Уфимский
Математический
Журнал

2013. Том 5. № 2.

СОДЕРЖАНИЕ

Учредители:

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,

ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный
технический университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы»

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций (Свид. ПИ № ФС77-50877 от 14.08.2012)

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей доступны в Интернете на сайтах Института математики с ВЦ УНЦ РАН matem.anrb.ru, Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала mathnet.ru

Статьи журнала реферируются в Zentralblatt MATH (ZBMATH).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки России журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий.

Технические редакторы: Р.Н. Гарифуллин, А.А. Махота.
Корректура: О.А. Соколова.

Подписано в печать 20.05.2013 г. Формат 60×84/8.
Усл. печ. л. ???. Уч.-изд. л. ???. Тираж 500 экз. Изд. № ???. Заказ № ???.
Цена договорная.

Отпечатано с предоставленных файлов в редакционно-издательском центре
Уфимского государственного авиационного технического университета.
450074, г. Уфа, ул.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:
ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112, к. 22. Тел.+7 347 273 33 42.
E-mail: umj@matem.anrb.ru
URL: http://matem.anrb.ru

ISSN 2074-1863. Ufimskii matematičeskij žurnal.
Индекс в каталоге «Роспечать» 57382.

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 3-11.

УДК 517.968

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЕРТКИ НА ОТРЕЗКЕ

С.Н. АСХАБОВ, А.Л. ДЖАБРАИЛОВ

Аннотация. Методом потенциальных монотонных операторов для различных классов интегральных уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений в вещественных пространствах Лебега. Показано, что решения могут быть найдены в пространстве $L_2(0,1)$ методом последовательных приближений пикаровского типа и доказаны оценки скорости их сходимости. Полученные результаты охватывают, в частности, линейные интегральные уравнения типа свертки. В случае степенной нелинейности показано, что решения могут быть найдены градиентным методом в пространствах $L_p(0,1)$ и весовых пространствах $L_p(\varrho)$.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения, оператор типа свертки, потенциальный оператор, монотонный оператор.

Mathematics Subject Classification: 45G10, 47H05.

В работе [1] без ограничений на абсолютную величину параметра λ были доказаны теоремы о существовании, единственности и оценках решений в вещественных пространствах $L_p(0,1)$, $1<p<\infty$, для нелинейных интегральных уравнений типа свертки вида

$$\lambda \cdot F(x,u(x)) + \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt = f(x)\,, \tag{1}$$

$$u(x) + \lambda \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, F[t,u(t)]\, dt = f(x)\,, \tag{2}$$

$$u(x) + \lambda \cdot F\left[x, \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt\right] = f(x)\,. \tag{3}$$

В данной работе доказано, что в случае пространства $L_2(0,1)$ эти решения могут быть найдены методом последовательных приближений пикаровского типа и при этом не требуется, чтобы параметр λ был «малым» по модулю. В отличие от [2], где рассматриваются подобные уравнения с ядрами типа потенциала на всей действительной оси, здесь, используя метод *потенциальных* монотонных операторов, построены новые последовательные приближения и существенно улучшены оценки скорости их сходимости. Более того, градиентным методом (методом наискорейшего спуска) удалось приближенно решить уравнения со степенными нелинейностями, не охватываемые результатами [2], как в $L_p(0,1)$, так и в весовых пространствах $L_p(\varrho)$.

S.N. Askhabov, A.L. Dzhabrailov, Approximate solutions of nonlinear convolution type equations on segment.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №13-01-00422-а.

Поступила 10 мая 2012 г.

Для упрощения записей введем следующие обозначения:

$$L_p(0,1) = L_p \ , \quad \| \cdot \|_{L_p(0,1)} = \| \cdot \|_p \ , \quad p' = \frac{p}{p-1} \ ,$$

$$\langle u, v \rangle = \int\limits_0^1 u(x)\, v(x)\, dx \ , \qquad (P_{01}^{\varphi} u)\,(x) = \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt \ .$$

Определение 1. *Скажем, что функция* $\varphi \in \Omega(0,1]$, *если она непрерывна, не возрастает, выпукла вниз в промежутке* $(0,1]$ *и такова, что* $\int\limits_0^1 \varphi(x)\, dx \geq 0$.

Далее нам понадобится следующая лемма, играющая существенную роль при исследовании уравнений (1)–(3) и уравнений со степенной нелинейностью.

Лемма 1. *Пусть* $1 < p \leqslant 2$ *и* $\varphi \in L_{p'/2} \bigcap \Omega(0,1]$. *Тогда оператор свертки* P_{01}^{φ} *действует непрерывно из* L_p *в* $L_{p'}$, *потенциален и положителен, причем* $\forall u(x) \in L_p$ *выполняются неравенства*

$$\|P_{01}^{\varphi} u\|_p \leqslant 2^{2/p'} \|\varphi\|_{p'/2} \|u\|_p \,, \tag{4}$$

$$\langle P_{01}^{\varphi} u, u \rangle = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt \right) u(x)\, dx \geq 0 \,. \tag{5}$$

Доказательство. Неравенства (4) и (5) доказаны в [1]. Значит, оператор P_{01}^{φ} действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$ и положителен. Так как $\varphi(|x-t|) = \varphi(|t-x|)$, то оператор P_{01}^{φ} является симметрическим. Следовательно (см., например, [3] или [4], Пример 1.2), оператор P_{01}^{φ} является потенциальным, и его потенциал вычисляется по формуле: $p(u) = \frac{1}{2}\langle P_{01}^{\varphi} u, u \rangle$. $\square$

Следует отметить, что при $p = 2$ и дополнительных ограничениях (дифференцируемость и неотрицательность) на функцию $\varphi(x)$ положительность оператора P_{01}^{φ} была ранее доказана А.М. Нахушевым [5].

