ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 121-129.

УДК 517.958:533.7

ИНВАРИАНТНЫЕ И ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДВУХ ГАЛИЛЕЕВЫХ ПЕРЕНОСОВ И РАСТЯЖЕНИЯ

Е.В. МАКАРЕВИЧ

Аннотация. В работе рассмотрена трехмерная подалгебра, вложенная в четырехмерную подалгебру, с целью найти множество решений для сопряжения с решениями на подалгебрах большей размерности. Хотя цель еще не достигнута, но получены инвариантные решения ранга 1 и все возможные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1. Получены следующие результаты: две подмодели – инвариантная и частично инвариантная, 7 решений, зависящих от произвольной функции, и 19 точных решений.

Ключевые слова: газовая динамика, иерархия подмоделей, инвариантное решение, частично инвариантное решение.

Mathematics Subject Classification: 35Q35, 35B06.

1. Введение

Уравнения газовой динамики (УГД)

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, D\rho + \rho\nabla \cdot \vec{u} = 0, DS = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$ – полная производная по времени, $\vec{u}$ – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$ – квадрат скорости звука, с уравнением состояния с разделенной плотностью

$$\rho = h(p)S \tag{2}$$

(S – функция энтропии) допускают двенадцатимерную алгебру Ли операторов L_{12} [1]. Оптимальная система неподобных подалгебр для УГД с уравнением состояния (2) приведена в [2, табл. 3]. На примере пятимерной самонормализованной подалгебры рассмотрена иерархия подмоделей УГД, составлен граф всех вложенных в нее подалгебр. Подмодели вложены друг в друга так, что решение инвариантной подмодели надалгебры является частным решением инвариантной подмодели подалгебры [3]. В работе [4] построено и исследовано частично инвариантное решение на четырехмерной подалгебре из графа Γ_5 [3].

В настоящей статье рассмотрена трехмерная подалгебра, вложенная в четырехмерную подалгебру из работы [4], с целью найти множество решений для сопряжения с решениями на подалгебрах большей размерности. Хотя цель еще не достигнута, но получены инвариантная подмодель ранга 1 и все возможные частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 1. Получено 23 решения, зависящих от нескольких постоянных, которые обозначены буквами $v_0, w_0, \rho_0, K_0, P_0, h_0, x_0, n, C, C_i, i = 0, 1, 2$. Все решения записаны с точностью до преобразований, допускаемых УГД.

E.V. Makarevich, Invariant and partially invariant solutions with respect to Galilean shifts and dilatation.

© Макаревич Е.В. 2013.

Работа выполнена при поддержке гранта №11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.
Поступила 6 марта 2013 г.

Справедлив общий факт об иерархии вложенных друг в друга подмоделей: инвариантных, частично инвариантных, дифференциально-инвариантных [5].

2. Инвариантные решения

Рассмотрим трехмерную подалгебру 3.23 [2, табл. 3] с базисом в декартовой системе координат: $\{t\partial_y+\partial_v, t\partial_z+\partial_w, b(t\partial_t+x\partial_x+y\partial_y+z\partial_z)+t\partial_t-u\partial_u-v\partial_v-w\partial_w+2\rho\partial_\rho\}, b\neq 0, b\neq -1$. Точечные инварианты вычислены в работе [3, табл. 1]. Представление решения имеет вид:

$$\begin{aligned}&u=t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}u_1(x_1)), v=t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}v_1(x_1)+y), w=t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}w_1(x_1)+z),\\&\rho=|t|^{\frac{2}{b+1}}\rho_1(x_1), S=|t|^{\frac{2}{b+1}}S_1(x_1), p=p(x_1), x_1=|t|^{-\frac{b}{b+1}}x.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь и далее предполагаем $\rho_1\neq 0$, иначе решение не имеет физического смысла. Уравнение состояния (2) принимает вид:

$$\rho_1=h(p)S_1.\tag{4}$$

Введем обозначение

$$\bar u_1=u_1-b(b+1)^{-1}x_1,\tag{5}$$

тогда подстановка (3),(5) в УГД (1) дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned}&p_{x_1}=\rho_1\left((1-b)(1+b)^{-1}\bar u_1-\bar u_1\bar u_{1x_1}+b(b+1)^{-2}x_1\right),\\&\bar u_1v_{1x_1}=-b(b+1)^{-1}v_1,\\&\bar u_1w_{1x_1}=-b(b+1)^{-1}w_1,\\&\bar u_1\rho_{1x_1}\rho_1{}^{-1}+\bar u_{1x_1}=-(3b+4)(b+1)^{-1},\\&\bar u_1S_{1x_1}=-2(b+1)^{-1}S_1.\end{aligned}\tag{6}$$

