ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 51-59.

УДК 517.53

МИНИМУМ МОДУЛЯ РЯДА ДИРИХЛЕ, СХОДЯЩЕГОСЯ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.М. ГАЙСИН

Аннотация. В терминах минимума модуля на континуумах, близких к вертикальным отрезкам, изучается поведение суммы ряда Дирихле вблизи прямой сходимости вне некоторого множества исключительных кружков. Этот результат обобщает известную теорему о минимуме модуля на вертикальных отрезках из полуплоскости сходимости.

Ключевые слова: ряды Дирихле, полуплоскость сходимости, теорема о минимуме модуля.

Mathematics Subject Classification: 30D10

1. Введение

Методы получения асимптотических оценок суммы целого ряда Дирихле на вертикальных отрезках в терминах максимума или минимума модуля, а также на кривых, определенным образом уходящих в бесконечность, к настоящему времени хорошо известны (по этому поводу см., например, [1] – [3]). Оказывается, поведение суммы ряда Дирихле на кривых — не что иное, как ее глобальное поведение вне некоторого множества исключительных кружков. Об этом и пойдет речь в настоящей статье в случае, когда область сходимости ряда Дирихле — полуплоскость.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$ — последовательность, имеющая конечную верхнюю плотность, а $D_c(\Lambda)$ — класс всех функций F, представимых в полуплоскости $\Pi_c = \{s : \operatorname{Re} s < c\}$ $(-\infty < c \leqslant +\infty)$ рядами Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s} \quad (s = \sigma + it), \tag{1}$$

сходящимися лишь в данной полуплоскости. Для удобства термином "максимум модуля" в дальнейшем будем называть величину

$$M_F(\sigma) = \sup_{|t|<\infty} |F(\sigma + it)|, \quad \sigma < c.$$

Вкратце остановимся на общей схеме рассуждений, позволяющей получать оценки максимума модуля $M_F(\sigma)$ через минимум модуля F на вертикальных отрезках.

Асимптотическая оценка величины $M_F(\sigma)$ для суммы F целого ряда Дирихле (1) через максимум $|F|$ на вертикальном отрезке $I = \{s = \sigma + it : |t - t_o| \leqslant H\}$ определенной длины получена в [1]. При этом длина $|I|$ отрезка I должна быть не меньше некоторой характеристики, близкой к аналогичным характеристикам, позволяющим определять радиус полноты системы экспонент $\left\{e^{i\lambda_k x}\right\}$ в пространстве $C[a, b]$ (или $L^2[a, b]$) (по этому поводу

A.M. Gaisin, Minimum of modulus of the sum of Dirichlet series converging in a half-plane.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 12-01-97004-р_поволжье_а).

Поступила 28 апреля 2013 г.

см. в [1, 4, 5, 6]). Естественно ожидать, что при оценке $M_F(\sigma)$ через минимум модуля, длина отрезка I в общей ситуации не может быть слишком большой. Ясно, что в этом случае чем больше $|I|$, тем лучше оценка. При естественных ограничениях на последовательность центральных показателей целого ряда (1) в [3] показано, что при $\sigma \to +\infty$ длина отрезка $|I|$ может расти как величина $O(\sigma^q)$ $(0 < q < 1)$.

Поясним общую схему и суть идеи, при помощи которых реализуются следующие асимптотические оценки для любой функции $F \in D_\infty(\Lambda)$, (аналогичая схема при соответствующей ее модификации, как увидим, применима и для случая $D_o(\Lambda)$):

а) для всякой кривой γ, уходящей в бесконечность должным образом, существует последовательность $\{\xi_n\}$, $\xi_n \in \gamma$, такая, что при $\xi_n \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma_n) = (1 + o(1)) \ln |F(\xi_n)|\,, \quad \sigma_n = \operatorname{Re} \xi_n\,;$$

б) при $\sigma \to \infty$ вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F(\sigma),$$

где $m_F(\sigma) = \min\limits_{it\in I} |F(\sigma + it)|$, $I = I(\sigma)$ — отрезок мнимой оси, вообще говоря, переменной длины.

