ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 3 (2013). С. 96-120.

УДК 517.5

ЗАМКНУТОСТЬ МНОЖЕСТВА СУММ РЯДОВ ДИРИХЛЕ.

А.С. КРИВОШЕЕВ, О.А. КРИВОШЕЕВА

Аннотация. В работе рассматриваются ряды Дирихле. Изучается проблема замкнутости множества сумм таких рядов в пространстве функций аналитических в выпуклой области комплексной плоскости с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах. Получены необходимые и достаточные условия, при которых каждая функция из замыкания линейной оболочки системы экспонент с положительными показателями представляется рядом Дирихле. Эти условия формулируются только при помощи геометрических характеристик последовательности показателей и выпуклой области.

Ключевые слова: экспонента, выпуклая область, ряд Дирихле, целая функция, инвариантное подпространство.

Mathematics Subject Classification: 41A05, 41A30.

1. Введение

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. В работе рассматриваются ряды Дирихле

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k \exp(\lambda_k z). \tag{1}$$

Известно (см., например, [1], гл. II, §1, п. 4), что при некотором естественном условии на показатели λ_k ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на компактах в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < \gamma\}$ к аналитической функции и расходится в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez > \gamma\}$. Число γ называемое абсциссой сходимости, вычисляется по формуле, которая является аналогом формулы Коши-Адамара для степенных рядов (см., например, [1], гл. II, §1, п. 4, теорема 2.1.2). Отметим еще, что разложение функций в ряд Дирихле всегда единственное (см., например, [1], гл. II, §1, п. 3).

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H(D)$ обозначает пространство функций, аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D. Цель работы — выяснить условия, при которых совокупность сумм рядов (1), полуплоскости сходимости которых содержат область D, является замкнутым подмножеством пространства $H(D)$.

Эта совокупность содержит линейную оболочку системы $\mathcal{E} = \{\exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$, а сама является частью подпространства $W(\Lambda, D)$ — замыкания в $H(D)$ линейной оболочки $\mathcal{E}$. Подпространство $W(\Lambda, D)$ замкнуто и инвариантно относительно оператора дифференцирования. Система $\mathcal{E}$ представляет из себя набор собственных функций этого оператора в $W(\Lambda, D)$, а последовательность Λ является его спектром. Из определения подпространства $W(\Lambda, D)$ сразу вытекает, что оно допускает спектральный синтез, т.е. каждая его функция есть предел линейных комбинаций собственных функций. Легко заметить, что

A.S. Krivosheyev, O.A. Krivosheyeva, A closedness of set of Dirichlet series sum.

Работа выполнена при поддержке программы ФЦП (соглашение № 14.B37.21.0358).

Поступила 28 мая 2013 г.

замкнутость в $H(D)$ множества сумм рядов (1) эквивалентна тому, что каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1), который равномерно сходится на компактных подмножествах области D. Если $W(\Lambda, D)$ нетривиально (т.е. система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$), и выполнено последнее, то говорят, что в подпространстве $W(\Lambda, D)$ имеет место фундаментальный принцип. Двойственной к проблеме фундаментального принципа в нетривиальном замкнутом инвариантном подпространстве в $H(D)$, допускающем спектральный синтез, является проблема интерполяции в пространстве целых функций экспоненциального типа, сопряженные диаграммы которых лежат в области D. Исследования обеих проблем, проводившиеся вначале независимо друг от друга, имеют богатую историю. Обзор основных результатов, полученных в ходе этих исследований, имеется в работах [2] и [3]. Критерий фундаментального принципа (а вместе с ним и интерполяции) в произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространствах, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях получен в работах [3] и [4]. Однако этот критерий формулируется в терминах существования некоторого специального семейства целых функций, обращающихся в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$, и имеющих подходящие оценки снизу. В общем случае (особенно для неограниченных областей D) остается открытым вопрос о том, при каких условиях на последовательность Λ и область D существует подобное семейство функций.

В данной работе получено полное решение проблемы замкнутости множества сумм рядов (1) для произвольной выпуклой области D и, в частности, проблемы фундаментального принципа в случае положительного спектра. При этом, в отличие от работы [3], используются простые геометрические характеристики последовательности Λ.

Во втором параграфе собраны вспомогательные результаты. В частности, строятся указанные выше последовательности целых функций (леммы 7,9), а также целая функция из $W(\Lambda, \mathbb{C})$, которая не представляется рядом (1) ни в каком открытом подмножестве плоскости (лемма 3).

Основные результаты работы приведены в третьем параграфе (теоремы 1-4). В частности, здесь доказывается, что множество сумм рядов Дирихле, сходящихся в заданной полуплоскости, замкнуто тогда и только тогда, когда $S_\Lambda > -\infty$. Величина S_Λ введена в работе [3] (ее определение приводится во втором параграфе). Она схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна (см., например, [1], гл. II, §6, п. 2), но при этом, в отличие от последнего, эффективна для любой комплексной последовательности.

2. Предварительные результаты

Нам понадобятся некоторые сведения из теории целых функций экспоненциального типа, т.е. функций f, удовлетворяющих оценке: $\ln|f(z)| \leqslant A + B|z|$, $z \in \mathbb{C}$, где $A, B > 0$ зависят от f. Верхним и нижним индикаторами f (субгармонической функции $\ln|f|$) называются соответственно функции

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(t\lambda)|}{t}, \quad \underline{h}_f(\lambda) = \lim_{\delta\to 0} \underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{\pi\delta^2} \int\limits_{B(\lambda,\delta)} \frac{\ln|f(tz)|}{t} dxdy, \ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $z = x + iy$. Из этих определений и теоремы Хартогса о верхнем пределе семейства субгармонических функций нетрудно получить неравенство $\underline{h}_f(\lambda) \leqslant h_f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Говорят (см. [5], гл. III), что f имеет (вполне) регулярный рост, если

$$h_f(\lambda) = \lim_{t\to\infty, t\notin E} \frac{\ln|f(t\lambda)|}{t}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где E — множество нулевой относительной меры на луче $(0, +\infty)$, т.е. мера Лебега его пересечения с интервалом $(0, r)$ бесконечна мала по сравнению с r при $r \to +\infty$. Имеется ряд других эквивалентных этому определений регулярности роста. Приведем одно из них.

Функция f называется (см. [6], гл. 4, определение 4.1) функцией регулярного роста, если $\underline{h}_f(\lambda) = h_f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Верхний индикатор h_f является выпуклой положительно однородной порядка один функцией, которая совпадает с опорной функцией выпуклого компакта K (точнее говоря, комплексно сопряженного с K компакта), называемого сопряженной диаграммой f (см., напр., [7], гл. I, §5, теорема 5.4 (Полиа)):

$$h_f(\lambda) = H_K(\lambda) = \sup_{z \in K} Re(\lambda z), \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел с единственной предельной точкой ∞. Символом $n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k, попавших в сектор $\{\lambda = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t \in (0, r)\}$. Говорят (см. [5], гл. II, §1), что Λ имеет угловую плотность (при порядке один), если для всех φ_1, φ_2 за исключением, быть может, счетного множества существует предел

$$\tau(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \lim_{r \to \infty} \frac{n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)}{r}.$$

Множество Λ называется правильно распределенным, если оно имеет угловую плотность и существует

$$\lim_{r \to \infty} \sum_{|\lambda_k| < r} \frac{1}{\lambda_k}.$$

Согласно теореме 4 главы III книги [5] функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее нулевое множество (с учетом кратностей) является правильно распределенным. При этом, если K — сопряженная диаграмма f, то за исключением, быть может, счетного числа значений φ_1, φ_2 верно равенство (см. [5], гл. II, §1, формула (2.07))

$$\tau(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \frac{1}{2\pi} s(\varphi_1, \varphi_2, K), \tag{2}$$

где $s(\varphi_1, \varphi_2, K)$ — длина дуги границы ∂K, заключенная между точками опоры $z(\varphi_1) \in \partial K$ и $z(\varphi_2) \in \partial K$ соответственно опорных прямых $l(\varphi_1) = \{z : Re(ze^{i\varphi_1}) = H_K(e^{i\varphi_1})\}$ и $l(\varphi_2) = \{z : Re(ze^{i\varphi_2}) = H_K(e^{i\varphi_2})\}$. За исключением не более чем счетного числа значений φ (соответствующих прямолинейным участкам границы) опорная прямая $l(\varphi)$ имеет единственную точку опоры $z(\varphi)$. Из двух дуг, соединяющих точки $z(\varphi_1)$ и $z(\varphi_2)$, выбирается та, у которой каждая ее точка является точкой опоры некоторой прямой $l(\varphi)$ (зависящей от нее) со значением параметра φ из отрезка $[\varphi_1, \varphi_2]$. В случае, когда K — отрезок длины τ (и только в этом случае), величина дуги $s(\varphi_1, \varphi_2, K)$, где φ_1 и φ_2 отличны от двух противоположных чисел φ_0 и $-\varphi_0$, принимает лишь одно из трех возможных значений: 0, если интервал (φ_1, φ_2) не содержит ни одно из этих чисел, τ, если он содержит только одно из них, и 2τ, если $-\varphi_0, \varphi_0 \in (\varphi_1, \varphi_2)$.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H^*(D)$ — пространство сильно сопряженное к $H(D)$. Преобразование Лапласа $f(\lambda) = \nu(\exp(\lambda z))$ устанавливает изоморфизм (см., например, [8], гл. III, §12, теорема 12.3) между $H^*(D)$ и пространством P_D, состоящим из целых функций экспоненциального типа, сопряженные диаграммы которых лежат в области D. По теореме Хана-Банаха, неполнота системы $\mathcal{E} = \{\exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ в $H(D)$ (т.е. нетривиальность $W(\Lambda, D)$) равносильна существованию ненулевого линейного непрерывного функционала $\nu \in H^*(D)$, который обращается в ноль на элементах системы. Таким образом, неполнота $\mathcal{E}$ равносильна существованию функции $f \in P_D$, которая обращается в ноль в точках λ_k, $k = 1, 2, \ldots$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и $n(r, \Lambda)$ обозначает число ее членов, попавших в полуинтервал $(0, r]$.

Говорят, что Λ имеет плотность $\tau(\Lambda)$ (измерима), если существует предел

$$\tau(\Lambda)=\lim_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Максимальной плотностью последовательности Λ называется величина

$$\tau_0(\Lambda)=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}.$$

Отметим, что согласно лемме из параграфа E3 главы VI книги [9] верхний предел по $\delta\to 0$ в определении $\tau_0(\Lambda)$ можно заменить на предел (т.е. он всегда существует). Положим

$$\underline{\tau}(\Lambda)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)}{r},\qquad \overline{\tau}(\Lambda)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Величины $\underline{\tau}(\Lambda)$ и $\overline{\tau}(\Lambda)$ называются соответственно нижней и верхней плотностью последовательности Λ. Последняя является измеримой тогда и только тогда, когда $\underline{\tau}(\Lambda)=\overline{\tau}(\Lambda)$. Нетрудно заметить, что верны неравенства

$$\underline{\tau}(\Lambda)\leqslant\overline{\tau}(\Lambda)\leqslant\tau_0(\Lambda). \tag{3}$$

Первое вытекает непосредственно из определений. Второе для случая $\overline{\tau}(\Lambda)<+\infty$ следует из соотношений

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}\geq\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)}{\delta r}-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r}=$$

$$=\frac{\overline{\tau}(\Lambda)}{\delta}-(1-\delta)\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n((1-\delta)r,\Lambda)}{(1-\delta)\delta r}=\frac{\overline{\tau}(\Lambda)}{\delta}-(1-\delta)\frac{\overline{\tau}(\Lambda)}{\delta}=\overline{\tau}(\Lambda),\ \delta>0.$$

Если же $\overline{\tau}(\Lambda)=+\infty$, то из последовательности Λ нетрудно выделить подпоследовательность Λ' со сколь угодно большой конечной верхней плотностью. Тогда по доказанному получаем: $\overline{\tau}(\Lambda')\leqslant\tau_0(\Lambda')\leqslant\tau_0(\Lambda)$. Следовательно, $\tau_0(\Lambda)=+\infty$, т.е. неравенство (3) верно и в этом случае. Схожие выкладки показывают, что в случае, когда последовательность имеет плотность $\tau(\Lambda)$, верно равенство $\tau_0(\Lambda)=\tau(\Lambda)$. В общем случае второе неравенство в (3) может быть строгим. Действительно, рассмотрим следующий пример. Пусть $\Lambda=\cup_{m=1}^{\infty}\Lambda_m$, где $\Lambda_m=\{\lambda_k, k(m)\leqslant k<k(m+1)\}$, $\lambda_{k(m)+j}=10^m+j$, $0\leqslant j<k(m+1)-k(m)$, $m=1,2,\ldots$, и $k(1)=1$, $k(m+1)-k(m)=10^{m-1}$ при $m>1$. Непосредственным подсчетом нетрудно получить соотношения: $\overline{\tau}(\Lambda)\leqslant 1/9$, $\tau_0(\Lambda)=1$.

