

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД НАЙСКОРЕЙШЕГО СПУСКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

И.И. ГОЛИЧЕВ

Аннотация. Вводится регуляризация системы Навье-Стокса, решение которой совпадает с решением системы Навье-Стокса, если последнее существует. Регуляризованная нелинейная система сводится к решению последовательности линеаризованных систем. Для решения последней системы используется градиентный метод. Построен и обоснован модифицированный метод наискорейшего спуска, который возможно применять при наличии ограничений на управление и неограниченности множества Лебега.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, градиентный метод, регуляризация, априорные оценки

Mathematics Subject Classification: 49M20, 35Q30, 93C05

1. ВВЕДЕНИЕ.

Рассмотрим начально-краевую задачу для обобщенной системы уравнений Навье-Стокса

$$\mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + v_i \mathbf{v}_{x_i} + \mathit{grad} p = \mathbf{f}(x, t), \quad (1)$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \quad (2)$$

$$\mathit{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

в области $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $S_T = S \times [0, T]$, S — граница области Ω , $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, $\mathbf{L}_2(Q_T) = \mathbf{G}(Q_T) \oplus \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$ — ортогональное разложение на градиентную и соленоидальную составляющие части пространства $\mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

$$\mathit{div} \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{a}|_S = 0. \quad (4)$$

Здесь и далее, в основном, применяются обозначения, используемые в работе [3]. Для однозначной определенности давления будем считать, что $\int_{\Omega} p(x, t) dx = 0$ почти всюду по t на $[0, T]$.

Как отмечалось в работе [1], основная трудность при изучении задач (1) – (3) связана с вопросом – имеет ли место однозначная разрешимость в "целом" (т.е. при любом $t \in [0, T]$) начально-краевой задачи (1), (2). Обоснование того, что она имеет решение "в целом" упирается в доказательство априорной оценки одной из норм $\|\mathbf{v}_x(x, t)\|_2$, $\|\mathbf{v}\|_{q,r,Q_T}$, где параметры q и r удовлетворяют определенным условиям. Наличие оценки на $\|\mathbf{v}\|_{q,r,Q_T}$ влечет существование оценки на $\|\mathbf{v}_x(x, t)\|_2$ и наоборот. Ввиду такого положения, в литературе (см., например, [1], [2] и ссылки в этих книгах) рассматриваются многочисленные

I.I. GOLICHEV, MODIFIED GRADIENT FASTEST DESCENT METHOD FOR SOLVING LINEARIZED NON-STATIONARY NAVIER-STOKES EQUATIONS.

© Голичев И.И. 2013.

Поступила 3 декабря 2013 г.

варианты регуляризации уравнений Навье-Стокса. Регуляризация, как правило, связана с введением в уравнение (1) дополнительных членов, содержащих малый параметр. При этом решение регуляризованной задачи должно стремиться к решению исходной задачи Навье-Стокса при $\varepsilon \rightarrow 0$, если это решение существует. При таком подходе возникает вопрос о физической обоснованности регуляризованной задачи, о выборе параметра ε и степени близости решений регуляризованной и исходной задачи.

Предлагаемый в работе [3] подход к решению задачи (1) – (3) также можно рассматривать как регуляризацию системы Навье-Стокса, состоящую в том, что в уравнении (1) в произведении $v_i \mathbf{v}_{x_i}$ почти всюду по t на $[0, T]$ \mathbf{v} заменяется его проекцией на шар $K_R(t) = \{\mathbf{v}(t) : \|\mathbf{v}_x(t)\| \leq R(t)\}$, где $R(t)$ – неубывающая, положительная функция. Здесь и далее $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)}$.

Проекция на шар K_R вычисляется по формуле $P_{K_R} \mathbf{v} = \alpha_R(t, \mathbf{v}) \mathbf{v}$, где $\alpha_R(t, \mathbf{v}(t)) = \min[1, R(t) / \|\mathbf{v}_x(t)\|]$. Таким образом, от уравнения (1) переходим к уравнению

$$\mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + \alpha_R(t, \mathbf{v}) v_i \mathbf{v}_{x_i} + \text{grad } p = \mathbf{f}. \quad (1)$$

Для решения регуляризованной задачи (1), (2), (3) строится итерационный процесс

$$(5)$$

$$\mathbf{v}^{k+1}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{v}^{k+1}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \quad (6)$$

$$\text{div } \mathbf{v}^{k+1} = 0, \quad (7)$$

где $\alpha_k = \alpha_k(t) = \alpha_R(t, \mathbf{v}^k)$.

Обозначим через \mathbf{V}_2 пространство $\mathbf{W}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbf{L}_\infty(0, T; \mathbf{W}_2^1(\Omega))$ с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{2,1}(Q)} + \text{vraimax}_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}_x\| \quad (8)$$

В работе [3] доказана следующая

Теорема 1. Пусть $\mathbf{f} \in \mathring{\mathbf{J}}(Q_T)$, Ω – ограниченная область с границей $S \in C^2$, $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяет условиям (4); тогда задача (1), (2), (3) имеет единственное решение \mathbf{v} , p с \mathbf{v}_{xx} , \mathbf{v}_t , p_x из $\mathbf{L}_2(Q_T)$, последовательности $\{\mathbf{v}^k\}_{k=0}^\infty$, $\{p^k\}_{k=1}^\infty$, определенные итерационным процессом (5) – (7), где $\alpha_k = \min[1, R(t) \|\mathbf{v}_x^k\|^{-1}]$, $R(t)$ – ограниченная, неубывающая функция, сходятся к решению задачи (1), (2), (3) при любом $\mathbf{v}^0 \in \mathbf{V}_2$ и справедливы оценки:

$$\|\mathbf{v}^k - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} \leq c(q) q^k \|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2}, \quad (9)$$

$$\|p_k - p\|_{\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_T)} \leq c(q) q^k \|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} \quad (10)$$

при любом $q \in (0, 1)$, где $c(q)$ ограничена на отрезке $[\alpha, 1]$ при любом $\alpha > 0$.

В работе [3] показано также, что утверждения теоремы 1 остаются в силе, если в нелинейном члене уравнения (1) $v_i \mathbf{v}_{x_i}$ вектор $\mathbf{v}(t)$ заменить его проекцией на шар $\{\mathbf{v}(t) \in \mathbf{L}_4(\Omega) : \|\mathbf{v}(t)\|_4 \leq R(t)\}$, или покоординатной проекцией вектора $\mathbf{v}(t)$ на отрезок $[R_1(t), R_2(t)]$, где $R_1(t), R_2(t)$ – ограниченные на интервале $[0, T]$ функции.

Замечание 1. Обратим внимание, что доказанная теорема гарантирует сходимость итерационного процесса (5) – (7) на любом интервале $[0, T]$, на котором $\mathbf{f} \in \mathring{\mathbf{J}}(Q_T)$, а также существование и единственность решения задачи (1), (2), (3).

Замечание 2. Если на интервале $[0, T_1]$ ($T_1 \leq T$) решение \mathbf{v}^* , p_* задачи (1), (2), (3) удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{v}_x^*(t)\| \leq R(t) \quad \forall t \in [0, T_1], \quad (11)$$

то решение задачи (1) – (3) на этом интервале существует и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*$, $p = p_*$.

Действительно, если выполнено неравенство (11), то $\alpha(t, \mathbf{v}_x^*) = 1$, поэтому уравнения (1) и (1) совпадают.

Замечание 3. Если на интервале $[0, T_1]$ ($T_1 \leq T$) решение задачи (1)–(3) существует и выполняется оценка

$$\|\mathbf{v}_x(t)\| \leq M(t) \quad \forall t \in [0, T_1], \quad (12)$$

где $M(t) \leq R(t)$, то на этом интервале оно совпадает с решением регуляризованной задачи (1'), (2), (3).

Действительно, поскольку $\mathbf{v}(t)$ лежит внутри шара $K_R(t)$, то $\mathbf{v}(t)$ совпадает со своей проекцией на этот шар и, поэтому, \mathbf{v} удовлетворяет уравнению (1'). Учитывая единственность решения задачи (1'), (2), (3) (в силу теоремы 1) и единственность решения задачи (1)–(3) при выполнении условия (12) (см. теорему 12, гл. VI, работы [1]), убеждаемся в справедливости утверждения замечания.

Замечание 4. Учитывая замечание 2, нетрудно построить итерационный процесс, сходящийся к решению задачи (1)–(3) в случае, когда правая часть оценки (12) неизвестна, при условии, что решение задачи (1)–(3) существует и удовлетворяет ограничению (12) при некоторой неизвестной, но заведомо ограниченной на $[0, T_1]$ функции $M(t)$. Действительно, задаем некоторую положительную, ограниченную, неубывающую функцию $R_1(t)$ и решаем задачу (1'), (2), (3) при $R(t) = R_1(t)$, далее проверяем условие (12) при $M(t) = R_1(t)$. Если это условие выполнено, то задача (1)–(3) решена. Если это условие не выполнено, то полагаем $R_2(t) = R_1(t) + K$ (K — параметр метода) и повторяем итерационный процесс. Ясно, что после конечного числа шагов условие (12) будет выполнено и, следовательно, решена задача (1)–(3).

