

## ПОСТРОЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

В.А. КОРНЕЕВ

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для уравнения первого порядка в дивергентной форме с правой частью независимой от искомой функции и разрывным начальным условием. Впервые такое уравнение было указано в работе Бюргерса (1940) и является модельным для системы уравнений, описывающим нестационарное движение газа. Различные свойства решения этой задачи рассматривались в работах Олейник О.А. (1957), Уизема Дж. (1977)(Whitham), Кружкова С.Н.(1970), Панова Е.Ю.(2006). Исходная задача сведена к задаче Коши для уравнения Гамильтона – Якоби с непрерывным начальным условием. К этой задаче предложено применить метод сингулярных характеристик, разработанный А.А. Меликьяном для игровых задач и задач управления. Эффективность методики продемонстрирована на примере когда в исходном уравнении под знаком производной по пространственной переменной стоит кубический полином от искомой функции, а граничное условие задается в виде "повышающейся" ступеньки. Гамильтониан в модифицированной задаче представляет собой полином третьей степени от частной производной от искомой функции, а граничное условие задается кусочно-линейной, выпуклой вниз функцией с изломом в начале координат. Выделены области параметров, для которых построение обобщенного решения для обеих задач возможно, и описана процедура построения решения. Показано, что решение содержит негладкие особенности, называемые рассеивающей и эквивокальной поверхностями согласно терминологии дифференциальных игр. Построение решения проиллюстрировано рисунками.

**Ключевые слова:** уравнение Гамильтона-Якоби, обобщенное решение, метод характеристик.

**Mathematics Subject Classification:** 35R01, 49J20, 49N70.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих задачах о распространении волн рассматривается непрерывное распределение какого-либо вещества или некоторое состояние среды. В одномерном случае (плоские течения), полагая переменную  $x$  координатой времени, а переменную  $y$  – пространственной координатой, можно определить плотность  $v(x, y)$  на единицу длины и расход  $q(x, y)$  в единицу времени. Определим скорость течения  $w(x, y)$  равенством  $w = q/v$ . Предполагая, что исследуемое вещество сохраняется, можно считать, что скорость изменения его полного количества в любом интервале  $y_1 < y < y_2$  должна компенсироваться суммарным

---

V.A. KORNEEV, CONSTRUCTION OF GENERALIZED SOLUTION FOR FIRST ORDER DIVERGENCE TYPE EQUATION.

© КОРНЕЕВ В.А. 2013.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00472-а, 13-01-00384-а).

Поступила 11 сентября 2012 г.

потоком через сечения  $y_1, y_2$ , т.е.

$$\frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} v(x, y) dy + q(x, y_2) - q(x, y_1) = 0.$$

Если  $v(x, y)$  имеет непрерывные производные, то можно перейти к пределу  $y_1 \rightarrow y_2$  и получить закон сохранения

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0.$$

Простейшая задача о распространении волн получается в том случае, когда, исходя из теоретических или эмпирических соображений, можно постулировать некоторую функциональную связь между  $q$  и  $v$  в виде  $q = \varphi(v)$ . Тогда получаем закон сохранения в виде

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

В газовой динамике ([1, с. 9], [2, с. 13]) уравнение (1) применяется для приближенного построения разрывных решений течения идеального газа, лишённого вязкости и теплопроводности.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(v)}{\partial y} &= f_1(x, y, v), \quad x \geq x_0, \\ v(x_0, y) &= \psi_1(y), \quad x, y \in R^1, \quad f_1(x, y, v), \varphi(v) \in C^\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $\psi_1(y)$  – ограниченная кусочно-гладкая функция. Если  $f_1(x, y, v) \equiv 0$ , это уравнение согласно вышеизложенному носит название закона сохранения, а также транспортного уравнения. Если свободный член  $f_1(x, y, v)$  не зависит от  $v$ , то его можно рассматривать как внешний источник, возбуждающий волны ([2, с. 68]).

Большое количество физических задач, приводящих к задаче (2) и ее обобщениям, рассмотрено в [2, с. 32–34], [3]. Впервые уравнение из (2) было указано в работе Бюргерса [4] и является модельным для системы уравнений, описывающим нестационарное движение газа. В работе О.А. Олейник [5] для случая  $\varphi_{vv}(v) \neq 0$  доказана единственность обобщенного решения задачи (2). Дальнейшее развитие такой подход получил развитие в работах С. Н. Кружкова [6] и Е.Ю. Панова [7], где изучаются существование, единственность и устойчивость обобщенных решений уравнения (2). Уравнение (2) в физике принято называть квазилинейным уравнением переноса или неоднородным уравнением переноса. Уравнение переноса описывает различные процессы, связанные с распространением частиц в веществе ([8]).

**Определение 1.0.** Пусть у функции  $v(x, y)$ , определенной в области  $\Omega$ , есть несколько компонент гладкости  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$  и, соответственно, несколько линий разрыва первого рода  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ , причем

$$\Omega = \left( \bigcup_{i=1}^n \Omega_i \right) \bigcup \left( \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \right)$$

Функцию  $v(x, y)$  согласно работам [1], [9], [10] назовем *обобщенным решением* уравнения (2) в области  $\Omega$ , если выполнены следующие условия:

- 1) в областях гладкости  $\Omega_i, i = 1, \dots, n$   $v(x, y)$  удовлетворяет (2) в классическом смысле;
- 2) на линиях разрыва  $y = y(x)$  выполнено условие Ранкина-Гюгонио

$$y'(x) = \frac{[\varphi(v)]}{[v]} \equiv \frac{\varphi(v_2(x)) - \varphi(v_1(x))}{v_2(x) - v_1(x)}, \quad \text{где } v_1(x) = v(x, y(x) - 0), \quad v_2(x) = v(x, y(x) + 0)$$

за исключением конечного числа точек пересечений  $\Gamma_i, i = 1, \dots, k$ .

3) Выполнено условие устойчивости разрыва: при  $v_2 > v_1$  ( $v_2 < v_1$ ) график функции  $\varphi(v)$  лежит не ниже (соответственно не выше) хорды, соединяющей точки этого графика с абсциссами  $v_1, v_2$ . Это условие может быть записано в виде неравенств

$$\frac{\varphi(v_*) - \varphi(v_2)}{v_* - v_2} \leq y'(x) \leq \frac{\varphi(v_*) - \varphi(v_1)}{v_* - v_1}, \quad y = y(x),$$

которые выполнены для всех  $v_*$ , лежащих между значениями  $v_1, v_2$ .

При  $\varphi''_{vv}(v) \neq 0$  условия устойчивости обобщенного решения упрощаются и имеют вид

$$\varphi'_v(v_2) \leq y'(x) \leq \varphi'_v(v_1).$$

В работе [10] для задачи (2) с нулевой правой частью ( $f_1(x, y, v) \equiv 0$ ) доказано, что обобщенное решение из определения 1.0 является энтропийным. В работе [7] для задачи (2) с нулевой правой частью в предположениях, что  $y \in R^n$ ,  $\varphi \in C^1$ , а производная  $\varphi'(v)$  и функция начальных условий  $\psi_1(y)$  из класса локально-ограниченных функций  $L^\infty_{loc}(R^n)$  удовлетворяют ограничениям на рост

$$|\varphi'(v)| \leq C_0(1 + |v|^{p-1}), \quad p > 1, \quad C_0 = const, \quad (3)$$

$$\alpha = (p - 1)^{-1}, \quad |\psi_1(y)| \leq M(1 + |y|^\alpha) \text{ п.в. на } R^n$$

доказаны существование и единственность решения  $v(x, y)$  в классе функций из

$$B_\alpha = \{v(x, y) \in L^\infty_{loc}(\Pi_T) \mid \exists M = M(x) \in L^\infty_{loc}([x_0, x_0 + T]), \quad (4)$$

$$|v(x, y)| \leq M(x)(1 + |y|^\alpha) \text{ п.в. на } \Pi_T.\},$$

где  $\Pi_T = (x_0, x_0 + T) \times R^n$ ,  $x_0 < x_0 + T \leq +\infty$ .

В [7] для задачи (2) с функцией  $\varphi(v) = |v|^{p-1}v$ ,  $p > 1$  и  $f_1(x, y, v) \equiv 0$  построено семейство ненулевых обобщенных решений, не принадлежащих классу  $B_\alpha$ .

