F}(1).$$

Отсюда

$$a_k = \frac{(\Lambda^k f)(0)}{\widehat{F}(k)\widehat{F}(k-1)\dots\widehat{F}(1)},\ k = 1, 2, \dots$$

Подставляя последнее в (3.2), получаем утверждение теоремы.

Предложение 4. *Ряд* (1.5) *сходится в* $H(\mathbb{C})$ *и* $\tau_w\colon H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ *является непрерывным оператором.*

Доказательство. Пусть $f \in H(\mathbb{C})$. Из (3.1) получаем

$$(\Lambda^2 f)(z) = f''(z) + \sum_{j_1=0}^{m-1} \alpha_{j_1}^2 \int_0^1 (1 + \alpha_{j_1} t) f''(\alpha_{j_1} z t)\,dt + \sum_{j_1=0}^{m-1}\sum_{j_2=0}^{m-1} \alpha_{j_1}^3 \alpha_{j_2}^2 \int_0^1\int_0^1 t_1 f''(\alpha_{j_1}\alpha_{j_2} z t_1 t_2)\,dt_1 dt_2,$$

$$(\Lambda^3 f)(z) = f'''(z) + \sum_{j_1=0}^{m-1} \alpha_{j_1}^2 \int_0^1 (1 + \alpha_{j_1} t + \alpha_{j_1}^2 t^2) f'''(\alpha_{j_1} z t)\,dt +$$

$$+ \sum_{j_1=0}^{m-1}\sum_{j_2=0}^{m-1} \alpha_{j_1}^3 \alpha_{j_2}^2 \int_0^1\int_0^1 t_1(1 + \alpha_{j_1} t_1 + \alpha_{j_1}\alpha_{j_2} t_1 t_2) f'''(\alpha_{j_1}\alpha_{j_2} z t_1 t_2)\,dt_1 dt_2 +$$

$$+ \sum_{j_1=0}^{m-1}\sum_{j_2=0}^{m-1}\sum_{j_3=0}^{m-1} \alpha_{j_1}^4 \alpha_{j_2}^3 \alpha_{j_3}^2 \int_0^1\int_0^1\int_0^1 t_1^2 t_2 f'''(\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\alpha_{j_3} z t_1 t_2 t_3)\,dt_1 dt_2 dt_3.$$

По индукции выводим

$$(\Lambda^n f)(z) = f^{(n)}(z) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j_1=0}^{m-1}\dots\sum_{j_k=0}^{m-1} \alpha_{j_1}^{k+1}\alpha_{j_2}^{k}\dots\alpha_{j_k}^{2}\cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \dots \int_0^1 P_{k,n}(t_1, \dots, t_k) f^{(n)}(\alpha_{j_1}\dots\alpha_{j_k} z t_1 \dots t_k)\,dt_1\dots dt_k,$$

где $P_{k,n}$ – многочлен по $t_1, \dots, t_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, удовлетворяющий неравенству

$$|P_{k,n}(t_1, \dots, t_k)| \leqslant \binom{n}{k}, \quad t_1, \dots, t_k \in [0, 1].$$

Тогда, учитывая, что $|\alpha_{j_1}| = |\alpha_{j_2}| = \dots = |\alpha_{j_k}| = 1,\ k = 1, \dots, n,\ n = 1, 2, \dots$, получим

$$\|\Lambda^n f\|_R \leqslant \|f^{(n)}\|_R + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j_1=0}^{m-1}\dots\sum_{j_k=0}^{m-1} |\alpha_{j_1}|^{k+1}|\alpha_{j_2}|^{k}\dots|\alpha_{j_k}|^{2}\|f^{(n)}\|_R =$$

$$= \left(1 + \sum_{j_1=0}^{m-1}\dots\sum_{j_k=0}^{m-1}(2^n - 1)\right)\|f^{(n)}\|_R = (1 + (2^n - 1)m^n)\|f^{(n)}\|_R$$

По интегральной формуле Коши для любого $R > 0$

$$\|f^{(n)}\|_R \leqslant \frac{n!}{R^n}\|f\|_{2R}.$$

Тогда

$$\|\Lambda^n f\|_R \leqslant (1 + (2^n - 1)m^n)\frac{n!}{R^n}\|f\|_{2R}. \tag{3.3}$$

Используя (3.3), находим, что для любого $R > 0$ и $|z| \leqslant R$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{w^n(\Lambda^n f)(z)}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(n)}\right|^{\frac{1}{n}} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{w^n\|\Lambda^n f\|_R}{n!}\right|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{2m|w|}{R}.$$

Отсюда следует, что для любого $z, w \in \mathbb{C}$ ряд (1.5) сходится и, к тому же, сходится равномерно на каждом компакте $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Таким образом, $\tau_w f \in H(\mathbb{C})$. Покажем теперь, что $\|\tau_w f\|_R \leqslant M(R, w)\|f\|_{2R+4m|w|}$. Из этой оценки будет следовать непрерывность оператора τ_w. Действительно, применяя (3.3), получим

$$\|\tau_w f\|_R \leqslant \|\tau_w f\|_{R+2m|w|} = \left\| f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)}\Lambda^k f(z)\right\|_{R+2m|w|} \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|w|^k}{(R + 2m|w|)^k}(1 + (2^k - 1)m^k)\right)\|f\|_{2(R+2m|w|)} \leqslant M(R, w)\|f\|_{2R+4m|w|}.$$

Полученный ряд сходится, так как

$$\varlimsup_{k\to\infty} \left(\frac{(1 + (2^k - 1)m^k)|w|^k}{(R + 2m|w|)^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{2m|w|}{R + 2m|w|} < 1.$$

Следовательно, τ_w – непрерывный оператор.