При исследовании подмодели возникает несколько случаев. Если $\bar u_1=0$, то $\rho_1=0$, и решение не имеет физического смысла. Пусть $\bar u_1\neq 0$. Введем новую переменную s (с точностью до постоянного слагаемого) по формуле:

$$ds=\bar u_1^{-1}dx_1.\tag{7}$$

Интегрируя систему (4),(6),(7), получим набор интегралов, зависящих от пяти постоянных $v_0, w_0, \rho_0, S_0, h_0$

$$\begin{aligned}&v_1=v_0e^{-\frac{b}{b+1}s}, w_1=w_0e^{-\frac{b}{b+1}s}, \rho_1x_{1s}=\rho_0e^{-\frac{3b+4}{b+1}s},\\&S_1=S_0e^{-\frac{2}{b+1}s}, h(p)x_{1s}=h_0e^{-\frac{3b+2}{b+1}s}.\end{aligned}\tag{8}$$

Если в последнем равенстве $h(p)\neq const$, то система сводится к одному нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{3b+2}{b+1}+\frac{x_{1ss}}{x_{1s}}=\rho_0e^{-\frac{3b+4}{b+1}s}\left(\frac{b-1}{b+1}x_{1s}+x_{1ss}-\frac{b}{(b+1)^2}x_1\right)\varphi\left(\frac{h_0}{x_{1s}}e^{-\frac{3b+2}{b+1}s}\right),\tag{9}$$

где введена суперпозиция функций $\varphi=(h'h^{-1})\circ h^{(-1)}$, а ρ_0 – не существенная постоянная (растяжением по x_1 ее можно сделать 1).

Если $h(p)=const$, то $x_{1s}=x_0e^{-\frac{3b+2}{b+1}s}$, и возможны три случая.

1) $b\neq -\dfrac{2}{3}, b\neq -\dfrac{4}{3}$. Тогда за счет сдвига по s делаем $x_0=1$. Решение системы (6) задается формулами

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+\frac{3b+2}{b+1}C, v_1=v_0|x_1-C|^{\frac{b}{3b+2}}, w_1=w_0|x_1-C|^{\frac{b}{3b+2}},\\&\rho_1=\rho_0|x_1-C|^{\frac{2}{3b+2}}, p=\frac{3b+2}{b+1}\rho_0|x_1-C|^{\frac{3b+4}{3b+2}}\left(\frac{(b+2)(3b+2)}{(b+1)(3b+4)}C-x_1\right).\end{aligned}\tag{10}$$

2) $b = -\dfrac{4}{3}$. За счет сдвига по s делаем $x_0 = 1$. Решение задается формулами

$$\begin{aligned} &u_1 = -2x_1 + 6C, v_1 = v_0(x_1 - C)^{\frac{2}{3}}, w_1 = w_0(x_1 - C)^{\frac{2}{3}},\\ &\rho_1 = \rho_0(x_1 - C)^{-1}, p = -6\rho_0 x_1 - 12\rho_0 C \ln|x_1 - C|. \end{aligned} \tag{11}$$

3) $b = -\dfrac{2}{3}$. Тогда $x_{1s} = C, h = h_0 C^{-1}$. Решение задается формулами

$$\begin{aligned} &u_1 = -2x_1 + C, v_1 = v_0 e^{\frac{2}{C}x_1}, w_1 = w_0 e^{\frac{2}{C}x_1},\\ &\rho_1 = \rho_0 e^{-\frac{6}{C}x_1}, p = \rho_0 C e^{-\frac{6}{C}x_1}(x_1 - \frac{2}{3}C). \end{aligned} \tag{12}$$

Решения УГД в физических переменных получаются по формулам (3), в которые подставляется (8) с некоторым решением уравнения подмодели (9) или (10),(11),(12). Далее пишем формулы только для u_1, v_1, w_1, ρ_1, p.

3. Регулярные частично инвариантные решения ранга 1, дефекта 1, зависящие от всех пространственных переменных

На подалгебре 3.23 строим частично инвариантное решение ранга 1, дефекта 1. Из выражений для инвариантов находим скорости и плотность, при этом давление предполагаем функцией общего вида. Представление решения имеет вид:

$$\begin{aligned} &u = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}} u_1(x_1)), v = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}} v_1(x_1) + y), w = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}} w_1(x_1) + z),\\ &\rho = |t|^{\frac{2}{b+1}} \rho_1(x_1), p = p(x, y, z, t), x_1 = |t|^{-\frac{b}{b+1}} x. \end{aligned} \tag{13}$$

