ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 130-143.

УДК 517.9

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ В $H(\mathbb{C})$ С УЗЛАМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

С.Г. МЕРЗЛЯКОВ, С.В. ПОПЕНОВ

Аннотация. В пространстве всех целых функций изучена проблема кратной интерполяции функциями из замкнутого подпространства, инвариантного относительно оператора дифференцирования. Дискретное множество узлов кратной интерполяции лежит на вещественной оси комплексной плоскости. Доказательство основано на переходе от этого подпространства к его подпространству, состоящему из сумм всех рядов экспонент, которые сходятся в топологии равномерной сходимости на компактах. Получен критерий разрешимости проблемы кратной интерполяции с вещественными узлами рядами экспонент в терминах расположения показателей экспонент.

Ключевые слова: целая функция, кратная интерполяция, ряд экспонент, идеал, представление Фишера.

Mathematics Subject Classification: 30E05, 46N20.

1. Предварительные сведения

Обозначим через $H(\mathbb{C})$ пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. В качестве следствия из классических теорем Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера получается, что разрешима следующая проблема кратной интерполяции функциями из $H(\mathbb{C})$ (см. ([1], стр. 32)).

Для любой локально аналитической функции ω на заданном дискретном множестве точек $\{\mu_k\}$ в комплексной плоскости (которые будем называть узлами интерполяции) и натуральных чисел m_k (которые будем называть кратностями узлов μ_k, $k \in \mathbb{N}$) существует целая функция g,, такая что $|\omega(z) - g(z)| = O(|z-\mu_k|^{m_k})$ при $z \to \mu_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Это утверждение равносильно разрешимости проблемы кратной интерполяции целыми функциями в традиционной формулировке.

Для произвольного дискретного множества узлов интерполяции $\mu_k \in \mathbb{C}$ с кратностями m_k, и для любых интерполяционных данных

$$b_k^j \in \mathbb{C},\ j = 0, 1, \cdots, m_k - 1,\ k \in \mathbb{N}$$

существует такая целая функция g, что

$$g^{(j)}(\mu_k) = b_k^j,\ j = 0, 1, \cdots, m_k - 1,\ k \in \mathbb{N}.$$

Если рассматривать конечное число узлов интерполяции μ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, с кратностями m_k, то изучалась проблема интерполяции не только многочленами, но и функциями из ядра линейных и нелинейных дифференциальных операторов в различных функциональных пространствах, например, многоточечная задача Валле Пуссена ([2]). В категории

S.G. Merzlyakov, S.V. Popenov, Interpolation with multiplicity by series of exponentials in $H(\mathbb{C})$ with nodes on the real axis.

Работа поддержана РФФИ (грант №11-01-00572-а).

Поступила 15 апреля 2013 г.

пространств голоморфных функций, для случая конечномерного ядра дифференциального оператора с постоянными коэффициентами конечного порядка, эта проблема равносильна алгебраической задаче существования и единственности решений неоднородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, что приводит к известным результатам ([3]) о разрешимости и единственности глобальной голоморфной задачи Коши (или голоморфной многоточечной задачи Валле Пуссена), и имеются также некоторые продвижения в случае дифференциальных операторов в частных производных специального вида в пространстве $H(\mathbb{C}^n)$ ([4]–[6]).

В монографии [7] рассматриваются вычислительные аспекты проблемы интерполяции конечными суммами экспонент в конечном числе узлов.

Отметим также, что в обзорах [8], [9] сформулирована нерешенная проблема интерполяции функциями из бесконечномерного ядра так называемого алгебраического дифференциального оператора в пространстве $H(\mathbb{C})$ и указаны некоторые результаты.

Обозначим через $P_{\mathbb{C}}$ — пространство целых функций экспоненциального типа с традиционной (LN^*)-топологией, которая обеспечивает топологический изоморфизм между сильным сопряженным пространством $H^*(\mathbb{C})$ и пространством $P_{\mathbb{C}}$, реализующийся с помощью преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(\mathbb{C})$. Точнее, линейное непрерывное взаимнооднозначное преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов $F \in H^*(\mathbb{C})$ определяется следующим образом: $\mathcal{L} : F \longmapsto \mathcal{L}F(z) = \left\langle F_\lambda, e^{\lambda z} \right\rangle$, $\mathcal{L}F \in P_{\mathbb{C}}$, и далее используется обычная двойственность.

Каждая функция $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, $\varphi \not\equiv 0$ порождает в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ линейный непрерывный сюръективный оператор свертки $M_\varphi : H(\mathbb{C}) \longmapsto H(\mathbb{C})$, действие которого на функциях $f \in H(\mathbb{C})$ определяется следующим образом (подробности в [10], [11], и ниже, в доказательстве Теоремы 1):

$$M_\varphi[f](z) = \langle F_\lambda, f(z+\lambda) \rangle, \; z \in \mathbb{C},$$

где $F = \mathcal{L}^{-1}\varphi \in H^*(\mathbb{C})$. Целая функция экспоненциального типа φ называется характеристической функцией оператора свертки M_φ.

Обозначим $\operatorname{Ker} M_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : M_\varphi[f] = 0\}$ — ядро оператора свертки M_φ, которое является замкнутым подпространством в $H(\mathbb{C})$, инвариантным относительно оператора дифференцирования.

В работе [12] доказана следующая теорема (см. также [13]).

Теорема A. *Зафиксируем некоторое число* $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. *Обозначим через* φ *целую функцию экспоненциального типа, имеющую простые нули* λ_n, *причем все* λ_n *лежат в бесконечном количестве в каждом из двух углов* $A_\alpha(0) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \alpha\}$ *и* $A_\alpha(\pi) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \pi| \leqslant \alpha\}$. *Пусть бесконечное дискретное множество узлов интерполяции* $\{\mu_{\pm k}\}_{k=1}^{+\infty}$ *лежит на вещественной оси и* $\mu_{\pm k} \to \pm\infty, k \to +\infty$. *Обозначим через* ψ *произвольную целую функцию с простыми нулями во всех узлах* $\mu_{\pm k}$, *и только в них.*

Тогда, для любой целой функции g *существует целая функция* $f \in \operatorname{Ker} M_\varphi$, *такая, что функция* $r = (g-f)/\psi$ *является целой функцией.*

В доказательстве в работе [12] рассмотрен случай простой интерполяции (то есть кратности всех $\mu_{\pm k}$ равны 1) и отмечено, что метод доказательства можно распространить и на случай кратной интерполяции. Распространение метода доказательства Теоремы A на случай проблемы кратной интерполяции возможно, но при этом возникают серьезные технические трудности.

Заметим, что условие делимости в утверждении теоремы A равносильно тому, что $|f(z) - g(z)| = O(|z - \mu_{\pm k}|)$ при $z \to \mu_{\pm k}$, для каждого $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, в отличие от классической проблемы интерполяции функциями из пространства $H(\mathbb{C})$, в Теореме A

утверждается, что в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ разрешима следующая проблема простой интерполяции функциями из замкнутого подпространства $\operatorname{Ker} M_\varphi$ с бесконечной последовательностью узлов $\mu_{\pm k}$ с кратностями 1 на вещественной оси.
Для любых интерполяционных данных $b_{\pm k} \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \dots$ существует целая функция $f \in \operatorname{Ker} M_\varphi$, такая, что $f(\mu_{\pm k}) = b_{\pm k}$, $k = 1, 2, \cdots$.