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — комплексная последовательность. Следуя работе [3], положим

$$q_\Lambda^j(z,\delta)=\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_j,\delta|\lambda_j|),k\neq j}\left(\frac{z-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right).$$

Здесь $B(w,r)$ — открытый круг с центром в w и радиуса r. Модуль функции $q_\Lambda^j(z,\delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k\in B(\lambda_j,\delta|\lambda_j|)$, $k\neq j$, около z. В случае, когда такие точки отсутствуют, считаем, что $q_\Lambda^j(z,\delta)\equiv 1$. Отметим, что модуль каждого из сомножителей в определении q_Λ^j в круге $B(\lambda_j,\delta|\lambda_j|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1-\delta))^{-1}$ (для $\delta\in(0,1)$), т.е. при $\delta\in(0,1/3)$ он не превосходит единицы. Кроме того, если $\delta_1\leqslant\delta_2$, то число сомножителей в определении $q_\Lambda^j(z,\delta_1)$ не превосходит числа сомножителей в определении $q_\Lambda^j(z,\delta_2)$, и каждый из сомножителей для $q_\Lambda^j(z,\delta_1)$ по модулю не меньше соответствующего сомножителя для $q_\Lambda^j(z,\delta_2)$. Таким образом, если $0<\delta_1\leqslant\delta_2<1/3$, то $|q_\Lambda^j(z,\delta_1)|\geq|q_\Lambda^j(z,\delta_2)|$, $z\in B(\lambda_j,\delta_2|\lambda_j|)$. Положим $S_\Lambda=0$, если Λ состоит из конечного числа элементов, и

$$S_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{|\lambda_k|}$$

в противном случае. Это определение корректно, поскольку согласно последнему неравенству предел по δ всегда существует. В силу сказанного выше $S_\Lambda \leqslant 0$. Отметим, что коэффициент 3 в определении q^j_Λ выбран лишь для удобства (см. [3], замечание 1 к теореме 5.1). Он обеспечивает неположительность величины S_Λ. Она схожа по смыслу с классическим индексом конденсации Бернштейна, но при этом эффективна для любой комплексной последовательности (а не только для измеримой положительной последовательности и комплексной последовательности нулевой плотности). Наряду с S_Λ введем еще величину

$$\tilde S_\Lambda = \varliminf_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q^k_\Lambda(\lambda_k,\delta)|}{\delta|\lambda_k|}.$$

Как и для S_Λ, верно неравенство $\tilde S_\Lambda \leqslant 0$. Если $\tilde S_\Lambda$ конечна, то, очевидно, $S_\Lambda = 0$. В качестве примера рассмотрим последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что $\lambda_{k+1}-\lambda_k \geq h > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Учитывая неравенство $n! \geq (n/3)^n$, имеем:

$$|q^k_\Lambda(\lambda_k,\delta)| \geq \prod_{\lambda_m\in B(\lambda_k,\delta\lambda_k),m\neq k}\left|\frac{\lambda_m-\lambda_k}{3\delta\lambda_m}\right| \geq \frac{(m(k,\delta)!h^{m(k,\delta)})^2}{(3\delta(1+\delta)\lambda_k)^{2m(k,\delta)}} \geq \frac{(m(k,\delta)h)^{2m(k,\delta)}}{(9\delta(1+\delta)\lambda_k)^{2m(k,\delta)}},$$

где $m(k,\delta)$ — максимальное целое число, удовлетворяющее неравенству $m(k,\delta)h < \delta\lambda_k$. Следовательно,

$$\tilde S_\Lambda \geq \varliminf_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{2m(k,\delta)\ln(m(k,\delta)h/9\delta(1+\delta)\lambda_k)}{\delta\lambda_k} \geq -\frac{2\ln 9}{h}.$$

Лемма 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что $\tilde S_\Lambda > -\infty$. Тогда максимальная плотность $\tau_0(\Lambda)$ конечна.*

Доказательство. Пусть $\delta \in (0, 1)$. Используя определение q^j_Λ, получаем:

$$\ln|q^j_\Lambda(\lambda_j,\delta)| = \ln\left|\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_j,\delta\lambda_j),k\neq j}\left(\frac{\lambda_j-\lambda_k}{3\delta\lambda_k}\right)\right| \leqslant \ln\left|\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_j,\delta\lambda_j),k\neq j}\left(\frac{\delta\lambda_j}{3\delta\lambda_k}\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \ln\left(\frac{\lambda_j}{3(1-\delta)\lambda_j}\right)^{(m(j,\delta)-1)} = -(m(j,\delta)-1)\ln(3(1-\delta)),$$

где $m(j,\delta)$ — число точек λ_k, попавших в круг $B(\lambda_j,\delta\lambda_j)$, т.е. $m(j,\delta) = n((1+\delta)\lambda_j,\Lambda) - n((1-\delta)\lambda_j,\Lambda)$, если точка $(1+\delta)\lambda_j$ не принадлежит Λ, и число $m(j,\delta)$ на единицу меньше в противном случае. Следовательно, имеем:

$$\tilde S_\Lambda = \varliminf_{\delta\to 0}\varliminf_{k\to\infty}\frac{\ln|q^k_\Lambda(\lambda_k,\delta)|}{\delta\lambda_k} \leqslant \varliminf_{\delta\to 0}\varliminf_{j\to\infty}\frac{-\ln(3(1-\delta))m(j,\delta)}{\delta\lambda_j} =$$

$$= -\varlimsup_{\delta\to 0}\ln(3(1-\delta))\varlimsup_{j\to\infty}\frac{m(j,\delta)}{\delta\lambda_j} = -\ln 3\varlimsup_{\delta\to 0}\varlimsup_{j\to\infty}\frac{n((1+\delta)|\lambda_j|,\Lambda)-n((1-\delta)|\lambda_j|,\Lambda)}{\delta\lambda_j}.$$

Покажем, что двойной верхний предел в последнем равенстве оценивается снизу величиной $\tau_0(\Lambda)$. Если $\tau_0(\Lambda) = 0$, то это очевидно. Для каждого $\delta \in (0,1)$ через $r_k(\delta)$, $k = 1, 2, \ldots$, обозначим последовательность, реализующую верхний предел по $r \to \infty$ в определении максимальной плотности. Пусть $\tau_0(\Lambda) > 0$. Тогда можно считать, что любой полуинтервал $((1-\delta)r_k(\delta), r_k(\delta)]$ содержит некоторое ненулевое число точек последовательности Λ. Произвольным образом выберем одну из них и через $j(k,\delta)$ обозначим ее номер. Поскольку $\lambda_{j(k,\delta)} \leqslant r_k(\delta) \leqslant \lambda_{j(k,\delta)}/(1-\delta)$, то нетрудно заметить, что верно вложение $((1-\delta)r_k(\delta), r_k(\delta)] \subset ((1-\tilde\delta)\lambda_{j(k,\delta)}, (1+\tilde\delta)\lambda_{j(k,\delta)}]$, где $\tilde\delta = \delta/(1-\delta)$. Следовательно,

$$\tau_0(\Lambda) = \varlimsup_{\delta\to 0}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} = \varlimsup_{\delta\to 0}\lim_{k\to\infty}\frac{n(r_k(\delta),\Lambda)-n((1-\delta)r_k(\delta),\Lambda)}{\delta r_k(\delta)} \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\tilde{\delta}}{\delta}\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{n((1+\tilde{\delta})\lambda_j,\Lambda)-n((1-\tilde{\delta})\lambda_j,\Lambda)}{\tilde{\delta}\lambda_j}=$$

$$=\overline{\lim_{\tilde{\delta}\to 0}}\,\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n((1+\tilde{\delta})\lambda_j,\Lambda)-n((1-\tilde{\delta})\lambda_j,\Lambda)}{\tilde{\delta}\lambda_j}.$$

Таким образом, с учетом предыдущего получаем $\tilde{S}_\Lambda \leqslant -\ln 3\tau_0(\Lambda)$. Отсюда следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Если $S_\Lambda > -\infty$, то $\overline{\tau}(\Lambda)<+\infty$.*

Доказательство. Предположим, что $\overline{\tau}(\Lambda)=+\infty$. Тогда для каждого $A>0$ найдется подпоследовательность $\Lambda(A)$ последовательности Λ такая, что верхняя плотность $\overline{\tau}(\Lambda(A))$ конечна и больше чем A. Фиксируем $\delta\in(0,1)$ и $A>0$. Имеем:

$$\overline{\tau}(\Lambda(A))=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda(A))}{r}\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda(A))-n((1-\delta)r,\Lambda(A))}{r}+\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n((1-\delta)r,\Lambda(A))}{r}=$$

$$=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda(A))-n((1-\delta)r,\Lambda(A))}{r}+(1-\delta)\overline{\tau}(\Lambda(A)).$$

Отсюда для любого $A>0$ получаем

$$\delta A\leqslant\delta\overline{\tau}(\Lambda(A))\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda(A))-n((1-\delta)r,\Lambda(A))}{r}\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{r}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,\Lambda)-n((1-\delta)r,\Lambda)}{r}=+\infty,\qquad \delta\in(0,1).$$

Пусть $\delta\in(0,1/2)$. Выберем последовательность $r_j\to+\infty$ такую, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{n(r_j,\Lambda)-n((1-\delta)r_j,\Lambda)}{r_j}=+\infty.$$

Можно считать, что для каждого $j\geq 1$ полуинтервал $((1-\delta)r_j,r_j]$ содержит некоторые точки последовательности Λ. Пусть λ_{k_j} одна из таких точек. Тогда верно вложение $((1-\delta)r_j,r_j]\subset((1-2\delta)\lambda_{k_j},(1+2\delta)\lambda_{k_j})$. Поэтому

$$\lim_{j\to\infty}\frac{m(k_j,2\delta)}{\lambda_{k_j}}=+\infty,$$

где $m(k_j,2\delta)$ определено в лемме 1. Как и в этой лемме, получаем

$$\ln|q_\Lambda^{k_j}(\lambda_{k_j},2\delta)|\leqslant-(m(k_j,2\delta)-1)\ln(3(1-2\delta)).$$

Следовательно, имеем:

$$S_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}\underline{\lim_{k\to\infty}}\frac{\ln|q_\Lambda^k(\lambda_k,\delta)|}{\lambda_k}\leqslant\lim_{\delta\to 0}\underline{\lim_{j\to\infty}}\frac{\ln|q_\Lambda^{k_j}(\lambda_{k_j},2\delta)|}{\lambda_{k_j}}\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{\delta\to 0}\ln(3(1-2\delta))\underline{\lim_{j\to\infty}}\frac{-(m(k_j,2\delta)-1)}{\lambda_{k_j}}=-\ln 3\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{j\to\infty}}\frac{(m(k_j,2\delta)-1)}{\lambda_{k_j}}=-\infty.$$

Это противоречит условию. Таким образом, $\overline{\tau}(\Lambda)<+\infty$. Лемма доказана.

Через $S(z,r)$ будем обозначать окружность с центром в точке z и радиуса $r>0$. Доказательство следующих двух утверждений основано на идеях доказательства теоремы 3.1 в работе [10].

Лемма 3. *Пусть $\Lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $S_\Lambda=-\infty$. Тогда существует целая функция $g\in W(\Lambda,\mathbb{C})$, которая не раскладывается в ряд Дирихле по системе $\mathcal{E}=\{exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^\infty$ ни на каком открытом подмножестве плоскости.*

Доказательство. Предположим вначале, что $\overline{\tau}(\Lambda) < +\infty$. По условию $S_\Lambda = -\infty$. Поэтому найдутся последовательность положительных чисел $\{\delta_p\}$ и подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}$ такие, что $\delta_p \to 0$ при $p \to \infty$ и

$$\lim_{p\to 0} \frac{\ln |q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)|}{\lambda_{k(p)}} = -\infty. \tag{4}$$

Можно считать, что

$$\lambda_{k(p+1)} \geq 2\lambda_{k(p)}, \quad \delta_p < 1/4, \quad p \geq 1. \tag{5}$$

Рассмотрим функции

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)})} \frac{exp(\lambda z) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{k(p)}) q_\Lambda^{k(p)}(\lambda, \delta_p)}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Найдем оценки сверху на $|g_p|$. Имеем

$$|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda, \delta_p)| = \left| \prod_{\lambda_k \in B(\lambda_{k(p)}, \delta_p\lambda_{k(p)}), k\neq k(p)} \frac{\lambda - \lambda_k}{3\delta_p\lambda_k} \right| \geq$$

$$\geq \left(\frac{4\delta_p\lambda_{k(p)}}{3\delta_p(1+\delta_p)\lambda_{k(p)}} \right)^{m(k(p),\delta_p)} \geq 1, \quad \lambda \in S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)}),$$

где $m(k(p), \delta_p)$ определено в лемме 1. Следовательно, верны неравенства

$$|g_p(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)})} \frac{exp(\lambda z) d\lambda}{(\lambda - \lambda_{k(p)}) q_\Lambda^{k(p)}(\lambda, \delta_p)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 5\lambda_{k(p)}\delta_p \sup_{\lambda \in S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)})} \left| \frac{exp(\lambda z)}{(\lambda - \lambda_{k(p)})} \right| \leqslant \sup_{\lambda \in S(\lambda_{k(p)}, 5\delta_p\lambda_{k(p)})} |exp(\lambda z)| \leqslant$$

$$\leqslant exp(Re(\lambda_{k(p)} z) + 5\delta_p\lambda_{k(p)}|z|), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(z), \tag{7}$$

где $c_p = \sqrt{|q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p)|}$, $p \geq 1$. Покажем, что этот ряд сходится равномерно на любом компактном подмножестве плоскости. Пусть $R > 0$. В силу (4) найдется номер p_0 такой, что $|c_p| \leqslant exp(-2R\lambda_{k(p)})$, $p \geq p_0$. Тогда с учетом (6) имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} |c_p| \max_{|z|\leqslant R} |g_p(z)| \leqslant A + \sum_{p=p_0}^{\infty} exp(-2R\lambda_{k(p)} + R\lambda_{k(p)} + 5\delta_p R\lambda_{k(p)}) < +\infty.$$

Последняя оценка здесь выполнена благодаря неравенствам $\lambda_{k(p+1)} \geq 2\lambda_{k(p)}$, $p \geq 1$, и тому, что $\delta_p \to 0$ при $p \to \infty$.