При реализации предлагаемого подхода возникает вопрос о выборе интегрального ограничения $R(t)$ или равномерных ограничений на скорость $R_1(t)$, $R_2(t)$. Оценки $\|\mathbf{v}_x(t)\|$ и $\|\mathbf{v}\|_4$ можно найти явно при $n = 2$ глобально и при $n = 3$ локально. Эти оценки на интервале $[t_0, t]$ зависят от начального условия $\|\mathbf{u}_x(t_0)\|(\|\mathbf{u}(t_0)\|_4)$, $\|f\|_{L_2(Q_{t_0}^i)}$, ν и констант из теорем вложения функций.

Во многих случаях такие оценки найти затруднительно, кроме того, в применении к конкретной задаче полученные оценки могут оказаться сильно загрубленными. В связи с этим в замечании 4 предлагается итерационный процесс, который позволяет найти априорную оценку, если ее решение с соответствующей оценкой на заданном интервале времени существует.

Априорную оценку вида $|\mathbf{v}| \leq N$ можно задать исходя из физических соображений, если нам заведомо известно, что скорость вязкой жидкости не превосходит заданной величины, то есть $|\mathbf{v}(t, x)| \leq N$, тогда можно положить $R_1(t) = -N$, $R_2(t) = N$. Далее заметим, что если решение таким образом регуляризованной задачи удовлетворяет выбранной априорной оценке, то ее решение совпадает с решением исходной задачи. Если полученное решение не удовлетворяет выбранной оценке, то либо неправильно оценена величина возможной скорости, либо исходная модель (1) – (3) неадекватна изучаемому физическому процессу.

Из сказанного выше следует, что во многих случаях решение нелинейной системы Навье-Стокса можно свести к решению последовательности линейных задач.

К решению линейных задач имеются различные подходы, среди них отметим подход, основанный на градиентных методах минимизации функционала $J(\mathbf{v}) = \int_{Q_T} |\operatorname{div} \mathbf{v}|^2 dx dt$,

в котором давление p рассматривается как управление (см., например, [5]–[7]). Однако, построение обоснованного градиентного метода наталкивается на трудность, связанную с тем, что в рассматриваемых задачах (как и в большинстве реальных задач, где состояние системы описывается дифференциальными уравнениями) множества Лебега $\mathbf{M}_i(C) = \{u \in U_i : J_i(u) < C, i = 1, 2\}$ неограничены. В работе [5] эта трудность преодолелась с помощью итеративной регуляризации метода проекции градиента. К сожалению, этот метод слишком медленно сходится.

В настоящей работе построен и обоснован модифицированный метод наискорейшего спуска, который можно применять при некоторых ограничениях на управление и неограниченность множества Лебега.

2. ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ.

В предыдущем разделе показано, что при определенных условиях решение задачи (1.1)–(1.3) сводится к решению последовательности задач (1.5)–(1.7). Опуская индекс k , запишем эту задачу в виде

$$L\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + g_i\mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - grad p, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \quad (2)$$

$$div \mathbf{v} = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{f} \in \mathring{\mathbf{J}}(Q_T)$, $g_i \in L_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяет условию (1.4). Здесь и далее при ссылке на формулы из другого раздела будет использована двойная нумерация, где первое число указывает номер раздела, а вторая – номер формулы внутри раздела.

Задачу (1)–(3) рассматриваем как обратную задачу определения \mathbf{v} и p по дополнительным данным (3).

Основным способом решения обратных задач является сведение их к задачам оптимального управления. Рассмотрим два варианта таких задач.

Задача I. Найти минимум функционала $J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} |div \mathbf{v}(\nabla u)|^2 dxdt$ на множестве $U_1 = \mathring{W}_2^{1,0}(Q_T) = \left\{ u \in W_2^{1,0}(Q_T) : \int_{\Omega} u(x,t) dx = 0, t \in [0, T] \right\}$, где $\nabla u = grad u$, $\mathbf{v}(\nabla u)$ – решение задачи $L\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla u$ с условиями (2).

Задача II. Найти минимум функционала $J_2(u) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} |div \mathbf{v}(\nabla u)|^2 dxdt$ на множестве $U_2 = \mathring{L}_2(Q_T) = \left\{ u \in L_2(Q_T) : \int_{\Omega} u(x,t) dx = 0, ; t \in [0, T] \right\}$, где $\mathbf{v}(\nabla u)$ – решение задачи $L\mathbf{v} = \mathbf{f} - \nabla u$ с условиями (2).

Отличие задачи II от задачи I состоит в том, что производные ∇u при $u \in L_2(Q_T)$ понимаются в обобщенном смысле и решение задачи (1) – (3) будем понимать также в обобщенном смысле.

Далее обозначим через H_l ($l = 1, 2$) гильбертовы пространства

$$H_1 = W_2^{1,0}(Q_T), H_2 = \mathbf{L}_2(Q_T);$$

тогда U_l – подпространство пространства H_l ($l = 1, 2$).

Решение задач I, II будем искать методом проекции градиента

$$u_{k+1} = P_{U_l}(u_k - \alpha_{k+1} J'_l(u_k)), \quad (4)$$

где P_{U_l} – оператор проектирования на множество U_l , $J'_l(u_k)$ – градиент функционала $J_l(u_k)$ в точке u_k ($l = 1, 2$).

В следующем пункте будет показано, что имеют место формулы для вычисления градиентов:

$$J'_1(u) = -p(u), \quad (5_1)$$

где $p(u)$ определяется из разложения вектора $\mathbf{w}(u)$ на градиентную и соленоидальную части: $\mathbf{w}(u) = grad p(u) + \varphi$,

$$J'_2(u) = div \mathbf{w}(u). \quad (5_2)$$

Здесь $\mathbf{w}(u)$ – сопряженное состояние, определяемое для обеих задач как решение задачи

$$L^*\mathbf{w}(u) = -\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} - \frac{\partial}{\partial x_i}(g_i\mathbf{w}) = grad div \mathbf{v}(\nabla u), \quad (6)$$

$$\mathbf{w}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{w}(x, T) = 0. \quad (7)$$

2.1. Дифференцируемость функционала $J_1(u)$. Рассмотрим сначала задачу I. Она записывается в виде

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \int_{Q_T} |\operatorname{div} \mathbf{v}(\nabla u)|^2 dxdt \rightarrow \inf; \quad u \in U_1, \quad (8)$$

где $\mathbf{v}(\nabla u)$ — решение уравнения

$$L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + g_i \mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - \nabla u \quad (9)$$

с начальными и краевыми условиями (2).

Доказательство существования решения задачи (1), (2) в пространстве $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$ и необходимые для обоснования формулы (5₁) оценки основываются на следующей лемме.

Лемма 1. Пусть $\mathbf{F}(x, t) \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $r \in L_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x) \in \mathbf{W}_2^1(\Omega)$; тогда решение уравнения

$$L(\mathbf{v}) + r\mathbf{v} = \mathbf{F}, \quad (x, t) \in Q_T, \quad (10)$$

с краевыми и начальными условиями (2) существует, единственно, принадлежит пространству $\mathbf{W}_2^{2,1}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_\lambda^2 &\equiv \operatorname{vraimax}_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}_x(t)\|^2 + \nu \int_0^T \|\Delta \mathbf{v}\|^2 dt + \lambda \int_0^T \|\mathbf{v}_x(t)\|^2 dt \leq \\ &\leq 4e^{\lambda T} \left(\nu^{-1} \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{a}(x)\|^2 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где λ — константа, зависящая лишь от ν , констант c_2, c_3, c_4, c_7 из теорем вложения и второго энергетического неравенства (см. неравенства (13)–(15), (20) работы [3]), $\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)}$, $\|r\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)}$.

Доказательство. Выбираем последовательность ограниченных на Q_T функций $\{\mathbf{F}^n\}$, $\{\mathbf{g}^n\}$, $\{r^n\}$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{F}^n - \mathbf{F}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{g}^n - \mathbf{g}\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|r^n - r\|_{L_{4,\infty}(Q_T)} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

и рассмотрим последовательность задач

$$\mathbf{v}_t^n - \nu \Delta \mathbf{v}^n + g_i^n \mathbf{v}_{x_i}^n + r^n \mathbf{v}^n = \mathbf{F}^n, \quad (13)$$

$$\mathbf{v}^n|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{v}^n|_{t=0} = \mathbf{a}. \quad (14)$$

Заметим, что последняя задача распадается на отдельные задачи по координатам вектора \mathbf{v}^n . Пользуясь известными результатами (см., например, [4], гл. III, §6) убеждаемся, что $\|\mathbf{v}^n\|_\lambda$ ограничена. Покажем, что имеется равномерная оценка $\|\mathbf{v}^n\|_\lambda \leq c_0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Далее через C_i будем обозначать константы, зависящие от тех же величин, что и константа λ .

