

# ОБ АНАЛОГАХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ф.Х. БАЙЧОРОВА

**Аннотация.** Рассматривается задача о собственных функциях дифференциальных операторов, полуинвариантных относительно группы сдвигов. Получено условие разрешимости этой задачи в элементарных функциях и указана связь этого условия с теорией коммутативных колец дифференциальных операторов.

**Ключевые слова:** обобщенные функции Бесселя, преобразования Дарбу.

**Mathematics Subject Classification:** 34L05

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача о собственных функциях дифференциальных операторов из следующего специального класса (см.[1])

$$A = e^{Nt} a(D_t) = e^{Nt} \prod_{j=1}^N (D_t + \alpha_j). \quad (1)$$

Здесь  $a(D_t)$  произвольный многочлен с постоянными коэффициентами степени  $N$  от символа  $D_t$ . После замены независимой переменной:

$$x = -e^{-t}, \quad D_x = e^t D_t, \quad D_t = -x D_x \quad (2)$$

оператор (1) принимает следующий вид оператора Эйлера (см.[2])

$$\tilde{A} = \frac{1}{(-x)^N} \prod_{j=1}^N (x D_x - \alpha_j), \quad (3)$$

и при  $N = 2$  мы получаем

$$\tilde{A} = \frac{1}{x^2} (x D_x - \alpha_1)(x D_x - \alpha_2) = D_x^2 + \frac{\alpha}{x} D_x + \frac{\beta}{x^2}. \quad (4)$$

Другими словами, рассматриваемая задача о собственных функциях  $A\psi = \lambda\psi$  при  $N = 2$  сводится к уравнению Бесселя

$$y'' + \frac{1}{x} y' = \frac{x^2 + n^2}{x^2} y, \quad (5)$$

а при  $N = 3$  к простейшему обобщению уравнения (5).

Операторы вида (1) полуинвариантны относительно сдвига  $t \rightarrow t + const$ . За счет сдвига, не ограничивая общности, полагаем  $\lambda = 1$  в уравнении  $A\psi = \lambda\psi$ . Заметим далее, что операция сопряжения с экспонентой равносильна для этих операторов замене  $D_t \rightarrow D_t + const$ . Действительно,

$$e^{-kt} \circ D_t \circ e^{kt} = D_t + k \Rightarrow e^{-kt} \circ e^{Nt} a(D_t) \circ e^{kt} = e^{Nt} a(D_t + k). \quad (6)$$

Ф.Х. БАЙЧОРОВА, ON ANALOGUES OF THIRD ORDER BESSEL FUNCTION.

© Байчорова Ф.Х. 2014.

Поступила 26 ноября 2013 г.

Таким образом, один из корней оператора (1) при  $N = 3$  выбираем равным нулю, и уравнение для собственных функций приводим к виду

$$e^{3t} D_t(D_t + \alpha_2)(D_t + \alpha_3)\psi = \psi \Leftrightarrow \psi''' + \frac{\alpha}{x}\psi'' + \frac{\beta}{x^2}\psi' = \psi, \quad (7)$$

где  $\alpha = 3 - \alpha_2 - \alpha_3$ ,  $\beta = 1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$ .

Легко видеть, что точка  $x = 0$  является регулярной особой точкой для уравнения (7). Как известно, в окрестности регулярной особой точки для этого уравнения существует фундаментальная система из трех решений в виде сходящихся степенных рядов (см. [3], с. 496–498)

$$\psi = x^s(\widehat{C}_0 + \widehat{C}_1x + \widehat{C}_2x^2 + \dots). \quad (8)$$

Вообще говоря, в этой формуле появляется логарифм, и в случае "кратных" корней решение ищется в виде

$$\psi = x^s[\varphi_1(x)\log(x) + \varphi_2(x)],$$

где  $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$  — аналитические в нуле функции. Достаточным условием отсутствия  $\log$  является то, что  $\alpha_2, \alpha_3$  — нецелые, этот случай рассматривается ниже (см. (14)).