Другими словами, в Теореме A доказана разрешимость многоточечной задачи Валле Пуссена для операторов свертки в пространстве $H(\mathbb{C})$ (см. также [14]).

Формулировка утверждения Теоремы A имеет такой вид потому, что в доказательстве используются представления Фишера (см., например, [3]–[6], [12], [13] и ссылки там). Если $\psi \in H(\mathbb{C})$ обозначим через $\big(\psi\big)$ замкнутый идеал в $H(\mathbb{C})$, порожденный функцией ψ,

$$\big(\psi\big) = \{h \in H(\mathbb{C}) : h = \psi \cdot r,\, r \in H(\mathbb{C})\}.$$

Утверждение Теоремы A о разрешимости проблемы интерполяции равносильно тому, что имеет место представление Фишера

$$H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_\varphi + \big(\psi\big),$$

где ψ — произвольная целая функция, имеющая простые нули во всех узлах $\mu_{\pm k}$, и только в них.

Единственности интерполяции в условиях рассматриваемой задачи быть не может, то есть $\operatorname{Ker} M_\varphi \cap \big(\psi\big) \neq \{0\}$ (См. Предложение 1 ниже).

В связи с этим, представляется естественным переход к собственному замкнутому подпространству ядра $\operatorname{Ker} M_\varphi$, для того чтобы решать проблему интерполяции функциями из меньшего подпространства $H(\mathbb{C})$. В частности, оправданным является и то, что в теореме A рассматривается случай, когда все нули характеристической функции φ простые.

Как известно, ядро любого оператора свертки M_φ в $H(\mathbb{C})$ допускает спектральный синтез, то есть $\operatorname{Ker} M_\varphi$ совпадает с замыканием в топологии $H(\mathbb{C})$ линейной оболочки множества всех полиномиально-экспоненциальных мономов $z^\nu e^{\lambda_n z}$, содержащихся в нем.

В данной статье, в частности, будет доказана разрешимость проблемы кратной интерполяции функциями из замкнутого подпространства ядра $\operatorname{Ker} M_\varphi$, состоящего из всех целых функций f, которые представляются рядами экспонент, сходящимися в пространстве $H(\mathbb{C})$:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\ z \in \mathbb{C},$$

что дает новое и более простое доказательство Теоремы A.

2. Вспомогательные результаты

В дальнейшем нам потребуются некоторые свойства полиномов из экспонент с вещественными показателями. Такие полиномы изучены в монографии [18].

Рассмотрим произвольный полином из экспонент вида

$$p(z) = \sum_{k=0}^{s} a_k(z) e^{\omega_k z},\ \omega_0 < \omega_1 < \cdots < \omega_s, \tag{1}$$

где $a_k(z)$ — некоторые многочлены, и пусть $a_0 \cdot a_s \not\equiv 0$.

Из Теоремы 12.9 монографии [18] легко получить, что справедливо следующее.

Лемма 1. *Существует такое $c_1 > 0$, что во внешности круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geqslant c_1\}$ выполнено: существуют положительные постоянные c_2, c_3 и два вещественных числа m_0, m_s, причем $m_0 > m_s$ или $m_0 = m_s = 0$, такие, что*

$$|p(z)| \geqslant c_2 e^{\omega_0 \operatorname{Re} z}, \tag{2}$$

для всех z в области $U_0 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + m_0 \ln z)\} < -c_3$, и

$$|p(z)| \geqslant c_2 e^{\omega_s \operatorname{Re} z}, \tag{3}$$

для всех z в области $U_s = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z + m_s \ln z)\} > c_3$.

Для любого фиксированного $c \in \mathbb{R}$ рассмотрим кривую $\operatorname{Re}(z + m \ln z) = c$, $m \neq 0$. Она симметрична относительно вещественной оси. Для $m > 0$ эта кривая лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z < A$, $A > 0$, а для $m < 0$ она лежит в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z > -A$, $A > 0$. Если точка $z = x + iy$ лежит на этой кривой, то $\left|\dfrac{y}{x}\right| \to \infty$, $\arg z \to \dfrac{\pi}{2}$, $|z| = |y|(1 + o(1))$, при $|z| \to \infty$. Рассматриваемая кривая асимптотически приближается к показательной кривой $x + m \ln |y| = c$.

Для некоторого $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, обозначим $A_\alpha(\pi) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z - \pi| \leqslant \alpha\}$, $A_\alpha(0) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \alpha\}$.

Лемма 2. *Для произвольного полинома из экспонент p вида (1) существует такое $r = r(p) > 0$, что для всех z, $|z| > r$, справедливы следующие оценки.*
Если $\omega_0 < 0$, и $z \in A_\alpha(\pi)$, то

$$|p(z)| \geqslant c_3 e^{(|\omega_0| \cos \alpha)|z|}. \tag{4}$$

Если $\omega_s > 0$, и $z \in A_\alpha(0)$, то

$$|p(z)| \geqslant c_3 e^{(\omega_s \cos \alpha)|z|}. \tag{5}$$

Доказательство. Легко видеть, что все точки z из углов $A_\alpha(\pi)$, $A_\alpha(0)$, лежащие вне некоторого круга, лежат в областях U_0, U_s, соответственно. Поэтому, из оценок (2) и (3) полинома из экспонент p в областях U_0 и U_s для $|z| > c_1$ вытекают оценки вне некоторого круга в углах $A_\alpha(\pi)$ и $A_\alpha(0)$, соответственно. Так как в угле $A_\alpha(\pi) = \{|\arg z - \pi| \leqslant \alpha < \pi/2\}$ выполнено, что

$$\omega_0 \operatorname{Re} z = |\omega_0| \cdot |\cos(\arg z)| \cdot |z| \geqslant |\omega_0| \cdot |\cos(\pi - \alpha)| \cdot |z|,$$

то из оценки (2) получаем оценку (4). Так как в угле $A_\alpha(0) = \{|\arg z| \leqslant \alpha < \pi/2\}$ выполнено, что

$$\omega_s \operatorname{Re} z = \big(\omega_s \cos(\arg z)\big)|z| \geqslant (\omega_s \cos \alpha)|z|,$$

то из оценки (3) получаем оценку (5). Лемма 2 доказана.

Рассмотрим две произвольные бесконечные дискретные последовательности комплексных чисел $\mathcal{V}^- = \{v_{-j}\}$, и $\mathcal{V}^+ = \{v_j\}$, причем $\operatorname{Re} v_{-j} < 0$, $\operatorname{Re} v_j > 0$. Обозначим $\mathcal{V} = \mathcal{V}^- \cup \mathcal{V}^+$. Введем следующие условия

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{|\operatorname{Re} v_{-j}|}{\ln |v_{-j}|} = \infty. \tag{6}$$

$$\limsup_{j \to \infty} \frac{\operatorname{Re} v_j}{\ln |v_j|} = \infty. \tag{7}$$

Если последовательности $\mathcal{V}^-$, $\mathcal{V}^+$ лежат в углах $A_\alpha(\pi)$, $A_\alpha(0)$, соответственно, то условия (6) и (7) выполняются.

Обозначим через $I_{\mathcal{V}^\pm}$ идеалы в $P_\mathbb{C}$,

$$I_{\mathcal{V}^-} = \{f \in P_\mathbb{C} : f(v_{-j}) = 0,\ j \in \mathbb{N}\}.$$

$$I_{\mathcal{V}^+} = \{f \in P_\mathbb{C} : f(v_j) = 0,\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Это замкнутые подпространства в $P_\mathbb{C}$.

