ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 91-104.

УДК 517.5

ОРТОПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ РАЗЛОЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМ ЯДРОМ

В.В. НАПАЛКОВ (МЛ.)

Аннотация. В работе изучаются системы разложения, подобные ортогональным (ортоподобные системы), в гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром. Установлена эквивалентность двух определений ортоподобной системы. Указана связь ортоподобных систем с задачей об описании сопряженного пространства к некоторому гильбертову пространству в терминах специальной системы функций.

Ключевые слова: пространство Бергмана, гильбертовы пространства, воспроизводящее ядро, гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, теорема Пэли-Винера.

Mathematics Subject Classification: 30H20, 30E10, 30E20, 32A26, 46E22, 47B32

Системы разложения, подобные ортогональным (ортоподобные системы разложения) в гильбертовом пространстве, были введены Т.П. Лукашенко в работе [1] и находят применение, например, в вейвлет-анализе. В этой работе мы изучаем ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром. Необходимость исследования случая пространств с воспроизводящим ядром мотивирована задачами комплексного анализа.

Определение 1 (см., например, [3]). *Пусть H гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, состоящее из функций, заданных на некотором множестве точек M. H называется гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром, если для любой точки $z_0 \in M$ функционал*

$$\delta_{z_0} : H \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \delta_{z_0} f \longrightarrow f(z_0),\ f \in H$$

является линейным и непрерывным функционалом над H.

По теореме Рисса-Фишера линейный и непрерывный функционал над гильбертовым пространством H порождается некоторым элементом из H. Равенство

$$f(\xi) = \delta_\xi f = (f(z), K_H(z,\xi))_H, \quad \xi \in M \tag{1}$$

определяет воспроизводящее ядро пространства H, как функцию $K_H(z,\xi)$ от двух переменных $z, \xi \in M$. Основные свойства гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром изложены, например, в [3]. Наиболее важным фактом теории пространств с воспроизводящим ядром является следующая теорема Мура-Ароншайна (см., например, [5]).

Замечание *Мы предполагаем для определенности, что H – гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Для гильбертовых пространств над полем вещественных чисел все сказанное ниже также верно с соответствующими изменениями.*

Теорема A. *Пусть M – произвольное множество точек, и $K(z,\xi) : M \times M \to \mathbb{C}$ комплекснозначная функция. Для того чтобы эта функция была воспроизводящим ядром некоторого гильбертова пространства H, состоящего из комплекснозначных функций,*

V.V. Napalkov(Jr.), Orthosimilar expansion systems in space with reproducing kernel.

Поступила 19 июня 2013г.

заданных на множестве M, необходимо и достаточно, чтобы для любого конечного набора точек $z_1, z_2, \dots, z_n \in M$ и для любого конечного набора комплексных чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$ выполнялось условие:

$$\sum_{l,m=1}^{n} c_l \cdot \overline{c_m} \cdot K(z_l, z_m) \geq 0.$$

При этом H – это единственное пространство с воспроизводящим ядром, имеющее в качестве ядра функцию $K(z,\xi)$.

В работах Т.П. Лукашенко [1], [2] приводится следующее определение ортоподобной системы разложения.

Замечание. *В определении ортоподобной системы разложения используется понятие интеграла Лебега со значениями в гильбертовом пространстве. Теория таких интегралов изложена в* [4]. *Чтобы различать случай, когда интеграл понимается как обычный интеграл Лебега, мы вводим следующее обозначение: знак $\int_\Omega^{(H)}$ означает интеграл от функции со значениями в гильбертовом пространстве H (см. ниже).*

Определение 2. *(см.* [1]*) Пусть H – гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, а Ω – пространство со счетно-аддитивной мерой μ. Система элементов $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется ортоподобной (подобной ортогональной) системой разложения в H с мерой μ, если любой элемент $y \in H$ представляется в виде:*

$$y = \int_\Omega^{(H)} (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega),$$

где интеграл понимается как собственный или несобственный интеграл Лебега от функции со значениями в H, причем в последнем случае есть такое исчерпание $\{\Omega_k\}_{k=1}^\infty$ пространства Ω (все Ω_k измеримы по мере μ, $\Omega_k \subset \Omega_{k+1}$ для $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{k=1}^\infty \Omega_K = \Omega$, быть может, зависящее от y и называемое подходящим для y, что функция $(y, e_\omega)_H \cdot e_\omega$ интегрируема по Лебегу на Ω_k и

$$y = \int_\Omega^{(H)} (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega) = \lim_{k\to\infty} (L) \int_{\Omega_k}^{(H)} (y, e_\omega)_H e_\omega \, d\mu(\omega).$$

В этой работе мы рассматриваем счетно-конечное пространство Ω с некоторой счетно-аддитивной мерой μ. Если мера μ неотрицательна, то ортоподобная система $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется неотрицательной.

Определение 3. *Пространство Ω с мерой μ называется счетно-конечным, если Ω представляется в виде счетного объединения подмножеств $\Omega_k \subset \Omega$: $\bigcup_{k\geq 1} \Omega_k = \Omega$, $k = 1, 2, \dots$, при этом $\mu(\Omega_k) < \infty$ для любого k.*

В этой работе мы используем теорему, доказанную Т.П. Лукашенко в работе [1].

Теорема B. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, пространство Ω со счетно-аддитивной мерой μ счетно-конечно, $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ – система элементов из H, и для каждого элемента $y \in H$ выполняется равенство Парсеваля*

$$\|y\|_H^2 = \int_\Omega |(y, e_\omega)_H|^2 \, d\mu(\omega).$$

Тогда $\{e_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ – ортоподобная система разложения в H (в смысле определения 2).