Следующее утверждение характеризует взаимосвязь обобщенного оператора Данкла и оператора Гельфонда-Леонтьева.

Теорема 2. *Оператор* (1.2) *представляет собой частный случай оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева.*

Доказательство. Возьмем функцию $f \in H(\mathbb{C})$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Оператор обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева (см. [6]) действует на функцию f следующим образом:

$$D^k[f](z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \frac{b_{n-k}}{b_n} z^{n-k},$$

где b_n – коэффициенты некоторой целой функции $F(z)$ порядка ρ $(0 < \rho < \infty)$ и типа σ $(0 < \sigma < \infty)$, причем $b_n \neq 0, \quad n \geqslant 0$ и существует

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|b_n|} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим функцию

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(n)} z^n, \quad b_0 = 1.$$

Очевидно, $b_n \neq 0,\ n \geqslant 0$. Так как функция y экспоненциального типа, то, учитывая, что $\sigma = 1$, используя оценку (2.7) и формулу Стирлинга, получим

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt[n]{|\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(n)|}} = \lim_{n\to\infty} n\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\frac{e}{n(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} = e\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}}} = e.$$

Следовательно, условие (3.4) выполняется. Подействуем теперь на $f \in H(\mathbb{C})$ оператором Λ:

$$\Lambda f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Lambda(z^n).$$

Из (2.2) следует, что $\Lambda(z^n) = \widehat{F}(n)z^{n-1}$. Следовательно,

$$\Lambda f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\widehat{F}(n)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{b_{n-1}}{b_n}z^{n-1},$$

$$\Lambda^2 f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\widehat{F}(n)\Lambda(z^{n-1}) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\widehat{F}(n)\widehat{F}(n-1)z^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n\frac{b_{n-2}}{b_n}z^{n-2}.$$

По индукции по числу k находим, что если выполняется равенство

$$\Lambda^{k-1} f(z) = \sum_{n=k-1}^{\infty} a_n\widehat{F}(n)\widehat{F}(n-1)\ldots\widehat{F}(n-k+2)z^{n-k+1} = \sum_{n=k-1}^{\infty} a_n\frac{b_{n-k+1}}{b_n}z^{n-k+1}.$$

Тогда

$$\Lambda^k f(z) = \Lambda(\Lambda^{k-1}f(z)) = \sum_{n=k-1}^{\infty} a_n\widehat{F}(n)\widehat{F}(n-1)\ldots\widehat{F}(n-k+2)\Lambda(z^{n-k+1}) =$$
$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n\widehat{F}(n)\widehat{F}(n-1)\ldots\widehat{F}(n-k+2)\widehat{F}(n-k+1)z^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\frac{b_{n-k}}{b_n}z^{n-k}.$$

Таким образом, получили требуемое представление.

Приведем далее некоторые свойства оператора свертки Данкла (1.6). Пусть X – топологическое векторное пространство, L – линейный непрерывный оператор в X.

Определение 1. *Линейный непрерывный оператор L: $X \to X$ называется гиперциклическим, если существует такой элемент $x \in X$ (называемый гиперциклическим вектором оператора L), что его орбита $\{L^n x,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ плотна в X.*

Каждый гиперциклический оператор L является топологически транзитивным в смысле динамических систем, т. е. для любой пары открытых и непустых подмножеств U и V в X найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $L^n(U) \cap V \neq \varnothing$.

Определение 2. *Точка $x \in X$ называется периодической для L, если $L^n x = x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.*

Определение 3. *Оператор L: $X \to X$ называется хаотическим, если он является топологически транзитивным и имеет плотное множество периодических точек.*

Предложение 5. *Пусть $T \in H^*(\mathbb{C})$.*
1) Оператор (1.6) *действует непрерывно из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$.*
2) Оператор свертки Данкла является гиперциклическим и хаотическим на $H(\mathbb{C})$.

Доказательство.
1) Рассмотрим последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H(\mathbb{C})$:

$$f_n \to f,\ M_T[f_n] \to g \text{ при } n \to \infty,\ f, g \in H(\mathbb{C}).$$

Для любого $w \in \mathbb{C}$ из Предложения 4 следует

$$\tau_w f_n \to \tau_w f \text{ при } n \to \infty \text{ в } H(\mathbb{C}).$$

Тогда

$$M_T[f_n](z) \to M_T[f](z) \text{ при } n \to \infty \text{ для любого } z \in \mathbb{C}.$$

Применяя теорему о замкнутом графике, получаем, что M_T: $H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ является непрерывным оператором.
2) Так как обобщенный оператор Данкла является частным случаем оператора обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева, то справедлива Теорема 1 (из работы [7]), из которой следует гиперцикличность и хаотичность оператора свертки Данкла (1.6).

