ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 6. № 1 (2014). С. 18-29.

УДК 517.52

ЗАДАЧА КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

О.А. БОЖЕНКО, К.Г. МАЛЮТИН

Аннотация. В работе рассматривается задача кратной интерполяции в классе аналитических в верхней полуплоскости функций нулевого порядка и типа не выше нормального. Задача относится к классу задач свободной интерполяции, которые впервые начал рассматривать А.Ф. Леонтьев. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этой задачи. Полученные критерии формулируются как в терминах канонических произведений, построенных по узлам интерполяции, так и в терминах неванлинновской меры, определяемой этими узлами. Работа является продолжением исследований второго автора, рассматривавшего аналогичные задачи в классах аналитических в полуплоскости функций ненулевого порядка.

Ключевые слова: нулевой уточненный порядок, дивизор, каноническое произведение, кратная интерполяция, условие Левина, неванлинновская мера.

Mathematics Subject Classification: 30E05, 30D15

1. Введение

Классическая задача интерполяции состоит в отыскании функции данного класса (аналитической функции с ограничениями на рост, в частности, целой функции, функции аналитической в верхней полуплоскости комплексного переменного, функции класса $\mathbf{H}^\infty$ и т. п.), принимающей в заданных точках — *узлах интерполяции* — заданные значения.

В 1948 году А. Ф. Леонтьев [1] впервые рассмотрел интерполяционную задачу в классе целых функций $[\rho, \infty]$ конечного порядка $\rho > 0$, получившую впоследствии название *задачи свободной интерполяции*. Эти исследования были продолжены А. Ф. Леонтьевым в работах [2, 3] в классах $[\rho, \infty)$ целых функций нормального типа при порядке ρ. В более общем классе $[\rho(r), \infty)$, где $\rho(r)$ – заданный уточненный порядок, задачу свободной интерполяции решила О. С. Фирсакова [5]. Г. П. Лапин [4] перенес результаты А. Ф. Леонтьева о свободной интерполяции в классе $[\rho, \infty)$ на задачу о кратной интерполяции. Теория кратной интерполяции в пространствах целых функций, описываемых уточненным порядком $\rho(r)$, получила дальнейшее развитие в работах А. В. Братищева [6], А. В. Братищева и Ю. Ф. Коробейника [7]. Аналогичные задачи в классах функций аналитических в верхней полуплоскости изучены недостаточно полно. Отметим только работу [8], в которой решена задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций ненулевого конечного порядка и нормального типа. Законченные результаты для полуплоскости имеют место для класса $\mathbf{H}^\infty$ (начиная со знаменитой теоремы Карлесона и многочисленных работ, посвященных этой тематике). Настоящая работа является продолжением исследований второго автора [8, 10].

O.A. Bozhenko, K.G. Malyutin, Problem of multiple interpolation in class of analytical functions of zero order in half-plane.

Работа поддержана Министерством образования и науки Украины (грант 0111U002152).
Поступила 27 декабря 2013г.

2. Классы аналитических функций в полуплоскости

Будем пользоваться терминологией работ [8, 10]

Обозначим через $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ верхнюю полуплоскость. Через $C(a,r)$ будем обозначать открытый, а через $B(a,r)$ — замкнутый круг радиуса r с центром в точке a, через Ω_+ пересечение множества Ω с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$: $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$.

Пусть $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ — дивизор, т.е. множество различных комплексных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}_+$ вместе с их кратностями $\{q_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$. По заданному дивизору $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$, $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ определим следующие меры: $n_D(G) = \sum_{a_n \in G} q_n$, $\tilde{n}_D^+(G) = \sum_{a_n \in G} q_n \Im a_n$, $n_D^+(G) = \sum_{a_n \in G \setminus B(0,1)} q_n \sin\theta_n + \tilde{n}_D^+(G \cap B(0,1))$. Если это не будет вызывать недоразумений, то индекс D будем опускать. Дивизор корней произвольной функции f будем обозначать через D_f. Обозначим через $n_f = n_{D_f}$, $n_f^+ = n_{D_f}^+$, $n_{f,a}(r) = n_f(C(a,r))$, $n_{f,a}^+(r) = n_f^+(C(a,r))$, $n_{D,a}(r) = n_D(C(a,r))$, $n_{D,a}^+(r) = n_D^+(C(a,r))$. В частности, положим $n_f(r) = n_{f,0}(r)$, $n_f^+(r) = n_{f,0}^+(r)$, $n_D(r) = n_{D,0}(r)$, $n_D^+(r) = n_{D,0}^+(r)$. Все рассматриваемые меры мы будем считать продолженными в комплексную плоскость, считая их ограничения на $\mathbb{C}_-$ нулевой мерой, а если речь идет о внутренних мерах, заданных в $\mathbb{C}_+$, то их ограничение на вещественную ось — есть нулевая мера.

Говоря о дивизоре $D_f = \{a_n, q_n\}_{n=1}^\infty$ корней некоторой функции f, мы иногда будем обозначать его через $\{z_n\}_{n=1}^\infty$, где в последовательности $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ точка a_n встречается ровно q_n раз.

