ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 144-152.

УДК 517.9

ТЕОРЕМА ВИНЕРА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ФУНКЦИЙ С РЯДАМИ ФУРЬЕ, СУММИРУЕМЫМИ С ВЕСОМ

И.И. СТРУКОВА

Аннотация. В работе определяется банахова алгебра периодических на бесконечности функций. Для таких функций вводится понятие ряда Фурье и его абсолютной сходимости, а также понятие обратимости. Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций, коэффициенты Фурье которых суммируемы с весом.

Ключевые слова: банахово пространство, медленно меняющиеся на бесконечности функции, периодические на бесконечности функции, теорема Винера, абсолютно сходящийся ряд Фурье, обратимость.

Mathematics Subject Classification: 46J10.

1. Введение

Пусть $l^1(\mathbb{Z})$ — банахово пространство двусторонних суммируемых последовательностей $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)| < \infty$.

Символом $C_\omega(\mathbb{R})$ будем обозначать банахово пространство непрерывных ω-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Будем говорить, что функция $f \in C_\omega(\mathbb{R})$ обладает *абсолютно сходящимся рядом Фурье*, если она может быть представлена в виде ряда $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a(k)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{R}$, где $a \in l^1(\mathbb{Z})$. Совокупность всех таких функций обозначим через $AC_\omega(\mathbb{R})$. Заметим, что $AC_\omega(\mathbb{R})$ является банаховой алгеброй (см. [1]) с поточечным умножением и нормой

$$\|f\|_{AC} = \|a\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)|.$$

В терминах введенных обозначений теорема Винера формулируется следующим образом:

Теорема 1. *Если функция $f \in AC_\omega(\mathbb{R})$ и $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то $1/f \in AC_\omega(\mathbb{R})$, т.е. $1/f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b(k)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, где $b \in l^1(\mathbb{Z})$.*

Доказательство теоремы 1 приводится в [2].

Теорема Винера обобщалась в нескольких направлениях. Отметим теорему Бохнера-Филлипса [3] для функций со значениями в банаховой алгебре, а также статьи [4], [5], в которых теорема Винера была доказана для операторов, матрицы которых имеют абсолютно суммируемые диагонали. Ссылки на исследования, связанные с приложениями результатов, имеются в [6].

I.I. Strukova, Wiener's theorem for periodic at infinity functions with summable weighted Fourier series.

Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00378).

Поступила 30 июня 2012 г.

В данной статье теорема Винера распространяется на класс периодических на бесконечности функций.

Далее введем множество периодических на бесконечности функций.

Пусть X – комплексное банахово пространство. $End\,X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих из X в X.

Символом $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать банахово пространство равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X$.

Символом $C_0 = C_0(\mathbb{R}, X)$ будем обозначать замкнутое подпространство из $C_{b,u}$ убывающих на бесконечности функций.

В банаховом пространстве $C_{b,u}$ рассмотрим изометрическую группу операторов (или представление) $S : \mathbb{R} \to End\,C_{b,u}$, действующую по правилу

$$(S(\alpha)x)(t) = x(t+\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Определение 1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *медленно меняющейся или стационарной на бесконечности*, если

$$S(\alpha)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X) \text{ для всех } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Например, функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ вида $f(t) = \sin \ln(1+t^2)$ является медленно меняющейся на бесконечности.

Определение 2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega > 0$, если

$$S(\omega)x - x \in C_0(\mathbb{R}, X).$$

Определение периодической на бесконечности функции было предложено А.Г. Баскаковым и использовалось в статье [7].

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl} = C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, а множество периодических на бесконечности функций периода ω – символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$.

В случае $X = \mathbb{C}$ для рассматриваемых пространств будем использовать обозначения $C_{b,u}(\mathbb{R}),\ C_0(\mathbb{R}),\ C_{sl}(\mathbb{R}),\ C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$.

Отметим, что $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ – банахово пространство с нормой

$$\|x\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|_X.$$

Кроме того, $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ образуют банаховы алгебры с поточечным умножением, если X – банахова алгебра.