Таким образом, функция $g(z)$ является целой и лежит в пространстве $W(\Lambda, \mathbb{C})$. Предположим, что она представляется рядом (1) на некотором открытом подмножестве $U \subset \mathbb{C}$, содержащем точку z_0. Тогда по теореме Абеля для рядов Дирихле (см., например, [1], гл. II, §1, п. 2) ряд (1) сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : Rez < Rez_0\}$. На открытом подмножестве $\Pi \cap U$ его сумма равна $g(z)$. Поэтому он сходится к $g(z)$ во всей полуплоскости Π. Поскольку верхняя плотность $\overline{\tau}(\Lambda)$ конечна, то существует (см., например, [1], гл. IV, §1, п. 1) биортогональная к $\mathcal{E}$ последовательность функционалов $\{\nu_k\} \subset H^*(\Pi) \subset H^*(\mathbb{C})$, т.е. $\nu_k(exp(\lambda_k z)) = 1$, $k \geq 1$, и

$\nu_k(exp(\lambda_j z)) = 0$, если $k \neq j$. Так как ряд (1) сходится в топологии пространства $H(\Pi)$, то верны равенства

$$\nu_k(g) = d_k, \quad k \geq 1. \tag{8}$$

Используя вычеты и определение функции g_p, получаем

$$g_p(z) = b_{k(p)} exp(\lambda_{k(p)} z) + \sum_{\lambda_k \in ((1-\delta_p)\lambda_{k(p)}, (1+\delta_p)\lambda_{k(p)}), k \neq k(p)} b_k exp(\lambda_k z),$$

где $b_{k(p)} = (q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p))^{-1}$, $p \geq 1$. В силу (5) интервалы $((1-\delta_p)\lambda_{k(p)}, (1+\delta_p)\lambda_{k(p)})$ попарно не пересекаются. Тогда, учитывая сходимость ряда (7) в топологии пространства $H(\mathbb{C})$ и равенства (8), получаем

$$|d_{k(p)}| = |\nu_{k(p)}(g)| = |c_p b_{k(p)}| = \left(\sqrt{\left| q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta_p) \right|} \right)^{-1}, \quad p \geq 1.$$

Из (4) следует, что для каждого $z \in \mathbb{C}$

$$|d_{k(p)}| exp(Re(\lambda_{k(p)} z)) \to +\infty, \quad p \to \infty.$$

Это противоречит сходимости ряда (1) в полуплоскости Π. Таким образом, функция $g \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ не раскладывается в ряд по системе $\mathcal{E}$ ни на каком открытом подмножестве плоскости.

Остается рассмотреть ситуацию, когда $\overline{\tau}(\Lambda) = +\infty$. В этом случае не существует (см., например, [1], гл. I, §1, теорема 1.1.2) $f \in P_{\mathbb{C}}$ (целой функции экспоненциального типа), которая обращается в ноль во всех точках λ_k. Следовательно, система $\mathcal{E}$ полна в $H(\mathbb{C})$, т.е. $W(\Lambda, \mathbb{C}) = H(\mathbb{C})$. Пусть $\lambda_0 > 0$ отлична от точек λ_k, $k \geq 1$. Предположим, что функция $exp(\lambda_0 z) \in W(\Lambda, \mathbb{C})$ представляется рядом (1) на некотором открытом подмножестве комплексной плоскости. Как и выше, это представление распространяется на некоторую полуплоскость. Тогда в этой полуплоскости верно равенство

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k exp(\lambda_k z),$$

где $d_0 = -1$. В начале работы отмечалось, что представление рядом Дирихле всегда является единственным. Поэтому должны быть выполнены соотношения $d_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ Получили противоречие. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что множество сумм рядов (1), сходящихся в области D, замкнуто в пространстве $H(D)$. Тогда $S_\Lambda > -\infty$ и $\overline{\tau}(\Lambda) < +\infty$.*

Доказательство. Если $S_\Lambda = -\infty$, то по лемме 3 существует функция $g \in W(\Lambda, \mathbb{C}) \subset W(\Lambda, D)$, которая не раскладывается в ряд (1) в области D. Это противоречит условию. Таким образом, $S_\Lambda > -\infty$. Тогда по лемме 2 $\overline{\tau}(\Lambda) < +\infty$. Следствие доказано.

Лемма 4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что $\tilde{S}_\Lambda = -\infty$. Тогда для каждого $\tau > 0$ существует $\delta > 0$ и функция $g \in W(\Lambda, G)$, где $G = (\{z : Re z < \tau\delta\} \cap B(0, \tau)) \cup \{z : Re z < 0\}$, которая представляется рядом (1) с абсциссой сходимости $\gamma = 0$.*

Доказательство. Положим

$$g(z) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p g_p(z), \tag{9}$$

где $c_p = exp(-6\tau\delta\mu_{m(p)})$,

$$g_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S(\mu_{m(p)}, 5\delta\mu_{m(p)})} \frac{exp(\lambda z)d\lambda}{a_p(\lambda - \mu_{m(p)})q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\lambda, \delta)}, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

а последовательность $\tilde{\Lambda} = \{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ является частью Λ. Числа $a_p \geq 1$ мы выберем ниже. Сейчас же определим число δ, построим $\tilde{\Lambda}$ и подберем номера $m(p)$. Для этого, прежде всего, заметим, что согласно условию $\tilde{S}_\Lambda = -\infty$. Поэтому найдется $\delta \in (0, 1/4)$ и подпоследовательность $\{\lambda_{k(p)}\}_{p=1}^{\infty}$ последовательности Λ, удовлетворяющие условию

$$\ln |q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta)| \leqslant -6\tau\delta\lambda_{k(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

При этом можно считать, что

$$\lambda_{k(p+1)} \geq 2\lambda_{k(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Последовательность $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$ будем искать в виде объединения $\cup_{p=1}^{\infty}\Lambda_p$. Фиксируем $p = 1, 2, \ldots$ Если $n((1+\delta)\lambda_{k(p)}, \Lambda) - n((1-\delta)\lambda_{k(p)}, \Lambda) - 1 < 12\tau\delta\lambda_{k(p)} + 1$, то в качестве Λ_p возьмем множество всех точек последовательности Λ, попавших в круг $B(\lambda_{k(p)}, \delta\lambda_{k(p)})$. В противном случае поместим в Λ_p точку $\lambda_{k(p)}$ и еще столько точек из Λ, попавших в круг $B(\lambda_{k(p)}, \delta\lambda_{k(p)})$, чтобы число точек $l(p)$ множества Λ_p удовлетворяло оценкам

$$12\tau\delta\lambda_{k(p)} \leqslant l(p) - 1 < 12\tau\delta\lambda_{k(p)} + 1. \tag{12}$$

Отметим, что в силу (11) и выбора числа δ круги $B(\lambda_{k(p)}, \delta\lambda_{k(p)})$, $p = 1, 2, \ldots$, попарно не пересекаются. Поэтому множества Λ_p, $p = 1, 2, \ldots$, также попарно не пересекаются. Будем считать, что элементы μ_m последовательности $\tilde{\Lambda}$ пронумерованы по возрастанию. Через $m(p)$, $p = 1, 2, \ldots$, обозначим номер, для которого $\mu_{m(p)} = \lambda_{k(p)}$. Имеют место неравенства

$$\ln |q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta)| \leqslant -6\tau\delta\mu_{m(p)}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Действительно, функция $q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}$ состоит из сомножителей, построенных по точкам множества Λ_p. Если оно совпадает с множеством точек из Λ, попавших в круг $B(\lambda_{k(p)}, \delta\lambda_{k(p)})$, то $q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta) = q_\Lambda^{k(p)}(\lambda_{k(p)}, \delta)$, и (13) вытекает из (11). В противном случае, учитывая (12) и неравенство $\delta < 1/4$, как и в лемме 1 получаем:

$$\ln |q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)}, \delta)| \leqslant -(l(p) - 1)\ln(3(1-\delta)) \leqslant (-(l(p) - 1))/2 \leqslant -6\tau\delta\mu_{m(p)}.$$

Покажем теперь, что верхняя плотность последовательности $\tilde{\Lambda}$ конечна. Согласно (12) верны неравенства

$$\frac{n((1+\delta)\mu_{m(p)}, \tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)\mu_{m(p)}, \tilde{\Lambda})}{\mu_{m(p)}} \leqslant 12\tau\delta + \frac{2}{\mu_{m(p)}}, \quad p = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Пусть $r > 0$ и $p(r)$ — максимальный из номеров $p = 1, 2, \ldots$, для которых интервалы $(0, r)$ и $((1-\delta)\mu_{m(p)}, (1+\delta)\mu_{m(p)})$ пересекаются. Тогда верно неравенство $r > (1-\delta)\mu_{m(p(r))}$. Так как все точки μ_m лежат в объединении $\cup_{p=1}^{\infty}((1-\delta)\mu_{m(p)}, (1+\delta)\mu_{m(p)})$ и $\mu_{m(p)} = \lambda_{k(p)}$, $p = 1, 2, \ldots$, то с учетом (14) и (11) получаем

$$\frac{n(r, \tilde{\Lambda})}{r} \leqslant \sum_{p=1}^{p(r)} \frac{n((1+\delta)\mu_{m(p)}, \tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)\mu_{m(p)}, \tilde{\Lambda})}{r} \leqslant \sum_{p=1}^{p(r)} \frac{12\tau\delta\mu_{m(p)} + 2}{r} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{p(r)} \frac{12\tau\delta\mu_{m(p)} + 2}{(1-\delta)\mu_{m(p(r))}} \leqslant \frac{p(r)}{(1-\delta)2^{p(r)-2}\mu_{m(1)}} + \sum_{p=1}^{p(r)} \frac{12\tau\delta}{(1-\delta)2^{p(r)-p}}.$$

Отсюда следует, что величина $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda})$ конечна.

Найдем оценки сверху на модули функций g_p. Поскольку $a_p \geq 1$, то мы имеем:

$$|a_p q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\lambda,\delta)| \geq |q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\lambda,\delta)| = \left| \prod_{\mu_m \in B(\mu_{m(p)},\delta\mu_{m(p)}), m\neq m(p)} \frac{(\lambda-\mu_m)}{3\delta\mu_m} \right| \geq$$

$$\geq \prod_{\mu_m \in B(\mu_{m(p)},\delta\mu_{m(p)}), m\neq m(p)} \frac{4\delta\mu_{m(p)}}{3\delta\mu_m} \geq 1, \quad \lambda \in S(\mu_{m(p)}, 5\delta\mu_{m(p)}).$$

Следовательно, верны неравенства

$$|g_p(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda \in S(\mu_{m(p)},5\delta\mu_{m(p)})} \frac{exp(\lambda z)d\lambda}{a_p(\lambda-\mu_{m(p)})q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)},\delta)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\lambda \in S(\mu_{m(p)},5\delta\mu_{m(p)})} |exp(\lambda z)| \leqslant exp(Re(\mu_{m(p)}z) + 5\delta\mu_{m(p)}|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Покажем, что ряд (9) сходится равномерно на компактных подмножествах области $D = \{z : Rez < \tau\delta\} \cap B(0,\tau)$. Пусть $z \in D$ и $|z| \leqslant \tau - \beta$. Из последней оценки с учетом определения коэффициентов c_p и (11) получаем

$$|g(z)| \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} exp(Re(\mu_{m(p)}z) + 5\delta\mu_{m(p)}|z| - 6\tau\delta\mu_{m(p)}) \leqslant \sum_{p=1}^{\infty} exp(-5\beta\delta\mu_{m(p)}) < \infty.$$

Члены ряда (9) являются целыми функциями. Следовательно, $g(z)$ — функция, аналитическая в области D. Отметим, что сказанное верно при любом выборе чисел $a_p \geq 1$, $p = 1, 2, \ldots$ Покажем теперь, что при подходящем выборе этих чисел функция $g(z)$ раскладывается в ряд Дирихле, прямая сходимости которого совпадает с мнимой осью. Используя теорию вычетов, для каждого $p = 1, 2, \ldots$ получаем:

$$g_p(z) = a_p^{-1} \left(b_{m(p)} exp(\mu_{m(p)}z) + \sum_{\mu_m \in \Lambda_p, m\neq m(p)} b_m exp(\mu_m z) \right),$$

где $b_{m(p)} = (q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)},\delta))^{-1}$. Пусть $p = 1, 2, \ldots$ Для каждого номера m такого, что $\mu_m \in \Lambda_p$, положим $d_m = c_p b_m a_p{}^{-1}$. В силу (13) и определения c_p верно неравенство

$$\max_{m:\mu_m \in \Lambda_p} \frac{\ln|c_p b_m|}{\mu_{m(p)}} \geq \frac{-6\tau\delta\mu_{m(p)} - \ln|q_{\tilde{\Lambda}}^{m(p)}(\mu_{m(p)},\delta)|}{\mu_{m(p)}} \geq 0.$$

Поэтому найдется число $a_p \geq 1$, при котором

$$\max_{m:\mu_m \in \Lambda_p} \frac{\ln|d_m|}{\mu_{m(p)}} = \max_{m:\mu_m \in \Lambda_p} \frac{\ln|c_p b_m| - \ln a_p}{\mu_{m(p)}} = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим ряд Дирихле

$$\sum_{m=1}^{\infty} d_m exp(\mu_m z). \tag{16}$$

Поскольку верхняя плотность $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda})$ конечна, то, очевидно, величина $\lim_{m\to\infty} \ln m/\mu_m$ равна нулю. Поэтому (см., напр., [1], гл. II, §1, теорема 2.1.2, [11]) для ряда (16) имеет место формула Коши-Адамара

$$\gamma = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln|d_m|}{\mu_m},$$

где γ — абсцисса сходимости этого ряда. При этом в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < \gamma\}$ ряд (16) сходится абсолютно (см., напр., [1], гл. II, §1, следствие из теоремы 2.1.1, [11]). В силу (15)

$$\gamma = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{\ln|d_m|}{\mu_m} = \overline{\lim_{p\to\infty}} \max_{m:\mu_m\in\Lambda_p} \frac{\ln|d_m|}{\mu_m} = 0.$$

Таким образом, мнимая ось является прямой сходимости ряда (16). Так как он сходится абсолютно в левой полуплоскости, то суммы рядов (9) и (16) совпадают в пересечении $\{z \in \mathbb{C} : Rez < 0\} \cap D$. Это означает, что функция $g \in W(\Lambda, G)$ и представляется рядом (1) с абсциссой сходимости $\gamma = 0$. Лемма доказана.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, $\tilde\Lambda = \{\mu_n\}_{n=1}^\infty$. Будем говорить, что Λ является частью $\tilde\Lambda$ ($\Lambda \subset \tilde\Lambda$) или $\tilde\Lambda$ является пополнением Λ, если существует подпоследовательность $\{\mu_{n(k)}\}$, совпадающая с $\{\lambda_k\}$. Известная теорема Ж. Полиа (см., напр., [9], гл. VI, § E3) утверждает, что любая последовательность с конечной максимальной плотностью является частью некоторой измеримой последовательности с той же плотностью. Поскольку этот результат является важным для дальнейших исследований и понимания общей картины, мы приведем его доказательство. Метод, который при этом будет использоваться для построения пополнения, как нам кажется, является более простым, чем метод из книги [9].