Лемма 3. *В описанной ситуации, если для $\mathcal{V}$ выполнено хотя бы одно из условий (6) или (7), то никакой многочлен из экспонент $p \not\equiv 0$ вида (2) не может содержаться в идеалах $I_{\mathcal{V}^\pm}$.*

Доказательство. Предположим, что $p|_{\mathcal{V}^-} = 0$ или $p|_{\mathcal{V}^+} = 0$. Из оценок (2) и (3) следует, что вне некоторого круга произвольный многочлен из экспонент p вида (1) не имеет нулей в областях U_0, U_s, в определении которых постоянные c_1, c_2, m_0, m_s зависят от p. Легко видеть, что из условий (6) и (7) вытекает, что для любых областей U_0, U_s такого вида найдется круг, радиус которого зависит от p, вне которого существуют две бесконечные последовательности точек из $\mathcal{V}^-$ и $\mathcal{V}^+$, лежащие в U_0 и U_s, соответственно. Получили противоречие. Лемма 3 доказана.

3. Основная теорема

Пусть задано бесконечное дискретное множество вещественных узлов интерполяции $\mathcal{M} = \mathcal{M}^- \cup \mathcal{M}^+$, где $\mathcal{M}^- = \{\mu_{-k}\}_{k=1}^{\tau_2}$, $\mu_{-k} < 0$, или $\mathcal{M}^- = \varnothing$, а $\mathcal{M}^+ = \{\mu_k\}_{k=1}^{\tau_1}$, $\mu_k \geqslant 0$, или $\mathcal{M}^- = \varnothing$. Здесь $\tau_1 \leqslant +\infty$, $\tau_2 \leqslant +\infty$.

Будем считать, что все узлы интерполяции упорядочены в порядке возрастания по индексу k, то есть так, что $\mu_{-k-1} < \mu_{-k}$, $\mu_k < \mu_{k+1}$. Предположим, что каждому узлу $\mu_{\pm k} \in \mathcal{M}$ приписана кратность $m_{\pm k} \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим бесконечную дискретную последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Предположим, что выполнено условие

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{|\lambda_n|} = d < \infty. \tag{8}$$

Обозначим

$$\Sigma(\Lambda) = \{f \in H(\mathbb{C}) : f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n z},\ z \in \mathbb{C}\}.$$

При выполнении условия (8) на показатели λ_n, из поточечной сходимости ряда экспонент, для всех $z \in \mathbb{C}$, следует, что ряд сходится в топологии пространства $H(\mathbb{C})$ ([15]).

Рассмотрим следующую проблему кратной интерполяции рядами экспонент с множеством узлов $\mathcal{M}$.

Для произвольной целой функции g найти ряд экспонент $f \in \Sigma(\Lambda)$, такой, что для всех $\mu_{\pm k} \in \mathcal{M}$

$$|f(z) - g(z)| = O(|z - \mu_{\pm k}|^{m_{\pm k}}),\ z \to \mu_{\pm k}.$$

Разрешимость этой проблемы равносильна следующему представлению

$$H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda) + \big(\psi_{\mathcal{M}}\big).$$

Здесь через $\psi_{\mathcal{M}}$ обозначена целая функция с нулями во всех узлах $\mu_{\pm k} \in \mathcal{M}$, с кратностями $m_{\pm k}$, и только в них. Кроме того, обозначим

$$\big(\psi_{\mathcal{M}}\big) = \{h \in H(\mathbb{C}) : h = \psi_{\mathcal{M}} \cdot r,\ r \in H(\mathbb{C})\} \tag{9}$$

— замкнутый идеал в $H(\mathbb{C})$, порожденный функцией $\psi_{\mathcal{M}}$.

Теорема 1. *1. Пусть множество узлов $\mathcal{M}^+$ — конечное или пустое. В пространстве $H(\mathbb{C})$ разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda)$ с множеством узлов $\mathcal{M}$, тогда, и только тогда, когда для некоторого $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ множество $\Lambda \cap A_\alpha(\pi)$ — бесконечное.*

2. Пусть оба множества узлов $\mathcal{M}^-$ и $\mathcal{M}^+$ — бесконечные. В пространстве $H(\mathbb{C})$ разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda)$ с множеством узлов

$\mathcal{M}$, *тогда, и только тогда, когда для некоторого* $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ *оба множества* $\Lambda \cap A_\alpha(\pi)$ *и* $\Lambda \cap A_\alpha(0)$ *— бесконечные.*

Доказательство.

Докажем необходимость условий в п. 1 и п. 2.

Пусть в условиях п.1 проблема кратной интерполяции рядами экспонент из $\Sigma(\Lambda)$ разрешима. Предположим, что для любого $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ множество $\Lambda \cap A_\alpha(\pi)$ — конечное или пустое. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Re}\lambda_n}{|\lambda_n|} = 0.$$

Для $x < 0$ рассмотрим функцию

$$h(x) = \sup_n \{x \operatorname{Re}\lambda_n - |\lambda_n|\},\ h(x) < \infty.$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in \Sigma(\Lambda)$. Докажем, что для всех $x < 0$ справедлива оценка $|f(x)| \leqslant Ce^{h(x)}$, $C > 0$. Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, e^{x \operatorname{Re}\lambda_n} \leqslant e^{h(x)} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\, e^{|\lambda_n|}.$$

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ обозначим $B = d + 2\varepsilon + 1$, где величина d определена в условии (8). В доказательстве Т 3.1.1 монографии [15] показано, что существует постоянная $A > 0$, такая, что $\left|c_n e^{\lambda_n z}\right| \leqslant A$, для всех z, $|z| \leqslant B$, и всех $n \in \mathbb{N}$.

Отсюда следует, что $|c_n| \leqslant Ae^{-B|\lambda_n|}$. Получили, что для всех $x < 0$

$$|f(x)| \leqslant Ae^{h(x)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(1-B)|\lambda_n|} = Ae^{h(x)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(d+2\varepsilon)|\lambda_n|}.$$

Из условия (8) следует, что $(d + \varepsilon)\,|\lambda_n| \geqslant \ln n$, $n \geqslant n_0$, то есть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(d+2\varepsilon)|\lambda_n|} < \infty.$$

Доказанная оценка показывает, что все функции f из $\Sigma(\Lambda)$ имеют контролируемую скорость роста при $x \to -\infty$. А это означает, что рассматриваемая проблема простой интерполяции функциями из ядра этого оператора свертки неразрешима для интерполяционных данных, имеющих большую скорость роста, чем это диктуется этой оценкой. Получили противоречие. Необходимость условий в п.1 доказана.

Необходимость условий в п.2 доказывается аналогично.

Докажем достаточность условий в п. 1 и п. 2.

В ситуации п.1 достаточно показать, что имеет место представление

$$H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda) + \big(\psi_1\big),$$

где ψ_1 — некоторая целая функция, имеющая бесконечное множество нулей, состоящее из всех $\mu_{-k} \in \mathcal{M}^-$, с кратностями m_{-k}, и не более чем конечное множество нулей, состоящее из всех $\mu_k \in \mathcal{M}^+$, с кратностями m_k.