Определение 3. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ будем называть ряд вида

$$x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},$$

а функции $x_n, n \in \mathbb{Z}$, определяемые по формулам

$$x_n(t) = \frac{e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}}{\omega} \int_0^\omega x(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau,\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

— *коэффициентами Фурье* функции x. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье функции x абсолютно сходится, если найдутся функции $y_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, такие, что $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X)$ и $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty$.

Отметим, что слово "обобщенный"в дальнейшем будет опускаться.

Отметим также, что рассматриваемый ряд Фурье может не сходиться к функции x и понимается как формальный ряд.

Пример 1. Примером функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье является функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ вида

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{n^2}\sin(\alpha_n \ln(1+t^2))\right) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t\in\mathbb{R},\ \alpha_n\in\mathbb{R}. \tag{3}$$

Отметим, что функции $f_n, n \in \mathbb{Z}$, построенные по функции f по формуле (2), не совпадают с функциями $y_n : t \mapsto \frac{1}{n^2}\sin\alpha_n \ln(1+t^2),\ t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}$, однако, $f_n - y_n \in C_0(\mathbb{R})$.

Замечание 1. Если $x \in C_\omega(\mathbb{R})$, то ряд Фурье из определения 3 совпадает с обычным рядом Фурье функции x.

Далее будем использовать следующее обозначение:

$$e_n(t) = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Заметим, что отображение $x \mapsto P_n x = x_n e_n : C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X) \to C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X),\ n\in\mathbb{Z}$ является ограниченным оператором с $\|P_n\| \le 1$. Кроме того, $Im(P_n^2 - P_n) \subset C_0(\mathbb{R}, X)$ для образа $Im(P_n^2 - P_n)$ оператора $P_n^2 - P_n$ (доказательство приводится в конце раздела 3), однако операторы $P_n,\ n\in\mathbb{Z}$ не являются проекторами.

До конца этого раздела символ X будет обозначать банахову алгебру.

Определение 4. Функцию $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ назовем *обратимой относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $y \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$, такая, что $xy - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Функцию y будем называть *обратной к x относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R}, X)$.

Замечание 2. Непосредственно из определения 4 следует, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда она представима в виде $x = y + x_0$, где $x_0 \in C_0(\mathbb{R}, X)$, а функция $y \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ такова, что $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}} \|y(t)\|_X > 0$. Из определения 4 также следует, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда существует такое число $A > 0$, что $\inf\limits_{|t|>A} \|x(t)\|_X > 0$.

Нетрудно видеть, что если y_1, y_2 – обратные к $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ функции, то $y_1 - y_2 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

Рассмотрим функцию $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и введем обозначение $d_a(k) = \|a_k\|_\infty,\ k\in\mathbb{Z}$, где a_k – k-й коэффициент Фурье функции a, определяемый по формуле (2).

Для рассматриваемой функции будем считать выполненным одно из условий следующего предположения:

Предположение 1. *Для функции $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ выполнено одно из условий:*

1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_a(k)\alpha(k) < \infty$, где $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ – весовая функция, для которой выполнено соотношение $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln\alpha(k)}{|k|} = 0$;

2) $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_a(k)|k|^\gamma = 0, \quad k\in\mathbb{Z},\ \gamma > 1$;

3) $d_a(k) \le Const\exp(-\varepsilon|k|), \quad k\in\mathbb{Z},\ \varepsilon > 0$.

В частности, условие выполнено, если ряд Фурье функции a имеет конечное число отличных от нуля коэффициентов Фурье, т.е. существует такое $M \in \mathbb{N}$, что $d_a(k) = 0,\ |k| \ge M+1$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 2. *Если для обратимой относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ функции $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ выполнено одно из условий 1) – 3) предположения 1, то обратная к ней относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ функция b удовлетворяет соответствующим условиям:*

1') $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_b(k)\alpha(k) < \infty$;

2') $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_b(k)|k|^\gamma = 0$;

3') $d_b(k) \le Const \exp(-\varepsilon_0|k|), \quad k \in \mathbb{Z}$, *для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$.

Заметим, что величины $Const$ и ε_0 зависят от величин $Const$ и ε из условий предположения 1.