Лемма 5.(теорема Полиа). *Пусть максимальная плотность последовательности* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *конечна. Тогда существует ее измеримое пополнение* $\tilde\Lambda$ *такое, что* $\tau(\tilde\Lambda) = \tau_0(\Lambda)$.

Доказательство. Последовательность $\tilde\Lambda$ будем искать в виде объединения $\cup_{m=1}^\infty \Lambda_m$, где $\Lambda_m = \{\mu_n, n(m) \leqslant n < n(m+1)\}$, $m = 1, 2, \ldots$ и $n(1) = 1$. Множества Λ_m построим по индукции. Пусть $\alpha = 1/\tau_0(\Lambda)$ и $m = 1$. Если полуинтервал $(0, \alpha]$ содержит точки из Λ, то полагаем $\mu_n = \lambda_n$, $1 \leqslant n < n(2)$, где $n(2)$ — минимальный из номеров k, для которого верно неравенство $\lambda_k > \alpha$. В противном случае полагаем $\mu_1 = \alpha$ и $n(2) = 2$. Предположим, что мы уже построили множества Λ_m для всех $m < p$. Определим теперь Λ_p. Пусть s_p — число точек последовательности Λ, попавших в полуинтервал $(\alpha(p-1), \alpha p]$ (может оказаться, что $s_p = 0$). Если общее число точек множеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{p-1}$ не превосходит $p-1$ и $s_p = 0$, то полагаем $n(p+1) = n(p)+1$ и $\Lambda_p = \{\mu_{n(p)}\}$, где $\mu_{n(p)} = \alpha p$. В противном случае в качестве Λ_p возьмем множество, состоящее из всех точек Λ, попавших в $(\alpha(p-1), \alpha p]$ (если $s_p = 0$, то Λ_p пусто). При этом полагаем $n(p+1) = n(p) + s_p$.

Покажем, что $\tilde\Lambda$ — искомая последовательность. Пусть λ_k — произвольная точка из Λ, и номер m таков, что полуинтервал $(\alpha(m-1), \alpha m]$ содержит λ_k. Тогда $s_m \neq 0$ и по построению множество Λ_m, а вместе с ним и последовательность $\tilde\Lambda$, содержат λ_k. Следовательно, $\Lambda \subset \tilde\Lambda$. Используя индукцию, докажем теперь неравенства

$$n(\alpha m, \tilde\Lambda) \geq m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

По построению каждый полуинтервал $(\alpha(m-1), \alpha m]$ пересекает $\tilde\Lambda$ по множеству Λ_m. Поэтому $n(\alpha m, \tilde\Lambda)$ совпадает с общим числом точек множеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$. Пусть $m = 1$. Тогда $n(\alpha, \tilde\Lambda) = 1$, если $s_1 = 0$, и $n(\alpha, \tilde\Lambda) = s_1 \geq 1$ в противном случае. Предположим, что (17) доказано для всех $m < p$. Если $n(\alpha(p-1), \tilde\Lambda) > p-1$, то $n(\alpha p, \tilde\Lambda) \geq n(\alpha(p-1), \tilde\Lambda) \geq p$. Пусть $n(\alpha(p-1), \tilde\Lambda) \leqslant p-1$. Тогда с учетом (17) получаем: $n(\alpha(p-1), \tilde\Lambda) = p-1$. В этом случае по построению $n(\alpha p, \tilde\Lambda) = n(\alpha(p-1), \tilde\Lambda) + 1 = p$, если $s_p = 0$, и $n(\alpha p, \tilde\Lambda) = n(\alpha(p-1), \tilde\Lambda) + s_p \geq p$ в противном случае. Таким образом, неравенство (17) верно для всех m. Учитывая его, получаем

$$\underline{\tau}(\tilde\Lambda) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\tilde\Lambda)}{r} \geq \underline{\lim_{p\to\infty}} \frac{n(\alpha p(r), \tilde\Lambda)}{\alpha p(r) + \beta(r)} = \underline{\lim_{p\to\infty}} \frac{n(\alpha p, \tilde\Lambda)}{\alpha p} \geq \frac{1}{\alpha} = \tau_0(\Lambda), \tag{18}$$

где $\beta(r) \in (0, \alpha]$ при $r \geq 1$. Остается доказать неравенство $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda}) \leqslant \tau_0(\Lambda)$. Предположим, что $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda}) \geq \tau_0(\Lambda) + 3\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда в силу (2) $\tau_0(\tilde{\Lambda}) \geq \tau_0(\Lambda) + 3\varepsilon$. Выше отмечалось, что при определении максимальной плотности вместо верхнего предела по δ можно брать предел. Поэтому найдется $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r, \tilde{\Lambda})}{\delta r} \geq \tau_0(\Lambda) + 2\varepsilon, \quad \delta \in (0, \delta_0). \tag{19}$$

Уменьшая при необходимости $\delta_0 > 0$, можно считать, что верно также неравенство

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \Lambda) - n((1-\delta)r, \Lambda)}{\delta r} \leqslant \tau_0(\Lambda) + \varepsilon, \quad \delta \in (0, \delta_0). \tag{20}$$

Фиксируем $\delta \in (0, \delta_0)$. Если для некоторого $r > 0$ полуинтервал $((1-\delta)r, r]$ не содержит точек $\tilde{\Lambda}$, отличных от точек Λ, то $n(r, \tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r, \tilde{\Lambda}) = n(r, \Lambda) - n((1-\delta)r, \Lambda)$. Отметим, что по построению все точки $\tilde{\Lambda}$, не принадлежащие Λ, имеют вид $\mu_{n(p)} = \alpha p$, где p пробегает некоторую подпоследовательность P натуральных чисел. Таким образом, с учетом (19) и (20) для каждого достаточно большого $r > 0$ найдется максимальный номер $p(r) \in P$ такой, что $\alpha p(r) \in ((1-\delta)r, r]$. В силу максимальности $p(r)$ каждый непустой полуинтервал $(\alpha p(r), r]$ не содержит точек $\tilde{\Lambda}$, отличных от точек Λ. Поэтому

$$n(r, \tilde{\Lambda}) - n(\alpha p(r), \tilde{\Lambda}) = n(r, \Lambda) - n(\alpha p(r), \Lambda).$$

При доказательстве неравенства (18) мы показали, что $n(\alpha p(r), \tilde{\Lambda}) = p(r)$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r, \tilde{\Lambda})}{\delta r} \leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{n(r_j, \Lambda) - n(\alpha p(r_j), \Lambda)}{\delta r_j} + \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{p(r_j) - n((1-\delta)r_j, \tilde{\Lambda})}{\delta r_j},$$

где $r_j \to \infty$ реализует верхний предел слева в этом неравенстве. Так как $\alpha p(r) \in ((1-\delta)r, r]$, то, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\alpha p(r_j)/r_j$ сходится к некоторому $\alpha\gamma \in [1-\delta, 1]$. Тогда с учетом (20) получаем:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{n(r_j, \Lambda) - n(\alpha p(r_j), \Lambda)}{\delta r_j} \leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{n(r_j, \Lambda) - n((\alpha\gamma - \tilde{\delta})r_j, \Lambda)}{\delta r_j} =$$

$$= (1 - \alpha\gamma + \tilde{\delta}) \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{n(r_j, \Lambda) - n((\alpha\gamma - \tilde{\delta})r_j, \Lambda)}{(1 - \alpha\gamma + \tilde{\delta})\delta r_j} \leqslant \frac{(1 - \alpha\gamma + \tilde{\delta})}{\delta}(\tau_0(\Lambda) + \varepsilon),$$

где $\tilde{\delta} > 0$ такое, что $\delta + \tilde{\delta} \in (0, \delta_0)$. Пусть m_j — максимальное натуральное число, такое, что $\alpha m_j \leqslant (1-\delta)r_j$. В силу (17) имеем:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{p(r_j) - n((1-\delta)r_j, \tilde{\Lambda})}{\delta r_j} \leqslant \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{p(r_j) - n(\alpha m_j, \tilde{\Lambda})}{\delta r_j} = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{(1-\delta)}{\delta\alpha}.$$

Таким образом, получаем:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r, \tilde{\Lambda}) - n((1-\delta)r, \tilde{\Lambda})}{\delta r} \leqslant \frac{(1 - \alpha\gamma + \tilde{\delta})}{\delta}(\tau_0(\Lambda) + \varepsilon) + \frac{\gamma}{\delta} - \frac{(1-\delta)}{\delta\alpha} =$$

$$= \frac{\tilde{\delta}(\tau_0(\Lambda) + \varepsilon) + (1 - \alpha\gamma)\varepsilon}{\delta} + \tau_0(\Lambda) \leqslant \frac{\tilde{\delta}(\tau_0(\Lambda) + \varepsilon)}{\delta} + \varepsilon + \tau_0(\Lambda).$$

Поскольку $\tilde{\delta}$ можно считать сколь угодно малым, то последнее неравенство противоречит (19). Следовательно, наше предположение неверно, т.е. $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda}) \leqslant \tau_0(\Lambda)$. Вместе с (18) это завершает доказательство.

Замечание. Доказательство леммы полностью сохранится, если вместо строго возрастающей последовательности Λ взять неубывающую, т.е. так называемую кратную последовательность.

Лемма 6. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел с конечной максимальной плотностью $\tau_0(\Lambda)$. Тогда существует целая функция f экспоненциального типа и регулярного роста, обращающаяся в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$, сопряженная диаграмма которой является отрезком мнимой оси $[-i\pi\tau_0(\Lambda), i\pi\tau_0(\Lambda)]$. При этом для всех λ, не лежащих на вещественной оси, верно равенство*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|f(t\lambda)|}{t} = \pi\tau_0(\Lambda)|Im\lambda|,$$

и сходимость является равномерной для всех $\lambda = exp(i\varphi)$ в угле $\alpha < \varphi < \pi-\alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Доказательство. По лемме 5 существует пополнение $\tilde{\Lambda} = \{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности Λ такое, что $\tau(\tilde{\Lambda}) = \tau_0(\Lambda)$. Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right).$$

Она обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$. Поскольку $\tilde{\Lambda}$ измерима, то легко проверить, что нулевое множество $f(\lambda)$ является правильно распределенным. Поэтому f имеет регулярный рост. По теореме 5.9 в книге [7], гл. I, §5 выполнено требуемое равенство, из которого легко следует, что отрезок $[-i\pi\tau_0(\Lambda), i\pi\tau_0(\Lambda)]$ является сопряженной диаграммой функции f. Лемма доказана.

Пусть $R \subset \mathbb{C}$ и $\delta > 0$. Через R^δ обозначим объединение кругов $B(z, \delta|z|)$, где z пробегает множество R.

Лемма 7. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел с конечной максимальной плотностью $\tau_0(\Lambda)$. Предположим, что подпространство $W(\Lambda, D)$ нетривиально, $H_D(1) < +\infty$ и пересечение опорной прямой $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$ с границей области D содержит отрезок длины $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Тогда для каждого компакта $L \subset D$ и любого $\delta > 0$ существует функция $f \in P_D$, обращающаяся в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$, и такая, что для некоторого $T(\delta) > 0$ луч $(T(\delta), +\infty)$ лежит на множестве R^δ, где $R = \{z : \ln|f(z)| \geq H_L(z)\}$.*

Доказательство. По условию подпространство $W(\Lambda, D)$ нетривиально. Поэтому, как отмечалось выше, найдется целая функция $f_1 \in P_D$, обращающаяся в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$. Пусть K_1 — сопряженная диаграмма функции f_1. Так как K_1 — компакт в области D, то верно неравенство

$$H_{K_1}(z) < H_D(z), \quad z \neq 0. \tag{21}$$

Согласно лемме 6 существует целая функция $\tilde{f}_2$ экспоненциального типа, обращающаяся в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$, сопряженная диаграмма которой $K = [-\pi\tau_0(\Lambda), \pi\tau_0(\Lambda)]$. Кроме того, для всех z, не лежащих на вещественной оси, имеем:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln|\tilde{f}_2(tz)|}{t} = \pi\tau_0(\Lambda)|Imz|, \tag{22}$$

причем сходимость является равномерной для всех $z = exp(i\varphi)$ в угле $\alpha < \varphi < \pi - \alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$. Из условия вытекает, что для некоторого $w_0 \in \mathbb{C}$ отрезок $K_2 = K + w_0$ лежит на границе области D. Следовательно, верно неравенство

$$H_{K_2}(z) \leqslant H_D(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{23}$$

Компакт K_2 является сопряженной диаграммой $f_2(z) = \tilde{f}_2(z)exp(w_0 z)$, которая согласно лемме 6 является целой функцией экспоненциального типа и регулярного роста. Кроме того, она обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$. Рассмотрим функцию

$$f_\Lambda(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) exp\left(\frac{z}{\lambda_k}\right).$$

Она является целой, имеет первый порядок роста и возможно бесконечный тип (см., напр., [1], гл. I, §1, теоремы 1.1.3 и 1.1.5). Так как f_1 и f_2 делятся на f_Λ, то функции $\ln|f_1| - \ln|f_\Lambda|$ и $\ln|f_2| - \ln|f_\Lambda|$ являются субгармоническими в плоскости и имеют первый порядок роста (см. [5], гл. I, §9, следствие из теоремы 12). Тогда по теореме 5 из работы [12] для каждого $\tau \in (0,1)$ найдутся целая функция $\varphi_\tau(z)$, постоянная $C > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln|\varphi_\tau(z)| - \psi_\tau(z)| \leqslant C \ln|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \tag{24}$$

где $\psi_\tau(z) = \tau(\ln|f_1(z)| - \ln|f_\Lambda(z)|) + (1-\tau)(\ln|f_2(z)| - \ln|f_\Lambda(z)|)$. Причем E может быть покрыто кружками $B_i = B(z_i, \gamma_i)$, $i \geq 1$, такими, что $\Sigma\gamma_i < \infty$. Положим $f_\tau(z) = \varphi_\tau(z) f_\Lambda(z)$, $\tau \in (0,1)$. Тогда f_τ — целая функция.