Обозначим $\tilde{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n e^{-\lambda t}$; $\tilde{\mathbf{F}}^n = \mathbf{F}^n e^{-\lambda t}$, тогда $\tilde{\mathbf{v}}^n$ является решением задачи

$$\tilde{\mathbf{v}}_t^n - \nu \Delta \tilde{\mathbf{v}}^n + g_i^n \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n + r^n \tilde{\mathbf{v}}^n + \lambda \tilde{\mathbf{v}}^n = \tilde{\mathbf{F}}^n, \quad (13')$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^n|_{S_T} = 0, \quad \tilde{\mathbf{v}}^n|_{t=0} = \mathbf{a}. \quad (14')$$

Умножим уравнение (13') на $\Delta \tilde{\mathbf{v}}$ и, интегрируя по частям по области Q_t , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\|^2 + \nu \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t}^2 + ((g_i^n \tilde{\mathbf{v}}_{x_i} + r^n \tilde{\mathbf{v}}^n), \Delta \tilde{\mathbf{v}}^n)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \lambda \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\|_{0,t}^2 = \\ = \left(\tilde{\mathbf{F}}^n, \Delta \tilde{\mathbf{v}}^n \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \frac{1}{2} \|\mathbf{a}_x\|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь использовано обозначение $\|\cdot\|_{0,t} = \|\cdot\|_{L_2(Q_t)}$.

Из соотношений (12) следует, что существуют постоянные C_1, C_2, C_3 такие, что справедливы оценки

$$\|\mathbf{F}^n\|_{0,t} \leq C_1, \quad \|\mathbf{g}^n(t)\|_{\mathbf{L}_4(\Omega)} \leq C_2, \quad \|r^n(t)\|_{L_4(\Omega)} \leq C_3 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (16)$$

Для оценки интегралов в левой части равенства (15) воспользуемся следующими соотношениями

$$\begin{aligned} \|g_i^n \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n\|_{0,t} \leq \left(\int_0^t \int_{\Omega} |\mathbf{g}^n|^2 |\tilde{\mathbf{v}}_x^n|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^t \|\mathbf{g}^n\|_4^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_4^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq C_2 \left(\int_0^t \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_4^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t} + c(\varepsilon) \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t} \end{aligned}$$

Здесь использовано неравенство

$$\left(\int_0^t \|\mathbf{w}_x\|_4^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \|\Delta \mathbf{w}\|_{0,t} + c(\varepsilon) \|\mathbf{w}_x\|_{0,t}, \quad (17)$$

которое справедливо для любого $w \in \overset{\circ}{W}_2^{2,1}(Q_T)$.

Последнее неравенство, например, при $n = 3$ можно получить следующим образом:

$$\int_0^t \|\mathbf{w}_x\|_2^4 d\tau \leq c_3 c_7 \left(\int_0^t \|\mathbf{w}_x\|_2^{\frac{1}{2}} \|\Delta \mathbf{w}\|_2^{\frac{3}{4}} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_3 c_7 \|\mathbf{w}_x\|_{0,t}^{\frac{1}{4}} \|\Delta \mathbf{w}\|_{0,t}^{\frac{3}{4}}.$$

Здесь использовалась оценка из теоремы вложения $\|v\|_4 \leq c_3 \|v_x\|_4^{\frac{3}{4}} \|v\|_4^{\frac{1}{4}}$ (при $n = 3$) и вторая энергетическая оценка $\|v_{xx}\| \leq c_7 \|\Delta v\|$, справедливая для $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \cap \mathbf{W}_2^2(\Omega)$. Далее, используя неравенство Юнга: $\left(ab \leq \frac{1}{m} \varepsilon_1^m a^m + \frac{m-1}{m} \varepsilon_1^{-\frac{m-1}{m}} b^{\frac{m}{m-1}} \right)$, где $m = \frac{4}{3}$, получаем неравенство (17).

Учитывая оценки (16) и оценку $\|\mathbf{v}\|_4 \leq \bar{c} \|\mathbf{v}_x\|$ при $n = 2, 3$, легко убедиться в справедливости следующих неравенств

$$\|r^n \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t} \leq \left(\int_0^t \|r^n\|_4^2 \|\tilde{\mathbf{v}}^n\|_4^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \bar{c} \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t}. \quad (18)$$

Из последних оценок следует, что

$$\begin{aligned} A_1 &= |((g_i^n \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n + r^n \tilde{\mathbf{v}}^n), \Delta \tilde{\mathbf{v}}^n)_{\mathbf{L}_2(Q_t)}| \leq \\ &\leq (\varepsilon \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t} + (c(\varepsilon) + C_3 \bar{c}) \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t}) \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t} \leq \\ &\leq 2\varepsilon \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (c(\varepsilon) + C_3 \bar{c})^2 \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t}^2. \end{aligned}$$

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{8}\nu$, а $\lambda = 4\nu^{-1} \left(c \left(\frac{\nu}{8} \right) + C_3 \bar{c} \right)^2$, получаем

$$A_1 \leq \frac{1}{4}\nu \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2}\lambda \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t}^2.$$

Учитывая последнее неравенство, соотношение (15) и неравенство

$$A_2 = \left| \left(\tilde{\mathbf{F}}^n, \Delta \tilde{\mathbf{v}}^n \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \right| \leq \frac{1}{4}\nu \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t}^2 + \nu^{-1} \|\tilde{\mathbf{F}}^n\|_{0,t}^2,$$

получаем

$$\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n(t)\|^2 + \frac{1}{2}\nu \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2}\lambda \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t}^2 \leq c_t^2,$$

где $c_t^2 = \nu^{-1} \|\tilde{\mathbf{F}}^n\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{a}_x\|^2$. Из последнего неравенства находим, что

$$\|\tilde{\mathbf{v}}^n\|_{\lambda,t}^2 = \operatorname{vraimax}_{\tau \in [0,t]} \|\tilde{\mathbf{v}}^n(\tau)\|^2 + \nu \|\Delta \tilde{\mathbf{v}}^n\|_{0,t}^2 + \lambda \|\tilde{\mathbf{v}}_x^n\|_{0,t}^2 \leq 4c_t^2. \quad (19)$$

Далее покажем, что последовательность $\{\tilde{\mathbf{v}}^n\}$ фундаментальна в метрике $[\cdot]_{\lambda,T} = \|\cdot\|_{\lambda}$.

Обозначим $\mathbf{z}^{n,l} = \tilde{\mathbf{v}}^n - \tilde{\mathbf{v}}^{n+l}$ и заметим, что $\mathbf{z}^{n,l}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_t^{n,l} - \nu \Delta \mathbf{z}^{n,l} + g_i^n \mathbf{z}_{x_i}^{n,l} + r^n \mathbf{z}^{n,l} + \lambda \mathbf{z}^{n,l} &= \\ &= \left(\tilde{\mathbf{F}}^n - \tilde{\mathbf{F}}^{n+l} \right) + (g_i^{n+l} - g_i^n) \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{n+l} + (r^{n+l} - r^n) \tilde{\mathbf{v}}^{n+l} \end{aligned} \quad (20)$$

и условиям

$$\mathbf{z}^{n,l}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{z}^{n,l}|_{t=0} = 0. \quad (21)$$

К задаче (20), (21) можно применить неравенство (19), в котором

$$c_t^2 = c_t^2(n,l) = \nu^{-1} \left(\left\| \left(\tilde{\mathbf{F}}^n - \tilde{\mathbf{F}}^{n+l} \right) + (g_i^{n+l} - g_i^n) \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{n+l} + (r^{n+l} - r^n) \tilde{\mathbf{v}}^{n+l} \right\|_{0,t}^2 \right).$$

Учитывая условие (12), ограниченность последовательности $\{\tilde{\mathbf{v}}^n\}$ в метрике $[\cdot]_{\lambda,T}$ и неравенство (17), получаем оценки

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbf{g}^{n+l} - \mathbf{g}^n) \tilde{\mathbf{v}}^{n+l} \right\|_{0,T} &\leq C_5 \|\mathbf{g}^{n+l} - \mathbf{g}^n\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)}, \\ \left\| (r^{n+l} - r^n) \tilde{\mathbf{v}}^{n+l} \right\|_{0,T} &\leq C_6 \|r^{n+l} - r^n\|_{L_{4,\infty}(Q_T)}. \end{aligned}$$

Из условий (12), оценки (19) и последних двух неравенств следует сходимость последовательности $\{\tilde{\mathbf{v}}^n\}$ в метрике $[\cdot]_{\lambda,T}$.