4. Следствия из теоремы 2

Из теоремы 2 вытекает ряд важных следствий.

4.1. Преобразование Данкла. Обозначим через $P_a(\mathbb{C})$ пространство целых функций экспоненциального типа:

$$|f(z)| \leqslant Ce^{a|z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad C, a > 0,$$

где постоянная C зависит от f.
Введем на этом пространстве норму p_a:

$$p_a(f) = \sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|e^{-a|z|}.$$

Как известно, $P_a(\mathbb{C})$ – банахово пространство. Тогда

$$P_{\mathbb{C}} = \bigcup_{a>0} P_a(\mathbb{C}).$$

$P_{\mathbb{C}}$ наделяется топологией индуктивного предела.
Определим преобразование Данкла функционала $T \in H^*(\mathbb{C})$ по формуле

$$\mathfrak{D}(T)(z) = \langle T_w, y(wz)\rangle = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(n)} z^n,$$

где $a_n = \langle T_w, w^n\rangle,\ n \geq 0,\ z \in \mathbb{C}$.
Применяя результат из работы [8], получим

Следствие 1. *Преобразование Данкла $\mathfrak{D}$ устанавливает топологический изоморфизм между пространствами $H^*(\mathbb{C})$ и $P(\mathbb{C})$.*

4.2. Уравнение свертки, порожденное обобщенным оператором Данкла. Рассмотрим оператор свертки Данкла $M_T[f](z) = \langle T_w, (\tau_w f)(z)\rangle,\ z, w \in \mathbb{C}$. С учетом (1.5) перепишем его в следующем виде

$$M_T[f](z) = a_0 f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)} \Lambda^k f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Lambda^k f(z), \tag{4.1}$$

где

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\ldots\widehat{F}(k)},\ a_k = \langle T_w, w^k\rangle,\ k = 1, 2, \ldots.$$

4.2.1. Однородное уравнение свертки. Однородное уравнение свертки – это уравнение вида $M_T[f](z) = 0$. Из (4.1) получаем

$$M_T[f](z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Lambda^k f(z) = 0. \tag{4.2}$$

Характеристическая функция уравнения (4.2):

$$\check{T}(\lambda) = \langle T, y(\lambda z)\rangle = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\widehat{F}(1)\widehat{F}(2)\dots\widehat{F}(k)}\lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda^k.$$

Учитывая Теорему 2 и результат из работы [9], получим, что уравнение (4.2) имеет решения вида $z^m y^{(m)}(\lambda_n z)$, $m = 0, 1, \dots, p_n - 1$, $n = 1, 2, \dots$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ – нули характеристической функции $\check{T}(\lambda)$ кратности $p_1, p_2, \dots$ соответственно.

Решения вида $z^m y^{(m)}(\lambda_n z)$, $m = 0, 1, \dots, p_n - 1$, $n = 1, 2, \dots$ назовем элементарными решениями уравнения (4.2). Обозначим множество таких решений через E. Пусть W – множество всех целых решений уравнения (4.2). Тогда из [9; Теорема 3.3.5] вытекает

Следствие 2. *Замыкание линейной оболочки множества E в $H(\mathbb{C})$ совпадает с W.*

Рассмотрим в $H(\mathbb{C})$ неоднородное уравнение свертки

$$M_T[f](z) = g(z), \quad g(z) \in H(\mathbb{C}). \tag{4.3}$$

Следствие 3. ([9]) Уравнение (4.3) разрешимо в $H(\mathbb{C})$ для любой функции $g \in H(\mathbb{C})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.
2. J.J. Betancor, M. Sifi, K. Trimeche *Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on* $\mathbb{C}$ // Acta Math. Hungar. 106:1-2 (2005). P. 101–116.
3. C.F. Dunkl *Differential-difference operators associated with reflections groups* // Trans. Amer. Math. Soc. 311:1 (1989). C. 167–183.
4. M. Rösler *Dunkl operators: theory and applications* // Orthogonal Polynomials and Special Functions (Leuven, 2002) Lecture Notes in Math. 1817. Springer-Verlag. Berlin. 2003. P. 93–135.
5. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука. 1983. 77 с.
6. Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф. *Об одном обобщении ряда Фурье* // Матем. сб. 29:3. 1951. С. 477–500.
7. Ким В.Э. *Гиперцикличность и хаотичность операторов обобщенной свертки, порождаемых операторами Гельфонда-Леонтьева* // Матем. заметки. 85:6. 2009. С. 849–856.
8. Панюшкин С.В. *Обобщенное преобразование Фурье и его применения* // Матем. заметки. 79:4. 2006. С. 581—596.
9. Леонтьев А.Ф. *Обобщения рядов экспонент.* М.: Наука. 1981. 299 с.

Ильмир Иршатович Карамов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: ilmir.karamov@gmail.com

Валентин Васильевич Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: napalkov@matem.anrb.ru