Аналогично, в ситуации п.2, покажем, что

$$H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda) + \big(\psi_2\big),$$

где ψ_2 — некоторая целая функция, имеющая два бесконечных множества нулей, $\mu_{-k} \in \mathcal{M}^-$, с кратностями m_{-k}, и $\mu_k \in \mathcal{M}^+$, с кратностями m_k.

Здесь $\big(\psi_1\big)$, $\big(\psi_2\big)$ — замкнутые идеалы в $H(\mathbb{C})$, определенные в (9).

Подпространство $\Sigma(\Lambda)$, вообще говоря, не замкнутое в $H(\mathbb{C})$. Отметим еще следующее. Если утверждения теоремы доказаны для $\Lambda_0 \subset \Lambda$, то они доказаны и для Λ. В дальнейшем мы перейдем к замкнутому подпространству в $\Sigma(\Lambda)$.

Из результатов монографии [10], стр.268, вытекает следующее утверждение.

Для того чтобы любая целая функция из замыкания линейной оболочки системы полиномиально-экспоненциальных мономов с множеством показателей, имеющим конечную верхнюю плотность с учетом кратностей, представлялась в виде ряда экспонент, необходимо и достаточно, чтобы $\delta < \infty$, где δ — индекс конденсации Бернштейна-Леонтьева, определенный ниже.

Для дальнейшего доказательства, с учетом сказанного, перейдем к подпоследовательностям показателей из Λ.

В ситуации п. 1 выберем бесконечную подпоследовательность $\{t_\nu\} \in \Lambda \cap A_\alpha(\pi)$, $\nu \in \mathbb{N}$, так, чтобы последовательность $\{t_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ удовлетворяла условию

$$|t_{\nu+1}| > 2|t_\nu|. \tag{10}$$

В ситуации п. 2 выберем две бесконечные подпоследовательности $\{t_{2n-1}\}$ из $\Lambda \cap A_\alpha(\pi)$ и $\{t_{2n}\}$ из $\Lambda \cap A_\alpha(0)$ так, чтобы для последовательности $\{t_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ выполнялось условие разделенности (10).

Обозначим через G целую функцию с простыми нулями t_ν,

$$G(z) = \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{t_\nu}\right),$$

где t_ν — любая из двух выбранных подпоследовательностей.

Функция G имеет минимальный тип при порядке 1 и $\operatorname{Ker} M_G$ состоит из всех целых функций $f(z)$, которые представляются рядами экспонент,

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu e^{t_\nu z},\ z \in \mathbb{C},$$

сходящимися в топологии пространства $H(\mathbb{C})$.

Так как подпространство $\operatorname{Ker} M_G$ допускает спектральный синтез, это утверждение вытекает из Теоремы 4.2.4 монографии [10]. Покажем, что в результате выбора t_ν индекс конденсации $\delta = 0$, где

$$\delta = \limsup_{\nu\to\infty} \frac{1}{|t_\nu|} \ln \frac{1}{|G'(t_\nu)|}.$$

В обоих случаях для множества нулей $\{t_\nu\}$ функции G выполнено условие (10), поэтому функция G имеет минимальный тип при порядке 1. Для такой функции всегда $\delta \geqslant 0$, так как производная G' также имеет нулевой тип при порядке 1, то есть

$$\frac{1}{|G'(t_\nu)|} \geqslant e^{-\varepsilon|t_\nu|},\ \varepsilon > 0,\ \nu \geqslant \nu_0.$$

Верны оценки

$$|G'(t_\nu)| \geqslant \frac{1}{|t_\nu|} \prod_{j\neq\nu}\left(\left|1 - \frac{|t_\nu|}{|t_j|}\right|\right).$$

$$\ln|G'(t_\nu)| \geqslant \ln\frac{1}{|t_\nu|} + \sum_{j<\nu} \ln\Big(\frac{|t_\nu|}{|t_j|} - 1\Big) + \sum_{j>\nu} \ln\Big(1 - \frac{|t_\nu|}{|t_j|}\Big).$$

Второе слагаемое положительное, и далее, с учетом (10) получаем, что

$$\frac{1}{|G'(t_\nu)|} \leqslant |t_\nu| e^{-A},\ A = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^k\Big).$$

Видим, что $\delta \leqslant 0$. Итак $\delta = 0$.

Обозначим $\Lambda^- = \Lambda \cap A_\alpha(\pi)$, $\Lambda^+ = \Lambda \cap A_\alpha(0)$. Множества могут быть конечными, а одно из них и пустым. В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что в ситуации п.1 $\Lambda = \Lambda^-$, а в ситуации п.2 $\Lambda = \Lambda^- \cup \Lambda^+$, причем члены последовательности Λ удовлетворяют условию разделенности (10) в указанном выше смысле. Обозначим через G_1, G_2 — целые функции с нулевыми множествами Λ^-, Λ, соответственно.

С учетом этих соглашений и обозначений, из доказанного выше следует, что $\operatorname{Ker} M_{G_1} = \Sigma(\Lambda^-)$, и $\operatorname{Ker} M_{G_2} = \Sigma(\Lambda)$. Поэтому, для доказательства достаточности условий в двух утверждениях теоремы 1 достаточно показать, что в условиях каждого из них пространство $H(\mathbb{C})$ допускает соответствующее представление Фишера:

$$H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_{G_1} + \big(\psi_1\big).$$

$$H(\mathbb{C}) = \operatorname{Ker} M_{G_2} + \big(\psi_2\big).$$

Целые функции ψ_1, ψ_2 определены в начале доказательства. Будет доказано, что для $k = 1$ и $k = 2$ верны следующие два утверждения.
(I) *Подпространство* $\operatorname{Ker} M_{G_k} + \big(\psi_k\big)$ *— всюду плотное в пространстве* $H(\mathbb{C})$;
(II) *Подпространство* $\operatorname{Ker} M_{G_k} + \big(\psi_k\big)$ *— замкнутое в пространстве* $H(\mathbb{C})$.

В дальнейшем используется схема доказательства, приведенная в работе [13], которая основана на двойственности с использованием преобразования Лапласа $\mathcal{L}$ функционалов из сильного сопряженного пространства $H^*(\mathbb{C})$.

Определим раздельно непрерывную билинейную форму $[\cdot,\cdot] : H(\mathbb{C}) \times P_{\mathbb{C}} \longmapsto \mathbb{C}$, согласно формуле $[\psi,\varphi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \psi\rangle$, $\psi \in H(\mathbb{C})$, $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$. С помощью отображения $\varphi \longmapsto [\cdot,\phi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \cdot\rangle$, где $\mathcal{L}^{-1}\varphi \in H^*(\mathbb{C})$, задается изоморфизм между $P_{\mathbb{C}}$ и сильным сопряженным пространством $H^*(\mathbb{C})$. Согласно введенной двойственности, любая функция из пространства $P_{\mathbb{C}}$ взаимнооднозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из $H^*(\mathbb{C})$.

Каждая функция $G \in P_{\mathbb{C}}$, $G \not\equiv 0$ порождает в пространстве целых функций $H(\mathbb{C})$ оператор свертки $M_G : P_{\mathbb{C}} \longmapsto P_{\mathbb{C}}$,

$$M_G[\psi](z) = \big[S_z\big(\psi(\lambda)\big), G_\lambda\big] = \big\langle (\mathcal{L}^{-1}G)_\lambda, \psi(z+\lambda)\big\rangle\,,$$

где S_z — оператор сдвига: $S_z\big(\psi(\lambda)\big) = \psi(\lambda + z)$.