Из уравнения состояния (2) определяется энтропия

$$|t|^{\frac{2}{b+1}} \rho_1(x_1) = h(p) S. \tag{14}$$

При подстановке представления (13) и (14) в УГД (1) определяются все производные давления, что дает выражение для давления

$$p = |t|^{-\frac{b}{b+1}}(C_1 y + C_2 z) + P(x_1) + K(t). \tag{15}$$

После этого УГД переходят в систему уравнений с одной независимой переменной x_1

$$\rho_1\left((b+1)^{-1}u_1 + \left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right)u_{1x_1}\right) = P_{x_1}, \tag{16}$$

$$\rho_1\left(-b(b+1)^{-1}v_1 + \left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right)v_{1x_1}\right) = C_1, \tag{17}$$

$$\rho_1\left(-b(b+1)^{-1}w_1 + \left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right)w_{1x_1}\right) = C_2, \tag{18}$$

$$\rho_{1x_1}\rho_1^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) - 2(b+1)^{-1} = u_{1x_1} + 2, \tag{19}$$

а также функциональное переопределенное равенство

$$\begin{aligned} h'h^{-1}((b+1)^{-1}|t|^{-\frac{b}{b+1}}(C_1 y + C_2 z) - \left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right)P_{x_1} + tK_t +\\ + C_1 v_1 + C_2 w_1) = 2(b+1)^{-1} - \rho_{1x_1}\rho_1^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right). \end{aligned} \tag{20}$$

где P – произвольная функция от x_1, K – произвольная функция от t. Рассмотрим случай, когда решение зависит от всех пространственных переменных: ${C_1}^2 + {C_2}^2 \neq 0$. Тогда из равенства (20) исключим выражение

$$|t|^{-\frac{b}{b+1}}(C_1 y + C_2 z) = p - P(x_1) - K(t),$$

справедливое в силу (15). Получим равенство по независимым переменным t, x_1, p. Дифференцирование по t дает равенство

$$h'\left(-(b+1)^{-1}K + tK_t\right)_t = 0. \tag{21}$$

Пусть первый множитель в (21) не равен нулю $h' \neq 0$. В этом случае из (21) определяется функция $K = K_0|t|^{\frac{1}{b+1}} - C_0(b+1)$, K_0, C_0 – постоянные. Давление записывается в виде $p = |t|^{-\frac{b}{b+1}}(C_1 y + C_2 z) + P(x_1) + K_0|t|^{\frac{1}{b+1}} - C_0(b+1)$. Уравнение (20) принимает вид

$$\begin{aligned} &(b+1)^{-1}(p-P) + C_0 - \left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) P_{x_1} + C_1 v_1 + C_2 w_1 = \\ &\qquad = h h'^{-1}\left(2(b+1)^{-1} - \rho_{1x_1}\rho_1^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right)\right). \end{aligned} \tag{22}$$

В этом равенстве $2(b+1)^{-1} - \rho_{1x_1}\rho_1^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) \neq 0$, так как иначе придем к противоречию в равенстве (22). Дифференцируем (22) по p:

$$\left(hh'^{-1}\right)' = (b+1)^{-1}\left(2(b+1)^{-1} - \rho_{1x_1}\rho_1^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right)\right)^{-1}.$$

В этом равенстве переменные x_1, p разделились, поэтому обе части равенства постоянные. Из последнего равенства находим $h = h_0(p+P_0)^{\frac{1}{\gamma}}, \gamma \neq 0$. Если заменить $p + P_0$ на p, $h_0 S$ на S, то $h = p^{\frac{1}{\gamma}}$, уравнение состояния примет вид $\rho = p^{\frac{1}{\gamma}} S$. В УГД (1) вместо уравнения для энтропии можно написать уравнение для давления $Dp + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0$. Подставим функцию h в (22) и соберем коэффициенты при p. Получим следующую переопределенную систему уравнений: (16), (17), (18), а также

$$\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) P_{x_1} + (b+1)^{-1}P = C_1 v_1 + C_2 w_1 + C_0, \tag{23}$$

$$\rho_{1x_1}\rho_1^{-1}\left(b(b+1)^{-1}x_1 - u_1\right) = (2-\gamma^{-1})(b+1)^{-1}, \tag{24}$$

$$u_{1x_1} = -(2b+2+\gamma^{-1})(b+1)^{-1}. \tag{25}$$

Из (25) находим $u_1 = -(2b+2+\gamma^{-1})(b+1)^{-1}x_1 + C(b+1)^{-1}$, C – постоянная. Тогда уравнение (24) принимает вид

$$\rho_{1x_1}\rho_1^{-1}\left((3b+2+\gamma^{-1})x_1 - C\right) = 2 - \gamma^{-1}. \tag{26}$$