В данной работе полагаем, что  $f_1(x, y, v)$  не зависит от  $v$ . Тогда можно рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y), & u(x_0, y) = \psi(y), \quad x, y \in R^1, \\ f(x, y) = \int_{y_0}^y f_1(x, y) dy, & \psi(y) = \int_{y_0}^y \psi_1(y) dy, \end{cases} \quad (5)$$

дифференцируя решение которой по координате  $y$  можно получить решение задачи (2). Здесь значение  $y_0$  выбирается любым из интервала гладкости  $\psi_1(y)$ . Функция  $\psi(y)$  — непрерывная негладкая функция. Задача (5) представляет собой краевую задачу для уравнения Гамильтона-Якоби, возникающую в теории управления, механике, физике. В теории управления уравнение из (5) составляет основу динамического программирования и называется основным уравнением или уравнением Беллмана-Айзекса. Для широкого класса задач [11], [12] была доказана идентичность вязкого решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби и функции оптимального результата задачи (функции Беллмана-Айзекса, цены игры). Поэтому, метод сингулярных характеристик ([13]) применим для решения задачи (5).

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрение неавтономных задач управления и дифференциальных игр приводит к краевой задаче

$$\begin{cases} H(x, S(x), p) = 0, \quad p = \partial S / \partial x = S_x, \quad x \in \Omega \subset R^n, \\ S(x) = w(x), \quad x \in M \subset \partial\Omega, \quad x, p \in R^n, \end{cases} \quad (6)$$

в которой функция  $H$  и множество  $M$  имеют вид

$$\begin{cases} H = p_1 + H^*(x_1, \dots, x_n, S, p_2, \dots, p_n), \\ M = \{x \in R^n : x_1 = c_1 = \text{const}\}. \end{cases} \quad (7)$$

Множество  $\Omega$  представляет собой полупространство (или слой) справа или слева от множества  $M$ . Функции  $H^*$ ,  $w$  непрерывны по своим переменным на множествах  $\Omega \times R^n$  и  $M$  соответственно. Уравнение  $H = 0$  из (6) с функцией  $H$  вида из (7) обычно называют уравнением Гамильтона-Якоби. Задача (6) может не иметь классического решения  $S(x) \in C^1(\Omega)$ , даже при наличии гладкости функций  $H$  и  $w$ .

Задача (6),(7) называется начальной (терминальной), если

$$\Omega = \{x \in R^n : x_1 > c_1\} (\{x \in R^n : x_1 < c_1\}). \quad (8)$$

Приведем определение обобщенного решения М. Дж. Крэндалла и П.Л. Лионса [14] для краевой задачи (6),(7).

**Определение 1.1.** Непрерывная функция  $S : \Omega \rightarrow R^1$  называется *обобщенным (вязкостным)* решением начальной задачи (6)–(8), если для любой пробной функции  $\varphi(x) \in C^1(\Omega)$  в точках локального минимума (максимума) разности  $S(x) - \varphi(x)$ , справедливо неравенство

$$H(x_0, S(x_0), \varphi_x(x_0)) \geq 0 \quad (H(x_0, S(x_0), \varphi_x(x_0)) \leq 0). \quad (9)$$

В случае терминальной задачи неравенства (9) противоположны.

В работе [11, с. 38-42] дано определение минимаксного решения, доказана эквивалентность минимаксного и обобщенного (вязкостного) решений. При условии, что функция  $H(x, s, p)$  для задачи (6)–(8) невозрастающая по  $s$  и липшицева по  $p$  доказано существование и единственность минимаксного решения.

В работе [15] доказано, что обобщенное решение задачи Коши для квазилинейного уравнения (2) является селектором супердифференциала минимаксного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби (5). В частности, гладкое минимаксное решение задачи (5) с гамильтонианом, не зависящим от искомой функции, после дифференцирования по фазовой переменной, является обобщенным решением задачи (2) в смысле определения (1.0). Вопросы связи двух разных определений обобщенного решения рассматриваются также в работах [1], [16].

В работе [6] для задачи (2), рассматриваемой в полосе  $x \in [0, T], y \in R^1$ , доказаны существование и единственность обобщенного решения в классе ограниченных измеримых функций. Рассмотренная далее задача (13),(14) соответствует требованиям, сформулированным в этой работе.

Согласно вышесказанному для построения обобщенного решения задачи (2), в которой правая часть не зависит от искомой функции, путем интегрирования уравнения и начальных условий по координате  $y$  можно свести задачу (2) к задаче (5), которая представляет собой частный случай задачи (6)–(8) с гамильтонианом, независимым от искомой функции. В полученной задаче для построения обобщенного решения в смысле определения 1.1 можно использовать метод сингулярных характеристик.

### 3. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК. СИНГУЛЯРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Для локального построения классического решения задачи (6) методом характеристик достаточно существования вторых производных у функций  $S(x), H(x, S, p)$  ([18, с. 114]). Тогда построение классического решения задачи (6) сводится к интегрированию системы регулярных характеристик

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{S} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x - p H_S. \quad (10)$$

с начальными условиями

$$x_1 = c_1, \quad x_i = z_{i-1}, \quad p_i(c_1, z) = \frac{\partial w(c_1, z)}{\partial z_i}, \quad i = 2, \dots, n, \quad z = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in R^{n-1},$$

$$p_1 = -H^*(c_1, z_1, \dots, z_{n-1}, w(c_1, z), p_2, \dots, p_n), \quad S(c_1, z) = w(c_1, z).$$

Параметром дифференцирования в уравнениях (10) можно считать координату  $x_1$ . В окрестности точек, в которых функции  $S, H$  не обладают указанными свойствами гладкости, упомянутая процедура построения решения, вообще говоря, не работоспособна.

**Определение 2.1.** Регулярной точкой обобщенного решения уравнения (6) будем называть любую внутреннюю точку  $x^0$  области  $\Omega$  определения решения  $S(x)$ , в окрестности  $D$  которой функция  $S(x)$  дважды дифференцируема и удовлетворяет основному уравнению  $H(x, S(x), p) = 0$  из (6) с дважды дифференцируемой  $H(x, S, p)$  в окрестности точки  $(x^0, S(x^0), p^0) \in R^{2n+1}$ ,  $p^0 = S_x(x^0)$ . Все точки, не являющиеся регулярными, назовем сингулярными. Сингулярное множество состоит из сингулярных точек ([13, с. 57]).

Для случая когда сингулярные множества представляют собой поверхности их можно классифицировать по характеру поведения регулярных характеристик и степени гладкости функций  $S(x), H(x, S, p)$  в их окрестности. Приведем кратко эту классификацию для начальной задачи. Здесь и далее при описании различных видов поведения характеристик идет речь о поведении их фазовых компонент.

*Рассеивающая поверхность.* С обеих сторон подходят регулярные характеристики,  $S(x) \notin C^1$ .

*Экивокальная поверхность.* Регулярные характеристики с одной стороны подходят, а с другой отходят,  $S(x) \notin C^1$ . Для  $H \in C^1$  характеристики отходят с касанием.

*Поверхность переключения.* Схожая с экивокальной, но  $S(x) \in C^1, H \notin C^1$ .

*Универсальная поверхность.* Регулярные характеристики отходят в обе стороны,  $S(x) \in C^1$  и  $H(x, S, p) \notin C^1$ .

*Фокальная поверхность.* Схожая с универсальной,  $S(x) \notin C^1$ . При  $H \in C^1$  характеристики отходят от поверхности с касанием. Если фокальная поверхность вырождается в точку, получаем вершину интегральной воронки.

В точках сингулярной поверхности выполнена следующая лемма ([13, с. 60]).

**Лемма 1.** Пусть  $S(x)$  – обобщенное решение задачи (6), (7), представимое в окрестности  $D$  сингулярной поверхности  $\Gamma$  равенством

$$S(x) = \min [S^+(x), S^-(x)] \quad S^+(x), S^-(x) \in C^1(D). \quad (11)$$

Тогда на поверхности  $\Gamma$  для проверочной функции  $h(\tau)$  выполнено условие

$$h(\tau) = H(x, S(x), p^+(1+\tau)/2 + p^-(1-\tau)/2) \leq 0, \quad |\tau| \leq 1, \quad x \in \Gamma, \quad (12)$$

$$p^s = \partial S^s / \partial x, \quad s = +, -, \quad h(-1) = h(1) = 0.$$

Если задача (6),(7) – терминальная или обобщенное решение  $S(x)$  представимо в виде  $S(x) = \max [S^+(x), S^-(x)]$ , неравенство (12) меняет знак.