Пусть Λ — последовательность, подчиненная естественным условиям [2]:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < \infty; \qquad 2)\ \int_1^{\infty} \frac{c(t)}{t^2} dt < \infty, \tag{2}$$

где $c(t) = \max\limits_{\lambda_n \leqslant t} q_n, \quad q_n = -\ln |Q'(\lambda_n)|, \quad Q(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$

Общая схема метода, позволяющего получать оценки типа а), б), следующая. Сначала находится отрезок ряда $F_v(s) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant v} a_n e^{\lambda_n s}$ $(v = v(\sigma))$, такой, что

$$|F(s) - F_v(s)| < 1 \tag{3}$$

для всех $\sigma \geqslant \sigma_0$ вне E, $\operatorname{mes} E < \infty$. На следующем шаге показывается, что вне E

$$M_F(\sigma) \leqslant e^{w(v)} \max_{|z-\alpha| \leqslant \delta} |F_v(z)|, \tag{4}$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Re} \alpha = \sigma)$ — любое, $\delta = \dfrac{w^*(v)}{v}$; w, w^* — некоторые непрерывные монотонно возрастающие функции из класса сходимости W, т.е. $x^{-2}w(x)$, $x^{-2}w^*(x)$ из $L^1[1, \infty)$, $w(x) = o(w^*(x))$ при $x \to \infty$, $w(v) \geqslant N(v) + c(v)$, $w(v) = o(\ln M_F(\sigma)$ при $\sigma \to \infty$ [2]. Здесь c — функция из (2), $N(x) = \int\limits_0^x \frac{n(t)}{t} dt$, $n(t) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant t} 1$. Из (3) видно, что оценка типа (4) верна и для F.

Утверждение а) получается из (4) путем применения теоремы о двух константах (при этом предполагается, что $\alpha \in \gamma$) и некоторой леммы типа теоремы Бореля—Неванлинны (см. в [2]).

Чтобы из (4) получить утверждение б), возникает необходимость перейти к подобной оценке для круга $\{z\colon |z - \alpha| \leqslant \delta^2\}$. Поэтому поступаем следующим образом (см., например, в [7]). Применяя теорему о двух константах и учитывая асимптотическую оценку (она является следствием леммы типа Бореля—Неванлинны [2])

$$\ln M_F(\sigma + \delta) < (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma), \quad \sigma \to \infty, \quad \sigma \notin E,$$

можно считать, что оценка (4) имеет место для вертикального отрезка I длины 2δ (с центром в точке α) [7]. Теперь задача сводится к тому, чтобы отрезок I заменить на меньший отрезок $J \subset I$, длина которого $2\delta^2$. А эта задача обычно решается при помощи следующей леммы П. Турана [8]: если $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$ и

$$p(t) = \sum_{j=1}^{n} b_j e^{it\mu_j},$$

то

$$\|p\|_I \leqslant \Big(2e\frac{|I|}{|J|}\Big)^n \|p\|_J. \tag{5}$$

Здесь I, J — отрезки мнимой оси, $J \subset I$, $\|p\|_I = \max\limits_{it\in I} |p(t)|$.

Если I, J — прежние отрезки, учитывая оценку (5), остается перейти из отрезка J на круг $\{z\colon |z-\alpha| \leqslant \delta^2\}$.

Лемма Турана иногда заменяется на другое утверждение, основанное на свойствах преобразования Фурье (см. в [1], [3]).