Известно, что M_G линейный, непрерывный и сюръективный оператор. Сопряженный оператор к оператору свертки M_G это оператор A_G умножения на характеристическую функцию G, действующий на функциях $\omega \in P_{\mathbb{C}}$ следующим образом: $\omega \longmapsto G \cdot \omega$.

Как известно, (M^*)-пространство $H(\mathbb{C})$ является рефлексивным, то есть его сильное второе сопряженное пространство $H^{**}(\mathbb{C})$ канонически изоморфно пространству $H(\mathbb{C})$. Поэтому отображение $\psi \longmapsto [\psi,\cdot]$, с учетом этого канонического изоморфизма, определяет изоморфизм между (M^*)-пространством $H(\mathbb{C})$ и сильным сопряженным $P^*_{\mathbb{C}}$, и любая функция из $H(\mathbb{C})$ взаимнооднозначно соответствует некоторому линейному непрерывному функционалу из сильно сопряженного пространства $P^*_{\mathbb{C}}$.

Более точно, это отображение понимается следующим образом: канонический изоморфизм $H(\mathbb{C})$ и $H^{**}(\mathbb{C})$ имеет вид $\psi \longmapsto \Theta\psi = F_\psi$, $F_\psi \in P^*_{\mathbb{C}}$, $\langle F_\psi, \varphi\rangle = [\psi,\varphi] = \langle \mathcal{L}^{-1}\varphi, \psi\rangle$. Здесь $\psi \in H(\mathbb{C})$, $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$.

Каждая функция $\psi \in H(\mathbb{C})$, $\psi \not\equiv 0$ порождает в пространстве целых функций экспоненциального типа $P_{\mathbb{C}}$ оператор свертки $\widetilde{M}_\psi : P_{\mathbb{C}} \longmapsto P_{\mathbb{C}}$, $\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \big[(\Theta\psi)_\lambda, S_z\big(\varphi(\lambda)\big)\big]$, где S_z — оператор сдвига, $S_z\big(\varphi(\lambda)\big) = \varphi(\lambda + z)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Далее получаем, что $\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \big\langle (\mathcal{L}^{-1}S_z\varphi)_\lambda,\, \psi(\lambda)\big\rangle = \big\langle e^{z\lambda}(\mathcal{L}^{-1}\varphi)_\lambda,\, \psi(\lambda)\big\rangle = \big\langle (\mathcal{L}^{-1}\varphi)_\lambda,\, e^{z\lambda}\psi(\lambda)\big\rangle$, $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$.

Используя известную формулу для обратного преобразования Бореля ([10]), отсюда получается, что оператор свертки $\widetilde{M}_\psi$ имеет следующий вид:

$$\widetilde{M}_\psi[\varphi](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \psi(\lambda)e^{z\lambda}\gamma_\varphi(\lambda)\,d\lambda,\ \varphi \in P_\mathbb{C},$$

где γ_φ – функция, ассоциированная по Борелю с функцией φ, а C – спрямляемый замкнутый контур, охватывающий все особые точки функции γ_φ. Целая функция ψ называется характеристической функцией оператора свертки $\widetilde{M}_\psi$.

Известно, что $\widetilde{M}_\psi$ линейный, непрерывный и сюръективный оператор. Обозначим $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi = \{f \in P_\mathbb{C} : \widetilde{M}_\psi[f] = 0\}$.

Оператор $\widetilde{M}_\psi$ является сопряженным к оператору $\widetilde{A}_\psi$ умножения на целую функцию ψ в пространстве $H(\mathbb{C})$, действующему на функциях $g \in H(\mathbb{C})$ следующим образом: $g \longmapsto \psi\cdot g$. Оператор $\widetilde{A}_\psi$ является линейным и непрерывным, а его образ совпадает с замкнутым идеалом (ψ).

Если X_1 — подпространство в топологическом векторном пространстве X, через X_1^0 обозначим его поляру (или аннулятор), то есть множество функционалов из X^*, которые обращаются в нуль на X_1.

С учетом введенной двойственности, поляра $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0$ совпадает с идеалом, определяемым как

$$\big(G\big)_{P_\mathbb{C}} = \{h \in P_\mathbb{C} : h = G\cdot r;\ r \in P_\mathbb{C}\},$$

причем $\big(G\big)_{P_\mathbb{C}} = \big(G\big) \cap P_\mathbb{C}$, и идеал $\big(G\big)_{P_\mathbb{C}}$ — замкнутое подпространство в $P_\mathbb{C}$ (доказательство этих утверждений будет приведено ниже). С учетом введенной двойственности, поляра $\big((\psi)\big)^0$ совпадает с $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Так как $\big(\operatorname{Ker} M_G + (\psi)\big)^0 = \big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0 \cap \big((\psi)\big)^0$, доказано, с учетом двойственности, что $\big(\operatorname{Ker} M_G + (\psi)\big)^0 = \big(G\big)_{P_\mathbb{C}} \cap \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$.

Из Леммы 2 работы [16] следует, с учетом двойственности, что подпространство $\operatorname{Ker} M_G + \big(\psi\big)$ — замкнутое в $H(\mathbb{C})$, тогда, и только тогда, когда подпространство $\big(\operatorname{Ker} M_G\big)^0 + \big((\psi)\big)^0 = \big(G\big)_{P_\mathbb{C}} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ — замкнутое в $P_\mathbb{C}$.

Получили, что для $k = 1$ и $k = 2$ утверждения (I) и (II) выше равносильны следующим двум двойственным утверждениям в (LN^*)-пространстве $P_\mathbb{C}$.

(I^*) *Справедливо равенство* $\big(G_k\big)_{P_\mathbb{C}} \cap \operatorname{Ker}\widetilde{M}_{\psi_k} = \{0\}$.

(II^*) *Подпространство* $\big(G_k\big)_{P_\mathbb{C}} + \operatorname{Ker}\widetilde{M}_{\psi_k}$ *— замкнутое в пространстве* $P_\mathbb{C}$.

Важным моментом в доказательстве двойственных утверждений (I^*) и (II^*) является следующий известный факт (см., например, [17]).

Пусть f *— произвольная целая функция, имеющая нулевое множество* $\{t_k\}$, *причем* t_k *имеют кратности* p_k, $k \in \mathbb{N}$. *Замкнутое подпространство* $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_f$ *в пространстве* $P_\mathbb{C}$ *представляет собой линейную оболочку системы всех мономов вида* $\{z^\nu e^{t_k z}\}$, $\nu = 0, 1, \cdots, p_k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, *то есть оно состоит только из полиномов из экспонент:*

$$\operatorname{Ker}\widetilde{M}_f = \{p \in P_\mathbb{C} : p(z) = \sum_{k=1}^{u_p} a_k(z)e^{t_k z}\}.$$

Здесь, для любого $k \in \mathbb{N}$, *функции* a_k *— произвольные многочлены степеней не выше* $p_k - 1$, *соответственно.*

Это несложно доказываемый фундаментальный принцип для $\operatorname{Ker}\widetilde{M}_\psi$ в пространстве $P_\mathbb{C}$.

В условиях каждого из п.1 и п.2 теоремы 1 докажем утверждение (I^*).