Подставляя разложения  $\psi$  и его производные в уравнение (7) и приравнивая коэффициенты при степенях  $x$  нулю, получаем уравнение

$$s[(s - 1)(s - 2) + \alpha(s - 1) + \beta] = 0,$$

которое определяет величину показателя  $s$ . Это уравнение называется *определяющим уравнением*. Его решениями являются  $0, \alpha_2, \alpha_3$ . Если  $s$  нецелые, то это случай общего положения.

**Пример 1.** При  $\alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$  уравнение для собственных функций (7) сводится к уравнению

$$(e^t D_t)^3 \widehat{\psi} = D_x^3 \widehat{\psi} \Leftrightarrow \widehat{\psi}''' = \widehat{\psi},$$

фундаментальной системой решений которого является

$$\widehat{\psi}_1 = e^x, \widehat{\psi}_2 = e^{ax}, \widehat{\psi}_3 = e^{bx},$$

где  $a = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), b = \bar{a}$ .

Основным результатом работы является следующее утверждение:

Задача на собственные функции оператора третьего порядка  $\tilde{A} = \frac{1}{x^3}(xD_x - \alpha_1)(xD_x - \alpha_2)(xD_x - \alpha_3)$  имеет три решения, выражающихся в элементарных функциях, а именно

$$\psi_j = e^{\alpha_j x} \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$$

в том случае, если выполняется условие:

$$(0, \alpha_2, \alpha_3) \equiv (0, 1, 2) \pmod{3}. \quad (9)$$

В случае уравнения Бесселя второго порядка аналогичное условие (9) записывается в виде

$$(0, \alpha_2) \equiv (0, 1) \pmod{2},$$

что эквивалентно полужелому  $n$  в уравнении (5).

В работе [4] показано, что целые  $n$  в уравнении (5) соответствуют коммутативным кольцам дифференциальных операторов 4 и 6 порядков вида (1).

## 2. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

При нахождении коэффициентов разложения решения по степеням  $x$  (8) удобно переписать дифференциальное уравнение в терминах степеней оператора Эйлера  $x D_x = \theta$ . Например, дифференциальный оператор

$$P = x(1-x)\partial^2 - (a+b+1)x\partial + c\partial - ab, \quad (10)$$

соответствующий гипергеометрическому уравнению Гаусса, можно переписать, используя оператор Эйлера  $\theta = x\partial$ , в следующем виде (ср.[5]):

$$x \cdot P = \theta(\theta + c - 1) - x(\theta + a)(a + b). \quad (11)$$

В общем случае для оператора третьего порядка

$$A = e^{3t} D_t (D_t + \alpha_2) (D_t + \alpha_3) = \frac{1}{x^3} \theta (\theta - \alpha_2) (\theta - \alpha_3) = \frac{1}{x^3} a(\theta), \quad (12)$$

собственную функцию удобнее искать в виде произведения многочлена на экспоненту

$$\psi = e^x \sum_{k=0}^n C_k x^k, \quad C_0 = const. \quad (13)$$

Причем, коэффициенты  $\widehat{C}_k$  и  $C_k$  этих двух разложений (8) и (13) собственной функции связаны следующими формулами:

$$\widehat{C}_k = \sum_{i+j=k} \frac{C_i}{j!} = \frac{C_0}{k!} + \dots + C_k, \quad k > 0.$$

При этом справедливо следующее:

в случае общего положения

$$\widehat{C}_0 = 1, \quad \widehat{C}_1 = 0, \quad \widehat{C}_2 = 0, \quad \widehat{C}_3 = \frac{1}{a(3)}, \dots, \quad \widehat{C}_k = \frac{\widehat{C}_{k-3}}{a(k)} \quad (14)$$

и решения задачи  $A\psi = \psi$  — целые функции.

Действительно, пусть решение задачи  $A\psi = \psi$  представлено в виде степенного ряда (8), где  $\widehat{C}_k$  определяются из (14).