2. Периодические векторы и их ряды Фурье

Пусть $\mathcal{B}$ – банахова алгебра с единицей и ω – положительное число. Рассмотрим действующую в ней $\omega-$периодическую изометрическую сильно непрерывную группу операторов (представление) $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, обладающую свойствами

$$\begin{array}{l} T(t)(ab) = T(t)a \cdot T(t)b, \\ T(t)e = e,\ t \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{4}$$

где a, b – произвольные элементы из $\mathcal{B}$, а e – единица в алгебре $\mathcal{B}$.

Таким образом, каждый из операторов $T(t), t \in \mathbb{R}$ является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{B}$, и каждая функция $t \mapsto T(t)a : \mathbb{R} \to \mathcal{B},\ a \in \mathcal{B}$ является непрерывной ω-периодической функцией.

Из приведенных свойств непосредственно следует, что если элемент $a \in \mathcal{B}$ обратим, то

$$e = T(t)e = T(t)(aa^{-1}) = (T(t)a)T(t)a^{-1} = (T(t)a^{-1})T(t)a,\ a \in \mathcal{B},$$

и, следовательно, $(T(t)a)^{-1} = T(t)a^{-1}$.

Рассмотрим ряд Фурье (см. [8])

$$T(t)a \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{R},$$

функции $t \mapsto T(t)a : \mathbb{R} \to \mathcal{B},\ a \in \mathcal{B}$, где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt,\ n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Ряд $a \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ назовем *рядом Фурье* элемента $a \in \mathcal{B}$, а $a_n, n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициентами Фурье* этого элемента.

Если ряд Фурье элемента $a \in \mathcal{B}$ *абсолютно сходится*, т.е. выполнено условие $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty$, то справедливо равенство $a = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$.

Лемма 1. *Пусть* $a \in \mathcal{B}$. *Тогда* $T(\alpha)a_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}a_n, n \in \mathbb{Z}$, *для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$, *где* $a_n,\ n \in \mathbb{Z}$, — *коэффициенты Фурье элемента* a. *Причем операторы* P_n, *определяемые формулой* $P_n a = a_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt,\ n \in \mathbb{Z}$, *являются проекторами с* $\|P_n\| \le 1,\ n \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $a \in \mathcal{B}$ и зафиксируем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $a_n,\ n \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье элемента a, определяемые по формуле (5). Тогда для них справедлива следующая цепочка равенств

$$T(\alpha)a_n = T(\alpha)\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt\right) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\alpha)T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\alpha+t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}}{\omega}\int\limits_\alpha^{\omega+\alpha} T(\tau)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau =$$

$$= \frac{e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}d\tau = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}a_n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Т.е. мы показали, что $T(\alpha)a_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\alpha}a_n, n\in\mathbb{Z}$, для любого $\alpha\in\mathbb{R}$.

Покажем теперь, что операторы $P_n,\ n\in\mathbb{Z}$, определяемые формулой $P_na = a_n$, являются проекторами, т.е. $P_n^2 = P_n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Пусть $a\in\mathcal{B}$. Тогда

$$P_na = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt,\ n\in\mathbb{Z},$$

$$P_n^2a = P_n(P_na) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)a_ne^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega a_ndt = a_n = P_na,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Покажем теперь, что $\|P_n\|\le 1,\ n\in\mathbb{Z}$ (при доказательстве используется свойство $\|T(t)\| = 1,\ t\in\mathbb{R}$).

$$\|P_n\| = \sup_{\|a\|\le 1}\|P_na\| = \sup_{\|a\|\le 1}\|\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt\| \le$$

$$\le \sup_{\|a\|\le 1}\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \|T(t)a\|dt \le \sup_{\|a\|\le 1}\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \|T(t)\|\|a\|dt \le 1.$$

Лемма доказана.