Дифференцируемая функция $\rho(r)$ на полуоси $(0, +\infty)$ называется *уточненным порядком*, если выполняются условия:

1) $\lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) = \rho$, 2) $\lim\limits_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0$.

Детальное изложение свойств уточненного порядка можно найти в работах [11, 12, 13]. В статье используется обозначение $V(r) = r^{\rho(r)}$. Дополнительно мы предполагаем, что $V(r) \equiv 1$ при $r \in [0,1]$. Это условие не ограничивает общность, однако, упрощает некоторые рассуждения.

По ходу работы мы будем использовать широко известное свойство уточненного порядка, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 1. *Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок. Тогда при любом $t > 0$*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{V(rt)}{V(r)} = t^\rho, \tag{1}$$

причем предел равномерный на фиксированом сегменте $[a,b] \subset (0,+\infty)$.

В случае, если число ρ в определении уточненного порядка равно нулю, то уточненный порядок $\rho(r)$ называется *нулевым уточненным порядком.* В принципе, на нулевой уточненный порядок $\rho(r)$ мы не накладываем никаких ограничений. Однако, в основном тексте статьи мы предполагаем, что выполняется дополнительное условие

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{V(r)}{\ln r} = +\infty\,. \tag{2}$$

Уточненный порядок $\rho(r)$ называется *формальным порядком* функции f, если существует такая константа M_f, зависящая только от f, что для всех $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется неравенство

$$\log|f(z)| < M_f V(|z|)\,. \tag{3}$$

Символом $[\rho(r), \infty)_+$ мы будем обозначать класс аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций f формального порядка $\rho(r)$.

Уточненный порядок $\rho(r)$ называется *полуформальным порядком* аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции f, если $\rho(r)$ — формальный порядок функции f и выполняется следующее условие Левина [11, стр. 128]: существуют числа $q \in (0,1)$, $\delta \in (0, \pi/2)$, такие, что в каждой области

$$D(R, q, \delta) = \{z : qR \leqslant |z| \leqslant \frac{1}{q}R,\ \delta < \arg z < \pi - \delta\}$$

найдется точка z, в которой выполняется неравенство:

$$\log |f(z)| \geqslant -M_f V(|z|)\,.$$

Класс аналитических в $\mathbb{C}_+$ функций, для которых $\rho(r)$ является полуформальным порядком, обозначим через $[\rho(r), \infty)_+^h$. Этой терминологии мы обязаны А.Ф. Гришину. Ясно, что $[\rho(r), \infty)_+^h \subset [\rho(r), \infty)_+$.

Если $\rho = \lim\limits_{r\to\infty} \rho(r) > 1$ и $\rho(r)$ является формальным порядком функции f в $\mathbb{C}_+$, то $\rho(r)$ будет и полуформальным порядком этой функции [14]. С другой стороны, для функции e^{iz} $\rho(r) \equiv 0$ является формальным порядком, а $\rho(r) \equiv 1$ – полуформальным порядком этой функции. Действительно, функция e^{iz} ограничена в полуплоскости, и для любого $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется неравенство $|e^{iz}| \geqslant e^{-|z|}$.

Таким образом, различие между формальным и полуформальным порядком обнаруживается в полуплоскости только при $\rho \leqslant 1$ (и, в частности, при $\rho = 0$).

Функции f из класса $[\rho(r), \infty)_+$ обладают следующими свойствами [15]:

a) $\log |f(z)|$ имеет некасательный предел $\log |f(t)|$, $t \in \mathbb{R}$, почти всюду на вещественной оси, $\log |f(t)| \in L^1_{loc}(-\infty, \infty)$;
b) на вещественной оси существует знакопеременная мера (заряд) ν такая, что

$$\lim_{y\to+0} \int_a^b \log |f(t + iy)|\, dt = \nu([a, b]) - \frac{1}{2}(\nu(\{a\}) + \nu(\{b\}))\,.$$

Мера ν называется граничной мерой функции f;
c) $d\nu(t) = \log |f(t)|\, dt + d\sigma(t)$, где σ — сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $f \in [\rho(r), \infty)_+$ определим, следуя [15], полную меру λ как

$$\lambda(G) = 2\pi \int\limits_{\mathbb{C}_+\cap G} \Im\zeta\, d\mu(\zeta) - \nu(G)\,,$$

где μ — риссовская мера субгармонической в верхней полуплоскости функции $\log |f|$. Мера λ обладает следующими свойствами:

1) λ — конечная мера на каждом компакте $G \subset \mathbb{C}$,
2) λ — неотрицательная мера вне $\mathbb{R}$,
3) λ равна нулю в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{z : \Im z < 0\}$.

Мы будем использовать следующую лемму [15].

Лемма 2. *Пусть λ_f — полная мера функции $f \in [\rho(r), \infty)_+$. Тогда выполняется неравенство*

$$\iint\limits_{B_+(0,R)} \frac{d|\lambda_f|(\xi)}{1 + |\xi|^2} \leqslant M_f \left(\int_0^R \frac{V(t)}{1 + t^2} dt + \frac{V(R)}{R} \right)\,. \tag{4}$$

с некоторой постоянной $M_f > 0$, не зависящей от R.