Пусть в (26) $3b + 2 + \gamma^{-1} = 0$. Если $\gamma^{-1} = 2$, то $b = -\dfrac{4}{3}$ и (26) принимает вид $\rho_{1x_1}C = 0$. Случай $C \neq 0$ приводит к не физическому решению ($\rho = 0$). При $C = 0$ решение задается формулами

$$\begin{aligned} &u_1 = 4x_1, v_1 = -\frac{1}{4}C_1\rho_1^{-1}, w_1 = -\frac{1}{4}C_2\rho_1^{-1}, \rho_1^{\,2} = \frac{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}{144(-x_1^{\,2} + x_0^{\,2})}, \\ &p = t^{-4}(C_1 y + C_2 z) + \frac{1}{12}(C_1^{\,2} + C_2^{\,2})\rho_1^{-1} + K_0|t|^{-3}, x_1 = t^{-4}x. \end{aligned} \tag{27}$$

Если $\gamma^{-1} \neq 2$, то интегрирование приводит к противоречию: $C_1 = C_2 = 0$.

Пусть $3b + 2 + \gamma^{-1} \neq 0$. При $\gamma^{-1} = 2$ получаем четыре решения с разными значениями параметра b.

1) $b = -2$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = -2C, v_1 = v_0(x_1 + C) - \frac{1}{2}C_1\rho_0^{-1}, w_1 = w_0(x_1 + C) - \frac{1}{2}C_2\rho_0^{-1}, \\ &\rho_1 = \rho_0, p = t^{-2}(C_1 y + C_2 z) + 2\rho_0 C(x_1 + C) + K_0 t^{-1} + \frac{1}{2}\rho_0^{-1}(C_1^{\,2} + C_2^{\,2}), \end{aligned} \tag{28}$$

где $x_1 = t^{-2}x, C_1 v_0 + C_2 w_0 = 2\rho_0 C$.

2) $b = -\dfrac{8}{5}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned} &u_1 = \frac{4}{3}x_1, v_1 = v_0 x_1^{\,2} - \frac{3}{8}C_1\rho_0^{-1}, w_1 = w_0 x_1^{\,2} - \frac{3}{8}C_2\rho_0^{-1}, \\ &\rho_1 = \rho_0, p = |t|^{-\frac{8}{3}}(C_1 y + C_2 z) - \frac{2}{9}\rho_0 x_1^{\,2} + K_0|t|^{-\frac{5}{3}} + \frac{9}{40}\rho_0^{-1}(C_1^{\,2} + C_2^{\,2}). \end{aligned} \tag{29}$$

где $x_1 = |t|^{-\frac{8}{3}}x, C_1v_0 + C_2w_0 + \dfrac{2}{9}\rho_0 = 0.$

3) $b = -\dfrac{3}{2}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1 = 2x_1, v_1 = v_0{x_1}^3 - \frac{1}{3}C_1{\rho_0}^{-1}, w_1 = w_0{x_1}^3 - \frac{1}{3}C_2{\rho_0}^{-1},\\&\rho_1 = \rho_0, p = |t|^{-3}(C_1y + C_2z) - \rho_0{x_1}^2 + K_0|t|^{-2} + \frac{1}{6}{\rho_0}^{-1}({C_1}^2 + {C_2}^2).\end{aligned}\tag{30}$$

где $x_1 = |t|^{-3}x, C_1v_0 + C_2w_0 = 0.$

4) $b = -\dfrac{5}{3}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1 = x_1 - \frac{3}{2}C, v_1 = v_0(x_1 + C)^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}C_1{\rho_0}^{-1}, w_1 = w_0(x_1 + C)^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}C_2{\rho_0}^{-1},\\&\rho_1 = \rho_0, p = |t|^{-\frac{5}{2}}(C_1y + C_2z) + \frac{15}{4}\rho_0C(x_1 + C) + K_0|t|^{-\frac{3}{2}} + \frac{4}{15}{\rho_0}^{-1}({C_1}^2 + {C_2}^2).\end{aligned}\tag{31}$$

где $x_1 = |t|^{-\frac{5}{2}}x, C_1v_0 + C_2w_0 = 0.$

При $\gamma^{-1} \neq 2$ система разрешима только при следующих значениях параметров b и γ^{-1}:

5) $b = -\dfrac{3}{2}, \gamma^{-1} = \dfrac{3}{2}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1 = x_1 - 2C, v_1 = v_0|x_1 + C|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}},\\&w_1 = w_0|x_1 + C|^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 + C|^{-\frac{1}{2}},\\&p = |t|^{-3}(C_1y + C_2z) + 12\rho_0C|x_1 + C|^{\frac{1}{2}} + K_0|t|^{-2},\end{aligned}\tag{32}$$