Имеется и другой подход, основанный на применении известных формул А.Ф. Леонтьева для коэффициентов квазиполинома F_v [9, гл. I, § 2, п. 1]. В этом случае вне некоторого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ конечной меры

$$M_F(\sigma) \leqslant e^{w(v)} H_v(\delta^2) \max_{|z-\alpha|\leqslant\delta^2} |F_v(z)|, \tag{6}$$

где $H_v(\delta) = \int\limits_0^\infty M(r, q_v) e^{-r\delta}\, dr$, $q_v(z) = \prod\limits_{\lambda_n \leqslant v} \Big(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\Big)$. С учетом оценки $N(v) \leqslant w(v)$ из (6) получается, что

$$M_F(\sigma) \leqslant 2e^{3w(v)} \exp\Big(\max_{r\geqslant 0} \varphi(r)\Big) \max_{|z-\alpha|\leqslant\delta^2} |F_v(z)|,$$

где $\varphi(r) = n(v)\ln\Big(1 + \dfrac{r^2}{v^2}\Big) - r\delta^2$. Но максимум функции φ достигается в точке $r_0 \leqslant \dfrac{2n(v)}{\delta^2}$, и потому

$$\varphi(r_0) \leqslant n(v)\ln\Big(1 + 4\frac{v^2}{n^2(v)}\Big) = O\Big(n(v)\ln\frac{v}{n(v)}\Big)$$

при $\sigma \to \infty$. Значит,

$$M_F(\sigma) \leqslant e^{3w(v) + An(v)\ln\frac{v}{n(v)}} \max_{|z-\alpha|\leqslant\delta^2} |F_v(z)|. \tag{7}$$

С другой стороны, для $p = F_v$ первый сомножитель в (5) при $\sigma \to \infty$ тоже есть величина

$$\exp\Big(O\Big(n(v)\ln\frac{1}{\delta}\Big)\Big) \leqslant \exp\Big(O\Big(n(v)\ln\frac{v}{n(v)}\Big)\Big),$$

так как $\ln\frac{1}{\delta} \leqslant \ln\frac{v}{n(v)}$. А для получения из (7) требуемой оценки б) для минимума модуля $m_F(\sigma)$ важно [7], чтобы для функции $n(t)\ln\frac{t}{n(t)}$ существовала мажоранта w из класса W, что равносильно тому, что [3]

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\infty} \frac{n(t)\ln\frac{t}{n(t)}}{t^2}\, dt < \infty. \tag{8}$$

Но тогда во всех случаях при $\sigma \to \infty$ вне E, $\operatorname{mes} E < \infty$,

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|z-\alpha|\leqslant\delta^2} |F(z)| = |F(\xi)|.$$

Это — основная оценка для максимума модуля, откуда тем же способом, что и в статье [7], можно получить требуемый результат, если для круга $D(\xi, 2\delta)$ к F применить следующую лемму об оценке аналитической и ограниченной в единичном круге функции снизу.

Лемма 1. [10] *Пусть функция g аналитична и ограничена в круге $\{z\colon |z| < R\}$, $|g(0)| \geqslant 1$. Если $0 < r < 1 - N^{-1}$ $(N > 1)$, то существует не более чем счетное множество кружков*

$$V_n = \big\{z\colon |z - z_n| \leqslant \rho_n\big\}, \quad \sum_n \rho_n \leqslant Rr^N(1-r),$$

таких, что для всех z из круга $\{z\colon |z| \leqslant Rr\}$, но вне $\bigcup\limits_n V_n$ справедлива оценка

$$\ln|g(z)| \geqslant \frac{R-|z|}{R+|z|}\ln|g(0)| - 5NL, \tag{9}$$

где

$$L = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln^+|g(Re^{i\theta})|\,d\theta - \ln|g(0)|.$$

Условие (8) является естественным и, скорее всего, оптимальным при рассмотрении задач типа б). Это в какой-то мере подтверждается тем, что отказ от данного условия ведет к деформации отрезка I (см. ниже, а также [3]).

Для функций $F \in D_\infty(\Lambda)$ проблема о минимуме модуля в достаточно полной мере изучена в работе [3], где получены законченные результаты. Важно отметить, что в данной работе функция F может иметь сколь угодно быстрый рост. Некоторые важные теоремы о минимуме модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося лишь в полуплоскости Π_o, установлены в [11]. Соответствующие результаты о менее регулярном поведении функций $F \in D_o(\Lambda)$, а именно на кривых, примыкающих к мнимой оси, доказаны в статье [12].