3. Постановка интерполяционной задачи в классе $[\rho(r),\infty)_+$ (в классе $[\rho(r),\infty)_+^h$)

Обозначим через $\Lambda_z=\min\{1;\Im z\}$, $\Lambda_n=\Lambda_{a_n}$. Пусть $f\in[\rho(r),\infty)_+$ ($f\in[\rho(r),\infty)_+^h$). Из формулы Коши для производных нетрудно получить следующее неравенство

$$|f^{(k-1)}(z)|\leqslant\frac{(k-1)!}{\Lambda_z^{k-1}}\exp[M_fV(|z|)],\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Это неравенство приводит к разумности введения следующего определения.

Определение 1. *Дивизор $D=\{a_n,q_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется интерполяционным в классе $[\rho(r),\infty)_+$ (в классе $[\rho(r),\infty)_+^h$), если для любой последовательности комплексных чисел $b_{n,k}$, $k=1,2,\ldots,q_n$, $n\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих условию*

$$\sup_n\frac{1}{V(|a_n|)}\sup_{1\leqslant k\leqslant q_n}\log^+\frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!}<\infty\,,\tag{5}$$

существует функция $F\in[\rho(r),\infty)_+$ ($F\in[\rho(r),\infty)_+^h$) со свойством

$$F^{(k-1)}(a_n)=b_{n,k},\quad k=1,2,\ldots,q_n,\ n\in\mathbb{N}\,.\tag{6}$$

По заданному дивизору D определим семейства функций

$$\Phi_D^+(z,\alpha)=\frac{n_D^+(C(z,\alpha|z|)\setminus\{a_n\})}{V(|z|)},\quad \alpha>0\,,$$

где a_n — точка носителя дивизора D, ближайшая к точке z (если таких точек несколько, то выбираем любую из них). Положим

$$I_D^+(z,\delta)=\sin\theta\int_0^{\delta}\frac{\Phi_D^+(z,\alpha)\,d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2},\quad \theta=\arg z\,.$$

Сформулируем основную теорему нашей работы.

Теорема 1. *Пусть $\rho(r)$ — нулевой уточненный порядок. Тогда следующие три утверждения эквивалентны.*

1) *Дивизор D является интерполяционным в классе $[\rho(r),\infty)_+$ (в классе $[\rho(r),\infty)_+^h$).*

2) *Выполняются условия*:

2.1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_n\Im a_n}{1+|a_n|^2}<\infty\,,\tag{7}$$

2.2) *каноническое произведение*

$$E(z)=\prod_{|a_n|\leqslant1}\left(\frac{z-a_n}{z-\bar a_n}\right)^{q_n}\prod_{|a_n|>1}\left(\frac{z-a_n}{z-\bar a_n}\cdot\frac{\bar a_n}{a_n}\right)^{q_n}$$

дивизора D удовлетворяет условию:

$$\sup_n\frac{1}{V(|a_n|)}\log\frac{|\gamma_{n,1}|}{\Lambda_n^{q_n}}<\infty\,,\tag{8}$$

где

$$\gamma_{n,k}=\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1}\frac{(z-a_n)^{q_n}}{E(z)}\bigg|_{z=a_n},\ k=1,\ldots,q_n,n\in\mathbb{N}\,.$$

3) *Выполняются условия* (7) *и*

3.1) *при любом* $\delta > 0$

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} I_D^+(z,\delta) < \infty\,; \tag{9}$$

3.2)

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{q_n}{V(|a_n|)} \log\frac{2\Im a_n}{\Lambda_n} < \infty\,. \tag{10}$$

4. Необходимые условия разрешимости интерполяционной задачи

Теорема 2. *Пусть* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— интерполяционный дивизор в классе* $[\rho(r),\infty)_+$ (*в классе* $[\rho(r),\infty)_+^h$) *и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда выполняется условие* (7).

Доказательство. Пусть F – функция класса $[\rho(r),\infty)_+$, решающая интерполяционную задачу $F(a_1) = 1$, $F^{(k-1)}(a_1) = 0$, $k = 2,\ldots,q_1$, $F^{(k-1)}(a_n) = 0$, $k = 1,\ldots,q_n$, при $n \geq 2$. По предположению теоремы такая функция существует. Так как дивизор D, за исключением точки a_1, является частью корней функции F, то из неравенства (4) леммы 2 следует, что

$$\sum_{|a_n|\leqslant R} \frac{q_n\Im a_n}{1+|a_n|^2} \leqslant M_F\left(\int\limits_0^R \frac{V(t)}{1+t^2}dt + \frac{V(R)}{R}\right) \tag{11}$$

с некоторой постоянной $M_F > 0$, не зависящей от R.

Поскольку $\rho(r)$ — нулевой уточненный порядок, то $V(R) \leqslant M_1R^{1/2}$ с некоторой постоянной $M_1 > 0$, не зависящей от R. Поэтому $\lim\limits_{R\to\infty}\dfrac{V(R)}{R} = 0$, и интеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{V(t)}{1+t^2}dt$ сходится. Тогда отсюда и из (11) следует (7). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— интерполяционный дивизор в классе* $[\rho(r),\infty)_+$ (*в классе* $[\rho(r),\infty)_+^h$) *и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда выполняется утверждение* 2) *теоремы* 1.