Для доказательства Леммы 1 достаточно в (9) в качестве пробной функции взять  $\varphi(x) = S^+(1+\tau)/2 + S^-(1-\tau)/2$ .

#### 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОБЩИЙ ВИД ФУНКЦИИ $h(\tau)$

Рассмотрим задачу Коши:

$$v_x + \varphi_y(v) = f, \quad x \geq 0, \quad \varphi(v) = av^3 + bv^2 + cv + d; \quad x, y \in R^1, \quad (13)$$

$$v(0, y) = \psi_1(y) = \begin{cases} \rho_1, & y > 0 \\ \rho_2 & y < 0. \end{cases} \quad (14)$$

для различных значений параметров  $a, b, c, d, e, f$ . Если положить  $\rho_1 = g+1$ ,  $\rho_2 = g-1$ , то следуя процедуре, описанной во введении, получаем начальную задачу Гамильтона-Якоби

$$H = p + \varphi(q) - fy = 0, \quad \varphi(q) = aq^3 + bq^2 + cq + d; \quad (15)$$

$$S(0, y) = |y| + gy, \quad p = \partial S / \partial x, \quad q = \partial S / \partial y, \quad x > 0. \quad (16)$$

Решение задачи (13), (14) для  $a = 0, f = 0$  имеет два вида сингулярностей, см. например, [2].

При  $\rho_1 > \rho_2, b > 0$  выходящие из начала координат две характеристики с различными граничными условиями образуют пространство между ними, которое заполняется веером характеристик. Это первый вид сингулярности.

Для значений  $\rho_2 > \rho_1, b > 0$  возникает второй вид сингулярности – ударная волна, происходит опрокидывание волны, характеристики пересекаются.

Этим особенностям согласно §3 соответствуют вершина интегральной воронки и рассеивающая поверхность (см. [17, с. 1664-1673]). Там же [17, с. 1664-1673] рассмотрена задача (13), (14) для случая  $\rho_2 > \rho_1$  и показано, что кроме рассеивающей поверхности обобщенное решение соответствующей начальной задачи Гамильтона-Якоби содержит эквивалентную поверхность. Покажем, что случаю  $\rho_1 > \rho_2$  свойственны аналогичные особенности решения.

Поскольку функция  $S(0, y)$  из (16) представима в виде

$$S(0, y) = \max [y(-1+g), y(1+g)],$$

то следует ожидать, что в окрестности особых поверхностей

$$S(x, y) = \max [S^+(x, y), S^-(x, y)].$$

Дальнейшее построение решения подтвердило это предположение.

Заметим, что для задачи (15), (16) функция  $h(\tau)$  из (12) имеет вид

$$h(\tau) = \frac{1}{4} (\tau^2 - 1) (\alpha\tau + \beta) (q^+ - q^-)^2, \quad \tau \in [-1; 1], \quad (17)$$

$$\alpha = a(q^+ - q^-)/2, \quad \beta = 3a(q^+ + q^-)/2 + b. \quad (18)$$

Смена знака функции  $h(\tau)$  происходит только за счет линейного множителя по  $\tau$ . Поэтому условие  $h(\tau) \geq 0$  равносильно неравенству

$$\mu(\tau) = \alpha\tau + \beta \leq 0, \quad \tau \in [-1; 1]. \quad (19)$$

Далее мы выясним при каких соотношениях между параметрами возможно существование различных сингулярных поверхностей и приведем процедуру построения решения.

## 5. ПЕРВИЧНОЕ РЕШЕНИЕ. РАССЕИВАЮЩАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Уравнения регулярных характеристик (10) для задачи (15), (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p = 1, & \dot{y} &= H_q = \varphi_q(q) = 3aq^2 + 2bq + c, \\ \dot{p} &= -H_x = 0, & \dot{q} &= -H_y = f, & \dot{S} &= pH_p + qH_q. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь параметром дифференцирования можно считать координату  $x$ . Используя равенства (15), (16) и дифференцируя функцию  $S(0, y)$ , получаем начальные условия для системы (20) в произвольной точке  $(0, y_0)$  оси  $y$ :

$$x = 0, \quad y = y_0, \quad p = -\varphi(q_0) + fy_0, \quad q = \operatorname{sgn} y_0 + g, \quad S = |y_0| + gy_0. \quad (21)$$

Отсюда следует, что все регулярные характеристики задачи (20) – кубические параболы на плоскости  $x, y$

$$y_q(x, x_0, y_0) = a(x - x_0)^3 f^2 + (3aq + b)(x - x_0)^2 f + (3aq^2 + 2bq + c)(x - x_0) + y_0. \quad (22)$$

Согласно (20)–(22) в окрестности границы – оси  $y$  для граничных значений

$$x_0 = 0, \quad q_0 = \begin{cases} q_{01} = g + 1, & y_0 > 0 \\ q_{02} = g - 1, & y_0 < 0 \end{cases} \quad (23)$$

получаем – два семейства кривых: верхнее и нижнее соответственно

$$\left. \begin{aligned} y_{xak1}(x, 0, y_0) &= y_0 + ax^3 f^2 + (3a(g+1) + b)x^2 f + \\ &+ (3a(g+1)^2 + 2b(g+1) + c)x, \\ y_{xak2}(x, 0, y_0) &= y_0 + ax^3 f^2 + (3a(g-1) + b)x^2 f + \\ &+ (3a(g-1)^2 + 2b(g-1) + c)x. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Заметим что при  $a = 0, f \neq 0$  регулярные характеристики из (22), (24) представляют собой квадратичные функции по  $x$ , но решение задачи строится аналогично решению, разобранному Уиземом для случая  $a = 0, f = 0$  с линейными регулярными характеристиками. Для  $a = 0, f \neq 0$  новых особенностей не возникает и полностью сохраняется характер поведения решения. Поэтому далее полагаем, что  $a \neq 0, f \neq 0$ . Случай  $a = 0, f \neq 0$  приведем как простую ситуацию при построении интегральной воронки.

Рассмотрим разность регулярных характеристик (24), исходящих из начала координат

$$y_{xak1}(x, 0, 0) - y_{xak2}(x, 0, 0) = 6fax^2 + (12ag + 4b)x. \quad (25)$$

Из (25) следует, что если параметры задачи удовлетворяют условиям

$$\left[ \begin{array}{l} 3ag + b < 0, \\ 3ag + b = 0, \quad fa < 0, \end{array} \right. \quad (26)$$

то два семейства регулярных траекторий с значениями  $q_0 = \pm 1 + g$  пересекаются друг с другом в окрестности начала координат и не возникает область, незаполненная регулярными траекториями. В этом и следующем пункте полагаем выполненными условия (26).

Интегрируя выражение  $\dot{S} = pH_p + qH_q$  вдоль траекторий системы (20) и подставляя затем в него значения  $x_0 = 0, q_0$  из (23) и  $y_0$  из (22), положив  $y = y_q(x, x_0, y_0)$ , получим функцию  $S(x, y)$ , называемую первичным решением задачи (15), (16)

$$\left. \begin{aligned} S(x, y) &= \max [S_1(x, y), S_2(x, y)], \\ S_i(x, y) &= q_{0i}y - \frac{a}{4}f^3x^4 - \left(aq_{0i} + \frac{b}{3}\right)f^2x^3 - \\ &- (3aq_{0i}^2 + 2bq_{0i} + c)\frac{fx^2}{2} - (aq_{0i}^3 + bq_{0i}^2 + cq_{0i} + d)x + fxy, \\ q_{0i} &= g - (-1)^i, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Далее будут приведены примеры построения областей, в которых первичное решение представляет *обобщенное* решение задачи (15), (16). Равенство  $S = S_1$  ( $S = S_2$ ) имеет место выше (ниже) кубической параболы, которую определяет условие непрерывности  $S_1 = S_2$  :

$$y_{disp}(x) = ax^3 f^2 + (3ag + b)x^2 f + (3ag^2 + 2bg + a + c)x. \quad (28)$$

Для рассеивающей поверхности (28) справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} q^+ &= q_1(x) = g + 1 + fx, \quad q^- = q_2(x) = g - 1 + fx, \\ \alpha &= a(q^+ - q^-)/2 = a, \quad \beta = 3a(q^+ + q^-)/2 + b = 3a(g + fx) + b. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