Мы докажем, что если H сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром над полем $\mathbb{C}$, состоящее из функций $f(z)$, $z \in M$, где M некоторое множество, то можно дать следующее эквивалентное исходному определение ортоподобной системы разложения:

Определение 4. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром над полем $\mathbb{C}$, а Ω – пространство со счетно-аддитивной мерой μ (см.* [4]*, с.109–116). Система элементов $\{e_\omega(z), z \in M\}_{\omega\in\Omega}$ называется ортоподобной*

(подобной ортогональной) системой разложения в H с мерой μ, если любая функция $f \in H$ представляется в виде:

$$f(z) = \int_\Omega (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega),\ z \in M.$$

Последнее равенство понимается "поточечно"при любом $z \in M$, а интеграл понимается как обычный интеграл Лебега.

Как отмечено в работе [2], функция $f_\omega = (f(\tau), e_\omega(z))_H$ от переменной $\omega \in \Omega$ не обязана быть μ-измеримой. В связи с этим в работе [2] введено понятие измеримой ортоподобной системы разложения.

Определение 5. *Пусть в гильбертовом пространстве H имеется ортоподобная (в смысле определения 2) система разложения $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ с мерой μ. Эта система называется измеримой, если для любого $f \in H$ функция $f_e(\omega) \overset{def}{=} (f(z), e_\omega(z))_H$ μ-измерима на Ω.*

Как доказывается в работе [2], для любой рассматриваемой нами ортоподобной системы разложения $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ существует функция $\theta(\omega)$, $|\theta(\omega)| = 1$ такая, что система $\{\theta(\omega) \cdot e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ является измеримой.

Теорема C ([2]). *Если $\{e_\omega\} \subset H$ неотрицательная ортоподобная система разложения в H, а пространство с мерой Ω счетно-конечно, то существует такая функция $\theta(\omega)$ со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, над каким полем рассматривается H, $|\theta(\omega)| = 1$ на Ω, что $\{\theta(\omega) \cdot e_\omega\}$ – измеримая ортоподобная система разложения в H.*

Пусть Ω –счетно-конечное пространство с неотрицательной счетно-аддитивной мерой μ. Рассмотрим систему функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ от переменной $\omega \in \Omega$. Без ограничения общности будем считать, что эта система обладает свойством: для любого $z \in M$ функция $e_\omega(z)$, $\omega \in \Omega$ μ-измерима на Ω. Если это не так, то существует комплекснозначная функция $\theta(\omega)$, $|\theta(\omega)| = 1$ такая, что все функции системы $\{\theta(\omega) \cdot e_\omega(z)\}_{z\in M}$ μ-измеримы (см. [2], стр. 60). Предположим также, что для любого $z \in M$

$$\int_\Omega |e_\omega(z)|^2\, d\mu(\omega) < \infty.$$

В силу неравенства Коши–Буняковского – Шварца любая конечная линейная комбинация элементов системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ суммируема с квадратом модуля на Ω по мере μ. Через $R(\Omega, \mu)$ обозначим пополнение относительно нормы

$$\|h\|_R \overset{def}{=} \sqrt{\int_\Omega |h(\omega)|^2\, d\mu(\omega)}$$

линейной оболочки системы функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$. $R(\Omega, \mu)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением:

$$(h, g)_R = \int_\Omega h(\omega) \cdot \overline{q(\omega)}\, d\mu(\omega).$$

По теореме Рисса-Фишера, любой линейный непрерывный функционал S над $R(\Omega, \mu)$ порождается некоторым элементом h по правилу:

$$S(f) = (f, h)_R, \quad f \in R(\Omega, \mu).$$

Каждому линейному непрерывному функционалу, порожденному функцией $h \in R(\Omega, \mu)$, поставим в соответствие функцию

$$\widehat{h}(z) \overset{def}{=} (e_\omega(z), h(\omega))_R = \int_\Omega \overline{h(\omega)} \cdot e_\omega(z)\, d\mu(\omega), \quad z \in M.$$

Будем называть эту функцию преобразованием функционала, порожденного функцией $h \in R(\Omega, \mu)$. Совокупность таких функций, образует гильбертово пространство

$$\widehat{R}(\Omega, \mu) \stackrel{def}{=} \{\widehat{h} : h \in R(\Omega, \mu)\}$$

со скалярным произведением

$$(\widehat{h}, \widehat{q})_{\widehat{R}} \stackrel{def}{=} (q, h)_R, \; \|\widehat{h}\|_{\widehat{R}} = \sqrt{(\widehat{h}, \widehat{h})_{\widehat{R}}} = \|h\|_R, \; h, q \in R(\Omega, \mu).$$

Заметим, что пространство $\widehat{R}(\Omega, \mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Действительно, любой элемент $\widehat{h} \in \widehat{R}(\Omega, \mu)$ представляется в виде:

$$\widehat{h}(z) = (e_\omega(z), h(\omega))_R, \quad z \in M.$$

Для произвольного $z_0 \in M$ справедлива оценка

$$|\widehat{h}(z_0)| = |(e_\omega(z_0), h(\omega))_R| \leq$$
$$\leq \|e_\omega(z_0)\|_R \|h\|_R = \|e_\omega(z_0)\|_R \|\widehat{h}\|_{\widehat{R}}.$$

Значит, для любого $z_0 \in M$ функционал $\widehat{h} \to \widehat{h}(z_0)$ является линейным непрерывным функционалом над пространством $\widehat{R}(\Omega, \mu)$, поэтому пространство $\widehat{R}(\Omega, \mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром.