где $x_1 = |t|^{-3}x, C_1v_0 + C_2w_0 = 0, {C_1}^2 + {C_2}^2 = 24{\rho_0}^2C.$

6) $b = -\dfrac{13}{9}, \gamma^{-1} = \dfrac{5}{3}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1 = \frac{7}{4}x_1 - \frac{3}{2}C, v_1 = v_0|x_1 + C|^{\frac{13}{6}} - \frac{2}{5}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}},\\&w_1 = w_0|x_1 + C|^{\frac{13}{6}} - \frac{2}{5}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 + C|^{-\frac{1}{2}},\\&p = |t|^{-\frac{13}{4}}(C_1y + C_2z) + \frac{1}{8}\rho_0|x_1 + C|^{\frac{1}{2}}(110C - 7x_1) + K_0|t|^{-\frac{9}{4}},\end{aligned}\tag{33}$$

где $x_1 = |t|^{-\frac{13}{4}}x, C_1v_0 + C_2w_0 = 0, {C_1}^2 + {C_2}^2 = \dfrac{1755}{32}{\rho_0}^2C.$

7) $b = -\dfrac{8}{5}, \gamma^{-1} = \dfrac{6}{5}$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1 = -\frac{8}{3}C, v_1 = v_0(x_1 + C) - \frac{3}{4}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}},\\&w_1 = w_0(x_1 + C) - \frac{3}{4}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1 + C|^{\frac{1}{2}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 + C|^{-\frac{1}{2}},\\&p = |t|^{-\frac{8}{3}}(C_1y + C_2z) + \frac{80}{9}\rho_0C|x_1 + C|^{\frac{1}{2}} + K_0|t|^{-\frac{5}{3}},\end{aligned}\tag{34}$$

где $x_1 = |t|^{-\frac{8}{3}}x, C_1v_0 + C_2w_0 = 0, {C_1}^2 + {C_2}^2 = \dfrac{320}{81}{\rho_0}^2C.$

Пусть $h(p) = h_0$ – постоянная, тогда (21) тождественно выполнено. В этом случае получаем систему: (16), (17), (18), а также $u_1 = -2x_1 + C$,

$$\rho_{1_{x_1}}{\rho_1}^{-1}\left((3b + 2)(b + 1)^{-1}x_1 - C\right) = 2(b + 1)^{-1}.$$

Возникает еще четыре случая с различными значениями параметра b.

8) Если $b=-\dfrac{2}{3}$, то из последнего уравнения следует $C\neq 0$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+C, v_1=v_0e^{\frac{2}{C}x_1}-\frac{1}{4}C_1{\rho_0}^{-1}e^{\frac{6}{C}x_1}, w_1=w_0e^{\frac{2}{C}x_1}-\frac{1}{4}C_2{\rho_0}^{-1}e^{\frac{6}{C}x_1},\\&\rho_1=\rho_0e^{-\frac{6}{C}x_1}, p=t^2(C_1y+C_2z)+\rho_0Ce^{-\frac{6}{C}x_1}(x_1-\frac{2}{3}C)+K(t).\end{aligned} \tag{35}$$

где $x_1=t^2x$, $K(t)$ – произвольная функция.

9) Если $b=-\dfrac{4}{3}$, заменим C на $6C$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+6C, v_1=|x_1-C|^{\frac{2}{3}}(v_0+\frac{1}{2}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1-C|^{\frac{1}{3}}),\\&w_1=|x_1-C|^{\frac{2}{3}}(w_0+\frac{1}{2}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1-C|^{\frac{1}{3}}), \rho_1=\rho_0(x_1-C)^{-1},\\&p=t^{-4}(C_1y+C_2z)-6\rho_0x_1-12\rho_0C\ln|x_1-C|+K(t).\end{aligned} \tag{36}$$

где $x_1=t^{-4}x$.

10) $b=-2$. Заменим C на $4C$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+4C, v_1=|x_1-C|^{\frac{1}{2}}(v_0+\frac{1}{4}C_1{\rho_0}^{-1}\ln|x_1-C|),\\&w_1=|x_1-C|^{\frac{1}{2}}(w_0+\frac{1}{4}C_2{\rho_0}^{-1}\ln|x_1-C|), \rho_1=\rho_0|x_1-C|^{-\frac{1}{2}},\\&p=t^{-2}(C_1y+C_2z)-4\rho_0|x_1-C|^{\frac{1}{2}}x_1+K(t),\end{aligned} \tag{37}$$

где $x_1=t^{-2}x$.