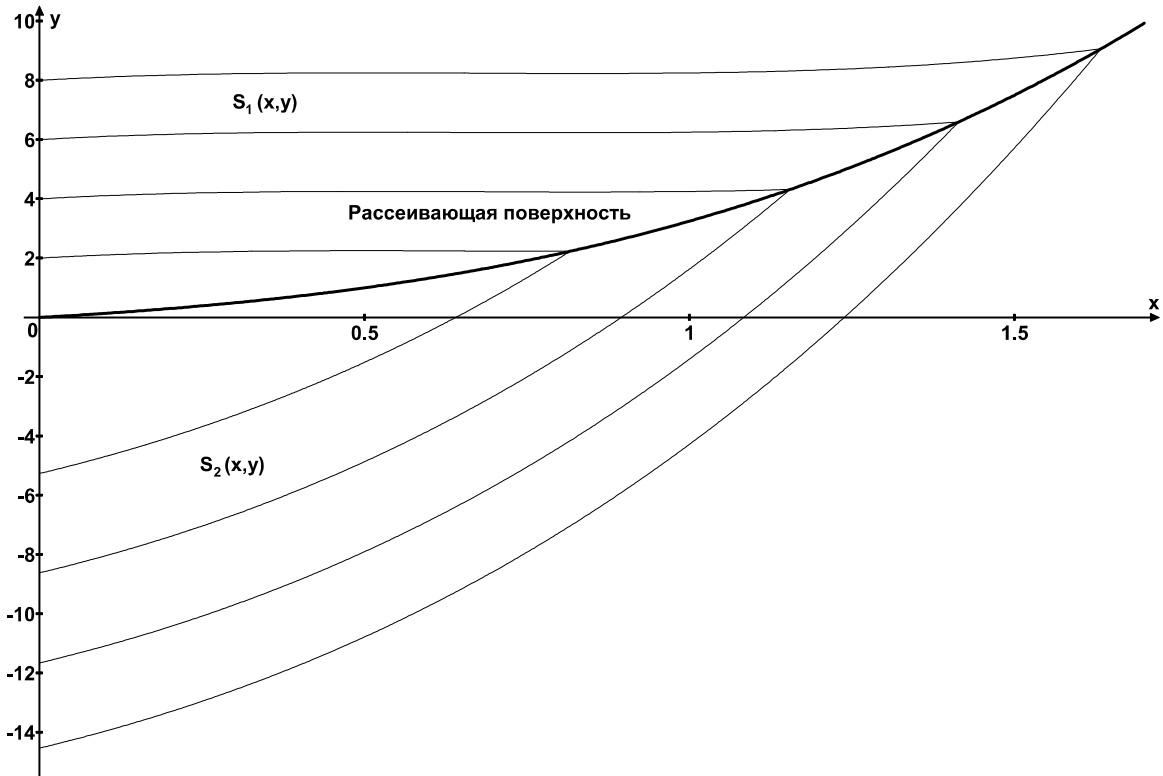


Рис. 1. Рассеивающая поверхность

Из (29) и Леммы 1 получаем необходимое условие существования поверхности (кривой) (28)

$$\max_{\tau \in [-1;1]} \mu(\tau) = |a| + 3a(g + fx) + b \leq 0 \tag{30}$$

Вводя функцию  $disp(x)$

$$disp(x) = |a| + 3a(g + fx) + b \tag{31}$$

и, замечая, что  $disp(0) = |a| + 3ag + b$ , получаем, что рассеивающая кривая (28) существует в окрестности начала координат только когда выполнено одно из условий

$$|a| + 3ag + b < 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} |a| + 3ag + b = 0, \\ fa \leq 0. \end{cases} \tag{32}$$

Условия (32) более сильные чем условие (26). В случае выполнения условия (26) и нарушения условий (32) из начала координат выходит экивокальная поверхность (кривая), методика построения которой разбирается в следующем пункте.

Для значений

$$\begin{cases} |a| + 3ag + b \leq 0, \\ fa \leq 0, \end{cases} \tag{33}$$

$disp(x) \leq 0$  при  $x \in [0, +\infty)$  и рассеивающая поверхность (кривая) распространяется от начала координат до бесконечности. Процедуру построения рассеивающей кривой и обобщенного решения для случая (33) поясняет рис. 1. Построение проведено для значений

$$a=1, \quad b=-a-3ag=1/2, \quad c=0, \quad d=0, \quad g=-1/2, \quad f=-1.$$

Жирная кривая представляет собой рассеивающую кривую, делящую полуплоскость  $(x, y), x > 0$  на две области, в каждой из которых решение задачи (15), (16) дается функциями  $S_1(x, y), S_2(x, y)$  как указано на рисунке. Решение задачи (13), (14) в этих областях дается соотношениями

$$v_1(x, y) = g + 1 + fx, \quad v_2(x, y) = g - 1 + fx \tag{34}$$



Тонкими линиями изображены регулярные характеристики. Мы получили Лемму 2.

**Лемма 2.** Для значений параметров (33) решение задачи (15), (16) дается соотношениями (27), а решение задачи (13), (14) при  $\rho_1 = g + 1$ ,  $\rho_2 = g - 1$  дается соотношениями

$$v(x, y) = \begin{cases} g + 1 + f x, & y > y_{disp}(x) \\ g - 1 + f x, & y < y_{disp}(x). \end{cases} \quad (35)$$

Для значений

$$\begin{cases} |a| + 3ag + b < 0, \\ fa > 0, \end{cases} \quad (36)$$

$disp(x)$  обращается в 0 при

$$x^* = -\frac{|a| + 3ag + b}{3af}.$$

Значению  $x^*$  при  $a > 0$  соответствует точка  $(x_1^*, y_1^*)$ , а при  $a < 0$  точка  $(x_2^*, y_2^*)$  на рассеивающей кривой (28)

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{a(-1)^i - 3ag - b}{3af}, \quad i = 1, 2, \\ y_i^* &= -\frac{((-1)^{i+1}a + b + 3ag)(9a^2g^2 + 6agb + (-1)^i 3a^2g - 2b^2 + (-1)^i ba + 10a^2 + 9ac)}{27a^2f}. \end{aligned} \quad (37)$$

Именно в этих точках происходит касание параболы (28) одной из характеристик первичного решения (24). При  $a > 0$  одна из характеристик (критическая) верхнего семейства парабол (24) касается параболы (28) в точке  $(x_1^*, y_1^*)$ . При  $a < 0$  одна из характеристик (критическая) нижнего семейства парабол (24) касается параболы (28) в точке  $(x_2^*, y_2^*)$ . Переход рассеивающей кривой в другой тип особенности может происходить именно в этих точках.

Поскольку  $x_2^* - x_1^* = 2/(3f)$  и  $x_1^* \neq x_2^*$  для любых  $a \neq 0$  и  $f \neq 0$  рассеивающая поверхность не может переходить в фокальную поверхность или в интегральную воронку и наоборот.

Из вышесказанного следует, что условие одностороннего касания в точках  $(x_1^*, y_1^*)$  при  $a > 0$  и  $f > 0$ ,  $(x_2^*, y_2^*)$  при  $a < 0$  и  $f < 0$  выделяет из всех упомянутых выше особых поверхностей экивокальную поверхность.