Цель статьи — перенести результаты работы [3] о минимуме модуля функций из $D_\infty(\Lambda)$ на случай функций из класса $D_o(\Lambda)$ и тем самым усилить и обобщить соответствующие утверждения из [11], [12]. В этой связи отметим, что в случае, если $F \in D_o(\Lambda)$, возникают специфические трудности, связанные с оценкой размеров исключительных множеств $e \subset [-1, 0)$. Поэтому в случае полуплоскости Π_o (или единичного круга для лакунапных степенных рядов $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{p_n}$, $p_n \in \mathbb{N}$) поступают следующим образом. Фиксируется некоторая монотонно возрастающая непрерывная функция Φ и выделяется некоторый подкласс функций $F \in D_o(\Lambda)$, удовлетворяющих, например, условию

$$\varliminf_{\sigma\to 0-} \frac{\ln\mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0,$$

где $\mu(\sigma)$ — максимальный член ряда (1). Тогда переменная относительная плотность

$$\Delta(\sigma) = \frac{\operatorname{mes}(e \cap [\sigma, 0))}{|\sigma|}$$

исключительного множества $e \subset [-1, 0)$, вне которого для функции F справедливы требуемые оценки, обычно зависит только от поведения величины

$$\varphi(t)\int\limits_t^{\infty} \frac{w(x)}{x^2}dx,$$

где φ — функция, обратная к Φ, а $w = w(x)$ — некоторая функция распределения последовательности Λ [11]. Если, например, $w \in \underline{W}_{\,\varphi}$ (определение см. ниже) и $\varphi(x)w(x) = o(x)$ при $x \to \infty$, то, оказывается, нижняя плотность de множества e равна нулю. В остальном общие методы доказательства те же, что и в случае $D_\infty(\Lambda)$. Поэтому основной смысл данной работы заключается в том, чтобы более точно указать расположение и размеры исключительных кружков, вне которых верна требуемая оценка для функции $\ln|F(s)|$ в терминах минимума модуля в полуплоскости Π_0.

2. Определения и необходимые сведения

Пусть L — класс всех непрерывных, неограниченных и возрастающих на $[0,\infty)$ функций. Пусть

$$W=\{w\in L:\int\limits_1^\infty\frac{w(x)}{x^2}dx<\infty\}$$

— класс сходимости, а

$$\underline{W}_{\varphi}=\{w\in W:\ \varliminf_{t\to\infty}\varphi(t)J(t;w)=\ 0\},$$

где $\varphi\in L,\quad J(t;w)=\int\limits_t^\infty\frac{w(x)}{x^2}dx$. Введем также множество $W_{\varphi}\subset\underline{W}_{\varphi}$:

$$W_{\varphi}=\{w\in W:\ \lim_{t\to\infty}\varphi(t)J(t;w)=\ 0\}.$$

Будем говорить, что две функции φ и w из класса L согласованы, если $\varphi(x)w(x)=o(x)$ при $x\to\infty$.

Пусть $e\subset[-1,0)$ — измеримое по Лебегу множество. Верхней De и нижней de плотностями называются величины [11]:

$$De=\varlimsup_{\sigma\to0-}\frac{\operatorname{mes}(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|},\qquad de=\varliminf_{\sigma\to0-}\frac{\operatorname{mes}(e\cap[\sigma,0))}{|\sigma|}.$$

Если $De=de$, то говорят, что множество e имеет плотность.

Теоремы типа минимума модуля основаны на утверждениях, связанных с оценкой логарифма модуля аналитической и ограниченной в круге функции вне некоторого множества кружков снизу. Как было отмечено, для получения подобных оценок полезной является лемма 1. Сделаем одно замечание об исключительных кружках из этой леммы. При $L=0$ оценка (9) следует из неравенства Гарнака, и она верна всюду в круге $\{z\colon|z|<R\}$ (см. в [10]). Пусть теперь $L>0$. Оценка (9) справедлива в каждой так называемой легкой точке круга $\overline{D}=\{z\colon|z|\leqslant Rr\}$ [10]. Остальные точки круга $\overline{D}$ называются тяжелыми. С каждой тяжелой точкой z связан некоторый круг (см. в [10], [13]) $K_z=\{\xi\colon|\xi-z|\leqslant\rho_z\}$. Как известно, из покрытия множества тяжелых точек кружками K_z ограниченного радиуса ρ_z можно выделить не более чем счетное, при котором каждая тяжелая точка будет покрыта не более чем шестью кружками [14]. В круге $\overline{D}$ функция g имеет лишь конечное число нулей $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n$. Очевидно, они все являются тяжелыми точками.