Фиксируем компакт $L \subset D$, число $\delta > 0$ и покажем, что в качестве искомой функции f можно взять f_τ для некоторого $\tau \in (0,1)$. Прежде всего, заметим, что f_τ обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$. Далее, т.к. K_1 и K_2 — сопряженные диаграммы соответственно функций f_1 и f_2, то с учетом указанной выше теоремы Полиа для индикаторов из (21),(23),(24) и "малости"исключительного множества E нетрудно получить оценку (см., напр., [3], теорема 4.3)

$$h_{f_\tau}(z) < H_D(z), \quad z \neq 0, \quad \tau \in (0,1).$$

Это означает, что сопряженная диаграмма f_τ лежит в области D, т.е. $f_\tau \in P_D$ для любого $\tau \in (0,1)$. Остается подобрать $\tau \in (0,1)$ такое, что для некоторого $T(\delta) > 0$ луч $(T(\delta), +\infty)$ лежит на множестве R^δ, если при определении R в качестве f взять f_τ.

По теореме об оценке снизу целой функции конечного порядка и типа на окружностях (см., напр., [1], гл. I, §1, теорема 1.1.9) существует число $a > 0$ и неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел $\{r_p\}_{p=1}^{\infty}$ такие, что

$$r_{p+1} \leqslant (1 + \delta/2) r_p, \quad \ln|f_1(z)| \geq -a|z|, \quad |z| = r_p, \ p \geq 1. \tag{25}$$

Поскольку отрезок $K_2 = K + w_0$ лежит на границе области D, а отрезок K содержит начало координат, то точка w_0 лежит на пересечении границы области D и опорной прямой $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$. Следовательно, с учетом того, что L — компакт в D, найдутся $\varepsilon > 0$ и $\tilde{\delta} \in (0, \delta/2)$, для которых выполнено неравенство

$$Re(w_0 z) > H_L(z) + 4\varepsilon|z|, \quad z \in B(1, \tilde{\delta}). \tag{26}$$

Выберем, наконец, $\tau \in (0,1)$ такое, что

$$-\tau Re(w_0 z) > -\varepsilon|z|, \quad -\tau a \geq -\varepsilon. \tag{27}$$

Так как сумма радиусов исключительных кружков B_i, $i \geq 1$ конечна, то существует номер p_0 такой, что для всех $p \geq p_0$ на дуге окружности $|z| = r_p$, лежащей в верхней полуплоскости и в кольце $B(r_p, \tilde{\delta} r_p) \setminus B(r_p, \tilde{\delta} r_p/2)$, найдется точка $z_p \notin E$. При этом можно считать, что выполнены неравенства $C \ln|z_p| < \varepsilon|z_p|$, $p \geq p_0$, а в силу (22) и неравенства $\ln|\tilde{f}_2(z_p)| > \pi\tau_0(\Lambda)|Imz_p| - \varepsilon|z_p|$, $p \geq p_0$. Тогда с учетом (24)-(27) получаем

$$ln|f_\tau(z_p)| \geq \tau \ln|f_1(z_p)| + (1-\tau) ln|f_2(z_p)| - \varepsilon|z_p| \geq -\tau a|z_p| +$$

$$+(1-\tau)(\ln|\tilde{f}_2(z_p)| + Re(w_0 z_p)) - \varepsilon|z_p| \geq -3\varepsilon|z_p| + (1-\tau)\ln|\tilde{f}_2(z_p)| + Re(w_0 z_p) \geq$$

$$\geq H_L(z_p) + 4\varepsilon|z_p| - 3\varepsilon|z_p| - (1-\tau)\varepsilon|z_p| > H_L(z_p), \quad p \geq p_0. \tag{28}$$

Положим $T(\delta) = r_{p_0}$ и пусть $z \in (T(\delta), +\infty)$. Выберем номер $p \geq p_0$ такой, что $r_p \leqslant z < r_{p+1}$. Тогда в силу (25) и выбора $\tilde{\delta}$ имеем:

$$|z_p - z| \leqslant |z_p - r_p| + |r_p - z| < \tilde{\delta} r_p + r_{p+1} - r_p < \delta r_p = \delta |z_p|.$$

Таким образом, согласно (28) получаем: $z \in B(z_p, \delta|z_p|) \subset R^\delta$. Лемма доказана.

Положим

$$q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta) = q_\Lambda^k(z, \delta)\frac{z - \lambda_k}{3\delta\lambda_k}, \quad k \geq 1.$$

Как и для функций $q_\Lambda^j(z, \delta)$ выполнено неравенство

$$|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta_1)| \geq |q_\Lambda(z, \lambda_j, \delta_2)|, \quad z \in B(\lambda_j, \delta_2\lambda_j), \tag{29}$$

если $0 < \delta_1 \leqslant \delta_2 < 1/3$ и $B(\lambda_k, \delta_1\lambda_k) \subset B(\lambda_j, \delta_2\lambda_j)$.

Лемма 8. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел такая, что $S_\Lambda = 0$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, 1/3)$ такое, что для любых $\gamma, \theta \in (0, 1]$ и некоторого номера $k_0 = k_0(\varepsilon, \delta, \gamma, \theta)$ выполнены неравенства:*

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -\varepsilon|z|, \quad z \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \setminus \bigcup_{\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k)} B(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)),\ k \geq k_0, \tag{30}$$

где $\rho_j(\gamma) = \min\{\gamma/2, (\lambda_j - \lambda_{j-1})/2,\ (\lambda_{j+1} - \lambda_j)/2\}$, $j \geq 1$ и $\lambda_0 = 0$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно условию $S_\Lambda = 0$. Следовательно, по определению S_Λ найдутся $\delta \in (0, 1/9)$ и номер k_1 такие, что

$$\ln|q_\Lambda^j(\lambda_j, 3\delta)|/\lambda_j \geq -\frac{\varepsilon}{6}, \quad j \geq k_1. \tag{31}$$

Как и в лемме 1 получаем

$$\ln|q_\Lambda^j(\lambda_j, 3\delta)| \leqslant -(m(j, 3\delta) - 1)\ln(3(1 - 3\delta)),$$

где $m(j, 3\delta)$ — число точек λ_k, попавших в круг $B(\lambda_j, 3\delta\lambda_j)$. Отсюда, увеличивая при необходимости номер k_1, с учетом (31) и выбора числа δ имеем:

$$m(j, 3\delta) \leqslant \frac{\varepsilon\lambda_j}{6\ln 2} + 1 \leqslant \frac{\varepsilon\lambda_j}{3}, \quad j \geq k_1. \tag{32}$$

Пусть $\gamma, \theta \in (0, 1]$ и $z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma))$. Тогда в силу определения чисел $\rho_j(\gamma)$ для всех $l \neq j$ верно неравенство $|z - \lambda_l| \geq |\lambda_j - \lambda_l|/2$. Отсюда и из (31), (32) получаем

$$\ln|q_\Lambda^j(z, 3\delta)| \geq \ln|q_\Lambda^j(\lambda_j, 3\delta)| - m(j, 3\delta)\ln 2 \geq -\varepsilon\lambda_j/2, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)),\ j \geq k_1. \tag{33}$$

Если $\rho_j(\gamma) = \gamma/2$, то найдется номер $k_2 \geq k_1$ такой, что

$$\frac{1}{\lambda_j}\ln\left|\frac{z - \lambda_j}{9\delta\lambda_j}\right| \geq \frac{1}{\lambda_j}\ln\frac{\gamma\theta}{12\delta\lambda_j} \geq -\varepsilon/4, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad j \geq k_2.$$

Рассмотрим теперь случай $\rho_j(\gamma) = (\lambda_{j+1} - \lambda_j)/2$. Так как $\rho_j(\gamma) \leqslant 1/2$, то для некоторого $k_3 \geq k_2$ и всех номеров $j \geq k_3$, соответствующих данному случаю, круг $B(\lambda_{j+1}, 3\delta\lambda_{j+1})$ содержит точку λ_j. Поэтому одним из слагаемых суммы, образующей величину $\ln|q_\Lambda^{j+1}(z, 3\delta)|$, является $\ln|(z - \lambda_j)/9\delta\lambda_j|$. Как отмечалось выше, все эти слагаемые являются неположительными в круге $B(\lambda_{j+1}, 3\delta\lambda_{j+1})$. Следовательно, верно неравенство

$$\ln\left|\frac{z - \lambda_j}{9\delta\lambda_j}\right| \geq \ln|q_\Lambda^{j+1}(z, 3\delta)|, \quad z \in B(\lambda_{j+1}, 3\delta\lambda_{j+1}), \quad j \geq k_3.$$

Следовательно, в силу (31)

$$\ln\frac{\lambda_{j+1} - \lambda_j}{9\delta\lambda_j} \geq -\frac{\varepsilon\lambda_{j+1}}{6}, \quad j \geq k_3.$$

Отсюда для некоторого $k_4 \geq k_3$ получаем

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_j}{9\delta\lambda_j}\right| = \ln\frac{\theta\rho_j(\gamma)}{9\delta\lambda_j} = \ln\frac{\theta}{2} + \ln\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{9\delta\lambda_{j(p)}} \geq \ln\frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon\lambda_{j+1}}{6} =$$

$$= \ln\frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon(\lambda_j + 2\rho_j(\gamma))}{6} \geq \ln\frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon\lambda_j}{6} - \frac{1}{6} \geq -\frac{\varepsilon\lambda_j}{4}, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad j \geq k_4.$$

Случай $\rho_j(\gamma) = (\lambda_j - \lambda_{j-1})/2$ рассматривается аналогично. Таким образом, можно считать, что во всех случаях

$$\ln\left|\frac{z-\lambda_j}{9\delta\lambda_j}\right| \geq -\frac{\varepsilon\lambda_j}{4}, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad j \geq k_4.$$

Отсюда с учетом (33) и определения функции $q_\Lambda(z, \lambda_j, 3\delta)$ получаем

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_j, 3\delta)| \geq -3\varepsilon\lambda_j/4, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad j \geq k_4. \tag{34}$$

Поскольку $\delta < 1/3$, то для каждой точки $\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ круг $B(\lambda_j, 3\delta|\lambda_j|)$ содержит круг $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$. Выберем номер $k_0 \geq k_4$ такой, что $j \geq k_4$, если $\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ и $k \geq k_0$. Можно считать, что $S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)) \subset B(\lambda_j, 3\delta|\lambda_j|)$ при $j \geq k_4$. Тогда согласно (29) и (34) имеем:

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -3\varepsilon\lambda_j/4, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)), \quad \lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|),\ k \geq k_0.$$

Следовательно, для всех $k \geq k_0$ и всех j таких, что $\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$ верно неравенство

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -3\varepsilon(1+\delta)\lambda_k/4 \geq -5\varepsilon\lambda_k/6, \quad z \in S(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)).$$

Кроме того, при $\delta < 1/3$ верно также неравенство

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq 0, \quad z \in S(\lambda_k, 5\delta|\lambda_k|), \quad k \geq 1.$$

Тогда по принципу минимума в области $B(\lambda_k, 5\delta|\lambda_k|) \setminus \cup_{\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k)} B(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma))$ гармоническая функция $\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)|$ удовлетворяет оценке

$$ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -5\varepsilon\lambda_k/6, \quad k \geq k_0.$$

Следовательно,

$$\ln|q_\Lambda(z, \lambda_k, \delta)| \geq -\frac{5\varepsilon|z|}{6(1-\delta)} \geq -\varepsilon|z|, \quad z \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|) \setminus_{\lambda_j \in B(\lambda_k, \delta\lambda_k)} B(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma)),\ k \geq k_0.$$

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ *— неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел такая, что* $S_\Lambda = 0$. *Тогда для каждого* $\tilde{\varepsilon} > 0$ *существует ее пополнение* $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}} = \{\mu_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, +\infty)$ *(*$\Lambda_{\tilde{\varepsilon}}$ *— строго возрастающая) и число* $\gamma_0 \in (0,1)$ *такие, что выполнены неравенства*

$$\left|\ln|f(\lambda)| - \frac{\pi|Im\lambda|}{\gamma_0}\right| \leqslant \tilde{\varepsilon}|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus (E_1 \cup E_2 \cup B(0,T)), \tag{35}$$

где f *— целая функция экспоненциального типа,*

$$f(\lambda) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{\lambda^2}{\mu_n^2}\right) \quad , E_1 = \bigcup_{k=1}^\infty B(\pm\lambda_k, \theta\rho_k(\gamma_0)), \quad E_2 = \bigcup_{n=1}^\infty B(\pm\tilde{\mu}_n(\gamma_0), \theta\gamma_0/2),$$

$\rho_k(\gamma_0)$, $k \geq 1$, *определены в лемме 8,* $\tilde{\mu}_n(\gamma_0) = \gamma_0 n - \gamma_0/2$, $n \geq 1$, $\theta \in (0,1)$ *и* $T > 0$ *зависит от* $\theta, \tilde{\varepsilon}$.