## 6. ПОСТРОЕНИЕ ЭКИВОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В этом параграфе мы полагаем выполненным условие (36). На экивокальной поверхности в общем случае выполнены три необходимых условия в виде равенств – уравнение (6), условия касания и непрерывности

$$H(x, S(x), p) = 0, \quad \langle H_p, p - \partial S^+ / \partial x \rangle = 0, \quad F_1(x, S) \equiv S - S^+(x) = 0. \quad (38)$$

Здесь  $S^+(x)$  – гладкая функция, совпадающая с решением по ту из сторон поверхности, где регулярные характеристики не касаются поверхности. В работе [19] показано, что в общем случае (6) экивокальная поверхность (линия) для  $H \in C^1$  строится интегрированием системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p, \quad \dot{S} = \langle p, H_p \rangle, \quad \dot{p} = -H_x - pH_S - \frac{\{\{H, F_1\}, H\}}{\{\{F_1, H\}, F_1\}} \left( p - \frac{\partial S^+}{\partial x} \right), \\ F_1(x, S) &\equiv S - S^+(x), \quad \{F, H\} = \langle F_x + pF_s, H_p \rangle - \langle H_x + pH_s, F_p \rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

Левые части равенств (38) суть первые интегралы системы (39). В обозначениях задачи (15), (16)  $S^+(x_1, x_2) = S^+(x, y)$ . Используя (15), (27), (38), (39) получаем дифференциальные уравнения с начальными условиями для экивокальной кривой

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = H_q, \quad \frac{dq}{dx} = -\frac{S_{xx}^+ + f\varphi_q(q)}{(S_y^+ - q)\varphi_{qq}(q)}, \\ x = x_1^*, y(x_1^*) = y_1^*, S^+(x, y) = S_2(x, y), q = g + 1 + f x_1^* \quad \text{при } a > 0, f > 0, \\ x = x_2^*, y(x_2^*) = y_2^*, S^+(x, y) = S_1(x, y), q = g - 1 + f x_2^* \quad \text{при } a < 0, f < 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Уравнение  $\dot{x} = H_p = 1$  и уравнение для  $p$  здесь опущены, так как  $p$  в (40) не входит. После интегрирования уравнений (40) значения  $p$  для обеих экивокальных кривых находятся из равенства  $H = 0$ , а величина  $S$  находится интегрированием после определения остальных переменных.

**Случай  $a > 0, f > 0$ .** С помощью (40) можно получить, что экивокальная кривая, исходящая из точки  $(x_1^*, y_1^*)$  при  $a > 0$  и  $f > 0$  определяется решением задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \varphi_q, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{(3afx - 3a + 2b + 3ag + 3aq)f}{2(3aq + b)}, \\ x = x_1^*, \quad y = y_1^*, \quad q = q_1^* = q(x_1^*) = g + 1 + f x_1^* = \frac{2a - b}{3a}. \end{aligned} \quad (41)$$

Система (41) имеет аналитическое решение, удовлетворяющее Лемме 1 на отрезке  $[x_1^*, x_{m1}]$

$$\begin{aligned} y_{eq1}(x) = y_1^* - \frac{2(\varphi(q) - \varphi(q_1^*))}{f}, \quad q_{eq1}(x) = q_1^* - \frac{f}{2}(x - x_1^*) = \frac{1 - g - fx}{2} - \frac{b}{2a}, \\ x_{m1} = -\frac{3ag - 3a + b}{3fa}, \quad y_{m1} = y_{eq1}(x_{m1}), \quad x \in [x_1^*, x_{m1}]. \end{aligned} \quad (42)$$

Действительно, проверочная функция  $\mu(\tau)$  для экивокальной поверхности (42) имеет вид

$$\mu(\tau) = \mu_1(\tau) = \frac{(1 - \tau)(3xfa - 3a + 3ag + b)}{4} \leq 0, \quad \tau \in [-1; 1]. \quad (43)$$

Равенство  $\mu_1(\tau) = 0$  при  $\tau \neq 1$  достигается для  $x = x_{m1}$ , где  $x_{m1}$  – абсцисса точки  $(x_{m1}, y_{m1})$  из (42), в которой она заканчивается, поскольку при  $x > x_{m1}$  неравенство  $\mu_1(\tau) \leq 0$  для  $\tau \neq 1$  будет нарушено. В этой точке числитель и знаменатель правой части второго уравнения из (41) обращаются в ноль и именно в этой точке происходит совпадение значений  $q_{eq1}(x)$ ,  $q_2(x)$  а также значений производных функций  $y_{xak2}(x, x_{m1}, y_{m1})$  и  $y_{eq1}(x)$  из (42), т.е. происходит касание экивокальной поверхности характеристикой из нижнего семейства парабол. Далее экивокальная кривая переходит в регулярную характеристику.

Построение рассеивающей и экивокальной поверхностей для случая, когда  $a > 0$  и  $f > 0$  иллюстрирует рис. 2 для значений параметров  $a = 1, b = -1, c = d = 0, g = -2/3, f = 1/3$ .

Жирные сплошная и пунктирные линии на рис. 2 делят полуплоскость  $x > 0$  на три области, в каждой из которых обобщенное решение задается своей формулой. В областях, примыкающих к оси  $y$ , обобщенное решение задачи (15), (16) задается формулами  $S_1(x, y)$  и  $S_2(x, y)$  соответственно для областей, лежащих выше и ниже рассеивающей кривой  $OA$ .

Опишем процедуру построения значений функции обобщенного решения  $S(x, y) = S_{eq1}(x, y)$  в области выше экивокальной кривой  $AB$ . Координаты точки на экивокальной кривой  $AB$  будем обозначать через  $\xi, \eta$ , т.е.  $\xi = x, \eta = y$ . Значения функции

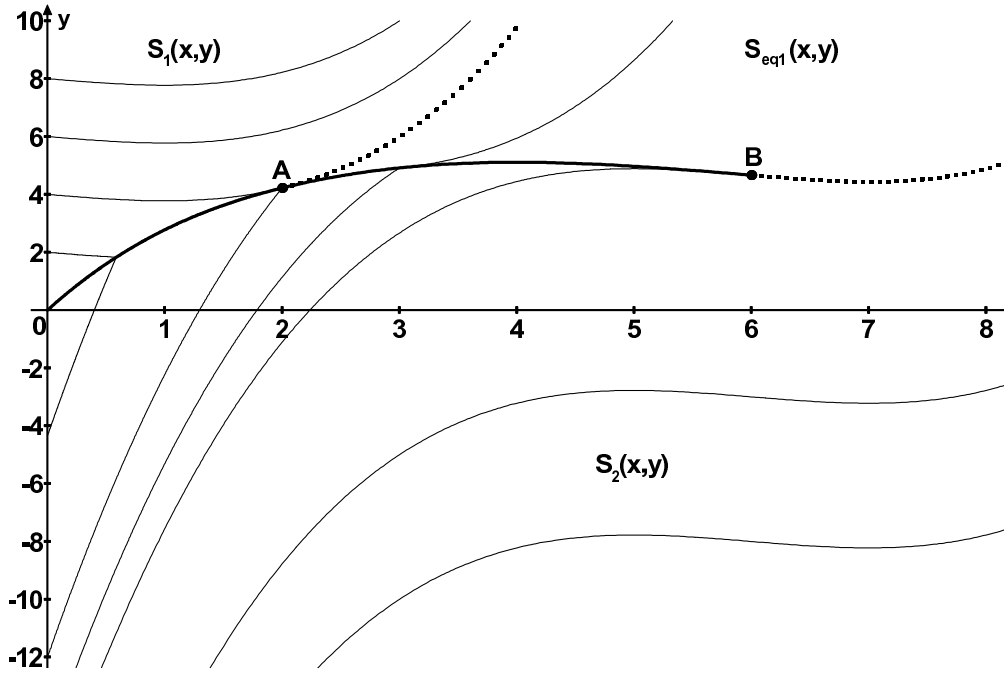


Рис. 2.  $OA$  - рассеивающая поверхность,  $AB$  - экивокальная поверхность

$S_{eq1}(\xi, \eta)$  на экивокальной кривой (42) определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 S_{eq1}(\xi, \eta) &= S_2(x_1^*, y_1^*) + \int_{x_1^*}^{\xi} (p + q H_q) dx = \\
 &= S_2(x_1^*, y_1^*) + \int_{x_1^*}^{\xi} (-\varphi(q_{eq1}(x)) + f\eta(x) + q_{eq1}(x) \varphi_q(q_{eq1}(x))) dx, \\
 \eta &= y_1^* + \int_{x_1^*}^{\xi} H_q dx = y_1^* + \int_{x_1^*}^{\xi} \varphi_q(q_{eq1}(x)) dx, \quad \xi \in [x_1^*, x_{m1}].
 \end{aligned} \tag{44}$$

Из области, прилегающей снизу к экивокальной кривой  $AB$ , регулярные характеристики приходят на нее, функция обобщенного решения  $S(x, y)$  в этой области совпадает с функцией  $S_2(x, y)$ . В области, прилегающей сверху к экивокальной кривой  $AB$ , строится семейство характеристик  $y_{eq1x}(x, \xi)$  согласно уравнениям (20) касательное к экивокальной поверхности  $AB$

$$\begin{aligned}
 y_{eq1x}(x, \xi) &= a(x-\xi)^3 f^2 + (3aq_{eq1}(\xi) + b)(x-\xi)^2 f + \\
 &+ (3aq_{eq1}^2(\xi) + 2bq_{eq1}(\xi) + c)(x-\xi) + \eta(\xi), \quad \xi \in [x_1^*, x_{m1}], \quad \xi \leq x.
 \end{aligned} \tag{45}$$