1. Основной результат

Теорема 1. *Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром H над полем $\mathbb{C}$ имеется система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$, пространство Ω со счетно-аддитивной мерой μ счетно-конечно. Пусть при любом $z \in M$ функция $e_\omega(z)$ измерима по переменной $\omega \in \Omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ — ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 2, т.е любая функция f из H представляется в виде:*
$$f(z) = \int_\Omega^{(H)} (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega). \tag{2}$$
Здесь интеграл понимается, как интеграл от функции со значениями в гильбертовом пространстве ([4], глава III). Равенство понимается как равенство двух элементов гильбертова пространства.
2. *Система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 4, т.е. любая функция f из пространства H представляется в виде:*
$$f(z) = \int_\Omega (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega), \; z \in M. \tag{3}$$
Равенство (3) понимается "поточечно"при любом фиксированном $z \in M$, интеграл понимается как обычный интеграл Лебега.
3. *Система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ принадлежит пространству H. Воспроизводящее ядро пространства H имеет вид:*
$$K_H(z, \xi) = \int_\Omega e_\omega(z) \cdot \overline{e_\omega(\xi)}\, d\mu(\omega), \quad z, \xi \in M. \tag{4}$$
Интеграл здесь понимается как обычный интеграл Лебега. Равенство понимается "поточечно".
4. *Пространство H совпадает с пространством $\widehat{R}(\Omega, \mu)$. Пространства H и $\widehat{R}(\Omega, \mu)$ состоят из одних и тех же элементов, и для любых функций $h, r \in H$ выполнено равенство*
$$(h, r)_H = (h, r)_{\widehat{R}}.$$

Доказательство. Докажем, что из условия 1 вытекает условие 2.

Пусть система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ — ортоподобная система разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 2. Воспользуемся следующей теоремой, являющейся частным случаем доказанной в книге [4], стр. 128 теоремы:

Теорема D. *Пусть H – гильбертово пространство и Ω – пространство с мерой μ. Пусть S – линейный непрерывный оператор, отображающий H в другое гильбертово пространство Y. Если функция $f : \Omega \to H$ со значениями в гильбертовом пространстве μ -интегрируема в смысле ([4], глава III), то функция $Sf : \Omega \to Y$ также μ – интегрируема и*

$$\int_\Omega Sf(\omega)\, d\mu(\omega) = S\int_\Omega f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Пусть z_0 произвольная фиксированная точка, принадлежащая множеству M. Применим эту теорему. В качестве оператора S возьмем дельта-функционал, действующий из пространства H в пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$.

$$\delta_{z_0} : f \longrightarrow f(z_0).$$

Получим равенство

$$f(z_0) = \delta_{z_0} f(z) = \delta_{z_0} \int_\Omega^{(H)} (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega) =$$
$$= \int_\Omega (f(\tau), e_\omega(\tau))_H \delta_{z_0} e_\omega(z)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega (f(\tau), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z_0)\, d\mu(\omega).$$

Левая и правая части этого равенства суть комплексные числа. Интеграл понимается как обычный интеграл Лебега со значениями в $\mathbb{C}$. Поскольку точка $z_0 \in M$ произвольная, то система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ — ортоподобная система разложения в смысле определения 4. Таким образом доказано, что из условия 1 вытекает условие 2.

Покажем, что из условия 2 вытекает условие 3.

Очевидно, что система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega} \subset H$ принадлежит пространству H. Поскольку при фиксированном параметре $\xi \in M$ функция $K_H(z,\xi)$, $z \in M$ принадлежит пространству H, то мы можем подставить эту функцию в равенство (3), и получить

$$K_H(z,\xi) = \int_\Omega (K_H(\tau,\xi), e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\, d\mu(\omega) =$$
$$= \int_\Omega \overline{(e_\omega(\tau), K_H(\tau,\xi))_H} e_\omega(z)\, d\mu(\omega) = \int_\Omega e_\omega(z)\cdot\overline{e_\omega(\xi)}\, d\mu(\omega),\ z,\xi \in M. \tag{5}$$

Равенство в (5) понимается "поточечно". Интеграл понимается как обычный интеграл Лебега. Таким образом, из условия 2 следует условие 3.

Покажем, что из условия 3 теоремы 1 следует условие 4. Сначала докажем, что если выполняется условие 3, то пространство $R(\Omega,\mu)$ (определение см. выше) является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. В равенстве (4) положим $\xi = z$. Получим

$$K_H(z,z) = \int_\Omega |e_\omega(z)|^2\, d\mu(\omega) < \infty,\ z \in M.$$

Таким образом, все функции из системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ μ-измеримы и интегрируемы с квадратом модуля по мере μ на Ω. В силу известного неравенства Коши-Буняковского-Шварца любая конечная линейная комбинация функций системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ также является измеримой, интегрируемой с квадратом модуля по мере μ на Ω функцией. Как описано выше, пространство $R(\Omega,\mu)$ является пополнением по норме

$$\|h\|_R = \sqrt{\int_\Omega |h(\omega)|^2\, d\mu(\omega)}$$

линейной оболочки системы функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$.

По условию 3 система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ принадлежит пространству H. Обозначим через Q пополнение по норме пространства H линейной оболочки системы функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$. Таким образом, Q замкнутое подпространство пространства H. Если $g \in Q$, то $\|g\|_Q = \|g\|_H$. Поскольку H гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, то и Q гильбертово пространство с воспроизводящим ядром. Действительно, если $g \in Q$, $z \in M$, то $g \in H$

$$\begin{aligned}|g(z)| = |(g(\tau), K_H(\tau, z))_H| \le \|K_H(\tau, z)\|_H \cdot \|g\|_H = \\ = \|K_H(\tau, z)\|_H \cdot \|g\|_Q, \quad z \in M.\end{aligned} \tag{6}$$

Поэтому пространство Q есть гильбертово пространство с воспроизводящим ядром.

В пространстве Q очевидно полна система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$. Каждому линейному непрерывному функционалу над Q, порождаемому функцией $g \in Q$, поставим в соответствие функцию

$$\widetilde{g}(\omega) = (e_\omega(z), g(z))_Q.$$

Совокупность таких функций образует гильбертово пространство

$$\widetilde{Q} \stackrel{def}{=} \{\widetilde{g} : g \in Q\}$$

со скалярным произведением

$$(\widetilde{g}, \widetilde{u})_{\widetilde{Q}} \stackrel{def}{=} (u, g)_Q, \ \|\widetilde{g}\|^2_{\widetilde{Q}} = (\widetilde{g}, \widetilde{g})_{\widetilde{Q}} = \|g\|^2_Q, \quad g, u \in Q. \tag{7}$$

Покажем, что $\widetilde{Q}$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Действительно, возьмем произвольную точку $\omega_0 \in \Omega$. Справедлива оценка

$$|\widetilde{g}(\omega_0)| = |(e_{\omega_0}(z), g(z))_Q| \le \|e_{\omega_0}(z)\|_Q \cdot \|g\|_Q = \|e_{\omega_0}(z)\|_Q \cdot \|\widetilde{g}\|_{\widetilde{Q}}.$$

Поэтому $\widetilde{Q}$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Поскольку для любого $z_0 \in M$

$$e_\omega(z_0) = (e_\omega(z), K_Q(z, z_0))_Q, \tag{8}$$

то функция $e_\omega(z_0)$, $\omega \in \Omega$, а также любая конечная линейная комбинация элементов системы функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ от переменной $\omega \in \Omega$ принадлежат пространству $\widetilde{Q}$.