Приступим теперь к исследованию нелинейных уравнений (1)–(3), содержащих оператор типа свертки P_{01}^{φ}. Обозначим через $\mathbf{N}$ множество всех натуральных чисел. Всюду далее предполагается, что функция $F(x,t)$, порождающая оператор Немыцкого $Fu = F[x, u(x)]$, определена при $x \in [0,1]$, $t \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном t и непрерывна по t почти для всех x.

Далее нам понадобится следующая теорема (см. [4], с. 16, где приведено ее доказательство), являющаяся следствием более общих результатов [6].

Теорема 1 [6]. *Пусть* H *– вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением* $(\cdot,\cdot)$ *и нормой* $\|\cdot\|_H$, *оператор* A *действует из* H *в* H *и является потенциальным. Если существуют постоянные* $m > 0$ *и* $M > 0$ $(M > m)$ *такие, что для любых* $u, v \in H$ *выполняются неравенства:*

$$\|Au - Av\|_H \leqslant M \cdot \|u - v\|_H \ , \qquad (Au - Av, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_H^2 \ ,$$

то уравнение $Au = f$ *имеет единственное решение* $u^* \in H$ *при любом* $f \in H$. *Это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле* $(n \in \mathbf{N})$:

$$u_n = u_{n-1} - \frac{2}{M+m}(Au_{n-1} - f) \ , \tag{6}$$

с оценкой погрешности:

$$\|u_n - u^*\|_H \leqslant \frac{2}{M+m} \cdot \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \|Au_0 - f\|_H \ , \tag{7}$$

где $\alpha = (M-m)/(M+m)$, $u_0 \in H$ *– начальное приближение.*

Заметим, что оценка (7) обеспечивает более высокую скорость сходимости последовательных приближений по сравнению с оценкой (16) из [2], полученной без предположения о потенциальности оператора A.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \Omega(0,1]$ и нелинейность $F(x,t)$ почти при каждом фиксированном $x \in [0,1]$ и при любых $t_1, t_2 \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет условиям:*

1) $|F(x,t_1) - F(x,t_2)| \leqslant M \cdot |t_1 - t_2|$, *где* $M > 0$;

2) $\Big(F(x,t_1) - F(x,t_2)\Big) \cdot (t_1 - t_2) \geq m \cdot |t_1 - t_2|^2$, *где* $m > 0$.

Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_2$ уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_2$. Это решение можно найти методом итераций по схеме:

$$u_n = u_{n-1} - \mu_1 \cdot (\lambda \cdot F u_{n-1} + P_{01}^{\varphi} u_{n-1} - f) \ , \tag{8}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \mu_1 \cdot \frac{\alpha_1^n}{1-\alpha_1} \cdot \|\lambda \cdot F u_0 + P_{01}^{\varphi} u_0 - f\|_2 \ , \tag{9}$$

где $\mu_1 = 2/(M + m + 2\,\|\varphi\|_1)$, $\alpha_1 = (M - m + 2\,\|\varphi\|_1)/(M + m + 2\,\|\varphi\|_1)$, $u_0(x) \in L_2$ — начальное приближение.

Доказательство. Из условия 1) вытекает, что оператор Немыцкого F действует непрерывно из L_2 в L_2 и удовлетворяет условию Липшица:

$$\|Fu - Fv\|_2 \leqslant M \cdot \|u - v\|_2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \ , \tag{10}$$

а из условия 2) вытекает, что он является сильно монотонным:

$$(Fu - Fv, u - v) \geq m \cdot \|u - v\|_2^2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \ . \tag{11}$$

Кроме того, при выполнении условия 1), оператор Немыцкого F является потенциальным, и его потенциал g вычисляется по формуле (см. [3]):

$$g(u) = g_0 + \int_0^1 \left[\ \int_0^{u(x)} F(x,t)\, dt \right] dx \ ,$$

где $g_0 = \text{const}$.

Пусть $u, v \in L_2$ – любые функции. Запишем данное уравнение (1) в операторном виде: $Au = f$, где $A = \lambda \cdot F + P_{01}^{\varphi}$. Заметим, что оператор A действует, в силу неравенств (4) и (10), непрерывно из L_2 в L_2 и является потенциальным (как сумма двух потенциальных операторов $\lambda \cdot F$ и P_{01}^{φ}). Далее, используя сначала неравенство Минковского, а затем неравенства (4) и (10), с одной стороны, имеем $\|Au - Av\|_2 \leqslant (\lambda \cdot M + 2\,\|\varphi\|_1) \cdot \|u - v\|_2$, а с другой стороны, используя неравенства (5) и (11), получаем $(Au - Av, u - v) \geq \lambda \cdot m \cdot \|u - v\|_2^2$. Следовательно, по теореме 1, уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме (8), получающейся из формулы (6), с оценкой погрешности (9), вытекающей из неравенства (7). □

Более трудными для исследования методом потенциальных монотонных операторов являются нелинейные уравнения (2) и (3). Для них последовательные приближения удается построить лишь в терминах обратного оператора F^{-1}.