Несколько увеличивая радиусы исключительных кружков, можно считать, что оценка (9) верна вне объединения открытых кружков $V_n=\{z\colon|z-z_n|<\rho_n\}$ с общей суммой радиусов

$$\sum_n\rho_n\leqslant Rr^N,\qquad r<1-\tfrac{1}{N},\quad N>1.$$

Тогда для всех $z\in\overline{D}$ вне $V=\bigcup\limits_n V_n$ подавно верна оценка

$$G(z)>-6NL,\quad G(z)=\ln|g(z)|-\frac{R-|z|}{R+|z|}\ln|g(0)|. \tag{10}$$

Далее, выкидывая из $\overline{D}$ все открытые кружки из V, содержащие $a_1,\,a_2,\,\ldots,\,a_n$ (их не более $6n$ штук), получим замкнутое множество, которое обозначим через C. Пусть

$$B=\bigl\{z\in C\colon G(z)\leqslant-6NL\bigr\}.$$

Множество B замкнуто, и $B \subset V$. Следовательно, по лемме Гейне—Бореля, существует конечное число кружков из V, покрывающих B. Значит, для любого z из $C \setminus B$ вне указанных кружков верна оценка (10). Таким образом, имеет место

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда имеется конечное число кружков $V_n = \{z\colon |z - z_n| < \rho_n\}$ $(1 \leqslant n \leqslant m)$ с общей суммой радиусов*

$$\sum_{n=1}^{m} \rho_n \leqslant Rr^N, \quad r < 1 - \tfrac{1}{N} \ \ (N \geqslant 1), \tag{11}$$

вне которых в круге $\{z\colon |z| \leqslant Rr\}$ верна оценка:

$$G(z) > -6NL,$$

где G — функция, определенная в формулах (10).

3. Основной результат

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow \infty)$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = D < \infty$,

$$Q(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{12}$$

Ясно,что Q — целая функция экспоненциального типа. Обозначим $M(r;Q) = \max\limits_{|z|=r} |Q(z)|$. Предположим, что последовательность Λ распределена так, что для некоторой функции $\psi \in W_{\varphi}$ выполняются оценки

$$-\ln|Q'(\lambda_n)| \leqslant \psi(\lambda_n) \qquad (n \geq 1). \tag{13}$$

Отметим,что в случае, если $F \in D_\infty(\Lambda)$, то требуется, чтобы оценка (13) выполнялась для $\psi \in W$, причем это требование существенно для выполнения оценок а),б) (см.Введение) [2].

Сформулируем основной результат. В указанных предположениях для Λ верна

Теорема 1. *Пусть φ — некоторая фиксированная функция из L, $p \in \underline{W}_{\varphi}$, где $p(x) = \ln M(x;Q)$, причем φ и p согласованы. Предположим, что максимальный член $\mu(\sigma)$ ряда (1) удовлетворяет условию*

$$\underline{\lim_{\sigma\to 0-}} \frac{\ln \mu(\sigma)}{\Phi\left(\frac{1}{|\sigma|}\right)} > 0 \tag{14}$$

(Φ — функция, обратная к φ). Тогда для любой функции $F \in D_o(\Lambda)$ существует измеримое множество $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности, что для любого вертикального отрезка

$$I_H = I_H(\sigma) = \{s = \sigma + it : |t - t_o| \leqslant H,\ \sigma < 0\} \ (H = \text{const}),$$