Легко показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g_i^n \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^n = g_i \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \tilde{\mathbf{v}}^n = r \tilde{\mathbf{v}}$. Тогда из уравнения (13) следует, что $\{\tilde{\mathbf{v}}_t^n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится в метрике $\mathbf{L}_2(Q_T)$ к $\tilde{\mathbf{v}}_t$. Таким образом, $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$.

Переходя в неравенстве (19) к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая очевидные неравенства: $\|\tilde{\mathbf{v}}(t)\| \geq e^{-\lambda t} \|\mathbf{v}(t)\|$, $\|\tilde{\mathbf{v}}_x(t)\| \geq e^{-\lambda t} \|\mathbf{v}_x(t)\|$, $\|\Delta \tilde{\mathbf{v}}(t)\| \geq e^{-\lambda t} \|\Delta \mathbf{v}(t)\|$, $\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leq \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}$, убеждаемся в справедливости неравенства (11). Из неравенства (11) вытекает единственность решения уравнения (10).

Следствие 1. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$, $S \in C^2$; тогда уравнение:

$$L\mathbf{v} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} u$$

с краевыми и начальными условиями (2) при любом $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ имеет единственное решение из $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$ и справедлива оценка:

$$\|\mathbf{v}\|_{\lambda} \leq C_7 e^{\lambda T} \left(\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \|\operatorname{grad} u\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \|\mathbf{a}_x\| \right). \quad (22)$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия следствия 1 и, кроме того, $\operatorname{div} \mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, тогда задача (6), (7) при любом $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ имеет решение из $\mathbf{W}_2^{2,1}(\Omega)$ и справедлива оценка:

$$\|\mathbf{w}\|_{\lambda} \leq C_8 e^{\lambda T} \|\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v}(\nabla u)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}. \quad (23)$$

Доказательство. Заметим сначала, что в лемме 1 \mathbf{g} — любая функция из $\mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$. Записав левую часть уравнения (6) в виде

$$L^* \mathbf{w} \equiv -\mathbf{w}_t - \nu \Delta \mathbf{w} - \mathbf{g}_i \mathbf{w}_{x_i} - \operatorname{div} \mathbf{g} \mathbf{w}$$

и, сделав замену $t = T - \tau$, перейдем к уравнению вида (10) с произвольной правой частью $F \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, а также однородными начальными и краевыми условиями. Воспользовавшись неравенством (11), получаем оценку (23).

Следствие 3. Пусть линейный оператор L определен дифференциальным выражением $L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}_i \mathbf{v}_{x_i}$ ($\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$) на множестве функций из $D(L) \subset \mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$,

удовлетворяющих однородным начальным и краевым условиям (2), тогда оператор L имеет ограниченный обратный, область его значений $R(L) = \mathbf{L}_2(Q_T)$ и является замкнутым. Первые два утверждения сразу следуют из леммы 1, замкнутость следует из первых двух свойств оператора L . Аналогичные утверждения справедливы для оператора L^* , определенного дифференциальным выражением в правой части уравнения (6) на множестве функций $\mathbf{w} \in D(L^*) \subset \mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющих условиям (7). Дифференцированием по частям легко убедиться, что L^* содержится в операторе \tilde{L}^* , сопряженном к L . То, что области определения операторов L^* и \tilde{L}^* совпадают, легко показать. Действительно, пусть $z \in D(\tilde{L}^*)$, тогда, полагая $f = \tilde{L}^*z$, получаем соотношения $(Lx, z) = (x, f) \forall x \in D(L)$. С другой стороны, найдется такой элемент $w \in D(\tilde{L}^*)$, что $\tilde{L}^*w = f$, поэтому $(Lx, z - w) = 0 \forall x \in D(L)$. Полагая $x = L^{-1}(z - w)$, получаем равенство $z = w$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия следствия 2 леммы 1; тогда функционал $J_1(u)$ дифференцируем в $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T) = U_1$ и его градиент удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Для доказательства формулы (5₁) на множестве $U_1 = \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ вводим метрику, эквивалентную метрике пространства $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)$ по скалярному произведению

$$(v, z)_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}} = \int_{Q_T} v_{x_i} z_{x_i} dx dt = (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{z})_{\mathbf{L}_2(Q_T)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} J_1(u+h) - J_1(u) &= \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{v}(\nabla u + \nabla h)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 - \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{v}(\nabla u)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 = \\ &= \left(\operatorname{div} \mathbf{v}(\nabla u), \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h) \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \frac{1}{2} \|\operatorname{div} \mathbf{v}(\nabla h)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

В силу следствия 1, оператор L имеет обратный L^{-1} , в частности, $L^{-1}\mathbf{h} = \overset{\circ}{\mathbf{v}}(h)$. Учитывая следствие 2 леммы 1, убеждаемся, что оператор L^* имеет обратный и $(L^*)^{-1} \operatorname{grad} \operatorname{div} u = \mathbf{w}$, где \mathbf{w} — решение задачи (6), (7). В силу следствия 3 к лемме 1 L^* — оператор, сопряженный к L .

Используя введенный выше оператор L , преобразуем первое слагаемое правой части последнего равенства

$$\begin{aligned} \left(\operatorname{div} \mathbf{v}(\nabla u), \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h) \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} &= - \left((L^*)^{-1} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}(\nabla u), \nabla h \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \\ &= - \left(P_{G(Q_T)} \mathbf{w}(u), \nabla u \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = - \left(\nabla p(u), \nabla h \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \left(-p(u), h \right)_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая неравенство (22), получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\| \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h) \right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 &\leq 2 \left\| \overset{\circ}{\mathbf{v}}_x(\nabla h) \right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 \leq 2\lambda^{-1} \left\| \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla h) \right\|_{\lambda}^2 \leq \\ &\leq 2\lambda^{-1} C_7 e^{\lambda T} \|\nabla h\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 = 2\lambda^{-1} C_7 e^{\lambda T} \|h\|_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}}^2. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения и соотношений (24), (25) следует равенство (5₁).

Покажем, что $J'_1(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Пусть u^1 и u^2 принадлежат $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)$, а \mathbf{w}^1 и \mathbf{w}^2 — соответствующие им решения задачи (6), (7). Тогда

$$\begin{aligned} \left\| J'_1(u^1) - J'_1(u^2) \right\|_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)} &= \|p(u^1) - p(u^2)\|_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}(Q_T)} = \\ &= \|\nabla p(u^1) - \nabla p(u^2)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \left\| P_{G(Q_T)} \mathbf{w}^1 - P_{G(Q_T)} \mathbf{w}^2 \right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leq \\ &\leq \left\| \mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2 \right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Заметим, что $\mathbf{w} = \mathbf{w}^1 - \mathbf{w}^2$ является решением задачи (6), (7), где $u = u^1 - u^2$.

Используя неравенства (23), (22) и неравенства $\|\mathbf{v}\| \leq c_4 \|\mathbf{v}_x\|$, $\|\mathbf{v}_{xx}\| \leq c_7 \|\Delta \mathbf{v}\|$, справедливые для любого $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2(\Omega)$, находим

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leq c_4 \|\mathbf{w}_x\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leq \\ & \leq c_4 \lambda^{-1} \|\mathbf{w}\|_{\lambda} \leq c_4 \lambda^{-1} C_8 e^{\lambda T} \|\nabla \operatorname{div} \mathbf{v} (\nabla (u^1 - u^2))\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leq \\ & \leq \sqrt{n} c_4 c_7 C_8 e^{\lambda T} \|\Delta \mathbf{v} (u^1 - u^2)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \leq \\ & \leq \sqrt{n} c_4 c_7 C_8 \lambda^{-1} \nu^{-\frac{1}{2}} e^{\lambda T} \|\mathbf{v} (\nabla (u^1 - u^2))\|_{\lambda} \leq \\ & \leq \sqrt{n} c_4 c_7 C_8 \nu^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1} C_7 e^{\lambda T} \|\nabla (u^1 - u^2)\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} = \\ & = L_1 \|u^1 - u^2\|_{\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,0}}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и неравенства (26) следует, что градиент $J'_1(u)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_1 = \sqrt{n} c_4 c_7 C_8 \nu^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-1} C_7 e^{\lambda T}$.