Для элемента $a\in\mathcal{B}$ рассмотрим оператор $A\in End\,\mathcal{B}$ вида

$$Ax = ax,\ x\in\mathcal{B}.$$

Оператору A поставим в соответствие ω-периодическую операторнозначную функцию $\Phi_A:\mathbb{R}\to End\,\mathcal{B}$, определяемую формулой

$$\Phi_A(t) = T(t)AT(-t),\ t\in\mathbb{R}.$$

Функции Φ_A поставим в соответствие ее ряд Фурье

$$\Phi_A(t)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_ne^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\quad t\in\mathbb{R},$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$A_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)AT(-t)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt,\ n\in\mathbb{Z}. \tag{6}$$

Ряд $\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_n$ назовем *рядом Фурье оператора* A, а операторы A_n – *коэффициентами Фурье* этого оператора. Определим двустороннюю числовую последовательность $(d_A(n))$, положив $d_A(n) = \|A_n\|,\ n\in\mathbb{Z}$.

Лемма 2. *Для коэффициентов Фурье $A_n, n\in\mathbb{Z}$, оператора A справедливы представления $A_nx = a_nx, n\in\mathbb{Z}, x\in\mathcal{B}$, причем $\|A_n\| = \|a_n\|, n\in\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Покажем, что $A_n x = a_n x$ для всех $x \in \mathcal{B}$.

Используя формулы (5) и (6), а также тот факт, что операторы $T(t), t \in \mathbb{R}$ образуют гомоморфизм алгебры, получаем

$$A_n x = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)AT(-t)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)(aT(-t)x)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (T(t)a)T(t)(T(-t)x)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)ae^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt\right)x = a_n x.$$

Для любого $x \in \mathcal{B}$ справедливо неравенство $\|A_n x\| \le \|a_n\|\|x\|$.

Поскольку $a_n = A_n e$ и $\|e\| = 1$, то $\|A_n\| = \|a_n\|, n \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Отметим, что если ряд Фурье оператора A абсолютно сходится, т.е.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_A(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty,$$

то функция Φ_A непрерывна в равномерной операторной топологии.

Для рассматриваемого оператора будем считать выполненным одно из условий следующего предположения:

Предположение 2. *Для оператора $A \in End\,\mathcal{B}$ выполнено одно из условий:*

1) $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_A(k)\alpha(k) < \infty$*, где* $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$ *– весовая функция, для которой выполнено соотношение* $\lim\limits_{|k|\to\infty} \frac{\ln\alpha(k)}{|k|} = 0$;

2) $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_A(k)|k|^\gamma = 0, \quad k \in \mathbb{Z},\ \gamma > 1$;

3) $d_A(k) \le Const\exp(-\varepsilon|k|), \quad k \in \mathbb{Z},\ \varepsilon > 0$.

В частности, условие выполнено, если ряд Фурье оператора A имеет конечное число отличных от нуля коэффициентов Фурье, т.е. существует такое $M \in \mathbb{N}$, что $d_A(k) = 0,\ |k| \ge M+1$.

Далее используется следующая

Теорема 3. *Пусть оператор $A \in End\,\mathcal{B}$ обратим и для него выполнено одно из условий 1) – 3) предположения 2. Тогда обратный оператор $B = A^{-1} \in End\,\mathcal{B}$ удовлетворяет соответствующим условиям:*

1') $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} d_B(k)\alpha(k) < \infty$;

2') $\lim\limits_{|k|\to\infty} d_B(k)|k|^\gamma = 0$;

3') $d_B(k) \le Const\exp(-\varepsilon_0|k|), \quad k \in \mathbb{Z}$*, для некоторого* $\varepsilon_0 > 0$.

Данное утверждение следует из [9; теорема 1].

3. Элементы гармонического анализа периодических на бесконечности функций

Всюду в этом параграфе через X обозначается банахова алгебра с единицей.

Ясно, что группа сдвигов S, определенная по формуле (1), в пространстве периодических на бесконечности функций не является периодической.

В дальнейшем символом $\mathcal{B}$ будем обозначать фактор-пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$, которое становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом

$$\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}, \ \ \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathcal{B}. \qquad (7)$$

В нем построим изометрическую группу операторов $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, действующую по правилу

$$T(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x} = S(t)x + C_0(\mathbb{R}, X),\ t \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

где x – некоторый представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$.

Поскольку

$$T(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{S(\omega)x} = S(\omega)x + C_0(\mathbb{R}, X) =$$
$$= (S(\omega)x - x) + x + C_0(\mathbb{R}, X) = x + C_0(\mathbb{R}, X) = \widetilde{x},$$

то представление T является ω-периодическим.