Теорема 3. *Пусть $\varphi \in \Omega(0,1]$ и нелинейность $F(x,t)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 2. Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_2$ нелинейное уравнение (2) имеет единственное решение $u^* \in L_2$. Это решение можно найти методом итераций по схеме:*

$$u_n = F^{-1} v_n, \quad v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (F^{-1} v_{n-1} + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} v_{n-1} - f) \ , \tag{12}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \frac{\mu_2}{m} \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \|u_0 + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} F u_0 - f\|_2 \ , \tag{13}$$

где $n \in \mathbf{N}$, $\mu_2 = 2/(m^{-1} + m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot \|\varphi\|_1)$,

$$\alpha_2 = (m^{-1} - m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot \|\varphi\|_1)/(m^{-1} + m\,M^{-2} + 2\,\lambda \cdot \|\varphi\|_1),$$

F^{-1} *оператор обратный к* F, $v_0 = F u_0$, $u_0 \in L_2$ *– начальное приближение.*

Доказательство. Так как оператор F удовлетворяет неравенствам (10) и (11), то по теореме 1.3 из [4], существует обратный оператор F^{-1} такой, что

$$\|F^{-1}u - F^{-1}v\|_2 \leqslant \frac{1}{m}\|u - v\|_2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \, , \tag{14}$$

$$(F^{-1}u - F^{-1}v, u - v) \geq \frac{m}{M^2}\|u - v\|_2^2 \ , \qquad \forall u, v \in L_2 \, . \tag{15}$$

Заметим ([6], с. 137), что оператор F^{-1} является потенциальным, как оператор, обратный монотонному потенциальному оператору F. Запишем уравнение (2) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} F u = f \ . \tag{16}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения

$$Bv \equiv F^{-1}v + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} v = f \ , \tag{17}$$

то $u^* = F^{-1}v^*$ является решением уравнения (16).

Докажем, что уравнение (17) имеет единственное решение $v^* \in L_2$. Используя неравенства (4), (5), (14) и (15), имеем

$$\|Bu - Bv\|_2 \leqslant (m^{-1} + 2\,\lambda \cdot \|\varphi\|_1)\,\|u - v\|_2 \ , \quad (Bu - Bv, u - v) \geq \frac{m}{M^2}\|u - v\|_2^2 \ .$$

Кроме того, оператор B является потенциальным, как сумма двух потенциальных операторов F^{-1} и $\lambda \cdot P_{01}^{\varphi}$. Значит, по теореме 1, уравнение $Bv = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2 \cdot (Bv_{n-1} - f) \ , \tag{18}$$

с оценкой погрешности

$$\|v_n - v^*\|_2 \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\|Bv_0 - f\|_2 \ , \tag{19}$$

где μ_2 и α_2 определены выше (в формулировке теоремы 3). Но тогда уравнение (16) имеет единственное решение $u^* = F^{-1}v^* \in L_2$, и это решение можно найти по схеме (12), получающейся из (18), с оценкой погрешности (13), получающейся из (19), с учетом равенства $Bv = F^{-1}v + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi} v$ и оценки: $\|u_n - u^*\|_2 = \|F^{-1}v_n - F^{-1}v^*\|_2 \leqslant \frac{1}{m}\|v_n - v^*\|_2$. □

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(x) \in \Omega(0,1]$ *и нелинейность* $F(x,t)$ *удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 2. Тогда при любых* $\lambda > 0$ *и* $f(x) \in L_2$ *нелинейное уравнение (3) имеет единственное решение* $u^*(x) \in L_2$. *Это решение можно найти методом итераций по схеме:*

$$u_n = u_{n-1} + \lambda \cdot \mu_2 \cdot \left(F^{-1}\left(\lambda^{-1}(f - u_{n-1})\right) - P_{01}^{\varphi} u_{n-1}\right) \ , \tag{20}$$

с оценкой погрешности

$$\|u_n - u^*\|_2 \leqslant \lambda \cdot \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2} \cdot \|F^{-1}\left(\lambda^{-1}(f - u_0)\right) - P_{01}^{\varphi} u_0\|_2 \ , \tag{21}$$

где $n \in \mathbf{N}$, μ_2 *и* α_2 *определены в формулировке теоремы 3,* F^{-1} *оператор, обратный к* F, $u_0 \in L_2$ *– начальное приближение.*

Доказательство. Запишем уравнение (3) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot FP_{01}^{\varphi}u = f \ . \tag{22}$$

Положим $f - u = \lambda \cdot v$. Тогда уравнение (22) примет вид: $FP_{01}^{\varphi}(f - \lambda \cdot v) = v$. Применив к обеим частям последнего уравнения оператор F^{-1}, существование которого доказано в теореме 3, приходим к уравнению:

$$Bv \equiv F^{-1}v + \lambda \cdot P_{01}^{\varphi}v = P_{01}^{\varphi}f \ . \tag{23}$$

Непосредственно проверяется, что если v^* является решением уравнения (23), то $u^* = f - \lambda \cdot v^*$ является решением уравнения (22).