Решение в этой области обозначим  $S_{eq1}(x, y)$ . Семейство характеристик  $y_{eq1x}(x, \xi)$  для рис. 2 задается формулами

$$y_{eq1x}(x, \xi) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2 \xi}{2} + \frac{3x\xi^2}{4} - \frac{\xi^3}{3} + x^2 - 3x\xi + \frac{3\xi^2}{2} + \frac{8x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Построение функции  $S_{eq1}(x, y)$  для задачи (15), (16) и функции  $v_{eq1}(x, y)$  для соответствующей задачи (13), (14) проводится интегрированием вдоль семейства характеристик  $y_{eq1x}(x, \xi)$

$$S_{eq1}(x, y) = S_{eq1}(\xi, \eta(\xi)) + \int_{\xi}^x (p + q H_q) dx' = S_{eq1}(\xi, \eta(\xi)) + \int_{x_1^*}^{\xi} (f y_{eq1x}(x', \xi) - \varphi(q_{eq1x}(x', \xi)) + q_{eq1x}(x', \xi) \varphi_q(q_{eq1x}(x', \xi))) dx', \quad (46)$$

$$v_{eq1}(x, y) = q_{eq1x}(x, \xi), \quad q_{eq1x}(x, \xi) = q_{eq1}(\xi) + f(x - \xi) = \frac{1-g-3f\xi}{2} - \frac{b}{2a} + fx, \\ x \in [\xi, x_{m1}], \quad y = y_{eq1x}(x, \xi), \quad \xi \in [x_1^*, x_{m1}].$$

**Случай  $a < 0, f < 0$ .** Экивокальная кривая, исходящая из точки  $(x_2^*, y_2^*)$  при  $a < 0$  и  $f < 0$ , определяется решением задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_q, \quad \frac{dq}{dx} = \frac{(3afx + 3a + 2b + 3ag + 3aq)f}{2(3aq + b)}, \quad (47) \\ x = x_2^*, \quad y = y_2^*, \quad q = q_2^* = q(x_2^*) = g - 1 + fx_2^* = -\frac{2a + b}{3a}.$$

Система (47) имеет аналитическое решение, удовлетворяющее Лемме 1 на отрезке  $[x_2^*, x_{m2}]$

$$y_{eq2}(x) = y_2^* - \frac{2(\varphi(q) - \varphi(q_2^*))}{f}, \quad q_{eq2}(x) = q_2^* - \frac{f}{2}(x - x_2^*) = \frac{-1-g-fx}{2} - \frac{b}{2a}, \quad (48) \\ x_{m2} = -\frac{3ag + 3a + b}{3fa}, \quad y_{m2} = y_{eq2}(x_{m2}).$$

Действительно, проверочная функция  $\mu(\tau)$  для экивокальной поверхности (48) имеет вид

$$\mu(\tau) = \mu_2(\tau) = \frac{(1 + \tau)(3xfa + 3a + 3ag + b)}{4} \leq 0, \quad \tau \in [-1; 1]. \quad (49)$$

Равенство  $\mu_2(\tau) = 0$  при  $\tau \neq -1$  достигается для  $x = x_{m2}$ , где  $x_{m2}$  – абсцисса точки  $(x_{m2}, y_{m2})$ , в которой она заканчивается, поскольку при  $x > x_{m2}$  неравенство  $\mu_2(\tau) \leq 0$  для  $\tau \neq -1$  будет нарушено. В этой точке числитель и знаменатель правой части второго уравнения из (47) обращаются в ноль и именно в этой точке происходит совпадение значений  $q_1(x), q_{eq2}(x)$  а также значений производных функций  $y_{xak1}(x)$  и  $y_{eq2}(x)$  из (48), т.е. происходит касание экивокальной кривой характеристикой из верхнего семейства парабол. Далее экивокальная кривая переходит в регулярную характеристику. Построение функций  $S_{eq2}(\xi, \eta)$ ,  $S_{eq2}(x, y)$ ,  $v_{eq2}(x, y)$  для задач (15), (16) и (13), (14) проводится аналогично

случаю  $a > 0, f > 0$

$$\begin{aligned}
S_{eq2}(\xi, \eta) &= S_2(x_2^*, y_2^*) + \int_{x_2^*}^{\xi} (-\varphi(q_{eq2}(x)) + f\eta(x) + q_{eq2}(x) \varphi_q(q_{eq2}(x))) dx, \\
\eta &= y_2^* + \int_{x_2^*}^{\xi} \varphi_q(q_{eq2}(x)) dx, \quad S_{eq2}(x, y) = S_{eq2}(\xi, \eta(\xi)) + \\
&+ \int_{x_2^*}^{\xi} (fy_{eq2x}(x', \xi) - \varphi(q_{eq2x}(x', \xi)) + q_{eq2x}(x', \xi) \varphi_q(q_{eq2x}(x', \xi))) dx', \\
v_{eq2}(x, y) &= q_{eq2x}(x, \xi), \quad q_{eq2x}(x, \xi) = q_{eq2}(\xi) + f(x - \xi), \quad x \in [\xi, x_{m2}], \\
y &= y_{eq2x}(x, \xi), \quad \xi \in [x_2^*, x_{m2}].
\end{aligned} \tag{50}$$

Изложенное сформулируем в виде Леммы 3.

**Лемма 3.** Для значений параметров (36) полуплоскость  $x \geq 0$  делится на три области кривыми, элементами которых служат: ось ординат, рассеивающая кривая (28)

$$y = y_{disp}(x), \quad x \in [0, x^*], \quad x^* = \begin{cases} x_1^*, & a > 0, f > 0 \\ x_2^*, & a < 0, f < 0 \end{cases}, \quad y^* = y_{disp}(x^*),$$

экивокальная кривая из (42), (48)

$$y = y_{eq}(x), \quad x \in [x^*, x_m], \quad y_{eq}(x) = \begin{cases} y_{eq1}(x), & a > 0, f > 0 \\ y_{eq2}(x), & a < 0, f < 0 \end{cases},$$

$$x_m = \begin{cases} x_{m1}, & a > 0, f > 0 \\ x_{m2}, & a < 0, f < 0 \end{cases},$$

и две регулярные характеристики  $y_1(x), x \in [x^*, +\infty), \quad y_2(x), x \in [x_m, +\infty),$   
 $y_m = y_{eq}(x_m)$

$$y_1(x) = \begin{cases} y_{xak1}(x, x^*, y^*), & a > 0, f > 0 \\ y_{xak2}(x, x^*, y^*), & a < 0, f < 0 \end{cases},$$

$$y_2(x) = \begin{cases} y_{xak2}(x, x_m, y_m), & a > 0, f > 0 \\ y_{xak1}(x, x_m, y_m), & a < 0, f < 0 \end{cases}.$$

В двух областях, примыкающих к оси  $y$ , соответственно для верхней и нижней областей обобщенное решение задачи (15), (16) задается формулами  $S_1(x, y)$  и  $S_2(x, y)$  из (27), а решение задачи (13), (14) при  $\rho_1 = g + 1, \rho_2 = g - 1$  дается соотношениями (34). В третьей области, примыкающей к экивокальной кривой, обобщенное решение задач (15), (16) и (13), (14) задается формулами из (46) для  $a > 0, f > 0$  и (49) для  $a < 0, f < 0$ .