Покажем, что функция (8) — целая. Для этого найдем область сходимости ряда (8) при помощи признака Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\widehat{C}_{3k+3}}{\widehat{C}_{3k}} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{3k+3} \prod_k (3k[(3k)^2 + 3kb_1 + b_2])}{x^{3k} \prod_k [(3k+3)((3k+3)^2 + (3k+3)b_1 + b_2)]} \right| = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x^3}{(3k+3)((3k+3)^2 + (3k+3)b_1 + b_2)} \right| = \\ &= |x^3| \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{(3k+3)((3k+3)^2 + (3k+3)b_1 + b_2)} \right| = 0. \end{aligned}$$

Радиус круга сходимости равен  $\infty$  и ряд (8) абсолютно сходится при всех значениях  $x$ . Для произвольного многочлена  $a(\theta)$  из (12) справедливы следующие соотношения (ср. [5]):

$$a(\theta) \bullet x^\alpha = a(\alpha) \cdot x^\alpha, \quad (15)$$

$$a(\theta)(x^i) = x^i \cdot a(\theta + i), \quad (16)$$

$$a(\theta)(e^x x^k) = x^k a(\theta + k)(e^x). \quad (17)$$

Применяя эти формулы к  $a(\theta) = \theta^3 + b_1 \theta^2 + b_2 \theta$ , (где  $b_1 = -\alpha_2 - \alpha_3$ ,  $b_2 = \alpha_2 \alpha_3$ ), получаем:

$$a(\theta+k) = \theta^3 + (b_1+3k)\theta^2 + (3k^2+2b_1k+b_2)\theta + a(k), \text{ где } a(k) = k^3 + b_1k^2 + b_2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Поэтому

$$a(\theta+k)(e^x) = e^x(x^3 + (b_1+3k+3)x^2 + b_2(k)x + a(k)), \text{ где } b(k) = a(k+1) - a(k). \quad (19)$$

Найдем коэффициенты  $C_k$  ряда (13) из  $A\psi = \psi$

$$A\psi = \frac{1}{x^3}a(\theta)\left(e^x \sum_{k=0}^n C_k x^k\right) = e^x \sum_{k=0}^n C_k x^k.$$

Для этого приравниваем коэффициенты при соответствующих степенях  $x$  :

$$\begin{aligned} a(1)(C_0 + C_1) &= 0, \\ (3+a)C_0 + b(1)C_1 + a(2)C_2 &= 0, \\ C_0 + (6+a)C_1 + b(2)C_2 + a(3)C_3 &= C_0, \\ C_1 + (9+a)C_2 + b(3)C_3 + a(4)C_4 &= C_1, \\ C_2 + (12+a)C_3 + b(4)C_4 + a(5)C_5 &= C_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

или, учитывая (19):

$$\begin{cases} a(1)(C_0 + C_1) = 0, \\ (3+a)C_0 + [a(2) - a(1)]C_1 + a(2)C_2 = 0, \\ (6+a)C_1 + [a(3) - a(2)]C_2 + a(3)C_3 = 0, \\ (9+a)C_2 + [a(4) - a(3)]C_3 + a(4)C_4 = 0, \\ (12+a)C_3 + [a(5) - a(4)]C_4 + a(5)C_5 = 0, \\ \dots \end{cases} \quad (20)$$

Из полученной системы можно вывести рекуррентное отношение для коэффициентов  $C_k$ :

$$C_{k+1} = -\frac{C_{k-1}(a+3k) + [a(k+1) - a(k)]C_k}{a(k+1)}.$$

### 3. УСЛОВИЯ ОБРЫВА

Рассмотрим случай, когда решениями задачи на собственные функции

$$A\psi = \psi$$

для оператора (12) являются функции

$$\psi = e^x(C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3).$$

Решим приведенную выше систему (20) для первой, второй, третьей степени многочлена из (13).