Так как уравнение (23) имеет такой же вид, что и уравнение (17), то, повторяя рассуждения, приведенные в теореме 3, убеждаемся, что уравнение (23) имеет единственное решение $v^* \in L_2$, и его можно найти по схеме вида (18):

$$v_n = v_{n-1} - \mu_2(Bv_{n-1} - P_{01}^{\varphi}f) \ , \tag{24}$$

с оценкой погрешности вида (19):

$$\|v_n - v^*\| \leqslant \mu_2 \cdot \frac{\alpha_2^n}{1-\alpha_2}\|Bv_0 - P_{01}^{\varphi}f\|_2 \ . \tag{25}$$

Из (24) и (25), учитывая, что $v = \lambda^{-1}(f - u)$, непосредственно получаем, соответственно, итерационную схему (20) и оценку погрешности (21). □

Теоремы 2–4 охватывают, в частности, уравнения с ядрами типа потенциала $|x-t|^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, и логарифмического потенциала $-\ln|x-t|$, а также соответствующие линейные уравнения и некоторые уравнения с монотонными нелинейностями (например, вида $(u(x) + 2\,u^3(x))/(1 + u^2(x))$). Однако, эти теоремы не охватывают степенные нелинейности, которые выводят за рамки пространства L_2.

Для приближенного решения уравнений со степенными нелинейностями в более широких пространствах нам понадобится следующая известная теорема. Прежде чем ее сформулировать, приведем необходимые обозначения и определение.

Пусть X – вещественное банахово пространство и X^* сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, а через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ — нормы в X и X^* соответственно.

Определение 2 *Пусть $u, v \in X$ — произвольные элементы. Оператор $A : X \to X^*$ (т.е. действующий из X в X^*) называется:*

равномерно монотонным, *если $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \beta(\|u - v\|)$, где β возрастающая на $[0, \infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$;*

ограниченно липшиц-непрерывным, *если $\|Au - Av\|_* \leqslant \mu(r) \cdot \|u - v\|$, где μ возрастающая на $[0, \infty)$ функция, а $r = \max(\|u\|, \|v\|)$.*

Теорема 5 [6]. *Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство и $A : X \to X^*$ – хеминепрерывный равномерно монотонный коэрцитивный оператор. Тогда уравнение $Au = f$ имеет единственное решение $u^* \in X$ при любом $f \in X^*$. Кроме того, если X и X^* строго выпуклые пространства, а оператор A является потенциальным ограниченно липшиц-непрерывным, то последовательность $u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot J^*(Au_n - f)$, где $\delta_n = \min\{1, 2/[\varepsilon + \mu(||u_n|| + ||Au_n - f||_*)]\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $J^* : X^* \to X$ — дуализующее отображение для X^*, $\varepsilon > 0$ — произвольное число, сходится к u^* по норме пространства X.*

Существование и единственность решения u^* в теореме 5 вытекает из теоремы Браудера-Минти (основной теоремы теории монотонных операторов [6]), а сильная сходимость последовательности $\{u_n\}$ к u^* по указанной схеме — из теоремы 4.2 ([6], с. 122) и замечания

4.13 ([6], с. 125), поскольку всякий равномерно монотонный оператор является строго монотонным оператором и обладает (S)-свойством ([6], с. 80-81). Указанный в теореме 5 способ нахождения решения u^* известен [6] как метод *наискорейшего* спуска (или *градиентный* метод).

Лемма 2. *Пусть* $2 < p < \infty$, $\varphi \in \Omega(0,1]$ *и* $b(x) \in L_{2p/(p-2)}$. *Тогда оператор*

$$(B_{01}^{\varphi}u)(x) = b(x)\int_0^1 b(t)\,\varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt$$

действует непрерывно из L_p *в* $L_{p'}$, *положителен и потенциален, причем* $\forall u(x) \in L_p$ *выполняются неравенства*:

$$\|B_{01}^{\varphi}u\|_{p'} \leqslant 2\,\|b\|_{2p/(p-2)}^2 \cdot \|\varphi\|_1 \cdot \|u\|_p\,, \quad \langle B_{01}^{\varphi}u, u\rangle \geq 0\,. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_p$ – произвольная функция. В силу неравенства Гельдера $\|b\cdot u\|_2 \leqslant \|b\|_{2p/(p-2)}\|u\|_p$. Поэтому, используя оценку (4), имеем $\|P_{01}^{\varphi}(b\cdot u)\|_2 \leqslant 2\,\|\varphi\|_1\|b\cdot u\|_2 \leqslant 2\,\|b\|_{2p/(p-2)}\|\varphi\|_1\|u\|_p$. Так как $B_{01}^{\varphi}u = b\cdot P_{01}^{\varphi}(b\cdot u)$ и, в силу неравенства Гельдера, $\|B_{01}^{\varphi}u\|_{p'} \leqslant \|b\|_{2p/(p-2)}\|P_{01}^{\varphi}(b\cdot u)\|_2 \leqslant 2\,\|b\|_{2p/(p-2)}^2 \cdot \|\varphi\|_1 \cdot \|u\|_p$, то оператор B_{01}^{φ} действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$ и потенциален, как симметрический оператор, причем справедливо первое неравенство из (26). Наконец, используя неравенство (5), имеем $\langle B_{01}^{\varphi}u, u\rangle = \langle P_{01}^{\varphi}(b\cdot u), (b\cdot u)\rangle \geq 0$, что равносильно второму неравенству из (26), т.е. оператор B_{01}^{φ} положителен. □