Доказательство. Так как $S_\Lambda = 0$, то по лемме 2 верхняя плотность $\overline{\tau}(\Lambda)$ конечна. Пусть $\gamma > 0$. Прежде всего, построим пополнение $\Lambda(\gamma) = \{\mu_n(\gamma)\}_{n=1}^\infty$ последовательности Λ. Будем искать его в виде объединения $\cup_{m=1}^\infty \Lambda_m(\gamma)$, где $\Lambda_m(\gamma) = \{\mu_n(\gamma), n(m) \leqslant n < n(m+1)\}$, $m = 1, 2, \ldots$, и $n(1) = 1$. Множества $\Lambda_m(\gamma)$ построим по индукции. Пусть $m = 1$. Если полуинтервал $(0, \gamma]$ содержит точки из Λ, то полагаем $\mu_n(\gamma) = \lambda_n$, $1 \leqslant n < n(2)$, где $n(2)$

— минимальный из номеров k, для которого верно неравенство $\lambda_k > \gamma$. В противном случае полагаем $\mu_1(\gamma) = \gamma/2$ и $n(2) = 2$. Предположим, что мы уже построили множества $\Lambda_m(\gamma)$ для всех $m < p$. Определим теперь $\Lambda_p(\gamma)$. Пусть s_p — число точек последовательности Λ, попавших в полуинтервал $(\gamma(p-1), \gamma p]$ (может оказаться, что $s_p = 0$). Если общее число точек множеств $\Lambda_1(\gamma), \ldots, \Lambda_{p-1}(\gamma)$ не превосходит $p-1$ и $s_p = 0$, то полагаем $n(p+1) = n(p) + 1$ и $\Lambda_p(\gamma) = \{\mu_{n(p)}(\gamma)\}$, где $\mu_{n(p)}(\gamma) = \gamma p - \gamma/2$. В противном случае в качестве $\Lambda_p(\gamma)$ возьмем множество, состоящее из всех точек Λ, попавших в $(\gamma(p-1), \gamma p]$ (если $s_p = 0$, то $\Lambda_p(\gamma)$ пусто). При этом полагаем $n(p+1) = n(p) + s_p$.

Пусть λ_k — произвольная точка из Λ, и номер m таков, что полуинтервал $(\gamma(m-1), \gamma m]$ содержит λ_k. Тогда $s_m \neq 0$ и по построению множество $\Lambda_m(\gamma)$, а вместе с ним и последовательность $\Lambda(\gamma)$, содержат λ_k. Следовательно, $\Lambda \subset \Lambda(\gamma)$. Используя индукцию, докажем теперь неравенства

$$n(\gamma m, \Lambda(\gamma)) \geq m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

По построению каждый полуинтервал $(\gamma(m-1), \gamma m]$ пересекает $\Lambda(\gamma)$ по множеству $\Lambda_m(\gamma)$. Поэтому $n(\gamma m, \Lambda(\gamma))$ совпадает с общим числом точек множеств $\Lambda_1(\gamma), \ldots, \Lambda_m(\gamma)$. Пусть $m = 1$. Тогда $n(\gamma, \Lambda(\gamma)) = 1$, если $s_1 = 0$, и $n(\gamma, \Lambda(\gamma)) = s_1 \geq 1$ в противном случае. Предположим, что (36) доказано для всех $m < p$. Если $n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) > p-1$, то $n(\gamma p, \Lambda(\gamma)) \geq n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) \geq p$. Пусть $n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) \leqslant p-1$. Тогда по допущению индукции получаем: $n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) = p-1$. В этом случае по построению $n(\gamma p, \Lambda(\gamma)) = n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma) + 1 = p$, если $s_p = 0$, и $n(\gamma p, \Lambda(\gamma)) = n(\gamma(p-1), \Lambda(\gamma)) + s_p \geq p$ в противном случае. Таким образом, неравенство (36) верно для всех m.

По построению каждая из групп $\Lambda_m(\gamma)$ либо целиком состоит из некоторых точек λ_k, либо пуста, либо состоит из одной точки $\mu_{n(m)}(\gamma)$, не входящей в последовательность Λ. Покажем, что при $\gamma < 1/\overline{\tau}(\Lambda)$ имеется бесконечное число групп последнего вида. Предположим, что это не так. Тогда для некоторого $r_0 > 0$ бесконечный интервал $(r_0, +\infty)$ не содержит точек последовательности $\Lambda(\gamma)$, отличных от λ_k. Поэтому

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r, \Lambda(\gamma))}{r} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r, \Lambda) - n(r_0, \Lambda) + n(r_0, \Lambda(\gamma))}{r} = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r} = \overline{\tau}(\Lambda).$$

С другой стороны, в силу (36) имеем

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r, \Lambda(\gamma))}{r} \geq \varlimsup_{m\to\infty} \frac{n(\gamma m, \Lambda(\gamma))}{\gamma m} \geq \frac{1}{\gamma} > \overline{\tau}(\Lambda).$$

Получили противоречие. Следовательно, имеется бесконечное число групп указанного вида. Пусть $I(\gamma)$ — объединение всех полуинтервалов $(\gamma m, \gamma(m+1)]$, соответствующих таким группам. Тогда $J(\gamma) = (0, +\infty) \setminus I(\gamma)$ является объединением ограниченных полуинтервалов $(\gamma m_j(\gamma), \gamma p_j(\gamma)]$, $j \geq 1$.

Пусть $j \geq 1$. Согласно определению $I(\gamma)$ группа $\Lambda_{m_j(\gamma)}(\gamma)$ состоит из одной точки $\mu_{n(m_j(\gamma))}(\gamma)$, не входящей в последовательность Λ. Тогда по построению $n(\gamma(m_j(\gamma)-1), \Lambda(\gamma)) \leqslant m_j(\gamma) - 1$ и $s_{m_j(\gamma)} = 0$. Следовательно, $n(\gamma m_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) \leqslant m_j(\gamma)$. Вместе с (36) это дает нам равенство

$$n(\gamma m_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) = m_j(\gamma), \quad j \geq 1. \tag{37}$$

Группа $\Lambda_{p_j(\gamma)+1}(\gamma)$ аналогична группе $\Lambda_{m_j(\gamma)}(\gamma)$. Поэтому также по построению выполнено неравенство $n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) \leqslant p_j(\gamma)$. Отсюда с учетом (36) имеем

$$n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) = p_j(\gamma), \quad j \geq 1. \tag{38}$$

Пусть $\delta' > 0$. Согласно определению $J(\gamma)$ все точки λ_k лежат на множестве $J(\gamma)$, и ни одна из точек последовательности $\Lambda(\gamma)$, отличная от λ_k, $k \geq 1$, не принадлежит $J(\gamma)$. Следовательно, в силу (37) и (38) для всех $j \geq 1$ имеем

$$p_j(\gamma) - m_j(\gamma) = n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) - n(\gamma m_j(\gamma), \Lambda(\gamma)) = n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda) - n(\gamma m_j(\gamma), \Lambda). \tag{39}$$

Так как Λ имеет конечную верхнюю плотность, то для некоторого $C > 0$ верно неравенство $n(r, \Lambda) \leqslant Cr$. Поэтому из (39) следует, что

$$p_j(\gamma) - m_j(\gamma) \leqslant n(\gamma p_j(\gamma), \Lambda) \leqslant C\gamma p_j(\gamma) \leqslant \delta' p_j(\gamma), \quad j \geq 1,$$

для всех $\gamma < \min\{1/\overline{\tau}(\Lambda), \delta'/C\} = \gamma(\delta')$. Отсюда легко получить оценку

$$p_j(\gamma) - m_j(\gamma) \leqslant \delta'' m_j(\gamma), \quad j \geq 1, \quad \gamma < \gamma(\delta'), \tag{40}$$

где $\delta'' = \delta'/(1 - \delta')$.

Фиксируем $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}/5)$. Покажем, что для некоторого $\gamma > 0$ в качестве искомой последовательности $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}}$ можно взять $\Lambda(\gamma)$. Прежде всего, согласно лемме 8 по заданному $\varepsilon > 0$ найдем $\delta \in (0, 1/3)$ такое, что выполнено (30).

Введем новую последовательность $\tilde{\Lambda}(\gamma) = \{\tilde{\lambda}_k(\gamma)\}_{k=1}^{\infty}$ положительных чисел, которые пронумерованы по возрастанию. Она представляет из себя объединение групп $\tilde{\Lambda}_j(\gamma)$, $j \geq 1$, где $\tilde{\Lambda}_j(\gamma) = \{\gamma p_j(\gamma) + \gamma/2, \gamma(p_j(\gamma) + 1) + \gamma/2, \ldots, \gamma m_j(\gamma) - \gamma/2\}$. Рассмотрим функции

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_k^2}\right), \quad L(\lambda, \gamma) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(\tilde{\lambda}_k(\gamma))^2}\right).$$

Последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. По построению $\overline{\tau}(\tilde{\Lambda}(\gamma)) \leqslant 1/\gamma$. Поэтому (см., напр., [1], гл. I, § 1, теорема 1.1.5) $L(\lambda)$ и $L(\lambda, \gamma)$ являются целыми функциями экспоненциального типа. Сравним их поведение. Для этого воспользуемся результатом из работы [13]. В силу (39) и (40) последовательность $\tilde{\Lambda}(\gamma)$ является δ''-близкой к Λ, т.е.

$$|\lambda_k - \tilde{\lambda}_k(\gamma)| \leqslant \delta''|\lambda_k|, \quad k \geq 1, \tag{41}$$

а, значит, и асимптотически δ''-близкой к последовательности Λ (в терминологии работы [13]). Поскольку в нашем случае суммы обратных величин нулей соответственно функций $L(\lambda)$ и $L(\lambda, \gamma)$, лежащих в круге $B(0, r)$, равны нулю для любого $r > 0$, то при $\delta'' \in (0, 1/2)$ по теореме B из работы [13] (где полагаем $\alpha = 1/2, \beta = 1$) выполнено неравенство

$$|\ln|L(\lambda)| - \ln|L(\lambda, \gamma)|| \leqslant A\sqrt{\delta''}|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus E(\delta''), \tag{42}$$

где $A > 0$ не зависит от δ'', множество $E(\delta'')$, которое является объединением кругов $B_i = B(\xi_i, \sigma_i)$, $i \geq 1$, имеет линейную плотность, не превосходящую $\sqrt[4]{\delta''}$:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \sum_{|\xi_i| \leqslant r} \sigma_i \leqslant \sqrt[4]{\delta''}, \tag{43}$$

и центрировано с объединением нулевых множеств функций $L(\lambda)$ и $L(\lambda, \gamma)$, т.е. каждая точка этих множеств лежит по крайней мере в одном круге B_i, и каждый из кругов B_i содержит по крайней мере одну точку этого объединения. Очевидно, можно считать, что $E(\delta'')$ симметрично относительно начала координат.

Выберем $\delta' > 0$ такое, что для $\delta'' = \delta'/(1 - \delta')$ выполнены неравенства

$$A\sqrt{\delta''} < \varepsilon, \quad \sqrt[4]{\delta''} < \delta/12. \tag{44}$$

Фиксируем $\gamma_0 \in (0, \gamma(\delta'))$, $\gamma_0 < 1$, и покажем, что последовательность $\Lambda_{\tilde{\varepsilon}} = \Lambda(\gamma_0)$ — искомая. Пусть $\theta \in (0, 1)$ и k_0 — номер, для которого верно (30) для $\gamma = \gamma_0$. Согласно (43) и (44) найдем $r_0 > 0$ такое, что

$$\frac{1}{r} \sum_{|\xi_i| \leqslant r} \sigma_i \leqslant \delta/11, \quad r \geq r_0. \tag{45}$$

Выберем номер $k_1 \geq k_0$ так, что $\lambda_k \geq r_0$ и $\tilde{\lambda}_k(\gamma_0) \geq r_0$ для всех $k \geq k_1$, и пусть B_i — произвольный круг множества $E(\delta'')$, содержащий какую-нибудь точку λ_k или $\tilde{\lambda}_k(\gamma_0)$ с номером $k \geq k_1$. Если $\lambda_k \in B_i$, то согласно (45) в случае $|\xi_i| \leqslant \lambda_k$ верно неравенство $\sigma_i \leqslant \delta\lambda_k/11$, а в случае $|\xi_i| \geq \lambda_k$ — неравенство $\sigma_i \leqslant \delta|\xi_i|/11$, и тогда с учетом включений $\lambda_k \in B_i$, $\delta \in (0,1/3)$ получаем: $\lambda_k \geq |\xi_i|(1-\delta/11)$ и $\sigma_i \leqslant \delta|\xi_i|/11 \leqslant \delta\lambda_k/11(1-\delta/11) \leqslant 3\delta\lambda_k/32$. Ситуация $\tilde{\lambda}_k(\gamma_0) \in B_i$ разбирается аналогично. Таким образом, в силу (41) и (44) имеем:

$$\sigma_i \leqslant \max\{3\delta\lambda_k/32, 3\delta\tilde{\lambda}_k(\gamma_0)/32\} \leqslant 3\delta(1+\delta'')\lambda_k/32 \leqslant 13\delta\lambda_k/128 \leqslant \delta\lambda_k/9.$$

Отсюда следует, что B_i лежит либо в круге $B(\lambda_k, 2\delta\lambda_k/9)$, либо в круге $B(\tilde{\lambda}_k(\gamma_0), 2\delta\lambda_k/9)$. Следовательно, с учетом (41) и (44) имеет место вложение $B_i \subset B(\lambda_k, \delta\lambda_k/3)$.