Доказательство. Условие 2.1) следует из теоремы 2. Доказательство условия 2.2) дословно повторяет доказательство аналогичного условия в работе [8]. □

Теорема 4. *Пусть* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— интерполяционный дивизор в классе* $[\rho(r),\infty)_+$ (*в классе* $[\rho(r),\infty)_+^h$) *и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда выполняется утверждение* 3) *теоремы* 1.

Доказательство условий 3.1) и 3.2) проведено в работе [8] при $\rho > 1$. Анализ этих рассуждений показывает, что эти утверждения справедливы и при $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Теорема 5. *Пусть* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— такой дивизор, что выполняется условие* (7) *и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда утверждения* 2) *и* 3) *теоремы* 1 *эквивалентны.*

В работе [8] эквивалентность этих условий доказана для $\rho > 1$. Снова анализ этого доказательства показывает, что это справедливо для $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Нам понадобится следующая лемма из [8].

Лемма 3. *Пусть дивизор* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является интерполяционным в классе* $[\rho(r),\infty)_+$ (*в классе* $[\rho(r),\infty)_+^h$) *и* $\rho(r)$ *— нулевой уточненный порядок. Тогда*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q_k\Im a_k\Im a_n}{|a_n-\bar a_k|^2(1+r_k^2)^{\frac32}} < \infty\,. \tag{12}$$

Заметим [8], что если дивизор D удовлетворяет условию (8), то выполняется условие (10). Кроме того, справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть дивизор D удовлетворяет условию* (8)*, тогда*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{V(r_n)} \max_{1\leqslant k\leqslant q_n} \frac{|\gamma_{n,k}|}{\Lambda_n^{q_n-k+1}} < \infty\,. \tag{13}$$

Доказательство. Для доказательства нам понадобится следующее утверждение из работы [9].

Пусть функция $G(\zeta)$ аналитична в круге $C(0,r)$, $|G(\zeta)|\leqslant M$, и пусть $G(\zeta)$ имеет нуль кратности m в точке $\zeta=0$ и нуль кратности q в точке $\zeta=a$. Тогда

$$|a|^q \geqslant \frac{G^{(m)}(0)}{m!}\cdot\frac{r^{m+q}}{M}\,. \tag{14}$$

Обозначим через l_n величину

$$l_n=\min\left\{\Lambda_n/2, \operatorname{dist}\left(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\setminus\{a_n\};\{a_n\}\right)\right\},\quad n\in\mathbb{N}\,,$$

где dist означает расстояние между множествами. Пусть, например, $l_n=|a_k-a_n|$. Положим $G(\zeta)=E(a_k+\zeta)$, $r=\Lambda_k$. Замечая, что в этом случае $\Lambda_k>\Lambda_n/2\geqslant l_n=|a_k-a_n|$, применим неравенство (14) к функции $G(\zeta)$. Имеем

$$l_n^{q_n}\geqslant\frac{E^{(q_k)}(a_k)}{q_k!}\cdot\frac{\Lambda_k^{q_k+q_n}}{\max\limits_{|\zeta-a_k|\leqslant\Lambda_k}|E(\zeta)|}\,.$$

Из последнего неравенства, ограниченности функции $E(\zeta)$ ($|E(\zeta)|\leqslant 1$, $\zeta\in\mathbb{C}_+$), из условий (8), (10) и свойств уточненного порядка (1) следует, что

$$l_n^{q_n}\geqslant\Lambda_n^{q_n}\exp(-M_1V(|a_n|)),\quad n\in\mathbb{N}\,, \tag{15}$$

при некотором $M_1>0$. Это неравенство, в силу условия (10), справедливо и когда $l_n=\Lambda_n/2$, $n\in\mathbb{N}$.

Определим аналитическую в круге $C(0,1)$ функцию $\psi(t)$ равенством $\psi(t)t^{q_n}=E(a_n+l_nt)$. Применяя правило Лопиталя, а также неравенства (8) и (15), получим:

$$|\psi(0)|=l_n^{q_n}\frac{|E^{(q_n)}(a_n)|}{q_n!}\geqslant\exp(-M_2V(|a_n|))$$

при некотором $M_2>0$. Кроме того, при $|t|\leqslant 1$ функция $\psi(t)$ ограничена, так как

$$|\psi(t)|\leqslant\max_{|t|=1}|\psi(t)|=\max_{|t|=1}|\psi(t)t^{q_n}|=\max_{|t|=1}|E(a_n+l_nt)|\leqslant 1\,.$$

Далее воспользуемся следующей теоремой [11, Теорема 9, Глава I, § 6].