Теорема 6. *Пусть* $p \geq 4$ *– четное число,* $\varphi \in \Omega(0,1]$ *и* $b(x) \in L_{2p/(p-2)}$. *Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x) + b(x)\int_0^1 b(t)\,\varphi(|x-t|)\,u(t)\,dt = f(x) \tag{27}$$

имеет единственное решение $u^* \in L_p$ *при любом* $f \in L_{p'}$. *Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n \cdot \|Au_n - f\|_{p'}^{2-p'} \cdot |Au_n - f|^{p'-2} \cdot (Au_n - f)\,, \tag{28}$$

где $n = 0,1,2,3,\dots$, $u_0(x) \in L_p$ *- начальное приближение,* $Au = u^{p-1} + B_{01}^{\varphi}u$,

$$\delta_n = \min\left(1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1)\cdot\Big(\|u_n\|_p + \|Au_n - f\|_{p'}\Big)^p + 2\,\|b\|_{2p/(p-2)}^2\|\varphi\|_1}\right),$$

$\varepsilon > 0$ *— любое число.*

Доказательство. Запишем уравнение (27) в операторном виде: $Au = f$, где $Au = u^{p-1} + B_{01}^{\varphi}u$. Очевидно, что оператор A действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$ и коэрцитивен, так как $\langle Au, u\rangle = \langle u^{p-1}, u\rangle + \langle B_{01}^{\varphi}u, u\rangle \geq \|u\|_p^p$ и $p \geq 4$.

Покажем теперь, что A – равномерно монотонный оператор. Используя лемму 2 и неравенство $(t^{p-1} - s^{p-1})\cdot(t-s) \geq 2^{2-p}|t-s|^p$, справедливое для всех $t, s \in (-\infty, \infty)$, имеем

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \int_0^1 [u^{p-1}a(x) - v^{p-1}(x)]\cdot[u(x) - v(x)]\,dx \geq$$

$$\geq 2^{2-p}\cdot\|u-v\|_p^p = \beta(\|u-v\|_p)\,, \quad \forall u, v \in L_p\,,$$

где $\beta(s) = 2^{2-p}\cdot s^p$ – строго возрастающая на $[0,\infty)$ функция такая, что $\beta(0) = 0$, т.е. A – равномерно монотонный оператор.

Значит, по теореме Браудера-Минти, уравнение (27) имеет единственное решение $u^* \in L_p$.

Осталось доказать, что последовательность (28) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства L_p. Воспользуемся теоремой 5. Известно [3], что пространства L_p, $1 < p < \infty$, являются строго выпуклыми, и дуализующее отображение J^* для пространства $L_{p'}$ имеет вид:

$$(J^*w)(x) = \|w\|_{p'}^{2-p'} \cdot |w(x)|^{p'-2} \cdot w(x)\,. \tag{29}$$

Покажем, что оператор A является ограниченно липшиц-непрерывным. Для любых $u, v \in L_p$, имеем

$$\|Au - Av\|_{p'} \leqslant \|u^{p-1} - v^{p-1}\|_{p'} + \|B_{01}^{\varphi}(u-v)\|_{p'} = I_1 + I_2\ .$$

Так как $|t^{p-1} - s^{p-1}| \leqslant \frac{p-1}{2} \cdot |t-s| \cdot (t^{p-2} + s^{p-2})\,, \quad \forall t, s \in (-\infty, \infty)\,$, то

$$I_1 \leqslant \frac{p-1}{2} \left(\int\limits_0^1 |u(x) - v(x)|^{p'} |u^{p-2}(x) + v^{p-2}(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leqslant$$

(применяем сначала неравенство Гельдера с показателями p/p' и $p/(p-p')$,
а затем ко второму сомножителю применяем неравенство Минковского)

$$\leqslant \frac{p-1}{2} \|u - v\|_p \left(\|u\|_p^{p-2} + \|v\|_p^{p-2} \right) \leqslant (p-1) \cdot r^{p-2} \cdot \|u - v\|_p\ ,$$

где $r = \max\left(\|u\|_p, \|v\|_p\right)$. Таким образом, оценивая I_2 с помощью первого неравенства из (26), имеем $\|Au - Av\|_{p'} \leqslant \mu(r) \cdot \|u - v\|_p\,$, где $\mu(r) = (p-1) \cdot r^{p-2} + 2\,\|b\|_{2p/(p-2)}^2 \|\varphi\|_1$ - возрастающая на $[0, \infty)$ функция. Значит, A — ограниченно липшиц-непрерывный оператор.

Далее, поскольку $Fu = u^{p-1}$ – потенциальный оператор, то, принимая во внимание лемму 2, получаем, что оператор A также является потенциальным.