Пусть $B_j \cap B(\lambda_k, \delta\lambda_k) \neq \emptyset$. Тогда в силу (45) $|\xi_i| \leqslant (1+\delta)\lambda_k/(1-\delta/11) \leqslant 11\delta\lambda_k/8$. Поэтому, используя еще раз (45), находим, что сумма диаметров всех кругов B_j, которые пересекают $B(\lambda_k, \delta\lambda_k)$, не превосходит $\delta\lambda_k/4$. Это означает, что для некоторого $t \in (1/2, 1)$ окружность $S(\lambda_k, t\delta\lambda_k)$ не пересекает множество $E(\delta'')$. Тогда согласно (42) и (44) имеем оценку

$$\ln|L(\lambda)| \geq \ln|L(\lambda,\gamma_0)| - \varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in S(\lambda_k, t\delta\lambda_k), \quad k \geq k_1.$$

Напомним, что модуль функции $q_\Lambda(\lambda, \lambda_k, \delta)$ не превосходит единицы в круге $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$. Поэтому для всех $\lambda \in S(\lambda_k, t\delta\lambda_k)$ верно неравенство

$$\ln|L(\lambda,\gamma_0)| \leqslant \ln|L(\lambda)| - \ln|q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta)| + \varepsilon(1+t\delta)\lambda_k \leqslant \ln|L(\lambda)/q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta)| + 2\varepsilon\lambda_k,$$

которое продолжается в круг $B(\lambda_k, t\delta\lambda_k)$, т.к. $\ln|L(\lambda)/q_\Lambda(\lambda,\lambda_k,\delta)|$ — гармоническая, а $\ln|L(\lambda,\gamma_0)|$ — субгармоническая функции в $B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$. Тогда с учетом (30) получаем

$$\ln|L(\lambda,\gamma_0)| \leqslant \ln|L(\lambda)| + 2\varepsilon\lambda_k + \varepsilon|\lambda| \leqslant \ln|L(\lambda)| + 4\varepsilon|\lambda|,$$
$$\lambda \in B(\lambda_k, t\delta\lambda_k) \setminus \bigcup_{\lambda_j \in B(\lambda_k,\delta\lambda_k)} B(\lambda_j, \theta\rho_j(\gamma_0)), \quad k \geq k_1, \tag{46}$$

При этом объединение кругов $B(\pm\lambda_k, t\delta\lambda_k)$, $k \geq k_1$ покрывает все те круги B_i множества $E(\delta'')$, каждый из которых содержит какую-нибудь точку $\pm\lambda_k$ или $\pm\tilde{\lambda}_k(\gamma_0)$ с номером $k \geq k_1$. Нетрудно заметить, что оставшаяся часть множества $E(\delta'')$ (которая не покрывается указанным объединением) лежит в круге $B(0, T_1)$ для некоторого $T_1 > 0$. Таким образом, из (46) получаем

$$\ln|L(\lambda)| \geq \ln|L(\lambda,\gamma_0)| - 4\varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k\geq 1} B(\pm\lambda_k, \theta\rho_k(\gamma_0)) \cup B(0,T_1). \tag{47}$$

Отметим еще, что нули функции $L(\lambda,\gamma_0)$ находятся друг от друга на расстоянии, не меньшем чем γ_0. Поэтому согласно примеру, разобранному перед леммой 1, величина $\tilde{S}_{\tilde{\Lambda}(\gamma_0)}$ конечна, а, значит, $S_{\tilde{\Lambda}(\gamma_0)} = 0$. Следовательно, к последовательности $\tilde{\Lambda}(\gamma_0)$ так же, как и к Λ, можно применить лемму 8 и, используя точно такие же рассуждения как и выше, получить оценку (для некоторого $T_2 > 0$)

$$\ln|L(\lambda,\gamma_0)| \geq \ln|L(\lambda)| - 4\varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k\geq 1} B(\pm\tilde{\lambda}_k(\gamma_0), \theta\gamma_0/2) \cup B(0,T_2). \tag{48}$$

Рассмотрим функции

$$f(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(\mu_n(\gamma_0))^2}\right), \quad \tilde{L}(\lambda,\gamma_0) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^2}{(\tilde{\mu}_n(\gamma_0))^2}\right),$$

где $\tilde{\mu}_n(\gamma_0) = \gamma_0 n - \gamma_0/2$, $n \geq 1$. Нетрудно показать, что $\Lambda(\gamma_0)$ имеет конечную верхнюю плотность (она не превосходит $\overline{\tau}(\Lambda) + 1/\gamma_0$). Поэтому (см., напр., [1], гл. I, § 1, теорема 1.1.5) $f(\lambda)$ — целая функция экспоненциального типа. Последовательность $\tilde{\Lambda}(\gamma_0)$ имеет плотность $1/\gamma_0$ и является регулярным множеством (см. [5], гл. II, §1). Следовательно, $\tilde{L}(\lambda,\gamma_0)$ имеет регулярный рост, и ее сопряженная диаграмма совпадает с отрезком мнимой оси $[-i\pi/\gamma_0, i\pi/\gamma_0]$ (см. [1], гл. I, §2, теорема 1.2.9). Поскольку нулевое множество $\tilde{L}(\lambda, \gamma_0)$ регулярно, то (см. [5], гл. II, §1, теорема 5) верно равенство

$$\ln|\tilde{L}(\lambda, \gamma_0)| = \frac{\pi|Im\lambda|}{\gamma_0} + o(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\geq 1} B(\pm\tilde{\mu}_n(\gamma_0), \theta\gamma_0/2), \tag{49}$$

где $o(\lambda)$ зависит от $\theta \in (0,1]$ и $o(\lambda)/|\lambda| \to 0$, когда $|\lambda| \to \infty$.

По построению

$$\ln|f(\lambda)| - \ln|\tilde{L}(\lambda, \gamma_0)| = \ln|L(\lambda)| - \ln|L(\lambda, \gamma_0)|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Кроме того, каждая точка $\tilde{\lambda}_k(\gamma_0)$ совпадает с одной из точек $\tilde{\mu}_n(\gamma_0)$. Поэтому с учетом выбора числа $\varepsilon > 0$ из (47)–(49) получаем (35). Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Предположим, что множество сумм рядов (1), сходящихся в области D, замкнуто в пространстве $H(D)$. Тогда система $\mathcal{E} = \{exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в $H(D)$.*

Доказательство. Если выполнены условия данной леммы, то по следствию из леммы 3 верно неравенство $\overline{\tau}(\Lambda) < \infty$. Тогда, как и выше, существует целая функция экспоненциального типа f, которая обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$. Предположим, что некоторый сдвиг $z_0 + K$ сопряженной диаграммы K функции f лежит в области D. Тогда функция $exp(z_0\lambda)f(\lambda)$ лежит в пространстве P_D и обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$. Это означает, что система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Так будет, например, когда D совпадает с плоскостью или с полуплоскостью.

Пусть область D отлична от плоскости и полуплоскости. Предположим, что система $\mathcal{E}$ полна в пространстве $H(D)$. Тогда по условию каждая функция из $H(D)$ представляется рядом (1) в области D. По теореме Абеля для рядов Дирихле (см., например, [1], гл. II, §1, п. 4) каждый такой ряд сходится равномерно на компактах в полуплоскости $\{z : Rez < H_D(1)\}$ (которая может совпадать с плоскостью, если $H_D(1) = +\infty$). Следовательно, каждая функция из $H(D)$ аналитически продолжается в эту полуплоскость, что невозможно. Таким образом, $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Лемма доказана.

3. Основные результаты

Пусть D — неограниченная выпуклая область. Положим

$$J(D) = \{\lambda \in \mathbb{C} : H_D(\lambda) = +\infty\}.$$

Если $D = \mathbb{C}$, то $J(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В случае, когда D — полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : Re(ze^{i\varphi}) < a\}$, множество $J(D)$ представляет из себя плоскость с разрезом по лучу $\{\lambda = te^{i\varphi} : t \geq 0\}$. Если же D — полоса $\{z \in \mathbb{C} : Re(ze^{i\varphi}) < a, Re(ze^{i(\varphi+\pi)}) < b\}$, то $J(D) = \mathbb{C} \setminus \{\lambda = te^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}\}$. В остальных случаях область D не содержит ни одной прямой. Однако D всегда содержит некоторый луч $\{z = z_0 + te^{i\varphi}, t \geq 0\}$. При этом множество $J(D)$ является углом раствора строго меньше 2π и содержит открытый угол раствора π — полуплоскость $\{\lambda = te^{i\psi} : -\varphi - \frac{\pi}{2} < \psi < -\varphi + \frac{\pi}{2}, t > 0\}$. Будем говорить, что D узкая, если D — полоса или $J(D)$ совпадает с открытой полуплоскостью. В противном случае будем говорить, что D — широкая.

Для узкой области D существует единственное значение $\psi \in [0, \pi)$, такое, что $H_D(e^{i\psi}) < +\infty$ и $H_D(e^{i\psi+\pi}) < +\infty$. Оно соответствует граничным лучам $\{\lambda = te^{i\psi} : t > 0\}$ и $\{\lambda = te^{i\psi+\pi} : t > 0\}$ множества $J(D)$. Выпуклый компакт K при помощи некоторого сдвига может быть помещен в узкую область D тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$H_D(e^{i\psi}) + H_D(e^{i\psi+\pi}) > H_K(e^{i\psi}) + H_K(e^{i\psi+\pi}).$$

Если D — широкая область, то для любого выпуклого компакта K найдется сдвиг, который помещает его в область D. Таким образом, если последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\overline{\tau}(\Lambda) < \infty$, то как и в лемме 10 система $\mathcal{E} = \{exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в $H(D)$.

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и D — неограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что положительная вещественная полуось лежит на границе множества $J(D)$, но не принадлежит ему. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$ (т.е. аналитически продолжается в полуплоскость и представляется там рядом);

2) $S_\Lambda = 0$.

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$. По условию положительная вещественная полуось лежит на границе множества $J(D)$. Следовательно, один из лучей $l_1 = \{z = z_0 + te^{i\pi/2}, t \geq 0\}$, $l_2 = \{z = z_0 + te^{-i\pi/2}, t \geq 0\}$ (возможно оба) лежит в области D. Пусть для определенности это будет луч l_1. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ такое, что круг $B(z_0, 2\varepsilon_0)$ содержится в D. Тогда область $l_1 + B(z_0, 2\varepsilon_0)$ также содержится в D. По лемме 9 существуют целая функция экспоненциального типа f, обращающаяся в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$, и число $\gamma_0 > 0$, которые удовлетворяют неравенству (35) (для $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_0$). Пусть K — сопряженная диаграмма функции f. Тогда согласно (35) для всех точек λ, не лежащих на вещественной оси, имеем

$$H_K(\lambda) = h_f(\lambda) \leqslant \pi|Im\lambda|/\gamma_0 + \varepsilon_0|\lambda|.$$

Поскольку опорная функция непрерывна, то это неравенство продолжается на всю плоскость. Пусть $t_0 > \pi/\gamma_0$. Рассмотрим функцию $f_0(\lambda) = f(\lambda)exp(\lambda\tilde{z}_0)$, где $\tilde{z}_0 = z_0 + t_0e^{i\pi/2}$. Ее сопряженной диаграммой является компакт $K + \tilde{z}_0$, который, как нетрудно заметить, лежит в области $l_1 + B(z_0, 2\varepsilon_0)$, а значит, и в D. Таким образом, f_0 принадлежит пространству P_D и обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$. Это означает, что система $\mathcal{E} = \{exp(\lambda_k z)\}_{k=1}^{\infty}$ не полна в $H(D)$.

Теперь мы можем применить теорему 5.1 из работы [3]. Если выполнено 1), то согласно этой теореме верно равенство $S_\Lambda = 0$ (в условиях леммы величина $S_\Lambda(D)$, участвующая в цитируемой теореме, совпадает с S_Λ).

Докажем обратное. Предположим, что выполнено 2) и покажем, что тогда имеет место утверждение 5) из теоремы 5.1 в работе [3]. Пусть L — произвольный выпуклый компакт в области D. Тогда $H_D(\lambda) > H_L(\lambda)$, $\lambda \neq 0$. Согласно определению опорной функции и непрерывности опорной функции компакта найдем точку $z_1 \in D$ и числа $\tilde{\varepsilon}, \tilde{\delta} > 0$, для которых верно неравенство

$$Rez_1 - \tilde{\varepsilon} > H_L(\lambda), \quad \lambda \in B(1, \tilde{\delta}). \tag{50}$$

Уменьшая при необходимости $\tilde{\varepsilon} > 0$, можно считать, что круг $B(z_1, 2\tilde{\varepsilon})$ лежит в области D. Тогда D содержит также и область $l_1 + B(z_1, 2\tilde{\varepsilon})$. Пусть число $\gamma_0 \in (0, 1)$ и функция $f(\lambda)$ удовлетворяют неравенству (35). Положим $f_1(\lambda) = f(\lambda)exp(\lambda\tilde{z}_1)$, где $\tilde{z}_1 = z_1 + t_1e^{i\pi/2}$ и $t_1 > \pi/\gamma_0$. Функция f_1 обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$. Кроме того, ее сопряженная диаграмма лежит в области $l_1 + B(z_1, 2\tilde{\varepsilon})$, а значит и в D, т.е. $f_1 \in P_D$.

Пусть $\delta > 0$. Покажем, что для некоторого $T(\delta) > 0$ каждая точка λ_k такая, что $|\lambda_k| > T(\delta)$ принадлежит множеству R^δ, где $R = \{z : \ln|f_1(\lambda)| \geq H_L(\lambda)\}$.

Положим $T(\delta) = \max\{T, \gamma_0/\tilde{\delta}, \gamma_0/\delta\}$, где $T > 0$ такое же, как в (35). Пусть $|\lambda_k| > T(\delta)$. Тогда $|\lambda_k - i\gamma_0 - \lambda_k| \leqslant \delta\lambda_k < \delta|\lambda_k - i\gamma_0|$ и в силу (35) имеем:

$$\ln|f(\lambda_k - i\gamma_0)| \geq \frac{|Im(\lambda_k - i\gamma_0)|}{\gamma_0} - \tilde{\varepsilon}|\lambda_k - i\gamma_0| = \pi - \tilde{\varepsilon}|\lambda_k - i\gamma_0| \geq -\tilde{\varepsilon}\lambda_k.$$

Отсюда с учетом (50) и однородности опорной функции получаем

$$\ln|f_1(\lambda_k - i\gamma_0)| = \ln|f(\lambda_k - i\gamma_0)| + Re(\tilde{z}_1(\lambda_k - i\gamma_0)) \geq -\tilde{\varepsilon}\lambda_k + \lambda_k Re\tilde{z}_1 + \gamma_0 Im\tilde{z}_1 =$$
$$= -\tilde{\varepsilon}\lambda_k + \lambda_k Re z_1 + \gamma_0 Im\tilde{z}_1 \geq H_L(\lambda_k - i\gamma_0).$$

Здесь мы считаем, что $Im\tilde{z}_1 \geq 0$. Если $Im\tilde{z}_1 < 0$, то вместо $\lambda_k - i\gamma_0$ нужно взять $\lambda_k + i\gamma_0$.

Мы показали, что $\lambda_k \in R^\delta$, если $|\lambda_k| > T(\delta)$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 5.1 из работы [3], а также утверждение 5) этой теоремы. Поэтому верно и ее утверждение 2), согласно которому каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в области D. Тогда то по теореме Абеля для рядов Дирихле (см., например, [1], гл. II, §1, п. 2,4) каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Re z < H_D(1)\}$. Теорема доказана.