для всех σ, $-1 < \sigma_o \leqslant \sigma < 0$ вне e найдется деформированный отрезок $I_H^* = I_H^*(\sigma)$, обладающий свойствами:

1) $\text{mes}[I_H(\sigma) \cap I_H^*(\sigma)] \to |I_H| = 2H$ *при* $\sigma \to 0-$;
2) $\ln M_F(\sigma + d(\sigma)) < (1 + o(1)) \ln M_F(\sigma)$ *при* $\sigma \to 0-$ *вне* e,
где $d(\sigma) = \max\limits_{\tau \in I_H^*} |Re\tau - \sigma)|$;
3) $\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma)$ *при* $\sigma \to 0-$ *вне* e,
где $m_F^*(\sigma) = \min\limits_{\tau \in I_H^*} |F(\tau)|$.

Доказательство. Пусть $w_1(x) = N(ex)$, $\psi \in W_\varphi$ — функция из условия (13). Так как $p \in \underline{W}_\varphi$, то $w_1 \in \underline{W}_\varphi$. Следовательно, функция $w(x) = w_1(x) + \psi(x)$ принадлежит классу $\underline{W}_\varphi$. Далее, поскольку $\psi \in W_\varphi$, то $\varphi(x)\psi(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Но из условий теоремы, очевидно, следует, что $\varphi(x)w_1(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Тогда найдется функция $w^*(x) = \beta(x)w(x)$ $(0 < \beta(x) \uparrow \infty,\ x \to \infty)$, также принадлежащая $\underline{W}_\varphi$, $\varphi(x)w^*(x) = o(x)$ при $x \to \infty$. Обозначим $w_1^*(x) = \sqrt{\beta(x)}w(x)$.

Пусть $v = v(\sigma)$ — решение уравнения

$$w^*(v) = 3\ln\mu(\sigma). \tag{15}$$

Ясно, что $v(\sigma) \uparrow \infty$ при $\sigma \uparrow 0$. Поскольку $w^* \in \underline{W}_\varphi$, то найдется последовательность $\{\tau_j\}$ $(\tau_j \uparrow 0)$, такая, что

$$\lim_{v_j \to \infty} \varphi(v_j)J(v_j; w^*) = 0, \tag{16}$$

где $v_j = v(\tau_j) \to \infty$ $(\tau_j \to 0-)$,

$$J(v_j; w^*) = \int_{v_j}^{\infty} \frac{w^*(x)}{x^2}dx.$$

Из условий (14) — (16) и условий согласованности функций φ и w^* следует, что [12]

$$\lim_{\tau_j \to 0-} \frac{1}{|\tau_j|}J(v_j; w^*) = 0, \quad v_j = v(\tau_j), \tag{17}$$

$$\lim_{\sigma \to 0-} \frac{w^*(v(\sigma))}{|\sigma|v(\sigma)} = 0. \tag{18}$$

Но при выполнении условий (15), (17), (18) применима лемма типа Бореля-Неванлинны, согласно которой при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e_1 \subset [-1, 0)$, $\mathrm{mes}(e_1 \cap [\tau_j, 0)) = o(|\tau_j|)$, $\tau_j \to 0-$, верны оценки [12]: $\sigma + 3\delta^* < 0$, и

$$\mu(\sigma + 3\delta^*) \le \mu(\sigma)^{1+o(1)}, \quad \delta^* = \frac{w^*(v(\sigma))}{v(\sigma)}. \tag{19}$$

Применяя оценки (10), (19) и другие рассуждения, о которых было сказано в п.1 (см., например, в [12]), при $\sigma \to 0-$ вне исключительного множества e_1 получаем, что:

$$\begin{aligned} &1) \quad \ln M_F(\sigma + \delta^*) < (1 + o(1))\ln M_F(\sigma); \\ &2) \quad M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{|\xi-\alpha|\leqslant\delta} |F(\xi)|, \end{aligned} \tag{20}$$

где α $(Re\alpha = \sigma)$ — любое комплексное число из полуплоскости Π_o,

$$\delta = \delta(v) = \frac{w_1^*(v)}{v}, \qquad \delta^* = \delta^*(v) = \frac{w^*(v)}{v}, \qquad v = v(\sigma).$$