Лемма 1. *Пространство $R(\Omega, \mu)$ совпадает с пространством $\widetilde{Q}$ и представляет собой гильбертово пространство с воспроизводящим ядром.*

Доказательство. Система функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ принадлежит пространству $\widetilde{Q}$ и полна в нем. Эта же система функций $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ принадлежит пространству $R(\Omega, \mu)$ и полна в нем. Поэтому достаточно доказать, что в пространстве $\widetilde{Q}$ норма имеет интегральный вид:

$$\|f\|_{\widetilde{Q}} = \sqrt{\int_\Omega |f(\omega)|^2 \, d\mu(\omega)}, \quad f \in \widetilde{Q}.$$

В наших обозначениях

$$\widetilde{K_Q(\cdot, z)}(\omega) = (e_\omega(\eta), K(\eta, z))_Q = e_\omega(z), \quad z \in M.$$

Заметим, что для любой $g \in Q$

$$\begin{aligned}g(z) = (g(\eta), K_Q(\eta, z))_Q = (\widetilde{K_Q(\cdot, z)}(\omega), \widetilde{g}(\omega))_{\widetilde{Q}} = \\ = (e_\omega(z), \widetilde{g}(\omega))_{\widetilde{Q}}, \quad z \in M.\end{aligned} \tag{9}$$

Система воспроизводящих ядер $\{K_Q(z, w)\}_{w\in M}$ полна в пространстве Q (см. [3]). Любой элемент $f \in Q$ можно приблизить по норме пространства Q конечными линейными комбинациями элементов системы $\{K_Q(z, w)\}_{w\in M}$: существует последовательность функций

$$p_n(z) \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{k_n} a_{j,n} K_Q(z, w_{j,n}), n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $\{a_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{N}}$ – последовательность комплексных чисел, а $\{w_{j,n}\}_{j,n\in\mathbb{N}}$ – последовательность точек из M, обладающая свойством:

$$\|f(z)-p_n(z)\|_Q \to 0,\ n\to\infty. \tag{11}$$

Заметим, что в силу равенства (8), выполнено

$$\widetilde{p}_n(\omega)=(e_\omega(z),p_n(z))_Q=$$
$$=\left(e_\omega(z),\sum_{j=1}^{k_n}a_{j,n}K_Q(z,w_{j,n})\right)_Q=\sum_{j=1}^{k_n}\overline{a_{j,n}}(e_\omega(z),K_Q(z,w_{j,n}))_Q=$$
$$=\sum_{j=1}^{k_n}\overline{a_{j,n}}e_\omega(w_{j,n}). \tag{12}$$

Таким образом, функция $\widetilde{p}_n(\omega)$, $n=1,2,\dots$ представляет собой конечную линейную комбинацию элементов системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$. Очевидное равенство

$$\|\widetilde{f}(\omega)-\widetilde{p}_n(\omega)\|_{\widetilde{Q}}=\|f(z)-p_n(z)\|_Q$$

показывает, что система $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ полна в пространстве $\widetilde{Q}$. Заметим, что из равенства (4) вытекает

$$K_Q(z,\xi_0)=\int_\Omega\overline{e_\omega(\xi_0)}e_\omega(z)\,d\mu(\omega)=$$
$$=\int_\Omega(K_Q(\tau,\xi_0),e_\omega(\tau))_Q e_\omega(z)\,d\mu(\omega). \tag{13}$$

Докажем по индукции, что для любой функции вида

$$r_n(z)\stackrel{def}{=}\sum_{j=1}^{n}a_jK_Q(z,\xi_j),\quad z\in M,\ \{\xi_j\}_{j=1}^n\in M$$

справедливо равенство

$$r_n(z)=\int_\Omega(r_n(\tau),e_\omega(\tau))_Q e_\omega(z)\,d\mu(\omega). \tag{14}$$

Для $n=1$ это вытекает из (13) и линейности по первому аргументу скалярного произведения. Пусть равенство (14) справедливо для $n=n_0$. Покажем, что равенство (14) справедливо для $n=n_0+1$. Легко видеть, что

$$r_{n_0+1}(z)=r_{n_0}(z)+a_{n_0+1}K_Q(z,\xi_{n_0+1}).$$

Тогда справедливо равенство

$$r_{n_0+1}(z)=r_{n_0}(z)+a_{n_0+1}K_Q(z,\xi_{n_0+1})=$$
$$=\int_\Omega(r_{n_0}(\tau),e_\omega(\tau))_Q e_\omega(z)\,d\mu(\omega)+a_{n_0+1}\int_\Omega(K_Q(\tau,\xi_{n_0+1}),e_\omega(\tau))_Q e_\omega(z)\,d\mu(\omega)=$$
$$=\int_\Omega(r_{n_0}(\tau),e_\omega(\tau))_Q e_\omega(z)\,d\mu(\omega)+\int_\Omega(a_{n_0+1}K_Q(\tau,\xi_{n_0+1}),e_\omega(\tau))_H e_\omega(z)\,d\mu(\omega)=$$
$$=\int_\Omega(r_{n_0}(\tau)+a_{n_0+1}K_Q(\tau,\xi_{n_0+1}),e_\omega(\tau))_Q e_\omega(z)\,d\mu(\omega)=$$
$$=\int_\Omega(r_{n_0+1}(\tau),e_\omega(\tau))_Q e_\omega(z)\,d\mu(\omega). \tag{15}$$