Теорема. *Пусть голоморфная в круге $C(0,R)$ функция $f(z)$ не имеет нулей. Тогда в круге $C(0,r)$, $r<R$, справедливо неравенство*

$$\log|f(z)|\geqslant\frac{-2r}{R-r}\max_{|\zeta|\leqslant R}\log|f(\zeta)|. \tag{16}$$

Положим $g(\zeta)=\psi(\zeta)\psi^{-1}(0)$. Поскольку функция $g(\zeta)$ не имеет нулей в круге $C(0,1/2)$ и $g(0)=1$, к ней применимо неравенство (16), которое при $|\zeta|\leqslant r=1/4$ и $R=1/2$ дает $g(\zeta)\geqslant\exp(-2M_2V(|a_n|))$. Откуда

$$|E(a_n+\tau)|\geqslant\frac{|\tau|^{q_n}}{|l_n|^{q_n}}\exp(-M_3V(|a_n|)),\quad|\tau|\leqslant\frac{l_n}{4}\,, \tag{17}$$

при некотором $M_3>0$.

Далее по определению имеем

$$\gamma_{n,k}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-a_n|=l_n/4}\frac{(\zeta-a_n)^{q_n-k}}{E(\zeta)}\,d\zeta,\quad k\in\overline{1,q_n},\, n\in\mathbb{N}\,.$$

Неравенство (13) следует теперь из этого соотношения, определения l_n, (17) и (10). Лемма доказана. □

5. Доказательство импликации 2) ⇒ 1) теоремы 1

Обозначим через

$$\alpha_{n,m}=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{i=o}^{q_n-m}\frac{1}{i!}\gamma_{n,q_n+1-m-i}b_{n,i+1},\quad m\in\overline{1,q_n},\, n\in\mathbb{N}\,. \tag{18}$$

Перенумеровав, если есть необходимость, точки дивизора D, можно считать, что

$$\frac{\Im a_{n+1}}{1+r_{n+1}^2}\leqslant\frac{\Im a_n}{1+r_n^2},\quad n\in\mathbb{N}\,. \tag{19}$$

Положим

$$\beta_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1+\bar a_k(z+i\Lambda_n)}{i(\bar a_k-z-i\Lambda_n)}\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac32}},\quad n\in\mathbb{N}\,. \tag{20}$$

Ряд, определяющий функции $\beta_n(z)$ в (20), сходится равномерно в каждой области

$$D_{r,\delta}^n=\{z:|z|\leqslant r,\Im z\geqslant-\Lambda_n+\delta,\ \delta>0\}\,,$$

т.к. при $z\in D_{r,\delta}^n$, $r\geqslant2$

$$\left|\frac{1+\bar a_k(z+i\Lambda_n)}{i(\bar a_k-z-i\Lambda_n)}\right|\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac32}}\leqslant\frac{\sqrt{(1+r)(1+r_k)}}{\delta}\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac32}}\,,$$

и ряд (7) сходится.

Оценим $\Re\beta_n(z)$. Имеем

$$\Re\beta_n(z)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k+\Im z+\Lambda_n+r_k^2(\Im z+\Lambda_n)+|z+i\Lambda_n|^2\Im a_k)}{|\bar a_k-z-i\Lambda_n|^2}\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac32}}\,. \tag{21}$$

Т.к. $\Im a_n>0$, $\Im\bar a_k<0$, то $|\bar a_k-a_n-i\Lambda_n|>|\bar a_k-a_n|$. Отсюда, из леммы 3, неравенства (19) и (21) получаем, в частности, что

$$\begin{aligned}\Re\beta_n(a_n)&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\Im a_k(\Im a_k(1+|a_n+i\Lambda_n|^2)+2\Im a_n(1+r_k^2))}{|\bar a_k-a_n|^2(1+r_k^2)^{\frac32}}\leqslant\\&\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{\Im a_k}{1+r_k^2}+\frac{2\Im a_n}{1+4r_n^2}\right)\frac{\Im a_k(1+r_k^2)(1+4r_n^2)}{|\bar a_k-a_n|^2(1+r_k^2)^{\frac32}}\leqslant\\&\leqslant5\frac{1+4r_n^2}{1+r_n^2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\Im a_n}{|\bar a_k-a_n|^2}\frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac12}}\leqslant K_1<\infty\,.\end{aligned} \tag{22}$$

А также

$$\Re\beta_n(z)\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(1+r_k^2)^{\frac32}}\frac{1}{|\bar a_k-z-i\Lambda_n|^2}\,. \tag{23}$$

Положим далее

$$P_n(z)=\sum_{m=1}^{q_n}\alpha_{n,m}\left[\frac{\varphi_n(z)}{z-a_n}\right]^{(m-1)}\,, \tag{24}$$

где

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{1+z\bar{a}_n}{1+r_n^2}\right)^3 \frac{g(z)}{g(a_n)} \left(\frac{2\Im a_n}{z-\bar{a}_n}\right)^2 \exp[\beta_n(a_n) - \beta_n(z)]\,,$$

$g(z)$ — целая функция класса $[\rho(r),\infty)_+$ (класса $[\rho(r),\infty)_+^h$), которая будет определена ниже.