## 7. ОТСУТСТВИЕ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Покажем что в задачах, описываемых уравнением (15), независимо от граничных условий фокальная поверхность отсутствует. На фокальной поверхности должны быть выполнены необходимые условия - само уравнение (6), условие непрерывности  $w(x, y) = S^{(1)}(x, y) - S^{(2)}(x, y) = 0$ , условия касания регулярными характеристиками поверхности  $w(x, y) = 0$ , т.е. должны быть выполнены условия касания с обеих ее сторон. Выписывание этих условий приводит к системе уравнений относительно векторов  $(p_1, q_1)$ ,

$$(p_2, q_2), \quad (p_i = \partial S^{(i)} / \partial x, \quad q_i = \partial S^{(i)} / \partial y, \quad i = 1, 2) \quad \left. \begin{array}{l} p_1 + \varphi(q_1) - fy = 0; \quad p_2 + \varphi(q_2) - fy = 0, \\ p_1 - p_2 + (q_1 - q_2)\varphi_q(q_i) = 0, \\ \varphi_q(q) = 3aq^2 + 2bq + c, \quad i = 1, 2. \end{array} \right\} \quad (51)$$

Фокальную поверхность можно строить, решая систему уравнений ([13])

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = H_{q_1} = \bar{H}_{q_2}, \quad \dot{S} = q_1 H_{q_1} - H^* = q_2 \bar{H}_{q_2} - \bar{H}^*, \quad H^* = \varphi(q_1) - fy \\ \dot{q}_1 = K(x, y, q_1, q_2), \quad \dot{q}_2 = K(x, y, q_2, q_1), \\ K(x, y, q_1, q_2) = \frac{[H_x + H_y H_{q_1}]^*}{(q_1 - q_2)H_{q_1 q_1}} - \frac{H_{q_1 x} + H_{q_1 y} H_{q_1}}{H_{q_1 q_1}}. \end{array} \right. \quad (52)$$

Черта сверху означает замену аргументов  $p_1, q_1$  на  $p_2, q_2$ , квадратные скобки со звездочкой означают скачок функции на предполагаемой фокальной поверхности  $\Gamma_f$ , т.е.  $[f]^* = f(p_1, q_1) - f(p_2, q_2)$ .

Рассмотрение системы (51) приводит к системе двух уравнений относительно  $q_1, q_2$

$$\begin{aligned} (q_1 - q_2)^2 (2aq_1 + b + aq_2) &= 0 \\ - (q_1 - q_2)^2 (aq_1 + b + 2aq_2) &= 0, \end{aligned}$$

имеющей только совпадающие решения  $q_1 \equiv q_2$ . Поэтому система (51) имеет только решения  $p_1 \equiv p_2, \quad q_1 \equiv q_2$ , т.е. выполнение условий (51) приводит к гладкости искомого решения  $S(x, y)$  и фокальная поверхность отсутствует.

## 8. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ВОРОНКА

Пусть теперь условие (26) нарушено, т.е. выполнено условие

$$\left[ \begin{array}{l} 3ag + b > 0, \\ 3ag + b = 0, \quad fa > 0. \end{array} \right. \quad (53)$$

Как было отмечено в § 5 между регулярными траекториями с значениями  $q_0 = \pm 1 + g$  в окрестности начала координат возникает область, незаполненная регулярными траекториями. Эту область пытаемся заполнить регулярными траекториями (22), не удовлетворяющим условиям (23). На рис. 3 приведен пример такого удачного заполнения этой области регулярными характеристиками с значениями  $q_0 \in [-1 + g, +1 + g]$  для случая  $a = 0$ . Под рисунком приведены соответствующие значения параметров. Для значений  $a = 0$  всегда удается заполнить все пространство регулярными характеристиками, выходящими из оси ординат.

При  $a \neq 0$  может возникать ситуация когда между регулярными траекториями, выходящими из начала координат со значениями  $q_0 = \pm 1 + g$ , возникает пространство, которое не удастся заполнить регулярными траекториями (22). Пример такой ситуации приведен на рис. 4. Параметры выбраны таким образом, чтобы в (25) линейный член по  $x$  обращался в 0, а квадратичный был положителен, т.е.  $3ag + b = 0, \quad fa > 0$ . Для этих значений параметров регулярные характеристики с значениями  $q_0 = \pm 1 + g$  имеют общую касательную в начале координат и нет других регулярных характеристик с такой же касательной, поскольку в (22) линейный член по  $x$  содержит квадратичный множитель по  $q_0$ . Отсюда следует, что в данном случае нельзя выбором  $q_0$  обеспечить заполнение всей области  $x > 0$  регулярными характеристиками, выходящими из начала координат. В п. 6 было доказано отсутствие фокальной поверхности. Поэтому для таких значений параметров методика, применяемая в данной работе, решения не дает.

Очевидно, что если коэффициенты при линейном и квадратичном членах по  $x$  в (22) суть возрастающие функции от  $q_0$  на отрезке  $[-1 + g, 1 + g]$ , то выпускаемые из начала

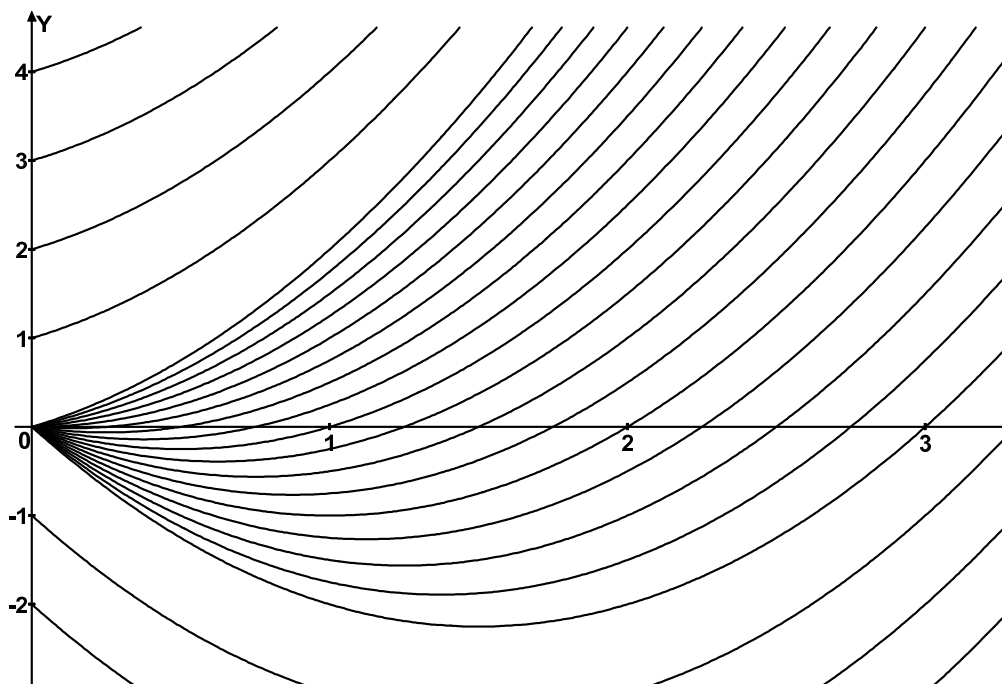


Рис. 3. Интегральная воронка:  $a = 0, b=1, c=d=0, f=1, g=-0.5$

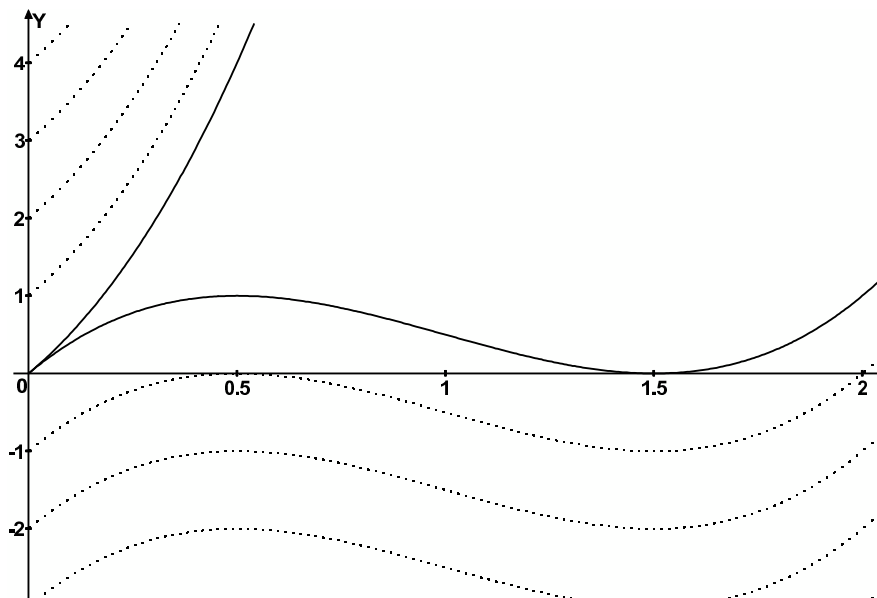


Рис. 4.  $a = 2, b = 3, c = 0, f = 1, g = -0.5$

координат регулярные характеристики с значениями  $q_0 \in [-1 + g, +1 + g]$  заполняют область, образуемую регулярными траекториями, выходящими из начала координат со значениями  $q_0 = \pm 1 + g$ . Лемма 4 описывает построение решения в этом случае.