Кроме того, из сильной непрерывности представления S следует сильная непрерывность представления T.

В терминах группы T принадлежность класса $\widetilde{x}$ алгебре $\mathcal{B}$ будет означать, что $T(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$.

Ряд Фурье функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, являющейся представителем класса $\widetilde{x}$, имеет вид $x(\tau) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(\tau)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}$, где коэффициенты Фурье $x_n, n \in \mathbb{Z}$ определяются по формуле (2), а среднее x_0 имеет вид

$$x_0(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3. *Коэффициенты Фурье функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обладают свойством: $x_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X),\ n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Вначале покажем, что среднее x_0 функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Возьмем произвольное число $\alpha \in \mathbb{R}$ и покажем, что $(S(\alpha)x_0 - x_0) \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Непосредственно из леммы (1) следует, что для класса $\widetilde{x}_0$, содержащего функцию x_0, справедливо равенство $T(\alpha)\widetilde{x}_0 = \widetilde{x}_0$, т.е. x_0 обладает свойством $(S(\alpha)x_0 - x_0) \in C_0(\mathbb{R}, X)$. В силу произвольности выбора числа $\alpha \in \mathbb{R}$ из определения медленно меняющейся на бесконечности функции получаем, что $x_0 \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$.

Теперь докажем это свойство для коэффициентов Фурье $x_n,\ n \in \mathbb{Z}$ функции x. Введя обозначение $y(t) = x(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$, получаем, что $S(\omega)y - y \in C_0(\mathbb{R}, X)$, т.е. $y \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$. Тогда среднее функции y, определяемое формулой $y_0(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $C_{sl}(\mathbb{R}, X)$. Сравнивая последнюю формулу с формулой (2), получаем, что $x_n \in C_{sl}(\mathbb{R}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$. Лемма доказана.

Итак, у нас имеется фактор-алгебра $\mathcal{B} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$ и действующая в ней ω-периодическая сильно непрерывная изометрическая группа операторов (представление) T, определяемая формулой (8).

Представлению T поставим в соответствие его ряд Фурье

$$T(t)\widetilde{x} \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widetilde{P_n}\widetilde{x}e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{R},\ \widetilde{x} \in \mathcal{B}.$$

Коэффициенты Фурье представления T имеют вид

$$\widetilde{P_n}\widetilde{x} = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)\widetilde{x}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt,\ n \in \mathbb{Z}.$$

На представителях рассматриваемых классов имеем

$$(P_n x)(\tau) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (S(t)x)(\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}t}dt = x_n(\tau)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\tau},$$

где $x_n, n \in \mathbb{Z}$ – коэффициенты Фурье функции x, определяемые по формуле (2).

Из формулы (5) непосредственно следует, что коэффициенты Фурье представления T обладают следующим свойством

$$\widetilde{P_n}\widetilde{x} = \widetilde{x_n},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть x – представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$. Тогда последнее равенство означает, что $\widetilde{P_n x} = \widetilde{x_n}$, т.е. $P_n x - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X),\ n \in \mathbb{Z}$. В силу того, что $\widetilde{P_n}$ являются проекторами, справедливо равенство $\widetilde{P_n}^2\widetilde{x} = \widetilde{P_n}\widetilde{x} = \widetilde{x_n}$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\widetilde{P_n^2 x} = \widetilde{x_n}$, т.е. $P_n^2 x - x_n \in C_0(\mathbb{R}, X),\ n \in \mathbb{Z}$. Отсюда получаем, что $P_n^2 x - P_n x \in C_0(\mathbb{R}, X),\ n \in \mathbb{Z}$, т.е. $Im(P_n^2 - P_n) \subset C_0(\mathbb{R}, X)$.

Если ряд Фурье класса $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$ *абсолютно сходится*, т.е. выполнено условие

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\widetilde{x_n}\| < \infty,$$

то из свойств нормы в фактор-пространстве следует, что в этом случае можно найти такие представители y_n классов $\widetilde{x_n}$, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty.$$

Заметим, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ тогда и только тогда, когда обратим класс $\widetilde{x} \in \mathcal{B}$, ее содержащий. Это утверждение непосредственно вытекает из определения 4.