2.2. Дифференцируемость функционала $J_2(u)$. При рассмотрении задачи II нам потребуются использовать обобщенные решения задачи (1)–(3) в банаховом пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{V}}_2^{1,0}(Q_T)$, полученное в результате замыкания множества гладких, равных нулю вблизи S_T функций по норме

$$\|\mathbf{v}\|_{Q_T} = \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{v}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{v}_x\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}.$$

Назовем обобщенным решением задачи (1)–(3) из класса $\overset{\circ}{\mathbf{V}}_2^{1,0}(Q_T)$ функцию $\mathbf{v} \in \overset{\circ}{\mathbf{V}}_2^{1,0} \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$, для которой справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} (-\mathbf{v} \Phi_t + \nu \mathbf{v}_x \Phi_x) dx d\tau + \int_{\Omega} \mathbf{v}(x, t) \Phi(x, t) dx + \int_{Q_T} q_i \mathbf{v}_{x_i} \Phi dx d\tau = \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{a}(x) \Phi(x, 0) dx + \int_{Q_T} f \Phi dx d\tau, \quad t \in (0, T) \end{aligned} \quad (27)$$

при всех $\Phi \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}_2^{1,1}(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}(Q_T)$ и равенство

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{v}(x, t)\|^2 + \nu \int_0^t \|\mathbf{v}_x\|^2 d\tau = \int_0^t (f, \mathbf{v}) d\tau + \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|^2 + \int_{Q_T} \operatorname{div} g \|\mathbf{v}\|^2 dx d\tau. \quad (28)$$

Если выполнены условия теоремы 2, то решение задачи (1)–(3), очевидно, удовлетворяет соотношениям (27), (28) и, поэтому, решение обобщенной задачи существует.

Заметим, что если $S \in C^2$, то нетрудно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(3) из $\overset{\circ}{\mathbf{V}}_2^{1,0}(Q_T)$ при условии, что $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$, $f \in \mathbf{L}_2(Q_T)$.

Это можно сделать с помощью предельного перехода в последовательности задач, в которых $\mathbf{a} \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ заменяется последовательностью гладких функций \mathbf{a}_n из $H(\Omega)$, сходящейся по норме $L_2(\Omega)$ (см., например, теорема 3, гл. IV, работа [1]).

Для доказательства формулы (5₂) и проверки условия Липшица для градиента $J'_2(u)$ функционала $J_2(u)$ потребуются оценки, аналогичные оценкам (22), (23), но в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{V}}_2^{1,0}(Q_T)$. При этом константы в полученных неравенствах можно получить явно, что дает возможность явно найти константу Липшица для градиента $J'_2(u)$, важную при исследовании сходимости градиентных методов решения экстремальных задач.

Существование и единственность решения задачи

$$L\mathbf{v} = \mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + g_i \mathbf{v}_{x_i} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} u, \quad (29)$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}. \quad (30)$$

при любом $u \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,1}(Q_T)$, $\mathbf{a} \in L_2(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$ в пространстве $\mathring{\mathbf{V}}_2^{1,0}(Q_t)$ следует из теоремы (4.1) (гл. III, работа [3]).

Умножая уравнение (29) на $\mathbf{v}e^{-\lambda t}$ и дифференцируя по частям в области Q_t , получим равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \nu \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^2 + \lambda \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,t}^2 + \int_0^t (g_i \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}, \tilde{\mathbf{v}}) d\tau = \\ = \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|^2 + \int_0^t \left[(\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{v}}) + (\tilde{u}, \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (31)$$

где $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}e^{-\lambda t}$, $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}e^{-\lambda t}$, $\tilde{u} = ue^{-\lambda t}$.

Рассмотрим два случая: случай ограниченных функций g_i и случай, когда $g \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$. Пусть выполнено условие

$$\max_i |g_i(x, t)| \leq G \quad \forall (x, t) \in Q_T, \quad (32)$$

тогда

$$I_1 = \left| \int_0^t (g_i \tilde{\mathbf{v}}_{x_i}, \tilde{\mathbf{v}}) d\tau \right| \leq G \|\tilde{\mathbf{v}}_{x_i}\|_{0,t} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,t} \leq \frac{\nu}{4} \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^2 + G^2 \nu^{-1} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,t}^2. \quad (33)$$

Легко видеть, что справедливы оценки

$$I_2 = \left| \int_0^t (\tilde{u}, \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}) d\tau \right| \leq \int_0^t \|\tilde{u}\| \|\tilde{\mathbf{v}}_x\| d\tau \leq \frac{\nu}{4} \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^2 + \nu^{-1} \|\tilde{u}\|_{0,t}^2; \quad (34)$$

$$I_3 = \left| \int_0^t (\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{\mathbf{v}}) d\tau \right| \leq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,t}^2. \quad (35)$$

Из соотношений (31), (33)–(35) следует неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \frac{\nu}{2} \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^2 + \left[\lambda - (G^2 \nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}) \right] \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,t}^2 \leq \\ \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{a}\|^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{0,t}^2 + \nu^{-1} \|u\|_{0,t}^2. \end{aligned}$$

Полагая $\lambda = G^2 \nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}$, получаем

$$\|\tilde{\mathbf{v}}(t)\|^2 + \nu \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2 + \|\tilde{\mathbf{f}}\|_{0,t}^2 + 2\nu^{-1} \|u\|_{0,t}.$$

Откуда находим оценку

$$\|\mathbf{v}\|_{Q_T} \leq \left(1 + \nu^{-\frac{1}{2}} \right) e^{\lambda T} \left(\|\mathbf{a}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 + 2\nu^{-1} \|u\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (36)$$

где $\lambda = G^2 \nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}$.

Если выполнены условия $\|g\|_{\mathbf{L}_{4,\infty}} \leq G$, то для оценки интеграла I_1 воспользуемся неравенствами $\|v\|_4 \leq 2^{\frac{1}{4}} \|v_x\|^{\frac{1}{2}} \|v\|^{\frac{1}{2}}$, $n = 2$ и $\|v\|_4 \leq 2^{\frac{1}{2}} \|v_x\|^{\frac{3}{4}} \|v\|^{\frac{1}{4}}$, $n = 3$, справедливыми для $\forall v \in \mathring{\mathbf{W}}_2^1(\Omega)$, и неравенством Юнга $\left(ab \leq \frac{1}{m} \varepsilon_1^m a^m + \frac{m-1}{m} \varepsilon_1^{-\frac{m-1}{m}} b^{\frac{m}{m-1}} \right)$.

При $n = 2$, полагая $m = \frac{4}{3}$, $\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{3}\nu\right)^{\frac{3}{4}}$, получим

$$I_1 \leq 2^{\frac{1}{4}} G \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{v}\|_{0,t}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\nu}{4} \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{3}\right)^{-\frac{3}{16}} G^4 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,t}^2,$$

а при $n = 3$, полагая $m = 7$, $\varepsilon_1 = \left(\frac{2}{7}\nu\right)^{\frac{7}{8}}$, получим

$$I_1 \leq 2^{\frac{1}{2}} G \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^{\frac{7}{4}} \|\mathbf{v}\|_{0,t}^{\frac{1}{4}} \leq \frac{\nu}{4} \|\tilde{\mathbf{v}}_x\|_{0,t}^2 + 2 \left(\frac{2}{7}\nu\right)^{-\frac{7}{64}} G^8 \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{0,t}^2.$$

Располагая этими оценками, получаем неравенство вида (36), где

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{3}\right)^{-\frac{3}{16}} G^4 + \nu^{-1} + \frac{1}{2} && \text{при } n = 2, \\ \lambda = \lambda_3 &= 2 \left(\frac{2}{7}\nu\right)^{-\frac{7}{64}} G^8 + \nu^{-1} + \frac{1}{2} && \text{при } n = 3.\end{aligned}\quad (37)$$

Для оценки сопряженного состояния \mathbf{w} умножим уравнение (6) на $\mathbf{w}e^{-2\lambda(T-t)}$ и проинтегрируем по области $Q_t^T = \Omega \times [t, T]$. Обозначив $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}e^{-\lambda(T-t)}$, получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{w}}\|^2 + \nu \|\tilde{\mathbf{w}}_x\|^2 + \lambda \|\tilde{\mathbf{w}}\|_{0,t}^2 + \int_t^T (g_i \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}_{x_i}) d\tau = \\ = - \int_t^T (\operatorname{div} v (\nabla u e^{-\lambda(T-t)}, \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}})) d\tau.\end{aligned}$$

Получили соотношение вида (31), если в последнем положить $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{w}}$, $\mathbf{a} = 0$, $\tilde{\mathbf{f}} = 0$, $\tilde{u} = \operatorname{div} v (\nabla u)$. Таким образом, получаем оценку

$$\|\mathbf{w}\|_{Q_T} \leq \left(1 + \nu^{-\frac{1}{2}}\right) e^{\lambda T} \|\operatorname{div} v (\nabla u)\|_{L_2(Q_T)}, \quad (38)$$

где $\lambda = G^2\nu^{-1} + \nu^{-1} + \frac{1}{2}$, если g — ограниченная функция и λ определяется по формулам (37), если $g \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$.