В условиях как п.1, так и п.2, пусть функция $p \in \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_k}$, $p \not\equiv 0$, тогда она представляет собой полином из экспонент

$$p(z) = \sum_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^-}} a_{-j}(z) e^{\mu_{-j} z} + \sum_{\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^+}} a_k(z) e^{\mu_k z},$$

который имеет вид (1). Справа стоят конечные суммы по конечным подмножествам $Fin_{\mathcal{M}^-} \subset \mathcal{M}^-$, $\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^+} \subset \mathcal{M}^+$. В этом представлении учитываем, что возможен случай, когда $\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^-} = \varnothing$ или $\mathrm{Fin}_{\mathcal{M}^+} = \varnothing$, и поэтому используем соглашение: для произвольной последовательности $\{b_k\}$, $\sum\limits_{\varnothing} b_k = 0$.

Покажем, что в условиях п.1 и п.2 полином из экспонент $p \not\equiv 0$ не может принадлежать $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$.

Это следует из Леммы 3. Действительно, согласно условию Теоремы 1, $\Lambda^- \subset A_\alpha(\pi)$, откуда следует, что для последовательности $v_{-k} = \lambda_{-k}$ выполнено условие (6) Леммы 3.

Кроме того, нужно показать, что $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} = I_{\mathcal{V}^-}$. По определению, $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \subset I_{\mathcal{V}^-}$. Далее, согласно теореме Линделефа для функций из пространства $P_{\mathbb{C}}$, $\big(G\big)_{P_{\mathbb{C}}} = \big(G\big) \cap P_{\mathbb{C}}$, то есть верно и обратное включение.

Идеал $I_{\mathcal{V}^-}$ из Леммы 3 — замкнутый, так как топология в $P_{\mathbb{C}}$ сильнее топологии равномерной сходимости на компактах. Доказано, что идеал $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$ замкнут в $P_{\mathbb{C}}$.

Утверждение (I^*) в условиях п.1 доказано. Для доказательства Утверждения (I^*) в условиях п.2 осталось только заметить, что идеал $(G_2)_{P_{\mathbb{C}}}$ содержится в идеале $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$.

Получили, что, как в условиях п.1, так и п.2 теоремы, у нас имеются алгебраические прямые суммы $(G_k)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_k}$, $k = 1, 2$. В условиях каждого из п.1 и п.2 теоремы 1, докажем замкнутость этих подпространств в $P_{\mathbb{C}}$ (то есть докажем утверждение (II^*)). Как известно ([19]), в (LN^*) — пространстве $P_{\mathbb{C}}$ замкнутость любого подпространства X равносильна его секвенциальной замкнутости.

В условиях п.1 рассмотрим произвольную последовательность $\{g_l\}$, $l \in \mathbb{N}$, функций из алгебраической прямой суммы $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$ и предположим, что она сходится в пространстве $P_{\mathbb{C}}$ к функции $g \in P_{\mathbb{C}}$. Покажем, что предельная функция g принадлежит $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$.

Сходимость $\{g_l\}$ в (LN^*)-топологии пространства $P_{\mathbb{C}}$ означает следующее:
1. $\{g_l\}$ сходится к g в топологии пространства $H(\mathbb{C})$;
2. Существуют такие $A > 0$, $B > 0$, что для всех $l \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$|g_l(z)| \leqslant A e^{B|z|},\ z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Последовательность $\{g_l\}$ состоит из функций вида $g_l = p_l + R_l$, где функции $R_l \in (G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$, то есть $R_l|\Lambda^- = 0$, а функции $p_l \in \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$.

Если в последовательности $\{g_l\}$ содержится бесконечно много членов с $R_l \equiv 0$, то $g \in \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$. Если в $\{g_l\}$ содержится бесконечно много членов с $p_l \equiv 0$, то $g \in (G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$. Для таких последовательностей $\{g_l\}$ функция $g \in (G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$.

Следовательно, далее можно считать, что последовательность $\{g_l\}$ такова, что $R_l \not\equiv 0$, $p_l \not\equiv 0$ для всех l.

В силу фундаментального принципа для ядра $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_1}$ в пространстве $P_{\mathbb{C}}$

$$p_l(z) = \sum_{\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^-}} a^{(l)}_{-j}(z) e^{\mu_{-j} z} + \sum_{\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^+}} a^{(l)}_k(z) e^{\mu_k z}. \tag{12}$$

Если для некоторого фиксированного l в этом представлении $\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^-} \neq \varnothing$, то есть имеется хотя бы один $a^{(l)}_{-j} \not\equiv 0$, соответствующий показателю μ_{-j}, обозначим через q_l — номер минимального из всех таких μ_{-j}. Если для некоторого фиксированного l в этом представлении $\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^+} \neq \varnothing$, то есть имеется хотя бы один $a^{(l)}_k \not\equiv 0$, соответствующий показателю μ_k, обозначим через u_l — номер максимального из всех таких μ_k.

Пусть последовательность $\{g_l\}$ такова, что множество $\{q_l\}$ бесконечное. Покажем, что оно ограниченное.

По условию п.1 для произвольной последовательности $\{g_l\}$ множество $\{u_l\}$ пустое или ограниченное. Тогда без ограничения общности можно считать, что в представлениях полиномов из экспонент $\mathrm{Fin}^{(l)}_{\mathcal{M}^-} \neq \varnothing$ для всех l. Действительно, достаточно рассмотреть $\widetilde{g}_l = g_l \cdot e^{-az}$, для некоторого $a \in \mathbb{R}^+$. Тогда $a^{(l)}_{-q_l} \not\equiv 0$ для всех l.

Предположим, что множество чисел $\{q_l\}$ является неограниченным.

Все p_l имеют вид (1). Так как $a^{(l)}_{-q_l} \not\equiv 0$, используя оценку (4) из леммы 2 и оценку (11), получаем следующую оценку функции $R_l = g_l - p_l$, $R_l \not\equiv 0$, :

$$|R_l(z)| \geqslant |p_l(z)| - |g_l(z)| \geqslant c_3 e^{(|\mu_{-q_l}|\cos\alpha)|z|} - Ae^{B|z|},$$

для всех z в области $A_\alpha(\pi)$, $|z| > r$. Здесь $r = r(l)$. По предположению, существует $\mu_{-q_{l_0}}$, такое, что $|\mu_{-q_{l_0}}| > \dfrac{B}{\cos\alpha}$.

Видим, что $|R_{l_0}(z)| > 0$ для всех z в области $A_\alpha(\pi)$, $|z| > r_1(l_0)$. Получаем противоречие, так как, в силу условия п.1 теоремы 1, в области $A_\alpha(\pi)$, $|z| > r_1(l_0)$, лежит бесконечная дискретная последовательность из Λ^-, а нам дано, что $R_{l_0}|_{\Lambda^-} = 0$.

Доказано следующее: если последовательность функций $g_l = p_l + R_l$ из $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1}$ сходится в $P_{\mathbb{C}}$, то $|\mu_{-q_l}| \leqslant \dfrac{B}{\cos\alpha}$ для всех l, и множество чисел $\{q_l\}$ в представлениях полиномов из экспонент является ограниченным. Множество чисел $\{u_l\}$ для любой последовательности $\{g_l\}$ конечное или пустое по условию утверждения п.1.

Следовательно, последовательность полиномов из экспонент $\{p_l\}$ принадлежит некоторому конечномерному подпространству $X \subset \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1}$. Утверждение (I^*) означает, что все элементы сходящейся последовательности $g_l = p_l + R_l$ лежат в алгебраической прямой сумме $X \oplus (G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$.