**Лемма 4.** Пусть параметры задачи удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} g > +1 - \frac{b}{3a} & \text{при } a > 0, \quad f > 0, \\ g < -1 - \frac{b}{3a} & \text{при } a < 0, \quad f < 0. \end{cases}$$

Тогда регулярные характеристики выходящие из оси ординат однозначно заполняют всю область  $x > 0$ . Полуплоскость  $x \geq 0$  делится на три области кривыми, элементами которых служат: ось ординат и две регулярные кривые  $y_{xak1}(x, 0, 0)$ ,  $y_{xak2}(x, 0, 0)$ . В двух областях, примыкающих к оси  $y$ , соответственно для верхней и нижней областей обобщенное решение задачи (15), (16) задается формулами  $S_1(x, y)$  и  $S_2(x, y)$  из (27), а решение задачи (13), (14) при  $\rho_1 = g + 1$ ,  $\rho_2 = g - 1$  дается соотношениями (34). В третьей области, расположенной между кривыми  $y_{xak1}(x, 0, 0)$ ,  $y_{xak2}(x, 0, 0)$ , обобщенные решения задач (15), (16) и (13), (14) задаются формулами  $S_3(x, y)$ ,  $v_3(x, y)$  в неявном виде

$$S_3(x, y) = \int_0^x (p + q H_q) dx = \int_0^x (f y_3(x, q_0) - \varphi(q_3(x, q_0)) + q_3(x, q_0) \varphi_q(q_3(x, q_0))) dx,$$

$$v_3(x, y) = q_3(x, q_0), \quad q_3(x, q_0) = q_0 + f x,$$

$$y = y_3(x, q_0) = a x^3 f^2 + (3 a q_0 + b) x^2 f + (3 a q_0^2 + 2 b q_0 + c) x, \quad q_0 \in [g - 1, g + 1]$$

На рис. 5 приведен пример построения интегральной воронки для рассматриваемого случая. Заметим, что в случае не выполнения условий Леммы 4 и выполнения условий (36) за эквивокальной поверхностью также следует интегральная воронка (волна разрежения).

## 9. Выводы

Задача Коши для известного квазилинейного уравнения первого порядка с правой частью, независимой от искомой функции и разрывным начальным условием, сведена к задаче Коши для уравнения Гамильтона-Якоби с непрерывным начальным условием. К этой задаче предложено применить метод сингулярных характеристик, разработанный А.А.Меликьяном для игровых задач и задач управления. Эффективность методики продемонстрирована на примере квазилинейной задачи (3.1), (3.2) для случая когда исходная функция  $\varphi$ , входящая в уравнение представляет собой кубический полином от искомой функции, а граничное условие задается в виде "повышающейся" ступеньки. Выделены области параметров, для которых построение обобщенного решения квазилинейной задачи (3.1), (3.2) возможно и выписана подробная процедура построения решения. Соответствующие формулы для построения решения задачи (3.1), (3.2), так и для построения решения вспомогательной начальной задачи Гамильтона-Якоби (3.3), (3.4), приведены в леммах 2-4.

Описанная методика построения обобщенного решения применялась в работах [20], [21].



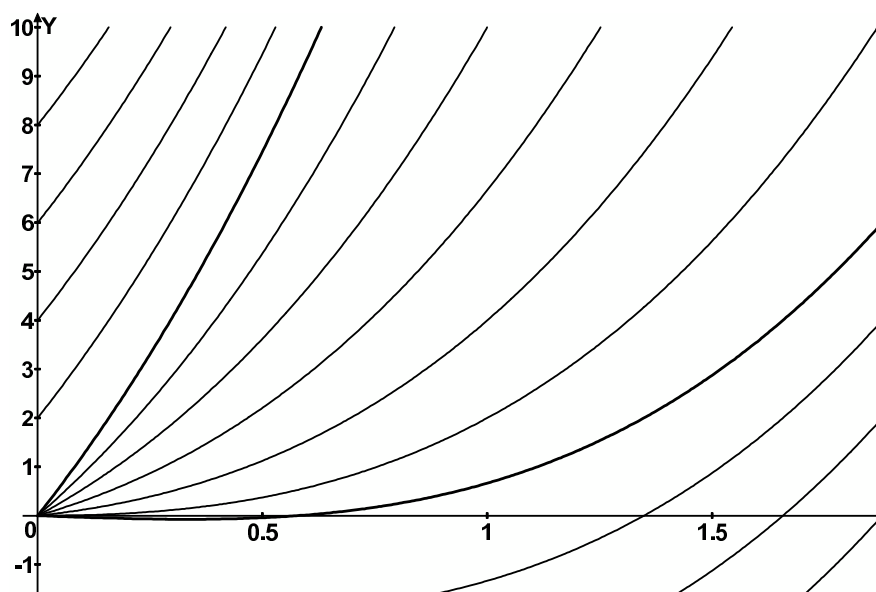


Рис. 5. Интегральная воронка:  $a = 1$ ,  $b=1$ ,  $c=d=0$ ,  $f=1$ ,  $g=2/3$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. *Системы квазилинейных уравнения и их приложения к газовой динамике*. М.: Наука. 1968. 592 с.
2. Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир. 1977. 624 с.
3. Ильин А.М. *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач*. М.: Наука. 1989. 336 с.
4. J. Burgers *Application of a model system to illustrate some points of the statistical theory of free turbulence* // *Nederl. Alcad. Wefensh. Proc. Acad. Sci. Amsterdam* 43. 1940. P. 3–12.
5. Олейник О.А. *Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений* // *УМН*. 12:3(75). 1957. С. 3–73.
6. Кружков С.Н. *Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными* // *Матем. сб.* 1970. Т. 81, № 2. С. 228–255.
7. Панов Е.Ю. *О классах корректности локально ограниченных обобщённых энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка* // *Фундамент. и прикл. матем.* 2006. Том 12, вып. 5. С. 175–188.
8. Берков Н.А., Мартыненко А.И., Миносцев В.Б., Пушкарь Е.А., Шишанин О.Е.; Под ред. засл. раб. ВШ РФ, проф. Миносцева В.Б. *Курс высшей математики. Учебное пособие для ВТУЗов. Часть 3*. М.: МГИУ. 2007. 494 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. *Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка*. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 416 с.
10. Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А. *Уравнения с частными производными первого порядка: Учебное пособие*. М.: МГУ. 1999. 94 с.
11. Субботин А.И. *Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации*. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 336 с.
12. P.L. Lions and P.E. Souganidis *Differential Games, Optimal Control and Directional Derivatives of Viscosity Solutions of Bellman's and Isaacs' Equations* // *SIAM Journal of Control and Optimization*. Vol.23, No 4. 1985. P. 566–583.

13. A.A. Melikyan *Generalized Characteristics of First Order PDEs*. Applications in Optimal Control and Differential Games Boston: Birkhauser. 1998. 320 p.
14. M.G. Crandall, P.L. Lions *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations* // Trans. Amer. Math. Soc., 253 (1983), P. 1–42. MR0690039
15. Колпакова Е.А. *Обобщенный метод характеристик в теории уравнений Гамильтона-Якоби и законов сохранения* // Тр. ИММ УрО РАН. Т. 16, № 5. 2010. С. 95–102.
16. Кузнецов Н.Н., Рождественский Б.Л. *Построение обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения* // УМН. 14:2(86). 1959. С. 211–215.
17. Корнеев В.А. *Построение обобщенного решения уравнения в дивергентной форме методом характеристик* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. №12. С. 1664–1673.
18. Курант Р. *Уравнения с частными производными*. М.: Мир, 1964. 830 с.
19. Меликян А.А. *О построении слабых разрывов в задачах оптимального управления и дифференциальных игр* // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. №1. С. 45–50.
20. Корнеев В.А., Меликян А.А. *Построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона-Якоби методом характеристик* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1995. №6. С. 168–177.
21. Корнеев В.А. *Численное построение обобщенного решения двумерного уравнения Гамильтона-Якоби* // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1998. №1. С. 92–98.

Всеслав Александрович Корнеев,  
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (ИПМех РАН),  
просп. Вернадского 101, корп. 1,  
119526, г. Москва, Россия  
E-mail: korneev@ipmnet.ru