Пусть $D_a = [-1, 0) \setminus e_1$. Тогда для $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to 0-$ из (20), очевидно, имеем

$$M_F^{1+o(1)}(\sigma) \leqslant \max_{\xi \in K} |F(\xi)| = |F(\xi^*)|, \tag{21}$$

где $\xi^* \in \partial K$, K — описанный вокруг круга $\bar{D}(\alpha, \delta) = \{\xi \colon |\xi - \alpha| \leqslant \delta\} \subset \Pi_o$ квадрат, стороны которого параллельны осям координат.

Применим теперь лемму 2 к функции $g(z) = F(z+\xi^*)$, полагая $N = 4$, $R = \delta^*$, $r = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta(v)}}$. Так как $Rr = 2\sqrt{2}\,\delta$ — длина диагонали квадрата K, то $K \subset \bar{D}(\xi^*, Rr)$. Если $r < 1 - \frac{1}{N}$, то согласно лемме 2 для всех z из круга $\bar{D}(\xi^*, Rr)$ вне конечного числа исключительных кружков V_n, радиусы которых удовлетворяют условию (11), при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to 0-$ верна оценка

$$F(\xi^*)| \leqslant |F(z)|^{1+o(1)} \leqslant M_F^{1+o(1)}(\sigma + \delta^*). \tag{22}$$

Количество исключительных кружков для каждого квадрата свое. Обозначая это число через $m(K)$, имеем

$$\sum_{n=1}^{m(K)} \rho_n \leqslant Rr^4 \leqslant \frac{64\,\delta}{\beta^{3/2}(v)}. \tag{23}$$

Таким образом, из (21), (22) получаем, что при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to \infty$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln |F(z)|, \tag{24}$$

если $z \in K \setminus \bigcup_{n=1}^{m(K)} V_n$ (K — рассмотренный выше квадрат с центром в точке $\alpha = \sigma + it$).

Для любого $\sigma \in D_a$ рассмотрим прямоугольник

$$P = \{z = x + iy \colon |\sigma - x| \leqslant \delta,\ |y - t_0| \leqslant H\} \quad (H = \mathrm{const}).$$

Ясно, что $P \subset \Pi_0$ при $\sigma' < \sigma < 0$.

Рассмотрим минимальное число квадратов типа K, не имеющих попарно общих внутренних точек и покрывающих P. Исключительное множество $e = \{e_i\}$ прямоугольника P состоит из исключительных кружков квадратов покрытия и их конечное число. Кружки e_i могут пересекаться и образовывать так называемые гроздья $d_K = \bigcup_{i=1}^{m_K} e_i$ — связные компоненты e.

Пусть Π — проекция множеств d_K, имеющих непустое пересечение с отрезком $I_H(\sigma)$, на этот отрезок. Тогда $\Pi = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$, где I_j — некоторые попарно непересекающиеся отрезки, $I_j \subset I_H(\sigma)$, причем в силу (23)

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| \leqslant 2 \sum_{j=1}^{n} \rho_j \leqslant \frac{\mathrm{const}}{\beta^{3/2}(v)}$$

при $\sigma' < \sigma'' < \sigma < 0$.

Измененный отрезок I_H^* строится следующим образом. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ находим наименьший прямоугольник P_j со стороной I_j и охватывающий соответствующие множества d_K. Участок I_j отрезка I_H заменим на ломаную $\gamma_j = \partial P_j \backslash I_j$. Если P_j примыкает к какой-то горизонтальной стороне P, то из γ_j исключаем и отрезок, целиком лежащий на этой стороне P. Проделав эту процедуру с каждым отрезком I_j, получим требуемый "отрезок" I_H^*.