Заметим, что

$$\varphi_n(a_n) = 1, \quad n \in \mathbb{N}\,. \tag{25}$$

Кроме того, воспользовавшись элементарным неравенством $1+x \leqslant \sqrt{2(1+x^2)}$, получим при $|z| \geqslant 1$:

$$\left|\frac{1+z\bar{a}_n}{1+r_n^2}\right| \leqslant \frac{|z|(1+r_n)}{1+r_n^2} \leqslant \frac{\sqrt{2}|z|}{\sqrt{1+r_n^2}}\,.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} |\varphi_n(z)| \leqslant 4\left(\frac{\sqrt{2}|z|}{\sqrt{1+r_n^2}}\right)^3 \frac{|g(z)|}{|g(a_n)|}\frac{(\Im a_n)^2}{|z-\bar{a}_n|^2}\times \\ \times\exp\{\Re[\beta_n(a_n)-\beta_n(z)]\}, \quad n\in\mathbb{N}\,. \end{gathered} \tag{26}$$

Формальный ряд

$$F(z) = E(z)\sum_{n=1}^{\infty} P_n(z) \tag{27}$$

решает интерполяционную задачу (6) [8].

Покажем, что при надлежащем выборе функции $g(z)$ функция $F(z)$ принадлежит классу $[\rho(r),\infty)_+$ ($[\rho(r),\infty)_+^h$). Из условия (5), неравенства (13) и равенства (18) получаем для всех $m = 1,\ldots,q_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|\alpha_{n,m}| \leqslant \frac{q_n - m + 1}{(m-1)!}\Lambda_n^m \exp[K_2 V(r_n)]\,. \tag{28}$$

Обозначим

$$u_{n,m}(z) = \left[\frac{\varphi_n(z)}{z-a_n}\right]^{(m-1)},\ m = 1,\ldots,q_n, n\in\mathbb{N}\,.$$

Оценим $u_{n,m}(z)$ при $z \in \mathbb{C}_+$, $z \notin C(a_n, \Lambda_n/2)$. Заметим, что если $|t-z| = \Lambda_n/4$, то, во-первых,

$$|t-a_n| \geqslant \Lambda_n/4, \quad n\in\mathbb{N}\,, \tag{29}$$

во-вторых, $|t-\bar{a}_n| \geqslant \Im a_n - \Lambda_n/4 \geq 3\Im a_n/4$ ($n \in \mathbb{N}$), $|z-\bar{a}_n| \leqslant |z-t| + |t-\bar{a}_n| = \Lambda_n/4 + |t-\bar{a}_n| \leqslant \Im a_n/4 + |t-\bar{a}_n| \leqslant 7|t-\bar{a}_n|/3$, и $|t-\bar{a}_n| \leqslant |z-t| + |z-\bar{a}_n| = \Lambda_n/4 + |z-\bar{a}_n| \leqslant \Im a_n/4 + |z-\bar{a}_n| \leqslant 5|z-\bar{a}_n|/4$, т.е.

$$3|z-\bar{a}_n|/7 \leqslant |t-\bar{a}_n| \leqslant 5|z-\bar{a}_n|/4\,. \tag{30}$$

Кроме того, если $|z-t| = \Lambda_n/4$, то

$$|t+i\Lambda_n-\bar{a}_n| \geqslant 3\Lambda_n/4 + \Im z + \Im a_n\,. \tag{31}$$

Воспользовавшись интегральной формулой Коши для производных по окружности $C_{z,n} = \{t : |t-z| = \Lambda_n/4\}$, из (26), (29), (30) и (31), получим

$$|u_{n,m}(z)| = \frac{(m-1)!}{2\pi}\left|\int\limits_{C_{z,n}} \frac{\varphi_n(t)\,dt}{(t-a_n)(t-z)^m}\right| \leqslant \frac{4^m(m-1)!}{\Lambda_n^m}\max_{t\in C_{z,n}}|\varphi_n(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{4^m 49(m-1)!(\Im a_n)^2}{9\Lambda_n^m|z-\bar a_n|^2}\left(\frac{\sqrt{2}(|z|+1/4)}{\sqrt{1+r_n^2}}\right)^3\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\times$$
$$\times\max_{t\in C_{z,n}}\exp[\Re(\beta_n(a_n)-\beta_n(t))]\,.$$

Отсюда получим окончательно, с учетом (22), (23) и (31):

$$\begin{gathered}|u_{n,m}(z)| \leqslant \frac{4^m 49(m-1)!e^{K_1}(\sqrt{2}(|z|+1/4))^3}{9\Lambda_n^m|z-\bar a_n|^2}\frac{(\Im a_n)^2}{(1+r_n^2)^{\frac32}}\times\\ \times\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+\Im z+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac32}}\right],\end{gathered} \tag{32}$$

$m=1,\dots,q_n$, $n\in\mathbb{N}$.