Таким образом, мы доказали, что равенство (14) справедливо, следовательно для любой функции $p_n(z)$ (см. (10)) справедливо представление:

$$p_n(z)=\int_\Omega(p_n(\tau),e_\omega(\tau))_Q e_\omega(z)\,d\mu(\omega). \tag{16}$$

Из равенства (15) следует, что для любого $\xi_0 \in M$ справедливо равенство

$$(p_n(\eta), K_Q(\eta, \xi_0))_Q = \int_\Omega (p_n(\tau), e_\omega(\tau))_Q (e_\omega(\eta), K_Q(\eta, \xi_0))_Q \, d\mu(\omega). \tag{17}$$

Так как функция $p_n(z)$ является конечной линейной комбинацией элементов системы $\{K_Q(z, \xi)\}_{\xi \in M}$, то из (17), используя линейность интеграла и скалярного произведения, нетрудно показать, что

$$\|p_n\|_Q^2 = (p_n(z), p_n(z))_Q = \int_\Omega (p_n(z), e_\omega(z))_Q (e_\omega(z), p_n(z))_Q \, d\mu(\omega). \tag{18}$$

Как было отмечено выше (см. (12)),

$$\widetilde{p}_n(\omega) = (e_\omega(z), p_n(z))_Q.$$

При этом $\|\widetilde{p}_n\|_{\widetilde{Q}} = \|p_n\|_Q$. Поэтому из (18) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\widetilde{p}_n\|_{\widetilde{Q}}^2 = \|p_n\|_Q^2 = \int_\Omega (p_n(z), e_\omega(z))_Q (e_\omega(z), p_n(z))_Q \, d\mu(\omega) = \\ = \int_\Omega \widetilde{p}_n(\omega) \cdot \overline{\widetilde{p}_n(\omega)} \, d\mu(\omega) = \int_\Omega |\widetilde{p}_n(\omega)|^2 \, d\mu(\omega). \end{aligned} \tag{19}$$

Воспользуемся теоремой Фату (см., например, [6], стр. 305).

Теорема E. *Если последовательность измеримых неотрицательных функций $\{y_n\}$ сходится почти всюду на Ω к функции y и*

$$\int_\Omega y_n(\omega) \, d\mu(\omega) \le K,$$

где K — некоторая постоянная, то y интегрируема на Ω и

$$\int_\Omega y(\omega) \, d\mu(\omega) \le K.$$

Применим эту теорему. Положим $y_n(\omega) = |\widetilde{p}_n(\omega)|^2$. Последовательность функций $\{|\widetilde{p}_n(\omega)|^2\}_{n \ge 0}$ сходится поточечно всюду на Ω к функции $y(\omega) = |\widetilde{f}(\omega)|^2$. Действительно, последовательность функций $\{p_n\}_{n \ge 0}$ сходится по норме пространства Q к функции f (см. (11)), поэтому для любого $\omega_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned} ||\widetilde{p}_n(\omega_0)| - |\widetilde{f}(\omega_0)|| \le |\widetilde{p}_n(\omega_0) - \widetilde{f}(\omega_0)| = |(e_{\omega_0}(z), p_n(z) - f(z))_Q| \le \\ \le \|e_{\omega_0}(z)\|_Q \cdot \|p_n(z) - f(z)\|_Q \longrightarrow 0, \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

Функция $u = x^2$, $x \ge 0$ непрерывна, поэтому из (20) вытекает, что

$$||\widetilde{p}_n(\omega_0)|^2 - |\widetilde{f}(\omega_0)|^2| \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Так как

$$\|\widetilde{p}_n\|_{\widetilde{Q}}^2 \to \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{Q}}^2, \; n \to \infty, \tag{21}$$

то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\int_\Omega |\widetilde{p}_n(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) = \|\widetilde{p}_n\|_{\widetilde{Q}}^2 \le \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{Q}}^2 + \varepsilon, \; n = 1, 2, \ldots.$$

По теореме Фату функция $|\widetilde{f}(\omega)|^2$ интегрируема на Ω по мере μ и справедливо неравенство

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(\omega)|^2 \, d\mu(\omega) \le \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{Q}}^2 + \varepsilon. \tag{22}$$

Рассмотрим последовательность $\{p_n\}_{n=N}^{\infty}$, где N — некоторое натуральное число. В силу (21), за счет увеличения N, число $\varepsilon > 0$ можно сделать сколь угодно малым. В неравенстве (22) левая часть не зависит от ε. Поэтому

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(\omega)|^2\, d\mu(\omega) \le \|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{Q}}, \quad \widetilde{f} \in \widetilde{Q}. \tag{23}$$

Докажем, что

$$\int_\Omega |\widetilde{f}(\omega)|^2\, d\mu(\omega) = \|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{Q}}, \quad \widetilde{f} \in \widetilde{Q}. \tag{24}$$

Рассмотрим две функции

$$u : \widetilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u(\widetilde{f}) = \|\widetilde{f}\|_{\widetilde{Q}}, \tag{25}$$

$$v : \widetilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v(\widetilde{f}) = \sqrt{\int_\Omega |\widetilde{f}(\omega)|^2\, d\mu(\omega)}. \tag{26}$$

В силу неравенства треугольника выполняется неравенство

$$u(\widetilde{f}) \le u(\widetilde{f} - \widetilde{g}) + u(\widetilde{g}), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{Q},$$

откуда следует, что

$$|u(\widetilde{f}) - u(\widetilde{g})| \le u(\widetilde{f} - \widetilde{g}), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in Q.$$

Поэтому функция $u : \widetilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. В силу неравенства (23) функция v определена на $\widetilde{Q}$. В силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца

$$v(\widetilde{f}) \le v(\widetilde{f} - \widetilde{g}) + v(\widetilde{g}), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{Q},$$