В любом топологическом векторном пространстве алгебраическая прямая сумма конечномерного подпространства и замкнутого подпространства является замкнутым подпространством ([20], стр. 41). Итак, предельная функция g последовательности $g_l = p_l + R_l$ принадлежит $\mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1} \oplus (G_1)_{P_{\mathbb{C}}}$. Утверждение (II^*) доказано.

Из утверждений (I^*) и (II^*) вытекает утверждение п.1 Теоремы 1.

В условиях п.2 докажем, что алгебраическая прямая сумма $(G_2)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_2}$ — замкнутое подпространство в $P_{\mathbb{C}}$. По условию п. 2, имеется два бесконечных множества узлов интерполяции μ_k с кратностями m_k и узлов интерполяции μ_{-k} с кратностями m_{-k}. Кроме того, в углах $A_\alpha(\pi)$ и $A_\alpha(0)$ лежат две бесконечные последовательности точек из Λ^- и Λ^+, соответственно.

Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность функций $\{g_l\} \subset \mathrm{Ker}\,M_{G_2} \oplus \big(\psi_2\big)$, вида $g_l = R_l + p_l$, $l \in \mathbb{N}$, где $p_l \in \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1}$, $R_l \in (G_2)_{P_{\mathbb{C}}}$. Как и при доказательстве замкнутости $(G_1)_{P_{\mathbb{C}}} \oplus \mathrm{Ker}\,\widetilde{M}_{\psi_1}$ выше, можно считать, что $p_l \not\equiv 0$, $R_l \not\equiv 0$ для всех l. Полиномы из экспонент $p_l \not\equiv 0$ имеют представление (12). Если последовательность $\{g_l\}$ такова, что множество чисел $\{u_l\}$ конечное или пустое, выше доказано, что множество чисел $\{q_l\}$ ограниченное.

Пусть последовательность $\{g_l\}$ такова, что множество чисел $\{u_l\}$ бесконечное.

Если последовательность $\{p_l\}$ такова, что в ней имеется бесконечное множество членов, в представлении которых имеются отрицательные показатели, то можно считать, что $a^{(l)}_{-q_l} \not\equiv 0$ для всех членов такой последовательности. Этого можно достичь, переходя к подпоследовательности. Далее, как в доказательстве утверждения п.1, доказываем, что множество чисел $\{q_l\}$, соответствующих всем таким членам, является ограниченным. Кроме того, для дальнейшего отметим, что для любой последовательности такого типа без ограничения общности можно считать, что $a^{(l)}_{u_l} \not\equiv 0$ для всех l.

Если же в последовательности $\{p_l\}$ таких членов не более конечного числа, можно считать, что $a^{(l)}_{u_l} \not\equiv 0$ для всех l, рассматривая $\widetilde{g}_l = g_l \cdot e^{az}$, для некоторого $a \in \mathbb{R}^+$.

По предположению, для последовательности $\{p_l\}$ каждого из последних двух типов множество $\{u_l\}$ неограниченное. Последовательность $\{g_l\}$ удовлетворяет оценке (11). Так как $a^{(l)}_{u_l} \not\equiv 0$ для всех l, получаем, используя оценку (5) Леммы 2 и оценку (11), что для всех z в области $A_\alpha(0)$, $|z| > r$, $r = r(l)$,

$$|R_l(z)| \geqslant c_3 e^{(\mu_{u_l} \cos\alpha)|z|} - Ae^B|z|.$$

Отсюда, так как множество Λ^+ бесконечное, как и выше, в доказательстве утверждения п.1, приходим к противоречию и заключаем, что множество чисел $\{u_l\}$, соответствующих произвольной сходящейся последовательности $\{u_l\}$, является ограниченным. Из предыдущего рассмотрения следует, что оба множества чисел $\{q_l\}$ и $\{u_l\}$, участвующие в представлении произвольной сходящейся последовательности $\{g_l\}$ полиномов из экспонент, являются ограниченными. Завершается доказательство теми же рассуждениями, как в доказательстве утверждения п.1.

Утверждение п.2, а значит, и Теорема 1 доказаны.

4. Обсуждение условий, примеры

Покажем, что единственности интерполяции в условиях рассматриваемой задачи быть не может.

Пусть множество Λ удовлетворяет условию (8). Кроме того, пусть множество Λ и множество узлов $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Теоремы 1, тогда разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент f из $\Sigma(\Lambda)$ с узлами $\mathcal{M}$. Пусть $\psi = \psi_{\mathcal{M}}$ — некоторая целая функция с нулевым множеством $Z_\psi = \mathcal{M}$, с учетом кратностей.

Предложение 1. *Подпространство* $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big) \neq \{0\}$, *более того, оно — бесконечномерное.*

Доказательство. По Теореме 1 имеет место представление $\operatorname{Ker} M_\varphi + \big(\psi\big) = H(\mathbb{C})$. Покажем, что $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big) \neq \{0\}$.

Существует $g \in \big(\psi\big)$, $g \not\equiv 0$, $g \notin \Sigma(\Lambda)$, и существует такое $x_0 \in \mathbb{R}$, что $g(x_0) \neq 0$, $\psi(x_0) \neq 0$. Обозначим через ψ_1 — целую функцию с нулевым множеством $Z_{\psi_1} = \mathcal{M} \cup \{x_0\}$, тогда идеал $\big(\psi_1\big)$ является собственным подмножеством $\big(\psi\big)$.

По Теореме 1 $H(\mathbb{C}) = \Sigma(\Lambda) + \big(\psi_1\big)$, в частности $g = f + \psi_1 \cdot r$, где $f \in \Sigma(\Lambda)$, причем функция $f \not\equiv 0$, поскольку $g \notin \big(\psi_1\big)$. Функция $r \in H(\mathbb{C})$ и $r \not\equiv 0$, так как $g \notin \Sigma(\Lambda)$.

Так как $r \not\equiv 0$, а $f = g - \psi_1 \cdot r$, видим, что $f \in \Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big)$ и $f \not\equiv 0$. Первое утверждение доказано.

Заметим, что $f \notin \Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_1\big)$, так как $f(x_0) = g(x_0) \neq 0$. Доказано, что имеет место строгое включение $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_1\big) \subset \Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big)$.

Предположим, что подпространство $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi\big)$ конечномерное. Продолжая указанную процедуру, получим последовательность строгих включений $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_{k+1}\big) \subset \Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_k\big)$. Через конечное число шагов получим, что $\Sigma(\Lambda) \cap \big(\psi_{l_0}\big) = \{0\}$. Это противоречит тому, что уже доказано выше. Предложение 2 доказано.

В заключение обратимся к более общей ситуации, описанной перед Леммой 3. Рассмотрим бесконечную дискретную последовательность комплексных чисел $\mathcal{V} = \mathcal{V}^- \cup \mathcal{V}^+$, где

$\mathcal{V}^+ = \{v_j\}$, $\mathcal{V}^- = \{v_{-j}\}$, — бесконечные дискретные последовательности, причем $\operatorname{Re} v_j > 0$, $\operatorname{Re} v_{-j} < 0$. Пусть выполнены условия (6) и (7) из Леммы 3. Предположим, что множества $\mathcal{V}^-$, $\mathcal{V}^+$ представляют собой множества нулей целых функций экспоненциального типа Φ_1, Φ_2, соответственно.

Для произвольного дискретного множества $\Omega = \{\omega_k\}$, $\omega_k \in \mathbb{R}$, с множеством кратностей $\{n_k\}$, обозначим через ψ_Ω целую функцию, имеющую простые нули в точках ω_k с кратностями n_k, и только в них.