Далее из (24), (28) и (32) получаем, что при $z\in\mathbb{C}_+$, $z\notin C(a_n,\Lambda_n/2)$ справедливо неравенство:

$$\begin{gathered}|P_n(z)| \leqslant \sum_{m=1}^{q_n}|\alpha_{nm}||u_{nm}(z)| \leqslant \frac{49}{9}\exp[K_3V(r_n)]\times\\ \times\frac{(\sqrt{2}(|z|+1/4))^3(\Im a_n)^2}{(1+r_n^2)^{\frac32}|z-\bar a_n|^2}\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\sum_{m=1}^{q_n}4^m(q_n-m+1)\times\\ \times\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+\Im z+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac32}}\right] \leqslant \frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\times\\ \times\frac{(\Im a_n)^2}{|z-\bar a_n|^2(1+r_n^2)^{\frac32}}\frac{49}{18}q_n(q_n+1)\exp[K_3V(r_n)+q_n\ln 4]\times\\ \times(\sqrt{2}(|z|+1/4))^3\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+\Im z+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac32}}\right],\quad n\in\mathbb{N}\,.\end{gathered} \tag{33}$$

Используя (10), получим из (33) при $z\in\mathbb{C}_+$, $z\notin C(a_n,\Lambda_n/2)$:

$$\begin{gathered}|P_n(z)| \leqslant \exp[K_4V(r_n)](\sqrt{2}(|z|+1/4))^3\times\\ \times\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}\frac{(\Im a_n)^2}{|z-\bar a_n|^2(1+r_n^2)^{\frac32}}\times\\ \times\exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4+\Im z+\Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac32}}\right],\ n\in\mathbb{N}\,.\end{gathered} \tag{34}$$

Далее заметим, что если $|t-a_n|\leqslant\Lambda_n/2$, и $|z-a_n|=\Lambda_n/2$, то

$$|z|\leqslant|t|+1 \tag{35}$$

и

$$3|t-\bar a_n|/5\leqslant|z-\bar a_n|\leqslant 5|t-\bar a_n|/3\,. \tag{36}$$

Применяя принцип максимума модуля к аналитической в $\mathbb{C}_+$ функции $\Phi_n(z) = E(z)P_n(z)$, используя неравенства (34), (35), (36) и лемму 1, получим при $t \in C(a_n, \Lambda_n/2)$, учитывая, что $\Im t \geqslant \Im z/4$,

$$\begin{aligned} |\Phi_n(t)| \leqslant \max_{|z-a_n|=\Lambda_n/2} |E(z)||P_n(z)| \leqslant \exp[K_5(V(r_n) + V(|z|))]\times \\ \times \frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|} \frac{25(\Im a_n)^2}{9|t-\bar{a}_n|^2(1+r_n^2)^{\frac{3}{2}}}\times \\ \times \exp\left[-\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4 + 4\Im t + \Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac{3}{2}}}\right]. \end{aligned} \tag{37}$$

В силу (34) неравенство (37) справедливо при всех $t \in \mathbb{C}_+$. Обозначим

$$\lambda_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\Im a_k)^2}{(3\Lambda_n/4 + 4\Im z + \Im a_k)^2(1+r_k^2)^{\frac{3}{2}}},$$

так, что

$$\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z) = \frac{(\Im a_n)^2}{(3\Lambda_n/4 + 4\Im z + \Im a_n)^2(1+r_n^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $\lambda_n(z) \downarrow 0$ при $n \to \infty$, $z \in \mathbb{C}_+$. Замечая, что при $z \in \mathbb{C}_+$ выполняется неравенство

$$3\Lambda_n/4 + 4\Im z + \Im a_n \leqslant 4\Im z + 7\Im a_n/4 \leqslant 4(\Im z + \Im a_n) \leqslant 4|z - \bar{a}_n|,$$

получим из (37):

$$\begin{aligned} |\Phi_n(z)| \leqslant 16\exp[-\lambda_n(z)][\lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)]\times \\ \times \frac{\exp[MV(r_n) + MV(|z|)]|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $t \leqslant e^t - 1$, $t \geqslant 0$, при $t = \lambda_n(z) - \lambda_{n+1}(z)$, получим далее

$$\begin{aligned} |\Phi_n(z)| \leqslant \exp[K_5(V(r_n) + V(|z|))][\exp[-\lambda_{n+1}(z)] - \\ - \exp[-\lambda_n(z)]]\frac{|g(\sqrt{2}(|z|+1/4))|}{|g(a_n)|}. \end{aligned} \tag{38}$$

Выберем теперь функцию $g(z)$ так, чтобы функция $F(z)$, определяемая рядом (27), принадлежала классу $[\rho(r), \infty)_+$. В качестве $g(z)$ возьмем целую функцию вполне регулярного роста при порядке $\rho(r)$, индикатор которой равен $K_5 + 1$, и нули которой расположены на отрицательной мнимой полуоси $i\mathbb{R}_- = \{z : \Im z \leqslant -1\}$. Так как $\rho(r)$ – нулевой уточненный порядок, то такая функция может быть выбрана [16].

Вне C^0-множества выполняется асимптотическое равенство [16]:

$$\ln|g(z)| \approx (K_5 + 1)V(|z|).$$

Поскольку нули функции $g(z)$ расположены на полуоси $i\mathbb{R}_-$, то можно считать, что исключительные круги, образующие C^0-множество, расположены в нижней полуплоскости. Тогда неравенство

$$\ln|g(a_n)| \geqslant K_5V(r_n)$$

выполняется для всех достаточно больших n. Умножая, если есть необходимость, функцию $g(z)$ на достаточно большое положительное число, можно считать, что это неравенство выполняется для всех натуральных n.