поэтому, используя (23), получаем

$$|v(\widetilde{f}) - v(\widetilde{g})| \le v(\widetilde{f} - \widetilde{g}) \le u(\widetilde{f} - \widetilde{g}), \quad \widetilde{f}, \widetilde{g} \in \widetilde{Q}.$$

Таким образом, функция $v : \widetilde{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывна. Равенство (19) означает, что на всюду плотном подмножестве $\widetilde{Q}$ (линейной оболочке системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$) непрерывные функции u и v совпадают. Если последовательность $\{\widetilde{p}_n\}_{n\ge 0}$ конечных линейных комбинаций элементов системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ приближает некоторый элемент $\widetilde{f} \in \widetilde{Q}$, то

$$u(\widetilde{p}_n) = v(\widetilde{p}_n), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и, пользуясь непрерывностью функций u и v, мы получаем

$$u(\widetilde{f}) = v(\widetilde{f}), \quad \widetilde{f} \in \widetilde{Q}.$$

Таким образом, для любой $\widetilde{f} \in \widetilde{Q}$ выполнено равенство (24).

Как отмечалось выше, функции $\widetilde{p}_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$ представляют собой конечные линейные комбинации элементов системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$. Теперь заметим, что пространство $\widetilde{Q}$ можно рассматривать как пополнение линейной оболочки системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ относительно нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{Q}}$. Как указано выше, пространство $R(\Omega, \mu)$ есть пополнение линейной оболочки системы $\{e_\omega(z)\}_{z\in M}$ относительно нормы

$$\|h\|_{R(\Omega,\mu)} \stackrel{def}{=} \sqrt{\int_\Omega |h(\omega)|^2\, d\mu(\omega)}.$$

Поэтому пространства $\widetilde{Q}$ и $R(\Omega, \mu)$ совпадают. Следовательно, пространство $R(\Omega, \mu)$ есть пространство с воспроизводящим ядром. Лемма 1 доказана.

Справедлива теорема

Теорема 2. *Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из функций, заданных на счетно-конечном пространстве Ω с счетно-аддитивной мерой μ. Норма в пространстве H имеет интегральный вид:*

$$\|f\|_H = \sqrt{\int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi)} \tag{27}$$

тогда и только тогда, когда система функций $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 2.

Доказательство. **Необходимость**. Пусть система функций $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ в пространстве H в смысле определения 2. Это означает, что любая функция $f \in H$ представляется в виде:

$$f(z) = \int_\Omega^{(H)} (f(\tau), K_H(\tau,\xi))_H K_H(z,\xi) \, d\mu(\xi).$$

Тогда справедлив аналог равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения (теорема 1 работы [1]), т.е. для любой $f \in H$ выполнено равенство:

$$\|f\|_H^2 = \int_\Omega |(f(\tau), K_H(\tau,\xi))_H|^2 \, d\mu(\xi) = \int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi).$$

Значит выполнено равенство (27). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть норма в пространстве H имеет вид (27). Это значит, что

$$\|f\|_H^2 = \int_\Omega |f(\xi)|^2 \, d\mu(\xi) = \int_\Omega |(f(\tau), K_H(\tau,\xi))_H|^2 \, d\mu(\xi).$$

Таким образом, для системы функций $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in\Omega}$ выполнен аналог равенства Парсеваля ([1]). По теореме B (см. выше) система функций $\{K_H(\xi,t)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2. Теорема 2 доказана.

Норма в пространстве $R(\Omega,\mu)$ имеет интегральный вид; поскольку $R(\Omega,\mu)$ есть гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, то в силу теоремы 2, система воспроизводящих ядер $\{K_R(\omega,t)\}_{t\in\Omega}$ пространства $R(\Omega,\mu)$ является ортоподобной системой разложения в пространстве $R(\Omega,\mu)$ в смысле определения 2. Как мы уже доказали, отсюда следует, что система $\{K_R(\omega,t)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 4.

Лемма 2. *Предположим, что имеется пространство Ω с некоторой счетно-конечной мерой μ. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H, состоящем из функций, определенных на пространстве Ω, система воспроизводящих ядер $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 4, т.е. любой элемент f из пространства H может быть представлен в виде:*

$$f(z) = \int_\Omega (f(\tau), K_H(\tau,\xi))_H K_H(z,\xi) \, d\mu(\xi), \quad z \in \Omega.$$

Тогда система $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2, т.е любой элемент f из пространства H представляется в виде:

$$f(z) = \int_\Omega^{(H)} (f(\tau), K_H(\tau,\xi))_H K_H(z,\xi) \, d\mu(\xi).$$

Доказательство. Система воспроизводящих ядер $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ полна в пространстве H(см. [3]). Как это было сделано при доказательстве леммы 1, можно показать, что если $\{p_n(z)\}_{n\geq 0}$ – последовательность конечных линейных комбинаций элементов системы

$\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$, приближающая некоторый элемент $f\in H$, то

$$\|p_n\|_H^2=\int_\Omega (p_n(\tau),K_H(\tau,\xi))_H(K_H(\tau,\xi),p_n(\tau))_H\,d\mu(\xi)=$$
$$=\int_\Omega |p_n(\xi)|^2\,d\mu(\xi),\quad n=1,2,\ldots \tag{28}$$

Воспользуемся теоремой Фату (см. выше).