Отметим, что любая полуплоскость $D = \{z : Re z < a\}$, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому имеет место

Следствие. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и $D = \{z : Re z < a\}$. Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости D тогда и только тогда, когда $S_\Lambda = 0$.*

Теорема 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел и D — неограниченная широкая выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что положительная вещественная полуось принадлежит множеству $J(D)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ во всей плоскости представляется рядом (1);

2) $S_\Lambda > -\infty$.

Доказательство. Как отмечалось выше, в условиях теоремы система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Тогда по теореме 5.1 из работы [3], из утверждения 1) данной теоремы следует 2).

Докажем обратное. Проверим, что верно утверждение 5) из теоремы 5.1 в работе [3]. Неравенство $S_\Lambda > -\infty$ выполнено согласно 2). Остальные пункты утверждения 5) указанной теоремы в нашем случае выполнены тривиально, т.к. все точки λ_k принадлежат положительной вещественной полуоси, которая лежит в $J(D)$. Таким образом, в силу теоремы 5.1 в работе [3] каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в области D. Поскольку опорная функция D неограничена на положительной вещественной полуоси, то по теореме Абеля для рядов Дирихле каждый такой ряд сходится во всей плоскости. Теорема доказана.

В частном случае для $D = \mathbb{C}$ получаем

Следствие. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из $W(\Lambda, \mathbb{C})$ во всей плоскости представляется рядом (1);

2) $S_\Lambda > -\infty$;

3) Каждая функция из $W(\Lambda, \mathbb{C})$ представляется рядом (1) на некотором открытом подмножестве плоскости.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) эквивалентны согласно теореме 2. Импликация 1) $\Rightarrow$ 3) тривиальна. Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) вытекает из леммы 3. Следствие доказано.

Теорема 3. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел, D — неограниченная узкая выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что положительная вещественная полуось принадлежит множеству $J(D)$ и $\psi \in [0, \pi)$ такое, что $H_D(e^{i\psi}) < +\infty$ и $H_D(e^{i\psi+\pi}) < +\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ во всей плоскости представляется рядом (1);

2) $S_\Lambda > -\infty$ и

$$|\sin\psi| \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{\ln a} \overline{\lim_{r\to+\infty}} \sum_{r \leqslant \lambda_k < ar} Re\frac{1}{\lambda_k} < \frac{1}{2\pi}\left(H_D(e^{i\psi}) + H_D(e^{i\psi+\pi})\right). \tag{51}$$

Доказательство. Если выполнено 1), то по лемме 10 система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Тогда, как нетрудно заметить, из теоремы 2 в работе [14] следует (51). Применяя теперь теорему 5.1 из работы [3], получаем 2).

Обратно, если верно (51), то по теореме 2 из работы [14] система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Тогда по теореме 5.1 из работы [3] верна импликация 2) $\Rightarrow$ 1). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел, D — выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что функция $H_D(\lambda)$ ограничена в окрестности $\lambda = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$;

2) Система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$, $S_\Lambda = 0$, $\tau_0(\Lambda) < +\infty$, и пересечение опорной прямой $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$ с границей области D содержит отрезок длины $2\pi\tau_0(\Lambda)$.

Доказательство. Пусть верно утверждение 2). Покажем, что выполнены все условия теоремы 3.6 в работе [3]. Условия 1) и 2) этой теоремы выполнены, т.к. $S_\Lambda = 0$. Условия 3) и 4) выполнены тривиально, т.к. все точки λ_k принадлежат положительной вещественной полуоси, в окрестности которой опорная функция области D ограничена. Остается проверить условие 5). Такая проверка уже осуществлена в лемме 7. Согласно ей условие 5) теоремы 3.6 из работы [3] также выполнено. Тогда в силу этой теоремы и предложения 2.10 работы [3] каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в области D. Как и выше, по теореме Абеля для рядов Дирихле получаем отсюда утверждение 1) данной теоремы.

Пусть теперь верно утверждение 1). Предположим, что $\tilde{S}_\Lambda = -\infty$. Тогда по лемме 4 для каждого $\tau > 0$ существует $\delta > 0$ и функция $g_\tau \in W(\Lambda, G)$, где $G = (\{z : Rez < \tau\delta\} \cap B(0,\tau)) \cup \{z : Rez < 0\}$, которая представляется рядом (1) с абсциссой сходимости $\gamma = 0$. Положим $X = \partial D \cap \{z : Rez = H_D(1)\}$. По условию $H_D(\lambda)$ ограничена в окрестности $\lambda = 1$. Поэтому X является либо точкой, либо отрезком. Если X состоит из одной точки, то обозначим ее z_0. В противном случае через z_0 обозначим середину отрезка X. Пусть $\tau > 0$ строго больше длины X (возможно равной нулю). Тогда область $\tilde{G} = G + z_0 - \tilde{\delta}$ для некоторого $\tilde{\delta} \in (0, \delta)$ содержит D. Положим $g(z) = g_\tau(z - z_0 + \tilde{\delta})$. Функция g принадлежит пространству $W(\Lambda, \tilde{G}) \subset W(\Lambda, D)$ и представляется рядом (1) с абсциссой сходимости $\gamma = Rez_0 - \tilde{\delta} = H_D(1) - \tilde{\delta}$. Поскольку разложение в ряд Дирихле является единственным, то это противоречит утверждению 1).

Таким образом, $\tilde{S}_\Lambda > -\infty$. Отсюда, как уже отмечалось, следует равенство $S_\Lambda = 0$. Кроме того, по лемме 1 максимальная плотность $\tau_0(\Lambda)$ конечна, а по лемме 10 система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$. Остается показать, что множество X имеет длину не меньше, чем $2\pi\tau_0(\Lambda)$.

Предположим, что длина X равна $2\pi\tau' < 2\pi\tau_0(\Lambda)$. Выберем $\alpha > 0$ такое, что $\tau' + \alpha < \tau_0(\Lambda)$. Рассмотрим области

$$D'' = \{z : Rez < H_D(1)\} \cap \{z : Re(ze^{-i\beta}) < Re((z_0 + i(\tau' + \alpha))e^{-i\beta})\} \cap$$

$$\cap \{z : Re(ze^{i\beta})) < Re((z_0 - i(\tau' + \alpha))e^{i\beta})\}, \quad D' = D'' \cap \{z : Rez > b\}.$$

Нетрудно заметить, что область D'' является неограниченной выпуклой, и для некоторого $\beta > 0$ содержит D, а область $D' \subset D''$ представляет из себя равнобедренную трапецию (когда $b < H_D(1)$), основания которой параллельны мнимой оси. Одно из них лежит на опорной прямой $\{z : Rez = H_D(1)\}$ к области D, содержит X и имеет длину $2\pi(\tau' + \alpha)$. Длина другого строго больше, чем $2\pi(\tau' + \alpha)$, и она увеличивается при уменьшении b. Выберем $b \in \mathbb{R}$ такое, что эта длина становится строго больше, чем $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Тогда область D' содержит некоторый сдвиг отрезка $[-i\pi\tau_0(\Lambda), i\pi\tau_0(\Lambda)]$. Пусть f — функция, существование которой утверждается в лемме 6. Так как f обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$, то система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D')$. Поэтому подпространство $W(\Lambda, D')$ нетривиально.

Предположим, что каждая функция из $W(\Lambda, D')$ представляется рядом (1) в области D'. Поскольку она ограничена, то по теореме 5.2 из работы [3] существует целая функция φ экспоненциального типа, которая обращается в ноль в точках λ_k, $k \geq 1$, имеет регулярный рост всюду в плоскости, и ее сопряженная диаграмма совпадает с замыканием области D'. Тогда согласно (2) за исключением не более чем счетного числа значений φ верно равенство

$$\tau(-\varphi, \varphi, \tilde{\Lambda}) = \frac{1}{2\pi} s(-\varphi, \varphi, D'), \tag{52}$$

где $\tilde{\Lambda}$ — нулевое множество f, $s(-\varphi, \varphi, D')$ — длина дуги $\gamma(\varphi)$ границы $\partial D'$, заключенная между точками опоры $z(\varphi)$, $z(-\varphi) \in \partial D'$ соответственно опорных прямых $l(\pm\varphi) = \{z : Re(ze^{\pm\varphi i}) = H'_D(e^{\pm\varphi i})\}$. Поскольку Λ является частью множества $\tilde{\Lambda}$, которое измеримо, то за исключением не более чем счетного числа значений φ имеем:

$$\tau_0(\Lambda) = \overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda) - n((1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \leqslant \overline{\lim_{\delta\to 0}}\ \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(-\varphi,\varphi,r,\Lambda) - n(-\varphi,\varphi,(1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} =$$

$$= \overline{\lim_{\delta\to 0}} \left(\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(-\varphi,\varphi,r,\Lambda)}{\delta r} - \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(-\varphi,\varphi,(1-\delta)r,\Lambda)}{\delta r} \right) =$$

$$= \overline{\lim_{\delta\to 0}} \left(\frac{\tau(-\varphi,\varphi,\tilde{\Lambda})}{\delta} - \frac{(1-\delta)\tau(-\varphi,\varphi,\tilde{\Lambda})}{\delta} \right) = \tau(-\varphi,\varphi,\Lambda).$$

Для достаточно малых φ дуга $\gamma(\varphi)$ совпадает с основанием трапеции D', длина которого равна $2\pi(\tau' + \alpha)$. Поэтому в силу (52) должно быть верно неравенство $\tau_0(\Lambda) \leqslant \tau' + \alpha$. Это противоречит выбору числа α.

Таким образом, существует функция $g' \in W(\Lambda, D')$, которая не представляется рядом (1) в области D'. Рассмотрим теперь область $\tilde{D}' = D' \cap \{z : Rez < a\}$, где $b < a < H_D$ (1). Она лежит в D' и является равнобедренной трапецией, основания которой параллельны мнимой оси. Одно из них совпадает с тем основанием D', которое имеет длину строго больше $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Выберем число a такое, что другое основание $\tilde{D}'$ также имеет длину строго больше $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Система $\mathcal{E}$ не полна в $H(\tilde{D}')$ по тем же причинам, что и для $H(D')$. Тогда по уже доказанной импликации 2) $\Rightarrow$ 1) функция $g' \in W(\Lambda, \tilde{D}')$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z : Rez < a\}$. Объединение последней и области D' содержит D''. Поэтому $g' \in W(\Lambda, \tilde{D}') \cap H(D'')$. Поскольку область D'' неограничена, то согласно теореме 8.1 из работы [15] верно также включение $g' \in W(\Lambda, D'')$. Область D лежит в D''. Следовательно, $g' \in W(\Lambda, D)$. В силу утверждения 1) функция g' представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$, которая содержит D'. Это противоречит выбору g'.

Таким образом, отрезок X имеет длину не меньше, чем $2\pi\tau_0(\Lambda)$. Теорема доказана.

Замечание. Если последовательность Λ имеет плотность $\tau(\Lambda)$ (и тогда $\tau(\Lambda) = \tau_0(\Lambda)$), то система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$ тогда и только тогда, когда область D содержит некоторый вертикальный отрезок длины $2\pi\tau_0(\Lambda)$ (см. [16], гл. III, §1, теорема 3.1.6). Если же область D неограничена, то, как и выше, условие о том, что система $\mathcal{E}$ не полна в $H(D)$, можно либо исключить либо заменить на (51).

Следствие 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел, D — неограниченная широкая выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что функция $H_D(\lambda)$ ограничена в окрестности $\lambda = 1$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$;

2) $S_\Lambda = 0$, $\tau_0(\Lambda) < +\infty$ и пересечение опорной прямой $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$ с границей области D содержит отрезок длины $2\pi\tau_0(\Lambda)$.

Следствие 2. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая последовательность положительных чисел, D — неограниченная узкая выпуклая область в $\mathbb{C}$ такая, что функция $H_D(\lambda)$ ограничена в окрестности $\lambda = 1$ и $\psi \in [0, \pi)$ такое, что $H_D(e^{i\psi}) < +\infty$ и $H_D(e^{i\psi+\pi}) < +\infty$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Каждая функция из $W(\Lambda, D)$ представляется рядом (1) в полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : Rez < H_D(1)\}$;

2) Выполнено (51), $S_\Lambda = 0$, $\tau_0(\Lambda) < +\infty$, и пересечение опорной прямой $\{z \in \mathbb{C} : Rez = H_D(1)\}$ с границей области D содержит отрезок длины $2\pi\tau_0(\Lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М.: Наука, 1976.
2. Гольдберг А.А., Левин Б.Я., Островский И.В. *Целые и мероморфные функции* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 5–186.
3. Кривошеев А.С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Известия РАН. Серия матем. 2004. Т. 68, № 2. С. 71–136.
4. Кривошеева О.А., Кривошеев А.С. *Критерий справедливости фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости* // Функц. анализ. 2012. Т. 46. № 4. С. 14–30.
5. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956.
6. Лелон П., Л. Груман Л. *Целые функции многих комплексных переменных.* Мир, М., 1989.
7. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
8. Напалков В.В. *Уравнения свертки в многомерных пространствах.* М.: Наука, 1982.
9. P. Koosis *The logarithmic integral I.* Cambridge University Press, 1997.
10. Кривошеева О.А. *Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости* // Алгебра и анализ. 2011. Т.23. № 2. С. 162–205.
11. Кривошеева О.А. *Область сходимости рядов экспоненциальных мономов* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 2. С. 43–56.
12. Юлмухаметов Р.С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica. 1985. Т. 11. С. 257–282.
13. Красичков И.Ф. *Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней* // Математический сборник. 1966. Т. 70(112). № 2. С. 198–231.
14. Хабибуллин Б.Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Математический сборник. 1989. Т. 180. № 5. С. 706–719.
15. Красичков-Терновский И.Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Математический сборник. 1972. Т. 88(130). № 1. С. 3–30.
16. Леонтьев А.Ф. *Последовательности полиномов из экспонент.* М.: Наука, 1980.

Александр Сергеевич Кривошеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
Олеся Александровна Кривошеева,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: kriolesya2006@yandex.ru