Из (38) тогда получаем для любого натурального $N \geqslant 1$:

$$|E(z)\sum_{n=1}^{N} P_n(z)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |E(z)P_n(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \exp[K_6V(|z|)]\{\exp[-\lambda_{N+1}(z)] - \exp[-\lambda_1(z)]\} \leqslant \exp[K_6V(|z|)]\,.$$

Отсюда следует сходимость ряда (27) на компактах в $\mathbb{C}_+$ и принадлежность функции F классу $[\rho(r),\infty)_+$. Для принадлежности функции F классу $[\rho(r),\infty)_+^h$ необходимо еще выполнение условия Б.Я. Левина. Заметим, что каноническая функция E принадлежит классу $[\rho(r),\infty)_+^h$. Из результатов работы [16] следует, что вне множества C_η со сколь угодно малой верхней плотностью $\eta > 0$ всюду в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ выполняется неравенство:

$$\log|E(z)| \geqslant -M_\eta V(|z|)\,.$$

Пусть $g_1(z)$ – целая функция вполне регулярного роста при порядке $\rho(r)$, индикатор которой равен $2K_5 + M_\eta + 1$. Тогда вне C^0-множества выполняется неравенство:

$$\log|g_1(z)| \geqslant (2K_5 + M_\eta)V(|z|)\,.$$

Множество $\tilde{C}_\eta = C_\eta \cup C^0$ имеет верхнюю плотность не больше, чем η. Вне $\tilde{C}_\eta$ справедливо неравенство:

$$\log|g_1(z)E(z)| \geqslant 2K_5V(|z|)\,,$$

всюду в $\mathbb{C}_+$.

Функция

$$F_1(z) = F(z) + g_1(z)E(z)$$

обладает свойством (6) и вне $\tilde{C}_\eta$-множества справедлива оценка:

$$\log|F_1(z)| = \log|g_1(z)E(z)| + \log\left|1 + \frac{F(z)}{g_1(z)E(z)}\right| \geqslant$$
$$\geqslant 2K_5V(|z|) + \log(1 - 1/e)\,.$$

Следовательно, функция F_1 принадлежит классу $[\rho(r),\infty)_+^h$. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) теоремы 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* // Докл. АН СССР. Т. 5. 1948. С. 785–787.
2. Леонтьев А.Ф. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа* // Докл. АН СССР. Т. 66, № 2. 1949. С. 153–156.
3. Леонтьев А.Ф. *К вопросу об интерполяции в классе целых функций конечного порядка* // Матем. сб. Т. 4, № 1. 1957. С. 81–96.
4. Лапин Г.П. *О целых функциях конечного порядка, принимающих вместе с производными заданные значения в заданных точках* // Сиб. мат. журн. Т. 6, № 6. 1965. С. 1267–1281.
5. Фирсакова О.С. *Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций* // Докл. АН СССР. Т. 120, № 3. 1958. С. 447–480.
6. Братищев А.В. *Об интерполяционной задаче в некоторых классах целых функций* // Сиб. мат. журн. Т. 17, № 1. 1976. С. 30–40.
7. Братищев А.В., Коробейник Ю.Ф. *Кратная интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка* // Изв. АН СССР. Сер. мат.Т. 40, № 5. 1976. С. 1102–1127.
8. Малютин К.Г. *Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа* // Матем. сб. Т. 184, № 2. 1993. С. 129–144.
9. Трошин Г.Д. *Об интерполировании функций, аналитических в угле* // Матем. сб. Т. 39(81), № 2. 1956. С. 239–252.

10. Малютин К.Г. *Модифицированный метод Джонса для решения задач кратной интерполяции в полуплоскости* // Математический форум. Исследования по математическому анализу / отв. ред. Коробейник Ю.Ф. и Кусраев А.Г. Владикавказ: ВНЦ РАН и РСО-А. Т. 3. 2009. С. 143–164.
11. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* Москва: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
12. N.H. Bingham, C.M. Goldie, J.L. Teugels *Regular variation.* Cambridge university press, Cambridge, London, New-York, New Rochele, Melburn, Sydney, 1987. 516 p.
13. Гришин А.Ф., Малютина Т.И. *Об уточненном порядке* // Комплексный анализ и математическая физика, Сб. статей, Красноярский госуниверситет, Красноярск. 1998. С. 10–24.
14. A.F. Grishin, T.I. Malyutina *General properties of subharmonic functions of finite order in a complex half-plane* // Вестн. Харьк. нац. ун-та. Сер. матем., прикл. матем. и механика. № 475. 2000. P. 20–44.
15. Гришин А.Ф. *Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций* // Математическая физика, анализ, геометрия. Т. 1, № 2. 1994. С. 193—215.
16. Гришин А.Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Вып. 7. 1968. С. 59 – 84.

Оксана Анатольевна Боженко,
Сумской государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2,
40007, г. Сумы, Украина
Константин Геннадьевич Малютин,
Сумской государственный университет,
ул. Римского-Корсакова, 2,
40007, г. Сумы, Украина
E-mail: malyutinkg@yahoo.com