В случае первой степени обнуляем все коэффициенты, начиная с  $C_2$ , тогда система (20) примет вид:

$$\begin{cases} a(1)(C_0 + C_1) = 0, \\ (3+a)C_0 + [a(2) - a(1)]C_1 = 0, \\ (6+a)C_1 = 0. \end{cases}$$

Эта система разбивается на две:

$$\begin{cases} a(1) = 0, \\ (3+a)C_0 + [a(2) - a(1)]C_1 = 0, \\ (6+a)C_1 = 0, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} C_0 + C_1 = 0, \\ (3+a)C_0 + [a(2) - a(1)]C_1 = 0, \\ (6+a)C_1 = 0, \end{cases}$$

решая которые, получаем: (1)  $b_1 = -6$ ,  $b_2 = 5$ ,  $C_1 = -\frac{1}{2}C_0$  и собственная функция для оператора  $A$ :  $\psi_1 = e^x(C_0 - \frac{1}{2}C_0x)$ . Или

$$(2) \quad b_1 = -6, \quad b_2 = 8, \quad C_1 = -C_0; \quad \psi_1 = e^x(C_0 - C_0x).$$

Аналогично, в случае второй степени, обнуляем все коэффициенты, начиная с  $C_3$ , а в случае третьей степени  $-C_i = 0$ ,  $i = 4, 5 \dots$

Соответственно решения:

$$(3) \quad b_1 = -9, \quad b_2 = 8, \quad C_1 = -\frac{3}{5}C_0, C_2 = \frac{C_0}{10}; \quad \psi_1 = e^x \left( C_0 - \frac{3}{5}C_0x + \frac{1}{10}C_0x^2 \right),$$

$$(4) \quad b_1 = -9, \quad b_2 = 20, \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{1}{2}C_0; \quad \psi_1 = e^x \left( C_0 - C_0x + \frac{1}{2}C_0x^2 \right),$$

$$(5) \quad b_1 = -9, \quad b_2 = 14 \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{1}{4}C_0; \quad \psi_1 = e^x \left( C_0 - C_0x + \frac{1}{4}C_0x^2 \right),$$

$$(6) \quad b_1 = -12, b_2 = 11, C_1 = -\frac{13}{20}C_0, C_2 = \frac{3}{20}C_0, C_3 = -\frac{1}{80}C_0x^3,$$

$$\psi_1 = e^x \left( C_0 - \frac{13}{20}C_0x + \frac{3}{20}C_0x^2 - \frac{1}{80}C_0x^3 \right),$$

$$(7) \quad b_1 = -12, \quad b_2 = 35, \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{C_0}{2}, C_3 = -\frac{C_0}{8};$$

$$\psi_1 = e^x \left( C_0 - C_0x + \frac{C_0}{2}x^2 - \frac{1}{8}C_0x^3 \right),$$

$$(8) \quad b_1 = -12, \quad b_2 = 32, \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{C_0}{2}, C_3 = -\frac{C_0}{10};$$

$$\psi_1 = e^x \left( C_0 - C_0x + \frac{C_0}{2}x^2 - \frac{1}{10}C_0x^3 \right),$$

$$(9) \quad b_1 = -12, \quad b_2 = 20, \quad C_1 = -C_0, C_2 = \frac{9C_0}{28}, C_3 = -\frac{C_0}{28};$$

$$\psi_1 = e^x \left( C_0 - C_0x + \frac{9C_0}{28}x^2 - \frac{1}{28}C_0x^3 \right).$$

Для того чтобы построить два других решения, мы будем рассматривать правый оператор преобразования Дарбу  $R$ , связывающий оператор  $A$  вида (1) и оператор  $A_0 = (e^t D_t)^3 = D_x^3$  из Примера 1. В работе [1] показано, что такой оператор существует, если выполнено условие (9). Непосредственно можно проверить, что это условие выполнено для указанных выше случаев (1)–(9).