Следовательно, на основании теоремы 5, последовательность (28) сходится к $u^*(x)$ по норме пространства L_p. $\square$

Введем в рассмотрение весовые пространства $L_p(\varrho)$. Пусть $\varrho(x)$ есть неотрицательная почти всюду конечная и почти всюду отличная от нуля измеримая по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функция. Обозначим через $L_p(\varrho)$, $1 < p < \infty$, множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[0, 1]$ функций $u(x)$ с конечной нормой

$$\|u\|_{p,1} = \left(\int\limits_0^1 \varrho(x)\, |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Известно [7], что $L_p(\varrho)$ есть рефлексивное банахово пространство, и сопряженным с ним является пространство $L_{p'}(\varrho^{1-p'})$ с нормой $\|\cdot\|_{p',1-p'}$, $p' = p/(p-1)$. В случае $\varrho(x) = 1$ будем писать, как обычно, L_p и $\|\cdot\|_p$.

Рассмотрим теперь в *весовом* пространстве $L_p(\varrho)$ уравнение вида:

$$\varrho(x) \cdot u^{p-1}(x) + \int\limits_0^1 \varphi(|x-t|)\, u(t)\, dt = f(x)\,. \tag{30}$$

На вес $\varrho(x)$ накладывается следующее ограничение:

$$c(\varrho) = \left(\int\limits_0^1 [\rho(x)]^{2/(2-p)} dx \right)^{(p-2)/(2p)} < \infty\,. \tag{31}$$

Лемма 3. *Пусть $2 < p < \infty$, $\varphi \in \Omega(0,1]$ и выполнено условие (31). Тогда оператор свертки P_{01}^{φ} действует из $L_p(\rho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ и является непрерывным потенциальным положительным оператором, причем*

$$\|P_{01}^{\varphi}u\|_{p',\,1-p'} \leqslant 2\,c^2(\varrho)\cdot\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_{p,\,1}\,, \qquad \forall u \in L_p(\varrho)\,. \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in L_p(\varrho)$ – произвольная функция. Так как, в силу неравенства Гельдера,

$$\|u\|_2 = \left(\int\limits_0^1 [\varrho(x)]^{-2/p}[\varrho(x)]^{2/p}|u(x)|^2dx\right)^{1/2} \leqslant c(\varrho)\cdot\|u\|_{p,\,1}\,, \tag{33}$$

то пространство $L_p(\varrho)$ непрерывно вложено в L_2.

Аналогично, для любого $\psi(x) \in L_2$, имеем

$$\|\psi\|_{p',\,1-p'} = \left(\int\limits_0^1 [\varrho(x)]^{1-p'}|\psi(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'} \leqslant c(\varrho)\cdot\|\psi\|_2\,. \tag{34}$$

Из неравенств (33) и (34) вытекает, что имеют место следующие непрерывные вложения:

$$L_p(\varrho) \subset L_2 \subset L_{p'}(\varrho^{1-p'})\,. \tag{35}$$

Так как, в силу неравенства (4), $\|P_{01}^{\varphi}u\|_2 \leqslant 2\,\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_2$, то, используя оценки (33) и (34), получаем

$$\|P_{01}^{\varphi}u\|_{p',\,1-p'} \leqslant c(\varrho)\cdot\|P_{01}^{\varphi}u\|_2 \leqslant 2\,c(\varrho)\cdot\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_2 \leqslant 2\,c^2(\varrho)\cdot\|\varphi\|_1\cdot\|u\|_{p,\,1}\,.$$

Значит, оператор P_{01}^{φ} действует непрерывно из $L_p(\rho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$ и справедливо неравенство (32). Потенциальность и положительность оператора P_{01}^{φ} вытекают из леммы 1, поскольку имеют место вложения (35). □

Теорема 7. *Пусть $p \geq 4$ – четное число, $\varphi \in \Omega(0,1]$ и выполнено условие (31). Тогда уравнение (30) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(\varrho)$ при любом $f(x) \in L_{p'}(\varrho^{1-p'})$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений по формуле:*

$$u_{n+1} = u_n - \delta_n\cdot\|Bu_n - f\|_{p',\,1-p'}^{2-p'}\cdot\varrho^{1-p'}\cdot|Bu_n - f|^{p'-2}\cdot(Bu_n - f)\,, \tag{36}$$

где $u_0(x) \in L_p(\varrho)$ — начальное приближение, $Bu = \varrho\cdot u^{p-1} + P_{01}^{\varphi}u$,

$$\delta_n = \min\left(1, \frac{2}{\varepsilon + (p-1)\cdot\Big(\|u_n\|_{p,\,1} + \|Bu_n - f\|_{p',\,1-p'}\Big)^{p-2} + 2\,c^2(\varrho)\cdot\|\varphi\|_1}\right),$$

$\varepsilon > 0$ — любое число.