Положим $y_n(\xi)=|p_n(\xi)|^2$. Последовательность функций $\{|p_n(\xi)|^2\}_{n\geq 0}$ сходится поточечно всюду на Ω к функции $y(\xi)=|f(\xi)|^2$, причем

$$\int_\Omega |p_n(\xi)|^2\,d\mu(\xi)=\|p_n\|_H^2\leq \|f\|_H^2+\varepsilon,\ n=1,2,\ldots,$$

где ε — некоторое положительное число, не зависящее от n. По теореме Фату, функция $f(\xi)$ интегрируема на Ω по мере μ, и справедливо неравенство

$$\int_\Omega |f(\xi)|^2\,d\mu(\xi)\leq \|f\|_H^2+\varepsilon. \tag{29}$$

Рассматривая последовательность $\{p_n\}_{n\geq N}$ при N достаточно большом, число ε можно сделать сколь угодно малым. В неравенстве (29) левая часть не зависит от ε. Поэтому

$$\int_\Omega |f(\xi)|^2\,d\mu(\xi)\leq \|f\|_H^2,\quad f\in H. \tag{30}$$

Докажем, что

$$\int_\Omega |f(\xi)|^2\,d\mu(\xi)= \|f\|_H^2,\quad f\in H. \tag{31}$$

Рассмотрим две функции

$$u:H\longrightarrow\mathbb{R},\quad u(f)=\|f\|_H, \tag{32}$$

$$v:H\longrightarrow\mathbb{R},\quad v(f)=\sqrt{\int_\Omega |f(\xi)|^2\,d\mu(\xi)}. \tag{33}$$

В силу неравенства треугольника выполняется неравенство

$$u(f)\leq u(f-g)+u(g),\quad f,g\in H,$$

откуда следует, что

$$|u(f)-u(g)|\leq u(f-g),\quad f,g\in H.$$

Поэтому функция $u:H\longrightarrow\mathbb{R}$ непрерывна. В силу неравенства (30) функция v определена на H. В силу неравенства Коши– Буняковского–Шварца

$$v(f)\leq v(f-g)+v(g),\quad f,g\in H,$$

поэтому, используя (30),

$$|v(f)-v(g)|\leq v(f-g)\leq u(f-g),\quad f,g\in H.$$

Таким образом, функция $v:H\longrightarrow\mathbb{R}$ непрерывна. Равенство (28) означает, что на всюду плотном подмножестве H (линейной оболочке системы $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$) непрерывные функции u и v совпадают. Если последовательность p_n конечных линейных комбинаций системы $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ приближает некоторый элемент $f\in H$, то

$$u(p_n)=v(p_n),\quad n=1,2,\ldots,$$

и, пользуясь непрерывностью функций u и v, мы получаем

$$u(f)=v(f),\quad f\in H.$$

Таким образом, для любой $f \in H$ выполнено равенство (31). Равенство (31) означает, что выполнен аналог равенства Парсеваля для системы $\{K_H(z,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$:

$$\|f\|_H^2 = \int_\Omega |f(\xi)|^2\, d\mu(\xi) = \int_\Omega |(f(\tau), K_H(\tau,\xi))_H|^2\, d\mu(\xi),\ f \in H.$$

Так как мера μ счетно-конечна, то из последнего равенства по теореме B следует, что система воспроизводящих ядер ортоподобна в смысле определения 2, т.е. любой элемент представляется в виде:

$$f(z) = \int_\Omega^{(H)} (f(\tau), K_H(\tau,\xi))_H K_H(z,\xi)\, d\mu(\xi).$$

Лемма 2 доказана.

Рассмотрим пространство

$$\overline{R(\Omega,\mu)} \overset{def}{=} \{\overline{h}:\ h \in R(\Omega,\mu),\ (\overline{h},\overline{r})_{\overline{R}} \overset{def}{=} (r,h)_R\}.$$

Любая функция $h \in R(\Omega,\mu)$ может быть представлена в виде:

$$h(\omega) = \int_\Omega^{(R)} (h(\tau), K_R(\tau,t))_H K_R(\omega,t)\, d\mu(t). \tag{34}$$

Отсюда вытекает, что

$$h(\omega) = \int_\Omega (h(\tau), K_R(\tau,t))_H K_R(\omega,t)\, d\mu(t), \quad \omega \in \Omega. \tag{35}$$

Применим к обеим частям последнего равенства оператор комплексного сопряжения. Получим

$$\overline{h(\omega)} = \int_\Omega \overline{(h(\tau), K_R(\tau,t))_R K_R(\omega,t)}\, d\mu(t) =$$

$$= \int_\Omega (\overline{h(\tau)}, \overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}} \overline{K_R(\omega,t)}\, d\mu(t),\ \omega \in \Omega. \tag{36}$$

В силу леммы 2

$$\overline{h(\omega)} = \int_\Omega^{(\overline{R})} (\overline{h(\tau)}, \overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}} \overline{K_R(\omega,t)}\, d\mu(t). \tag{37}$$

Равенство (37) означает, что в пространстве $\overline{R(\Omega,\mu)}$ система функций $\{\overline{K_R(\omega,t)}\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2.

Оператор $\mathbb{T}$, действующий из пространства $\overline{R(\Omega,\mu)}$ в пространство $\widehat{R}(\Omega,\mu)$, по правилу

$$\mathbb{T} : \overline{h} \longrightarrow \widehat{h}(z) \overset{def}{=} \int_\Omega \overline{h(\omega)} \cdot e_\omega(z)\, d\mu(\omega),\ z \in M$$

является линейным и непрерывным оператором (см. выше определение пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$). К обеим частям равенства (37) применим оператор $\mathbb{T}$ и воспользуемся теоремой C. Получим

$$\widehat{h}(z) = \mathbb{T} \int_\Omega^{(\overline{R})} (\overline{h(\tau)}, \overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}} \overline{K_R(\omega,t)}\, d\mu(t) =$$

$$= \int_\Omega^{(\widehat{R})} (\overline{h(\tau)}, \overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}} \mathbb{T}\, \overline{K_R(\omega,t)}\, d\mu(t) =$$

$$= \int_\Omega^{(\widehat{R})} (\overline{h(\tau)}, \overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}} \widehat{K}_R(z,t)\, d\mu(t) =$$

$$= \int_\Omega^{(\widehat{R})} (\overline{h(\tau)}, \overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}} \cdot e_t(z)\, d\mu(t). \tag{38}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем фактом, что

$$\widehat{K}_R(z,t)=\int_\Omega \overline{K_R(\omega,t)}\cdot e_\omega(z)\,d\mu(\omega)=e_t(z),\ z\in M.$$

Заметим, что, как отмечалось выше (см. определение пространства $R(\Omega,\mu)$)

$$\begin{aligned}(\overline{h(\tau)},\overline{K_R(\tau,t)})_{\overline{R}}&=\overline{(h(\tau),K_R(\tau,t))_R}=\\&=(K_R(\tau,t),h(\tau))_R=(\widehat{h}(z),e_t(z))_{\widehat{R}}.\end{aligned}\tag{39}$$

Подставив соотношение (39) в равенство (38), получим

$$\widehat{h}(z)=\int_\Omega^{(\widehat{R})}(\widehat{h}(z),e_t(z))_{\widehat{R}}\cdot e_t(z)\,d\mu(t).\tag{40}$$

Последнее означает, что в пространстве $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ система функций $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2. Как отмечалось выше (см. определение пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$), пространство $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром.