Из непрерывности функции F следует справедливость оценки (24) и на границах гроздей d_K. Следовательно, оценка (24) имеет место на всем "отрезке" I_H^*, и при $\sigma \in D_a$ и $\sigma \to 0-$

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1)) \ln m_F^*(\sigma),$$

где $m_F^*(\sigma) = \min\limits_{\tau \in I_H^*(\sigma)} |F(\tau)|$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. *В условиях теоремы 1 в [12] доказано более слабое асимптотическое соотношение* $d(F;\gamma) = 1$, *где*

$$d(F;\gamma) = \varlimsup_{s\in\gamma,\ \mathrm{Re}\, s \to 0-} \frac{\ln |F(s)|}{\ln M_F(\mathrm{Re}\, s)},$$

γ — *произвольная кривая из* Π_o, *оканчивающаяся на мнимой оси.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а функция l,*

$$l(r) = N(r)\ln\frac{r}{N(r)}, \qquad N(t) = \int\limits_0^t \frac{n(x)}{x}dx, \qquad n(t) = \sum_{\lambda_j \le t} 1,$$

принадлежит классу W_φ. Тогда при $\sigma \to 0-$ вне некоторого множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой плотности

$$\ln M_F(\sigma) = (1 + o(1))\ln m_F(\sigma), \tag{25}$$

где $m_F(\sigma) = \min\limits_{\tau \in I_H} |F(\tau)|$, $I_H = I_H(\sigma)$ $(\sigma < 0-)$ — вертикальный отрезок длины $2H$.

Если $l \in \underline{W}_\varphi$, то асимптотическое равенство (25) верно при $\sigma \to 0-$ вне множества $e \subset [-1, 0)$ нулевой нижней плотности.

Теорема 2 доказывается тем же методом, использованным в [11], если учесть способ оценки мер исключительных множеств типа e_1 из доказательства теоремы 1.

Отметим, что в статье [11] функция φ удовлетворяет некоторым дополнительным ограничениям. В теоремах 1, 2 требуется лишь, что $\varphi \in L$. Доказательство теоремы 2 будет приведено в другой статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гайсин А.М. *Оценка ряда Дирихле, показатели которого — нули целой функции с нерегулярным поведением* // Матем. сб. 1994. Т.185, №2. С. 33–56.
2. Гайсин А.М. *Оценки роста и убывания целой функции бесконечного порядка на кривых* // Мат. сб. 2003. Т.194, №8. С.55–82.
3. Гайсин А.М., Рахматуллина Ж.Г. *Оценка суммы ряда Дирихле через минимум модуля на вертикальном отрезке* // Матем. сб. 2011. Т.202. №12. С. 23–56.
4. K.G. Binmore *A density theorem with an application to gap power series* // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V.148. №2. P. 367–384.
5. R.M. Redheffer *Completeness of sets of complex exponentials.* // Advances in Mathematics. 1977. V.24. P. 1–62.
6. Красичков-Терновский И.Ф. *Интерпретация теоремы Берлинга-Мальявена о радиусе полноты* //Матем.сб.1989. Т.180. №3. С. 397–423.
7. Гайсин А.М. *Об одной теореме Хеймана* // Сиб. матем. журн. 1998. Т.39, №3. С. 501–516.
8. P. Turan *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen.* Budapest: Akademiai Kiado, 1953.
9. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980. 384 с.
10. Гайсин А.М. *Об одной гипотезе Полиа* // Изв. РАН Сер. матем. 1994. Т. 58, №2. С. 73–92.
11. Гайсин А.М. *Поведение логарифма модуля суммы ряда Дирихле, сходящегося в полуплоскости* // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 53, № 4. С. 173–185.
12. Гайсин А.М., Белоус Т.И. *Оценка на кривых функций, представленных в полуплоскости рядами Дирихле* // Сиб. матем. журн. 2003. Т.44, № 1. С. 27–43.
13. Говоров Н.В. *Об оценке снизу функции, субгармонической в круге* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков: Изд-во ХГУ, 1968. № 6. С. 130–150.
14. Ландкоф Н.С. *Основы современной теории потенциала.* М.: Наука, 1996.

Ахтяр Магазович Гайсин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г.Уфа, Россия
E-mail: gaisinam@mail.ru