Доказательство. Поскольку доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 6, то ограничимся приведением лишь основных его моментов. Запишем уравнение (30) в операторном виде: $Bu = f$, где $Bu = \rho\cdot u^{p-1} + P_{01}^{\varphi}u$. Так как $\varrho\cdot u^{p-1} \in L_{p'}(\varrho^{1-p'})$, $\forall u \in L_p(\varrho)$, то, используя лемму 3, получаем, что оператор B действует из $L_p(\varrho)$ в $L_{p'}(\rho^{1-p'})$. Непосредственно проверяется, что дуализующее отображение J^* для пространства $L_{p'}(\varrho^{1-p'})$ имеет вид:

$$(J^*w)(x) = \|w\|_{p',1-p'}^{2-p'}\cdot\varrho^{1-p'}(x)\cdot|w(x)|^{p'-2}\cdot w(x)\,.$$

Далее, $\forall u, v \in L_p(\varrho)$, имеем

$$\|Bu - Bv\|_{p',\,1-p'} \leqslant \|\varrho\cdot(u^{p-1} - v^{p-1}\|_{p',\,1-p'} + \|P_{01}^{\varphi}(u-v)\|_{p',\,1-p'} = I_1 + I_2\,.$$

Как и при доказательстве теоремы 6, получаем

$$I_1 \leqslant \frac{p-1}{2}\left(\int\limits_0^1 \varrho^{p'-1}(x)\Big|u(x)-v(x)\Big|^{p'}\varrho^{2-p'}(x)\Big|u^{p-2}(x)+v^{p-2}(x)\Big|^{p'}dx\right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{p-1}{2}\,\|u-v\|_{p,1}\left(\|u\|_{p,1}^{p-2}+\|v\|_{p,1}^{p-2}\right) \leqslant (p-1)\cdot r^{p-2}\cdot\|u-v\|_{p,1}\,,$$

где $r = \max\left(\|u\|_{p,1}, \|v\|_{p,1}\right)$. Таким образом, используя для оценки I_2 лемму 3, имеем $\|Bu-Bv\|_{p',1-p'} \leqslant \mu(r)\cdot\|u-v\|_{p,1}\,,$ где $\mu(r) = (p-1)\cdot r^{p-2} + 2\,c^2(\varrho)\,\|\varphi\|_1$ – возрастающая на $[0,\infty)$ функция. Значит, B — ограниченно липшиц-непрерывный оператор. Наконец, точно так же, как и при доказательстве теоремы 6, доказывается, что B — равномерно монотонный (с $\beta(s) = 2^{2-p}\cdot s^p$) потенциальный оператор. □

В заключение отметим, что аналогичные результаты можно получить для нелинейных сингулярных интегральных уравнений и нелинейных уравнений Винера-Хопфа со специальными ядрами, рассмотренных в [4], [8], [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асхабов С.Н. *Нелинейные интегральные уравнения типа свертки на отрезке* // Известия вузов. Сев-Кав. регион. Естеств. науки. 2007. № 1. С. 3–5.
2. Асхабов С.Н. *Приближенное решений нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала* // Уфимский математический журнал. Т. 3, № 4. 2011. С. 8–13.
3. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.* М.: Наука, 1972. 416 с.
4. Асхабов С.Н. *Нелинейные уравнения типа свертки.* М.: Физматлит, 2009. 304 с.
5. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
6. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1978. 336 с.
7. Хведелидзе Б.В. *Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения* // Труды Тбилис. мат. ин-та АН ГрузССР. Т. 23. 1956. С. 3–158.
8. Асхабов С.Н. *Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным уравнениям типа свертки и сингулярным интегральным уравнениям* // Известия вузов. Математика. N9. 1981. С. 64–66.
9. Асхабов С.Н. *Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега* // Современная математика и ее приложения. Т. 67. 2010. С. 33–48.

Султан Нажмудинович Асхабов,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364907, г. Грозный, Россия
E-mail: askhabov@yandex.ru

Ахмед Лечаевич Джабраилов,
Чеченский государственный университет,
ул. Шерипова, 32,
364907, г. Грозный, Россия
E-mail: askhabov@yandex.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 12-17.

УДК 517.95

О РЕШЕНИЯХ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

С. БАЙЗАЕВ, Д.А. ВОСИТОВА

Аннотация. В статье рассматриваются линейные эллиптические и гиперболические системы первого порядка с постоянными коэффициентами и двумя независимыми переменными. Для таких систем исследованы задачи о многообразии всех решений и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции.

Ключевые слова: эллиптические и гиперболические системы, умеренно растущие решения, степенного роста решения, размерность пространства решений.

Mathematics Subject Classification: 35C11.

1. Рассмотрим систему линейных уравнений с частными производными вида

$$A_1U_x + A_2U_y + A_3U = F(x, y), \tag{1}$$

где $U = (u_1, u_2, ..., u_n)^T-$ искомая вектор-функция, A_1, A_2, A_3- постоянные вещественные матрицы порядка n, $F = (f_1, f_2, ..., f_n)^T-$ заданная вектор-функция.

Как известно (см., например, [1]), система (1) называется *эллиптической*, если его главный символ $P_0(\xi, \eta) = i\xi A_1 + i\eta A_2$ является невырожденным при $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$, т.е.

$$Q(\xi, \eta) \equiv det(\xi A_1 + \eta A_2) \neq 0 \ \forall\, (\xi, \eta) \neq \ (0, 0). \tag{2}$$

Система (1) называется *гиперболической*, если для каждого $\eta \in R$ все решения уравнения $Q(\xi, \eta) = 0$ относительно ξ будут действительными.