Для доказательства формулы (5₂) воспользоваться непосредственно дифференцированием по частям здесь невозможно, поскольку не гарантирована принадлежность функций v и w пространству $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$. Воспользуемся предельным переходом, выбираем последовательности u_n, h_n , содержащиеся в U_1 , таких, что $u_n \rightarrow u$, $h_n \rightarrow h$ в $L_2(Q_T)$. На последовательностях u_n, h_n справедливы равенства (24) и первое из равенств (25), из которых следует, что

$$\begin{aligned}J_2(u_n + h_n) - J_2(u_n) = \\ = - \left((L^*)^{-1} \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} (\nabla u_n), \nabla h_n\right)_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2} \left\| \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}} (\nabla h_n) \right\|_{L_2(Q_T)}^2 = \\ = (\operatorname{div} \mathbf{w}(u_n), h_n)_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2} \left\| \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}} (\nabla h_n) \right\|_{L_2(Q_T)}^2.\end{aligned}\quad (39)$$

Обозначим $\delta h_n = h - h_n$, $\delta u_n = u - u_n$, $\delta \mathbf{v}_n = \mathbf{v} - \mathbf{v}_n$, тогда $\delta \mathbf{v}_n$ является решением задачи (1), (2), где $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{f} = 0$, $u = \delta u_n$. Используя оценки (36), (37), получаем, что

$$\|\operatorname{div} \delta \mathbf{v}_n\|_{L_2(Q_T)} \leq c \|\delta u_n\|_{L_2(Q_T)},$$

$$\|\operatorname{div} \mathbf{w}(\delta u_n)\|_{L_2(Q_T)} \leq c \|\delta u_n\|_{L_2(Q_T)}.$$

Переходя к пределу в соотношениях (39), получаем равенство

$$J_2(u + h) - J_2(u) = (\operatorname{div} \mathbf{w}(u), h)_{L_2(Q)} + \frac{1}{2} \left\| \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}} (\nabla h) \right\|_{L_2(Q_T)}^2.$$

Из оценки (36) следует, что $\left\| \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}} (\nabla h) \right\|_{L_2(Q_T)}^2 = O\left(\|h\|_{L_2(Q_T)}^2\right)$. Таким образом, формула (5₂) доказана.

Покажем, что $J_2'(u)$ удовлетворяет условию Липшица. Для этого воспользуемся неравенствами (38), (36), в результате получим

$$\begin{aligned}\|J_2'(u^1) - J_2'(u^2)\|_{L_2(Q_T)} &= \|\operatorname{div} \mathbf{w}(u^1) - \operatorname{div} \mathbf{w}(u^2)\|_{L_2(Q_T)} = \\ &= \|\operatorname{div} \mathbf{w}(u^1 - u^2)\|_{L_2(Q_T)} \leq \sqrt{n} \|\mathbf{w}(u^1 - u^2)\|_{Q_T} \leq \\ &\leq C_9 \|\operatorname{div} \mathbf{v} (\nabla (u^1 - u^2))\|_{L_2(Q_T)} \leq \\ &\leq C_{10} \|\mathbf{v} (\nabla (u^1 - u^2))\|_{Q_T} \leq C_{11} \|u^1 - u^2\|_{L_2(Q_T)}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 3. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $\operatorname{div} \mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a} \in \dot{J}(Q_T)$, $S \in C^2$, тогда функционал $J_2(u)$ дифференцируем в $L_2(Q_T)$ и его градиент удовлетворяет условию Липшица.

2.3. Сходимость модифицированного метода наискорейшего спуска. Решение задач I, II будем искать методом проекции градиента (4), где параметр α_{k+1} выбирается модифицированным методом наискорейшего спуска:

$$\alpha_{k+1} = \min \left[\alpha'_{k+1}, \gamma \right]. \quad (40_1)$$

Здесь γ — достаточно большая величина (параметр метода), а α'_{k+1} определяется как в методе наискорейшего спуска:

$$f_k \left(\alpha'_{k+1} \right) = \min_{\alpha > 0} f_k(\alpha), \quad f_k(\alpha) = J \left(P_U \left(u_k - \alpha J'(u_k) \right) \right). \quad (40_2)$$

Поскольку предлагаемый метод может быть использован и в других задачах оптимизации, в которых множество U — всё пространство или подпространство, сформулируем утверждение в виде теоремы в абстрактном гильбертовом пространстве H .

Введем обозначения: $J_* = \inf_U J(u)$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\}$, $C^{1,1}(U)$ — множество дифференцируемых функционалов, градиент которых удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 4. Пусть U — выпуклое, замкнутое множество из гильбертового пространства H , $J(u) \in C^{1,1}(U)$ — выпуклый функционал, множество U_* непусто и ограничено, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ определена по формуле (4) и выполнены условия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| J'(u_k) \right\|^2 \leq b_1, \quad (41)$$

$$0 < \alpha_k < b_2, \quad (42)$$

тогда последовательность $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ минимизирует функцию $J(u)$ на U и слабо в H сходится к множеству U_* .

Доказательство. Обозначим $\rho(u, U_*) = \min_{v \in U_*} \|u - v\|$; тогда по определению оператора проектирования

$$\begin{aligned} \rho^2(u_{k+1}, U_*) &= \|u_{k+1} - P_{U_*}(u_{k+1})\|^2 \leq \|u_{k+1} - P_{U_*}(u_k)\|^2 = \\ &= \|P_U(u_k - \alpha_{k+1} J'(u_k)) - P_U(P_{U_*}(u_k))\|^2 \leq \\ &\leq \|u_k - \alpha_{k+1} J'(u_k) - P_{U_*}(u_k)\|^2 = \\ &= \rho^2(u_k, U_*) + \alpha_{k+1}^2 \left\| J'(u_k) \right\|^2 - 2\alpha_{k+1} \left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k) \right). \end{aligned} \quad (43)$$

Воспользовавшись необходимым и достаточным условием выпуклости дифференцируемого функционала на выпуклом множестве U

$$J(u) - J(v) \geq (J'(v), u - v) \quad \forall u, v \in U,$$

полагая $v = u_k$, $u = P_{U_*}(u_k)$, получаем

$$0 \leq J(u_k) - J(P_{U_*}(u_k)) = J(u_k) - J_* \leq (J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)).$$

Таким образом, получаем

$$\left(J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k) \right) \geq J(u_k) - J_* \geq 0. \quad (44)$$

Учитывая неравенства (43), (44), получаем, что

$$\rho^2(u_{k+1}, U_*) - \rho^2(u_k, U_*) \leq \alpha_{k+1}^2 \left\| J'(u_k) \right\|^2. \quad (45)$$

Суммируя последнее неравенство от 0 до $m > 0$, и, учитывая условие (41), получаем

$$\rho^2(u_m, U_*) \leq \sum_{k=0}^m \alpha_{k+1}^2 \|J'(u_k)\|^2 + \rho^2(u_0, U_*) \leq b_2^2 b_1 + \rho^2(u_0, U_*) = b_3. \quad (46)$$

Таким образом, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ ограничена в H , а из условия (41) следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \|J'(u_k)\| = 0$; тогда из неравенства (44) следует, что последовательность $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ минимизирует функционал $J(u)$. Таким образом, последовательность $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ — ограниченная и минимизирующая $J(u)$ на U .

Обозначим через W множество выпуклых комбинаций последовательности $\{u_k\}_{k=0}^\infty$, то есть множество точек u , представимых в виде:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u_k, \quad \alpha_k \geq 0 (k = 0, 1, \dots), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = 1.$$

Используя теорему 5, раб.[8](гл. 4, §8), легко показать, что $W \subset U$ и, поскольку U — замкнутое множество, замыкание \bar{W} множества W также принадлежит U .

Последовательность $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ минимизирует функцию $J(u)$ на U и, следовательно, минимизирует $J(u)$ на \bar{W} . Из доказанного следует, что $J_*(\bar{W}) = \inf_{u \in \bar{W}} J(u) = J_* = \inf_{u \in U} J(u)$,

$\bar{W}_* = \{u \in \bar{W} : J(u) = J_*\} \in U_*$. Из ограниченности последовательности $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ следует ограниченность множества \bar{W} . Согласно теореме 6 (гл. 1, §3, раб. [8]), выпуклый, полуограниченный снизу функционал $J(u)$ на ограниченном, выпуклом, замкнутом множестве U из рефлексивного банахового пространства имеет непустое множество точек минимума U_* , и любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ слабо сходится к U_* . Из слабой сходимости последовательности $\{u_k\}_{k=0}^\infty$ к \bar{W}_* следует ее слабая сходимости к U_* , теорема доказана.

Замечание 1. Если множество \bar{W} компактно, то имеет место сильная сходимостью. Здесь можно воспользоваться теоремой 1 (гл. 1, §3, раб. [8]).