Замечание 1. Из леммы 3 вытекает, что справедливы следующие два утверждения. *Подпространства* $\operatorname{Ker} M_{\Phi_1} + \big(\psi_\Omega\big)$ *и* $\operatorname{Ker} M_{\Phi_2} + \big(\psi_\Omega\big)$ *являются всюду плотными в пространстве* $H(\mathbb{C})$.

Действительно, $I_{\mathcal{V}^-} = (\Phi_1)_{P_\mathbb{C}}$. Это показано в доказательстве теоремы 1. Поэтому, в силу Леммы 3, $\big(\Phi_1\big)_{P_\mathbb{C}} \cap \operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_\Omega} = \{0\}$, так как любая функция из $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_\Omega}$ имеет вид (1), в силу фундаментального принципа для $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_\Omega}$ в пространстве $P_\mathbb{C}$. Это двойственное утверждение равносильно первому утверждению. Второе получается после преобразования $z \to -z$ плоскости $\mathbb{C}$.

Обсудим два примера, связанных с существенностью условий, накладываемых на множество показателей экспонент Λ и узлы интерполяции $\mathcal{M}$.

Пример 1 ниже показывает, что условия (6) и (7) в утверждениях Замечания 1 близки к необходимым. Для того чтобы упростить этот пример, заметим, что после преобразования $z \to -z$ плоскости $\mathbb{C}$, из утверждения п. 1 Теоремы 1 получается утверждение:
$1'$. *Пусть множество узлов* $\mathcal{M}^-$ *— конечное или пустое. В пространстве* $H(\mathbb{C})$ *разрешима проблема кратной интерполяции рядами экспонент из* $\Sigma(\Lambda)$ *с множеством узлов* $\mathcal{M}$, *тогда, и только тогда, когда для некоторого* $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ *множество* $\Lambda \cap A_\alpha(0)$ *— бесконечное.*

Пример 1. *Пусть* $\varphi(z) = z - e^z$, *а множество узлов интерполяции* $\mathcal{M}$ *содержит некоторое множество узлов* $\mu_k \geqslant 1$, $k \in \mathbb{N}$. *Проблема простой интерполяции функциями из* $\operatorname{Ker} M_\varphi$ *с множеством узлов* $\mathcal{M}$ *неразрешима, причем подпространство* $M_\varphi + \big(\psi_\mathcal{M}\big)$, *вообще говоря, не является всюду плотным в пространстве* $H(\mathbb{C})$.

Легко показать, что функция $\varphi(z) = z - e^z$ имеет бесконечное множество нулей $\Lambda = \{\lambda_n, \lambda_n = x_n + iy_n\}$. Так как $\lambda_n = e^{\lambda_n}$, в частности, получаем, что $x_n - \ln|\lambda_n| = 0$. Отсюда следует, что $\operatorname{Re} \lambda_n \to +\infty$, и для λ_n не выполняются как условие Теоремы 1, так и условие (7). Кроме того, $\varphi'(\lambda_n) = 1 - e^{\lambda_n} = 1 - \lambda_n$. Поэтому все нули функции φ простые, и индекс конденсации $\delta = 0$ для функции φ. Следовательно, $\operatorname{Ker} M_\varphi = \Sigma(\Lambda)$.
В частности, если множество узлов $\mathcal{M}$ содержит $\mu_0 = 0$ с кратностью $m_0 = 2$ и $\mu_1 = 1$ с кратностью $m_1 = 1$, тогда полином из экспонент $p = \varphi$ принадлежит $\operatorname{Ker} \widetilde{M}_{\psi_\mathcal{M}} \cap \big(\varphi\big)_{P_\mathbb{C}}$, то есть в силу равносильного двойственного утверждения (I^*), подпространство $M_\varphi + \big(\psi_\mathcal{M}\big)$ не является всюду плотным в пространстве $H(\mathbb{C})$.

Второй пример показывает, что существуют такие операторы свертки из рассматриваемого класса, что проблема интерполяции функциями из ядра оператора свертки с произвольными комплексными узлами интерполяции μ_k, вообще говоря, неразрешима.

Пример 2. *Пусть множество узлов интерполяции содержит точки* $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 = \mu_1 + i \in \mathbb{C}$, *а* $\varphi(z) = 1 - e^{iz}$. *Тогда проблема простой интерполяции целыми функциями из* $\operatorname{Ker} M_\varphi = \{f \in H(\mathbb{C}) : f(z) = f(z+i)\}$ *неразрешима.*

В этом примере $\lambda_n = 2\pi n \in \mathbb{R}$. Все функции из ядра M_φ являются периодическими с периодом i, поэтому нет возможности задавать произвольные интерполяционные данные в узлах $\mu_1 \in \mathbb{R}$, $\mu_2 = \mu_1 + i \in \mathbb{C}$.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Валентину Васильевичу Напалкову за постоянное стимулирующее общение, а также рецензентам за ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хермандер Л. *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных.* М.: Мир. 1968. 279 с.
2. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* Т. 1 М.: Мир. 1953. 346 с.
3. A. Meril, A. Yger *Problèmes de Cauchy globaux.* // Bull. Soc. Math. France. V. 120. 1992. pp. 87–111.
4. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными.* Т. 2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир. 1986. 455 с.
5. Shapiro H.S. *An algebraic theorem of Fischer, and the holomorphic Goursat problem.* // Bull. London Math. Soc. V. 21. 21. 1989. С. 513–537.
6. A. Meril, D.C. Struppa *Equivalence of Cauchy problems for entire and exponential type functions.* // Bull. London Math. Soc.V.17. 5. 1985. pp. 469–473 .
7. P. Henrici *Applied and computational complex analysis.* V. 2. A Wiley- Interscience Publication. 1977. 662 p.
8. L.A. Rubel *Some research problems about algebraic differential equations.* // Trans. Amer. Math. Soc. V.280. 1. pp. 43–53
9. L.A. Rubel *Some research problems about algebraic differential equations II.* // Illinois Math. Soc. V.36. 1. pp. 659-681.
10. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука. 1980. 384 с.
11. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука. 1982. 240 с.
12. Напалков В.В., Нуятов А.А. *Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки.* // Матем. сб. 203:2. 2012. С. 77–86.
13. Напалков В.В., Попенов С.В. *Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера.* // Докл. РАН, Т. 381. №2. 2001. С. 164–166.
14. Напалков В.В. *Комплексный анализ и задача Коши для операторов свертки.* Труды матем. института имени В.А. Стеклова. 235. 2001. С. 165-168.
15. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука. 1976. 536 с.
16. Мерзляков С.Г. *Инвариантные подпространства оператора кратного дифференцирования.* // Матем. заметки 33:5. 1983. С. 701–713.
17. H. Muggli. *Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten.* // Comment. Math. Helv. V. 11. 1938. pp. 151-179.
18. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально - разностные уравнения.* М.: Мир. 1967. 548 с.
19. Себаштьян-и-Сильва Ж. *О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях.* // Сб. перев. Математика. 1:1. 1957. С. 60–77.
20. Рудин У. *Функциональный анализ.* М.: Мир. 1975. 443 с.

Сергей Георгиевич Мерзляков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: msg2000@mail.ru

Сергей Викторович Попёнов,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: spopenov@gmail.com