При этом

$$AR = RA_0 \Rightarrow A\psi = \psi \quad \text{при} \quad \psi = R\hat{\psi},$$

и оператор  $R$  переводит собственные функции оператора  $A_0$  в собственные функции оператора  $A$ . Например, для оператора  $A = e^{3t}D_t(D_t + 1)(D_t + 5)$ :

$$\psi_2 = R\widehat{\psi}_2 = (D_t + 2)e^{\alpha x} = (-xD_x + 2)e^{\alpha x} = e^{\alpha x}(2 - x\alpha)$$

и

$$\psi_3 = R\widehat{\psi}_3 = (-xD_x + 2)e^{\beta x} = e^{\beta x}(2 - x\beta).$$

Аналогично находятся собственные функции для каждого из случаев (1)–(9).

Приведенные выше формулы для  $\psi_1$  позволяют найти явный вид оператора  $R$  (ср. [1]) для каждого из случаев (1)–(9). Например: найдем оператор  $R = (D_t + \gamma_1)(D_t + \gamma_2)$  по собственной функции (3), переписав  $R$  в терминах  $x$ :  $R = (-xD_x + \gamma_1)(-xD_x + \gamma_2) = x^2D_x + (1 - \gamma_1 - \gamma_2)xD_x + \gamma_1\gamma_2$ ,

$$Re^x = e^x(x^2 + (1 - \gamma_1 - \gamma_2)x + \gamma_1\gamma_2) = e^x(10 - 6x + x^2) = \psi_1,$$

откуда

$$\begin{cases} 1 - \gamma_1 - \gamma_2 = -6, \\ \gamma_1\gamma_2 = 10, \end{cases}$$

или  $\gamma_1 = 2, \gamma_2 = 5$  и  $R = (D_t + 2)(D_t + 5)$ .

В следующей таблице приведены операторы  $A$  и соответствующие им операторы преобразования  $R$ :

| №   | $A$                            | $R$                           |
|-----|--------------------------------|-------------------------------|
| (1) | $e^{3t}D_t(D_t + 1)(D_t + 5)$  | $D_t + 2$                     |
| (2) | $e^{3t}D_t(D_t + 2)(D_t + 4)$  | $D_t + 1$                     |
| (3) | $e^{3t}D_t(D_t + 1)(D_t + 8)$  | $(D_t + 2)(D_t + 5)$          |
| (4) | $e^{3t}D_t(D_t + 4)(D_t + 5)$  | $(D_t + 1)(D_t + 2)$          |
| (5) | $e^{3t}D_t(D_t + 2)(D_t + 7)$  | $(D_t + 1)(D_t + 4)$          |
| (6) | $e^{3t}D_t(D_t + 1)(D_t + 11)$ | $(D_t + 2)(D_t + 5)(D_t + 8)$ |
| (7) | $e^{3t}D_t(D_t + 5)(D_t + 7)$  | $(D_t + 1)(D_t + 2)(D_t + 4)$ |
| (8) | $e^{3t}D_t(D_t + 4)(D_t + 8)$  | $(D_t + 1)(D_t + 2)(D_t + 5)$ |
| (9) | $e^{3t}D_t(D_t + 2)(D_t + 10)$ | $(D_t + 1)(D_t + 4)(D_t + 7)$ |

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабат А.Б., Эльканова З.С. и Урусова А.Б. *Двусторонние преобразования Дарбу* // Теоретическая математическая физика. Уфа. Т. 173, № 2. 2012. С. 207–218.
2. Ильяшенко Ю.С., Яковенко С.Ю. *Аналитическая теория дифференциальных уравнений* Москва. 2013.
3. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* Харьков: НТИУ. 1939. 719 с.
4. Байчорова Ф.Х., Эльканова З.С. *Коммутирующие дифференциальные операторы порядков 4 и 6* // Уфимский математический журнал. Т 5. № 3. 2013. С. 12–20.
5. M. Saito, B. Sturmfels, N. Takayama *Groebner Deformations of Hypergeometric Differential Equations* Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg. 2000.

Фатима Хасановна Байчорова,  
 Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева,  
 ул. Ленина, 29,  
 369202, г. Карачаевск, КЧР, Россия  
 E-mail: fatima-kchgu@yandex.ru