11) $b\neq-\dfrac{2}{3}, b\neq-\dfrac{4}{3}, b\neq-2$. Заменим C на $\dfrac{3b+2}{b+1}C$. Решение задается формулами:

$$\begin{aligned}&u_1=-2x_1+\frac{3b+2}{b+1}C, v_1=v_0|x_1-C|^{\frac{b}{3b+2}}-\frac{b+1}{b+2}C_1{\rho_0}^{-1}|x_1-C|^{-\frac{2}{3b+2}},\\&w_1=w_0|x_1-C|^{\frac{b}{3b+2}}-\frac{b+1}{b+2}C_2{\rho_0}^{-1}|x_1-C|^{-\frac{2}{3b+2}}, \rho_1=\rho_0|x_1-C|^{\frac{2}{3b+2}},\\&p=|t|^{-\frac{b}{b+1}}(C_1y+C_2z)+\frac{3b+2}{b+1}\rho_0|x_1-C|^{\frac{3b+4}{3b+2}}\left(\frac{(b+2)(3b+2)}{(b+1)(3b+4)}C-x_1\right)+K(t).\end{aligned} \tag{38}$$

4. Регулярные частично инвариантные решения, зависящие от одной пространственной переменной

Пусть в (15) $C_1\!=\!C_2\!=\!0 : p\!=\!P(x_1)\!+\!K(t)$. Если $K(t)=const$, то получим инвариантную подмодель, рассмотренную в п.2, поэтому полагаем $K(t)\neq const$. Введем обозначение по формуле (5), тогда из УГД следуют дифференциальные уравнения

$$P_{x_1}=\rho_1\left((1-b)(b+1)^{-1}\bar{u}_1-\bar{u}_1\bar{u}_{1x_1}+b(b+1)^{-2}x_1\right), \tag{39}$$

$$\bar{u}_1v_{1x_1}=-b(b+1)^{-1}v_1, \tag{40}$$

$$\bar{u}_1w_{1x_1}=-b(b+1)^{-1}w_1, \tag{41}$$

$$\bar{u}_1\rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}+\bar{u}_{1x_1}=-(3b+4)(b+1)^{-1}, \tag{42}$$

а также переопределенное равенство

$$h'h^{-1}(\bar{u}_1P_{x_1}+tK_t)=\bar{u}_1\rho_{1x_1}{\rho_1}^{-1}+2(b+1)^{-1}. \tag{43}$$

Если $P = P_0$ – постоянная, то в (43) переменные t, x_1 разделяются и определяется $K(t) : h(K(t) + P_0) = h_0|t|^{\frac{C}{b+1}}$. Из (42),(39) следует $\bar{u}_1 = -b(b+1)^{-1}x_1$ или $\bar{u}_1 = (b+1)^{-1}x_1$. В первом случае решение (39)–(43) задается формулами

$$u_1 = 0, v_1 = v_0 x_1, w_1 = w_0 x_1, \rho_1 = \rho_0 |x_1|^{\frac{2b+4}{b}}, p = K(t) + P_0. \tag{44}$$

Во втором случае решение задается формулами

$$u_1 = x_1, v_1 = v_0|x_1|^{-b}, w_1 = w_0|x_1|^{-b}, \rho_1 = \rho_0|x_1|^{-3b-5}, p = K(t) + P_0. \tag{45}$$

Далее полагаем $P \neq const$. В уравнении (43) $\bar{u}_1 P_{x_1} + tK_t \neq 0$, иначе придем к противоречию $K(t) = const$. Если при этом $h(p) = h_0$ – постоянная, то этот случай совпадает с аналогичным случаем из п.3 при $C_1 = C_2 = 0$. Если $h' \neq 0$, из (43) следует $\bar{u}_1 \rho_{1x_1} \rho_1{}^{-1} + 2(b+1)^{-1} \neq 0$. Дифференцируем (43) по t и по x_1:

$$\left(\frac{h'}{h}\right)' (\bar{u}_1 P_{x_1} + tK_t) + \frac{h'}{h}\left(1 + t\frac{K_{tt}}{K_t}\right) = 0, \tag{46}$$

$$\left(\frac{h'}{h}\right)' (\bar{u}_1 P_{x_1} + tK_t) P_{x_1} + \frac{h'}{h}(\bar{u}_1 P_{x_1})_{x_1} = \left(\bar{u}_1 \frac{\rho_{1x_1}}{\rho_1}\right)_{x_1}. \tag{47}$$

Подставим (43), (46) в (47), разделим на P_{x_1} и дифференцируем по x_1:

$$\left(\frac{(\bar{u}_1 P_{x_1})_{x_1}}{P_{x_1}}\right)_{x_1} = \left(\frac{\bar{u}_1(\bar{u}_1(\ln\rho_1)_{x_1})_{x_1}}{\bar{u}_1(\ln\rho_1)_{x_1} + 2(b+1)^{-1}}\right)_{x_1} + \left(\frac{(\bar{u}_1(\ln\rho_1)_{x_1})_{x_1}}{P_{x_1}(\bar{u}_1(\ln\rho_1)_{x_1} + 2(b+1)^{-1})}\right)_{x_1} tK_t. \tag{48}$$

Переменные в (48) разделяются.