Замечание 2. Если U — подпространство гильбертового пространства H , P_U — оператор ортогонального проектирования на это подпространство, то

$u_{k+1} = u_k - P_U J'(u_k)$. В этом случае соотношение (43) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \rho^2(u_{k+1}, U_*) &= \\ &= \rho^2(u_k, U_*) + \alpha_{k+1}^2 \|P_U J'(u_k)\|^2 - 2\alpha_{k+1} (P_U J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)). \end{aligned}$$

Учитывая, что $(P_U J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k)) = (J'(u_k), u_k - P_{U_*}(u_k))$, легко видеть, что утверждения теоремы справедливы, если вместо условия (41) выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|P_U J'(u_k)\|^2 < b_1. \quad (41')$$

Пользуясь тем, что множества $U_l (l = 1, 2)$ являются подпространствами соответствующих пространств и, следовательно, операции проектирования P_l на эти множества линейны, найдем явные формулы для параметров α_{k+1} , α_{k+1} .

Действительно,

$$\begin{aligned} f_{l,k}(\alpha) &= J_l(\mathbf{v}(P_l(u_k - \alpha J'_l(u_k)))) = \frac{1}{2} \| \operatorname{div} \mathbf{v}(u_k - \alpha P_l J'_l(u_k)) \|_{0,T}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \| \operatorname{div} \mathbf{v}(u_k) \|_{0,T}^2 - 2\alpha \left(\operatorname{div} \mathbf{v}(u_k), \operatorname{div} \mathring{\mathbf{v}}(P_l J'_l(u_k)) \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \\ &\quad + \alpha^2 \| \operatorname{div} \mathring{\mathbf{v}}(P_l J'_l(u_k)) \|_{0,T}^2. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$\alpha'_k = \left(\operatorname{div} \mathbf{v}(u_k), \operatorname{div} \mathring{\mathbf{v}}(P_l J'_l(u_k)) \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \| \operatorname{div} \mathring{\mathbf{v}}(P_l J'_l(u_k)) \|_{0,T}^{-2}. \quad (47)$$

Здесь под выражениями $\mathbf{v}(u_k)$, $\overset{\circ}{\mathbf{v}}(P_l J'_l(u_k))$ следует понимать $\mathbf{v}(\nabla u_k)$, $\overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla P_l J'_l(u_k))$, где $\overset{\circ}{\mathbf{v}}(u)$ — решение уравнения (1) при $f = 0$ и $\mathbf{a} = 0$.

Ясно, что последовательности $\{J_l(u_k)\}_{k=0}^{\infty}$ монотонно убывают и ограничены снизу.

В предыдущем пункте было показано, что $J_l(u) \in C^{1,1}(U_l)$. Далее воспользуемся известным неравенством, справедливым для функций из $C^{1,1}(U)$ (см. 2.3.7, раб. [8]).

$$|J(u) - J(v) - (J'(v), u - v)| \leq L \|u - v\|^2 / 2 \quad \forall u, v \in U,$$

где L — константа Липшица.

Полагая в нем $v = u_k$, $u = u_{k+1}^\alpha = u_k - \alpha P_l J'_l(u_k)$, получим

$$\begin{aligned} J_l(u_k) - J_l(u_{k+1}^\alpha) &= J_l(u_k) - J_l(u_k - \alpha P_l J'_l(u_k)) \geq \\ &\geq \alpha (J'_l(u_k), P_l J'_l(u_k))_{H_l} - \frac{L_l}{2} \alpha^2 \|P_l J'_l(u_k)\|_{H_l}^2, \end{aligned} \quad (48)$$

где L_l — константа Липшица для градиента $J'_l(u)$ функционала $J_l(u)$. Учитывая, что оператор P_l — оператор ортогонального проектирования на подпространство, получаем, что $(J'_l(u_k), P_l J'_l(u_k))_{H_l} = \|P_l J'_l(u_k)\|_{H_l}^2$.

Тогда из неравенства (48) следует, что

$$J_l(u_k) - J_l(u_{k+1}^\alpha) \geq \alpha \left(1 - \alpha \frac{L_l}{2}\right) \|P_l J'_l(u_k)\|_{H_l}^2. \quad (49)$$

Полагая $\alpha = 1/L_l$, получаем

$$J_l(u_k) - J_l(u_{k+1}^\alpha) \geq 1/2 L_l \|P_l J'_l(u_k)\|_{H_l}^2.$$

Предположим, что $\alpha'_{k+1} \leq \gamma$, тогда $\alpha_{k+1} = \alpha'_{k+1}$ и, поэтому при $\alpha = 1/L_l$ справедливы неравенства

$$J_l(u_k) - J_l(u_{k+1}) \geq J_l(u_k) - J_l(u_{k+1}^\alpha) \geq 1/2 L_l \|P_l J'_l(u_k)\|_{H_l}^2. \quad (50)$$

Предположим теперь, что $\alpha'_{k+1} > \gamma$, тогда $\alpha_{k+1} = \gamma$. Рассмотрим два случая: $\gamma \geq 1/L_l$ и $\gamma < 1/L_l$. Учитывая, что на интервале $(0, \alpha'_k)$ функция $f_{l,k}(\alpha)$ убывает, в первом случае вновь получаем неравенства (50). Во втором случае ($\gamma < 1/L_l$)

$$\gamma(1 - \gamma L_l / 2) \geq \frac{1}{2} \gamma.$$

Таким образом, учитывая неравенства (49), (50), в любом случае получаем оценку

$$J_l(u_k) - J_l(u_{k+1}) \geq c_l \|P_l J'_l(u_k)\|_{H_l}^2, \quad (51)$$

где $c_l = \min[\frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}L_l]$.

Из последней оценки следует, что последовательность $\{J_l(u_k^l)\}_{k=0}^{\infty}$ монотонно убывает, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \|P_l J'_l(u_k)\|_{H_l}^2$ сходится и имеет место оценка

$$\sum_{j=k}^{\infty} \|P_l J'_l(u_k^l)\|_{H_l}^2 \leq c_l^{-1} (J_l(u_k) - J_{l,*}), \quad (52)$$

где $J_{l,*} = \inf_{u \in U_l} J_l(u)$.

Таким образом, для градиентов $J'_l(u)$ функционалов $J_l(u)$ ($l = 1, 2$) имеет место неравенство (41').

Нетрудно убедиться, что функционалы $J_l(u)$ ($l = 1, 2$) выпуклы. Действительно, при любом $\alpha \in [0, 1]$

$$J_l(\alpha u + (1 - \alpha)w) = \|\alpha \operatorname{div} \mathbf{v}(u) + (1 - \alpha) \operatorname{div} \mathbf{v}(w)\|_{0,T}^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^2 \|\operatorname{div} \mathbf{v}(u)\|_{0,T}^2 + (1-\alpha)^2 \|\operatorname{div} \mathbf{v}(w)\|_{0,T}^2 + 2\alpha(1-\alpha) (\operatorname{div} \mathbf{v}(u), \operatorname{div} \mathbf{v}(w))_{\mathbf{L}_2(Q_T)} \\
&= \alpha \|\operatorname{div} \mathbf{v}(u)\|_{0,T}^2 + (1-\alpha) \|\operatorname{div} \mathbf{v}(w)\|_{0,T}^2 - \alpha(1-\alpha) \|\operatorname{div} \mathbf{v}(u) - \operatorname{div} \mathbf{v}(w)\|_{0,T}^2 \leq \\
&\leq \alpha J_l(u) + (1-\alpha) J_l(w).
\end{aligned}$$

Учитывая замечание 2 к теореме 4, теоремы 2 и 3 о дифференцируемости функционалов $J_l(u)$ ($l = 1, 2$), а также известные теоремы о существовании и единственности решения задачи (1) – (3) (см. теоремы 1', 2 из работы [1] гл. 4, §1), нетрудно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}_{4,\infty}(Q_T)$, $\operatorname{div} \mathbf{g} \in L_{4,\infty}(Q_T)$, $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяет условию (1.4), $S \in C^2$. Тогда последовательность $\{u_k^l\}_{k=0}^\infty$, определенная равенствами (4), (5 $_l$) ($l = 1, 2$), где параметр α_{k+1} определен по формулам (40), (47), минимизирует функционал $J_l(u)$ на U_l и слабо в H_l сходится к $U_{l,*}$ с любого начального приближения.

Замечание. При $l = 1$ утверждения теоремы 5 прямо следуют из теоремы 4, поскольку выполнены все условия этой теоремы. При $l = 2$ существование и единственность обобщенного решения задачи (1) – (3) не гарантирует выполнение одного из условий теоремы 4 - U_* непусто и ограничено. Однако при выполнении условий теоремы 5 существует единственное решение задачи (1) – (3) в классе функций $\mathbf{v} \in \mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$, $p \in \mathbf{W}_2^{1,0}(Q_T)$. Ясно, что это решение будет также решением обобщенной задачи, а решение обобщенной задачи единственно. Таким образом, функционал $J_2(u)$ в условиях теоремы 5 удовлетворяет всем условиям теоремы 4, кроме того, в этом случае условие $\operatorname{div} \mathbf{g} \in L_{4,\infty}(Q_T)$ можно отбросить.