4. Доказательство теоремы 2

Теперь для получения основного результата в качестве алгебры $\mathcal{B}$ рассмотрим фактор-алгебру $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$, а в качестве представления $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$ рассмотрим ω-периодическую группу изометрических операторов $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, определяемую по формуле (8).

Покажем, что группа T обладает свойствами (4).

С использованием формул (7) и (8) получаем, что

$$T(t)(\widetilde{x}\widetilde{y}) = T(t)(\widetilde{xy}) = \widetilde{S(t)(xy)} = S(t)xS(t)y + C_0(\mathbb{R}, X) =$$
$$= (T(t)\widetilde{x})\,T(t)\widetilde{y},\ x \in \widetilde{x}, y \in \widetilde{y},\ t \in \mathbb{R},$$

т.е. для группы T свойство (4) действительно выполняется.

Рассмотрим оператор $A \in End\,\mathcal{B}$ следующего вида

$$A\widetilde{x} = \widetilde{a}\widetilde{x}, \quad \widetilde{a} \in \mathcal{B}. \tag{9}$$

Оператору A поставим в соответствие ω-периодическую операторнозначную функцию $\Phi_A : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{B}$, определяемую формулой

$$\Phi_A(t) = T(t)AT(-t),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Для рассматриваемого оператора справедлива теорема 3.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{B} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)/C_0(\mathbb{R}, X)$ и действующую в ней ω-периодическую изометрическую группу операторов T, определяемую по формуле (8).

По обратимой функции $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$, объявленной в условиях теоремы, построим класс $\widetilde{a} \in \mathcal{B}$, который также будет обратим. Обозначив обратный класс символом $\widetilde{b}$, получаем, что $\widetilde{a}\widetilde{b} = \widetilde{1}$.

Введем в рассмотрение оператор $A \in End\,\mathcal{B}$, определяемый формулой (9). Это оператор умножения на элемент $\widetilde{a} \in \mathcal{B}$, причем он обратим. Тогда его обратный имеет вид

$$B\widetilde{x} = \widetilde{b}\widetilde{x}, \quad \widetilde{b} \in \mathcal{B}.$$

Для оператора A справедлива теорема 3, и, значит, можно найти такой представитель b класса $\widetilde{b}$, что $ab - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$, и он удовлетворяет сооответствующему условию из теоремы 2. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ряд Фурье обратной относительно $C_0(\mathbb{R}, X)$ функции также абсолютно сходится.*

Следствие 2. *Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}, X)$ и ее ряд Фурье абсолютно сходится, то существует функция $b \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, такая, что $ab - 1 \in C_0(\mathbb{R}, X)$.*

В заключение отметим, что в недавно вышедшей статье [10] были введены в рассмотрение почти периодические на бесконечности функции, и естественным образом для их рядов Фурье возникают вопросы, аналогичные рассматриваемым в данной статье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кахан Ж.П. *Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.* М.: Мир. 1976. 203 с.
2. Винер Н. *Интеграл Фурье и некоторые его приложения.* М.: Физматлит. 1963. 121 с.
3. S. Bochner, R.S. Fillips *Absolutely convergent Fourier expansion for non-commutative normed rings* // Ann. of math. 1942. № 3. P. 409–418.
4. Баскаков А.Г. *Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 6. С. 3–26.
5. Баскаков А.Г. *Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ* // Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38. № 1. С. 14–28.
6. K. Groechenig *Wiener's lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance and its applications* // Birkhaeuser, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston. 2010. P. 60–63.
7. Калужина Н.С. *Медленно меняющиеся функции, периодические на бесконечности функции и их свойства* // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2010. № 2. С. 97–102.
8. Баскаков А.Г. *Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов* // СМФН. 2004. Т. 9. С. 64–66.
9. Баскаков А.Г. *Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц* // Матем. заметки. 1992. Т. 52. №2. С. 17–26.
10. Баскаков А.Г. *Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* / А.Г. Баскаков // УМН. 2013. Т. 68. №1(409). С. 77–128.

Ирина Игоревна Струкова,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д.1,
394006, г.Воронеж, Россия
E-mail: `irina.k.post@yandex.ru`