Пусть коэффициент при tK_t не равен нулю, тогда $K(t) = \ln|t|$, и в (43) переменные разделяются. С заменой (7) (при $\bar{u}_1 \neq 0$) получим интегралы и подмодель из одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{gathered} v_1 = v_0 e^{-\frac{b}{b+1}s}, w_1 = w_0 e^{-\frac{b}{b+1}s}, \rho_1 x_{1s} = \rho_0 e^{-\frac{3b+4}{b+1}s}, \\ h = h_0 e^{np}, p = \ln|t| - n^{-1}\ln|x_{1s}| - \left((3b+2)n^{-1}(b+1)^{-1} + 1\right)s, \end{gathered} \tag{49}$$

$$n^{-1}\left(\frac{3b+2}{b+1} + \frac{x_{1ss}}{x_{1s}}\right) + 1 = \rho_0 e^{-\frac{3b+4}{b+1}s}\left(\frac{b-1}{b+1}x_{1s} + x_{1ss} - \frac{b}{(b+1)^2}x_1\right). \tag{50}$$

Если в (48) коэффициент при tK_t равен нулю, то $(\ln\rho_1)_{ss} = C_1 P_s((\ln\rho_1)_s + 2(b+1)^{-1})$. Система (39)–(43) разрешима только в случае, когда $C_1 = 0$, иначе путем сложных рассуждений придем к противоречию. Если $\bar{u}_1 \neq 0$, введем переменную s по формуле (7), тогда из (40)–(42) определяются $\rho_1 = \rho_0 e^{\frac{C-2}{b+1}s}, \bar{u}_1 = u_0 e^{-\frac{3b+2+C}{b+1}s}$, v_1, w_1 – по формулам из (49).

Если $3b + 2 + C \neq 0$, то $x_1 = -(b+1)(3b+2+C)^{-1}e^{-\frac{3b+2+C}{b+1}s} + x_0$. Тогда

$$\begin{gathered} \bar{u}_1 = -(3b+2+C)(b+1)^{-1}(x_1 - x_0), v_1 = v_0|x_1 - x_0|^{\frac{b}{3b+2+C}}, \\ w_1 = w_0|x_1 - x_0|^{\frac{b}{3b+2+C}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 - x_0|^{-\frac{C-2}{3b+2+C}} \end{gathered} \tag{51}$$

с новыми постоянными v_0, w_0, ρ_0. Из (46), (47) следует равенство $\dfrac{(\bar{u}_1 P_{x_1})_{x_1}}{P_{x_1}} = 1 + t\dfrac{K_{tt}}{K_t} = C_0$, C_0 – постоянная. Если $C_0 \neq 0$, то $p = C_1|x_1 - x_0|^{-\frac{C_0(b+1)}{3b+2+C}} + C_2|t|^{C_0} + P_0$, из (43) находим $h(p) = h_0|p - P_0|^{\frac{C}{C_0(b+1)}}$. Подстановка найденных функций в (39) и изучение совместности дает три решения.

1) $C_0 = -\dfrac{6b+6+C}{b+1}$. Решение задается формулами:

$$u_1 = -(2b+2+C)(b+1)^{-1}x_1, v_1 = v_0|x_1|^{\frac{b}{3b+2+C}}, w_1 = w_0|x_1|^{\frac{b}{3b+2+C}},$$
$$\rho_1 = \rho_0|x_1|^{-\frac{C-2}{3b+2+C}}, p = C_1|x_1|^{\frac{6b+6+C}{3b+2+C}} + C_2|t|^{-\frac{6b+6+C}{b+1}} + P_0, \qquad (52)$$

где C_1 определено равенством
$C_1(6b+6+C)(b+1)^2 = \rho_0(2b+2+C)(3b+3+C)(3b+2+C)$.