Вычислим воспроизводящее ядро пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$.

Для этого в равенство (40) в качестве $\widehat{h}$ подставим элемент $K_{\widehat{R}}(z,\xi)$ при фиксированном $\xi\in M$. Отсюда, нетрудно показать, что воспроизводящее ядро пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ имеет вид:

$$K_{\widehat{R}}(z,\xi)=\int_\Omega e_\omega(z)\cdot\overline{e_\omega(\xi)}\,d\mu(\omega),\quad z,\xi\in M.$$

Но, с другой стороны, справедливо равенство (4):

$$K_H(z,\xi)=\int_\Omega e_t(z)\cdot\overline{e_t(\xi)}\,d\mu(t),\quad z,\xi\in M.$$

Отсюда, по теореме Мура-Ароншайна, пространство H совпадает с пространством $\widehat{R}(\Omega,\mu)$, т.е. эти пространства состоят из одних и тех же элементов, и выполняется равенство

$$(f,g)_H=(f,g)_{\widehat{R}},\quad f,g\in H.$$

Таким образом, из условия 3 вытекает условие 4 теоремы 1.

Пусть выполнено условие 4 теоремы 1, т.е. пространство H совпадает с пространством $\widehat{R}(\Omega,\mu)$. По построению в пространстве $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ — ортоподобная система разложения в смысле определения 2. Это означает, что в пространстве H система $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения в смысле определения 2, т.е. выполняется условие 1. Теорема 1 доказана.

2. Примеры

2.1. Весовое преобразование Гильберта в пространстве Бергмана. Пусть G — односвязная жорданова область в $\mathbb{C}$. В качестве системы $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ возьмем систему функций $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in G}$ определенных на множестве $M=\mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Здесь в качестве Ω берется область G; в области G имеется счетно конечная мера μ. Мера μ выбрана так, что пространство

$$B_2(G,\mu)\overset{def}{=}\{f\in H(G):\|f\|^2_{B_2}=\int_G|f(z)|^2\,d\mu(z)<\infty\},$$

состоящее из функций аналитических в области G, суммируемых с квадратом модуля по мере μ, является сепарабельным гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром, в котором система функций $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in G}$ полна. Пространство $\widetilde{B}_2(G,\mu)$ определяется как совокупность функций

$$\widetilde{f}(z) \stackrel{def}{=} (\tfrac{1}{(z-\xi)^2}, f(\xi))_{B_2(G,\mu)}, \quad f\in B_2(G,\mu).$$

со скалярным произведением

$$(\widetilde{f},\widetilde{g})_{\widetilde{B}_2(G,\mu)} \stackrel{def}{=} (g,f)_{B_2(G,\mu)}, \quad \widetilde{g},\widetilde{f}\in \widetilde{B}_2(G,\mu).$$

При этих условиях справедлива теорема 1.

В качестве пространства $R(\Omega,\mu)$ здесь выступает пространство $B_2(G,\mu)$. В качестве пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ берется пространство $\widetilde{B}_2(G,\mu)$. Ортоподобная система $\{\frac{1}{(z-\xi)^2}\}_{\xi\in G}$ и задача об описании сопряженного пространства к пространству $B_2(G,\mu)$ рассмотрены в работе [7].

2.2. Весовое преобразование Фурье – Лапласа в пространстве Бергмана. Пространством Ω здесь служит выпуклая область в комплексной плоскости G с некоторой мерой μ, удовлетворяющей условиям теоремы 1. В качестве системы $\{e_\omega(z)\}_{\omega\in\Omega}$ возьмем систему функций $\{e^{\xi z}\}_{\xi\in G}$, $M=\mathbb{C}$. В качестве пространства $R(\Omega,\mu)$ выступает пространство $B_2(G,\mu)$. В роли пространства $\widehat{R}(\Omega,\mu)$ выступает пространство $\widehat{B}_2(G,\mu)$, которое состоит из функций

$$\widehat{f}(z) = (e^{z\cdot\xi}, f(\xi))_{B_2} = \int_G \overline{f(\xi)}\cdot e^{z\cdot\xi}\,d\mu(\xi),\ z\in\mathbb{C}, \quad f\in B_2(G,\mu).$$

При этом

$$(\widehat{f},\widehat{h})_{\widehat{B}_2} \stackrel{def}{=} (h,f)_{B_2}, \quad \widehat{h},\widehat{f}\in \widehat{B}_2(G,\mu).$$

Тогда справедлива теорема 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукашенко Т.П. *О свойствах систем разложения подобных ортогональным* // Известия РАН, сер.матем. Т. 62, № 5. 1998. С. 187–206.
2. Лукашенко Т.П. *О коэффициентах систем разложения, подобных ортогональным* // Матем. сб. Т. 188, № 12. 1997. С. 57–72.
3. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the AMS V. 68. № 3. P. 337–404.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Общая теория.* М.: ИЛ. 1962. 896 с.
5. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu *Theory of Bergman spaces.* Springer-Verlag. New York. Inc. 2000. 289 p.
6. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука. 1976. 543 с.
7. Напалков В.В. (мл.) *Об ортоподобных системах разложения в пространстве аналитических функций и задаче описания сопряженного пространства* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 1. 2011. С.31–42.

Валерий Валентинович Напалков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: vnap@mail.ru