2.4. Регуляризация итерационного процесса по методу Тихонова. В предыдущем пункте доказана слабая сходимостъ модифицированного метода наискорейшего спуска для функционалов $J_l(u)$ ($l = 1, 2$).

Для построения сильно сходящейся последовательности можно воспользоваться методом регуляризации Тихонова [8], суть которого состоит в последовательном решении задач минимизации функционалов $T_j(u) = J(u) + \beta_j \Omega(u)$ на U как задачи первого типа (то есть задачи минимизации по функционалу), где $\Omega(u)$ — стабилизатор или неотрицательная сильно выпуклая функция. При фиксированном j находится точка u_j , удовлетворяющая условиям

$$T_j^* = \inf_U T_j(u) \leq T_j(u_j) < T_j^* + \varepsilon_j. \quad (53)$$

Из теоремы Тихонова (см., например, теорема 1, гл. 2, §5, работа [8]) следует: если $J(u) \in C^{1,1}(U)$, U_* непусто, $J_* > -\infty$,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0; \quad \sup_{j > 1} \varepsilon_j \beta_j^{-1} < \infty, \quad (54)$$

то последовательность $\{u_j\}_{j=1}^\infty$, определенная условиями (53), минимизирует функционал $J(u)$ на U и $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(u_j, U_*) = 0$.

Возвращаясь к исходной задаче (1) – (3), введем обозначения

$$T_{l,j}(u) = J_l(u) + \beta_j \|u\|_{H_l}^2, \quad u \in U_l, \beta_j > 0, \lim_{j \rightarrow \infty} \beta_j = 0. \quad (55)$$

Поскольку при $\beta_j > 0$ функционал $T_{l,j}(u)$ ($l = 1, 2$) является сильно выпуклым, то он имеет единственную точку минимума $u_{l,j}^*$.

Далее, там, где выкладки имеют одинаковую форму, индекс l будем опускать, при этом $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{H_l}$.

Для приближенного решения задачи минимизации функционала $T_{l,j}(u)$ воспользуемся обычным методом наискорейшего спуска

$$u_{j,k+1} = P_{U_l} \left(u_{j,k} - \alpha_{j,k+1} T'_{l,j}(u_{j,k}) \right), \quad j = 1, 2, \dots; \quad k = 0, 1, \dots, n_j. \quad (56)$$

Параметр $\alpha_{j,k+1}$ вычисляется явно по формуле

$$\alpha_{j,k+1} = \left[\left(\operatorname{div} \mathbf{v}(u_{j,k}), \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}}(P_l T'_{l,j}(u_{j,k})) \right)_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \beta_j (u_{j,k}, P_l T'_{l,j}(u_{j,k}))_{H_1} \right] \times \\ \times \left[\left\| \operatorname{div} \overset{\circ}{\mathbf{v}}(P_l T'_{l,j}(u_{j,k})) \right\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}^2 + \beta_j \left\| P_l T'_{l,j}(u_{j,k}) \right\|_{H_1}^2 \right]^{-1}. \quad (57)$$

Здесь, как и в формуле (47), при $l = 1, 2$

$$\mathbf{v}(u_{j,k}) = \mathbf{v}(\nabla u_{j,k}); \overset{\circ}{\mathbf{v}}(P_l T'_{l,j}(u_{j,k})) = \overset{\circ}{\mathbf{v}}(\nabla P_l T'_{l,j}(u_{j,k})).$$

Пусть $\beta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и $\beta_j > 0$. При каждом фиксированном j по схеме (56), (57) проводим n_j итераций и за начальное приближение при минимизации функционала $T_{l,j+1}$ принимаем $u_{j+1,0} = u_j = u_{j,n_j}$. Выбираем n_j из условия

$$T'_{l,j}(u_{j,n_j}) \leq \beta_j. \quad (58)$$

Покажем, что в этом случае последовательность $\{u_j\}$ удовлетворяет условиям (53), (54) теоремы Тихонова. Учитывая известное неравенство для сильно выпуклых функционалов:

$$J(u) - J(u_*) \leq \left\| J'(u) \right\|^2 / 2\mu, \quad (59)$$

где μ — константа из необходимого и достаточного условия сильной выпуклости функционала

$$(J'(u) - J'(v), u - v) \geq \mu \|u - v\| \quad \forall u, v \in U.$$

В рассматриваемом случае $\mu \geq \beta_j$. Из неравенств (58), (59) следует, что

$$T_{l,j}(u_j) - T_{l,j}(u_{l,j}^*) \leq \frac{1}{2} \beta_j = \varepsilon_j.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы Тихонова. Учитывая еще, что минимум функционалов $J_l(u)$ ($l = 1, 2$) в условиях теоремы 5 равен нулю и он достигается в единственной точке, равной решению задачи (1) — (3), убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда последовательность $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$, определенная соотношениями (56) — (58), минимизирует функционал $J_l(u)$ на U_l и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j - u_*\|_{H_l} = 0. \quad (60)$$

Замечание. Пусть \mathbf{v}, p — решение задачи (1) — (3); тогда $u_* = p$. Учитывая, что норма $\|\cdot\|_{\lambda}$ эквивалентна норме

$$\|\mathbf{v}\| = \operatorname{vraimax}_{t \in [0, T]} \|\mathbf{v}_x\| + \|\Delta \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)} + \|\mathbf{v}_x\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)},$$

а также выполняются оценки (22) и (36), убеждаемся в справедливости соотношений:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_j^1 - \mathbf{v}\| = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{v}_j^2 - \mathbf{v}\|_{Q_T} = 0, \quad (61)$$

где $\{\mathbf{v}_j^1\}$ — последовательность, определенная при решении задачи I, а $\{\mathbf{v}_j^2\}$ — последовательность, определенная при решении задачи II.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе для решения задачи (1.1) — (1.3) предлагается подход, состоящий в последовательном решении линеаризованных задач градиентным методом. Заметим, что в данном случае минимизируемый функционал является выпуклым. Возможен другой подход, в котором непосредственно задача (1.1) — (1.3) рассматривается как обратная задача, где соотношения (1.1), (1.2) описывают состояние системы при неизвестном давлении p , а

равенство (1.3) задает дополнительные данные о состоянии системы. Такая задача легко формулируется как задача оптимального управления:

$$J(p) = \int_{Q_T} |\operatorname{div} \mathbf{v}(p)|^2 dxdt \rightarrow \inf; p \in U_l, l = 1, 2,$$

где $\mathbf{v}(p)$ — решение задачи (1.1) — (1.2) при заданном $p \in U_l$.

Используя полученные или введенные априорные ограничения на вектор скорости \mathbf{v} , уравнение (1.1) можно заменить на уравнение (1.1') и обосновать существование и единственность решения задачи (1.1'), (1.2), а также сходимость итерационного процесса (1.5), (1.6) при любом фиксированном $p \in U_l$ ($l = 1, 2$). Построение и обоснование градиентного метода для решения задачи (1.1) — (1.3) в такой постановке, а также сравнение различных приемов вычислительной реализации предлагаемых методов будет дано в следующей работе. Один из вариантов был опробован на модельном примере, где решение задачи (1.1)–(1.3), а следовательно и априорная оценка вектора скорости, были известны. Расчеты проводились последовательно по временным слоям. В этом случае для достижения заданной точности потребовалось 3-4 шага итеративной линеаризации и 5-6 шагов градиентного спуска.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*. М.: Наука, 1970. 288 с.
2. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса*. М.: Мир, 1981. 408 с.
3. Голичев И.И. *Итеративная линеаризация эволюционных уравнений Навье-Стокса* // Уфимский математический журнал. Т. 4. 2012. №4. С. 69-78.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М.: Наука, 1967. 736 с.
5. Агошков В.И., Ботвиновский Е.А. *Численное решение системы Стокса методами сопряженных уравнений и оптимального управления* // ЖВМиМФ. Т. 47. 2007. №7. С. 1192–1207.
6. Голичев И.И., Шарипов Т.Р. *Разработка методов, алгоритмов и программ для решения уравнений Навье-Стокса как задачи оптимального управления*. // Вестник УГАТУ. Математика. Т. 9. 2007. № 3(21). С. 51–57.
7. Голичев И.И. *Градиентные методы решения уравнений Навье-Стокса*. // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 18, в. 3. 2011. С. 423–425.
8. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач*. М.: Наука, 1981. 400 с.
9. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач*. М.: Наука, 1988. 552 с.

Голичев Иосиф Иосифович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: Golichev ii@mail.ru