2) $C = -2(b+1)$. Решение задается формулами:

$$u_1 = b(b+1)^{-1}x_0, v_1 = v_0(x_1 - x_0), w_1 = w_0(x_1 - x_0),$$
$$\rho_1 = \rho_0|x_1 - x_0|^{\frac{2b+4}{b}}, p = C_1|x_1 - x_0|^{-\frac{C_0(b+1)}{b}} + C_2|t|^{C_0} + P_0, \qquad (53)$$

где C_1 определено равенством $C_1C_0(b+1)^3 = b\rho_0x_0(3b+2+C)$.

3) $C = -3(b+1)$. Решение задается формулами:

$$u_1 = x_1 - (b+1)^{-1}x_0, v_1 = v_0|x_1 - x_0|^{-b}, w_1 = w_0|x_1 - x_0|^{-b},$$
$$\rho_1 = \rho_0|x_1 - x_0|^{-3b-5}, p = C_1|x_1 - x_0|^{C_0(b+1)} + C_2|t|^{C_0} + P_0, \qquad (54)$$

где C_1 определено равенством $C_1C_0(b+1)^3 = b\rho_0x_0(3b+2+C)$.

Если $C_0 = 0$, то $p = -C_1(b+1)(3b+2+C)^{-1}\ln|x_1 - x_0| + C_2\ln|t| + P_0$. Из (43) находим $h(p) = h_0e^{\frac{C}{(b+1)(C_1+C_2)}}$. Подстановка найденных функций в (39) и изучение совместности дает еще три решения.

4) $C = -6(b+1)$. Решение задается формулами:

$$u_1 = 4x_1 - \frac{3b+4}{b+1}x_0, v_1 = v_0|x_1 - x_0|^{-\frac{b}{3b+4}}, w_1 = w_0|x_1 - x_0|^{-\frac{b}{3b+4}},$$
$$\rho_1 = \rho_0|x_1 - x_0|^{-2}, p = \frac{C_1(b+1)}{3b+4}\ln|x_1 - x_0| + C_2\ln|t| + P_0, \qquad (55)$$

где $C_1(b+1) = 12\rho_0(3b+4)$.

5) $b = -\frac{4}{3}, C = -\frac{4}{3}$. Решение задается формулами:

$$u_1 = 4x_0, v_1 = v_0(x_1 - x_0), w_1 = w_0(x_1 - x_0), \rho_1 = \rho_0(x_1 - x_0)^{-1},$$
$$p = -\frac{1}{4}C_1\ln|x_1 - x_0| + C_2\ln|t| + P_0, \qquad (56)$$

6) $b = -\frac{4}{3}, C = -1$. Решение задается формулами:

$$u_1 = x_1 + 3x_0, v_1 = v_0|x_1 - x_0|^{\frac{4}{3}}, w_1 = w_0|x_1 - x_0|^{\frac{4}{3}}, \rho_1 = \rho_0|x_1 - x_0|^{-1},$$
$$p = -\frac{1}{3}C_1\ln|x_1 - x_0| + C_2\ln|t| + P_0. \qquad (57)$$

Если $3b + 2 + C = 0$, то $x_1 = const$ противоречие.

Если $\bar{u}_1 = 0$, то $b = -\frac{4}{3}$. Получим решение

$$u_1 = 4x_1, v_1 = 0, w_1 = 0, p = \ln|t| + P(x_1), \rho_1 = -\frac{1}{12}x_1^{-1}P_{x_1}, \qquad (58)$$

где P_{x_1} – любая функция.

5. Заключение

На подалгебре 3.23 из оптимальной системы работы [2] получено две подмодели: (9) – инвариантная ранга 1 и (50) – частично инвариантная ранга 1 дефекта 1, семь решений (35), (36), (37), (38), (44), (45), (58), зависящих от одной произвольной функции, и точные решения (10)–(12), (27)–(34), (44), (45), (52)–(57), зависящие от нескольких постоянных. Минимальное число постоянных – 4, максимальное число постоянных – 8.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Программа подмодели. Газовая динамика.* // ПММ, Т. 58, Вып. 4, 1994. С. 30–55.
2. Макаревич Е.В. *Оптимальная система подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнения состояния с разделенной плотностью* // Сибирские электронные математические известия, Т. 8, 2011. С. 19–38.
3. Макаревич Е.В. *Иерархия подмоделей уравнений газовой динамики с уравнением состояния с разделенной плотностью* // Сибирские электронные математические известия, Т. 9, 2012. С. 306–328.
4. Макаревич Е.В. *Коллапс или мгновенный источник газа на прямой* // Уфимский математический журнал, Т. 4, Вып. 4, 2012. С. 119–129.
5. S.V. Khabirov *Hierarchy of submodels of differential equations* // Archives of ALGA, V. 9. 2012. p. 79–94.

Елена Владимировна Макаревич,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: Makarevich_EV@mail.ru