В статье для систем вида (1) в случае эллиптичности и гиперболичности исследуются задачи о многообразии всех решений и решений, растущих на бесконечности не быстрее степенной функции. Вопросам о решениях, определенных во всей плоскости эллиптических и гиперболических уравнений и систем посвящены работы В.С. Виноградова, Э. Мухамадиева, В.П. Паламодова, Н.Е. Товмасяна и др. (см., например, [2 – 4]). Для эллиптических систем вида (1) при $n = 2$ в работе [5] изучены задачи об умеренно растущих решениях и решениях степенного роста.

Будем предполагать, что система (1) эллиптическая или гиперболическая. В этом случае легко доказать, что $detA_1 \neq 0$, а в случае эллиптичности также и $detA_2 \neq 0$. Поэтому систему (1) можно переписать в виде

$$U_x + A_1^{-1}A_2U_y + A_1^{-1}A_3U = A_1^{-1}F(x, y).$$

В связи с этим в дальнейшем систему (1) будем записывать в следующем виде

$$U_x + AU_y + BU = f(x, y), \tag{3}$$

S. Baizaev, D.A. Vositova, On solutions of a system of partial differential equations with two independent variables.

Поступила 27 февраля 2012 г.

где $A = A_1^{-1}A_2,\ B = A_1^{-1}A_3,\ f = A_1^{-1}F$. Тогда условие эллиптичности (2) перепишется в виде неравенства

$$det(\xi E + \eta A) \neq 0\ \forall(\xi, \eta) \neq (0, 0),$$

которое равносильно тому, что матрица A не имеет вещественных собственных значений. Условие гиперболичности системы (3) будет эквивалентно тому, что матрица A имеет только вещественные собственные значения.

Предположим, что матрицы A и B перестановочны. В системе (3) произведем замену искомой функции $U = e^{-Bx}CV$, где C — невырожденная матрица. Тогда имеем

$$-e^{-Bx}BCV + e^{-Bx}CV_x + Ae^{-Bx}CV_y + Be^{-Bx}CV = f(x, y)$$

или

$$V_x + C^{-1}e^{Bx}Ae^{-Bx}CV_y = C^{-1}e^{Bx}f(x, y). \tag{4}$$

В силу перестановочности матриц A и B имеет место равенство $e^{Bx}Ae^{-Bx} = A$. Поэтому система (4) примет вид

$$V_x + C^{-1}ACV_y = g(x, y), \tag{5}$$

где $g(x, y) = C^{-1}e^{Bx}f(x, y)$.

В качестве C возьмем матрицу, приводящую матрицу A к канонической форме Жордана. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ $(m \leqslant n)$ — собственные значения матрицы A. Тогда система (5) распадается на системы меньшей размерности

$$\frac{\partial V_k}{\partial x} + \Lambda_k \frac{\partial V_k}{\partial y} = g_k(x, y),\ \ k = 1, ..., m, \tag{6}$$

где

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

— жордановая клетка порядка s_k, $s_1 + s_2 + ... + s_m = n$, $[V_1, V_2, ..., V_m]^T = V$, $[g_1, g_2, ..., g_m]^T = g$.

Для удобства координаты вектора V_k обозначим через $w_1, w_2, ..., w_\nu$ $(\nu = s_k)$, а координаты вектора g_k– через $h_1, h_2, ..., h_\nu$. Тогда систему, получающуюся из (6) при фиксированном значении k, можно записать в виде

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial y} = h_1(x, y), \tag{7}$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial y} = h_2(x, y), \tag{8}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial y} + \frac{\partial w_\nu}{\partial y} = h_{\nu-1}(x, y), \tag{9}$$

$$\frac{\partial w_\nu}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_\nu}{\partial y} = h_\nu(x, y). \tag{10}$$

Рассмотрим уравнение вида

$$u_x + \lambda u_y = h(x, y), \tag{11}$$

где $\lambda \in C$, условия на функцию $h(x, y)$ будут приведены позже (см. лемму 2).

Лемма 1. *Общее решение однородного уравнения*

$$u_x + \lambda u_y = 0 \tag{12}$$

имеет вид

$$u(x, y) = \varphi(\lambda x - y), \tag{13}$$

где $\varphi(z)$ является произвольной функцией класса $C^1(R)$, если λ вещественное число и является произвольной аналитической функцией комплексного переменного z, если λ — комплексное число.

Доказательство. Утверждение леммы для случая вещественного λ очевидно. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$ является комплексным и $\varphi(z)$ — произвольная аналитическая по z функция. Тогда

$$u_x = \varphi_z(\lambda x - y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\lambda x - y) = \lambda \varphi_z(\lambda x - y),$$
$$u_y = \varphi_z(\lambda x - y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(\lambda x - y) = -\varphi_z(\lambda x - y).$$

Отсюда следует, что функция $u(x,y) = \varphi(\lambda x - y)$ удовлетворяет уравнению (12).

Теперь покажем, что каждое решение $u(x,y)$ уравнения (12) можно представить в виде (13) с аналитической функцией $\varphi(z)$. Пусть $\zeta = \lambda x - y$. Тогда

$$x = \frac{1}{2i\beta}(\zeta - \overline{\zeta}),\ y = \frac{1}{2i\beta}(\overline{\lambda}\zeta - \lambda\overline{\zeta})$$

и, подставляя эти выражения в функцию $u(x,y)$, получаем функцию переменной $\zeta : u(\zeta) = u[x(\zeta),\ y(\zeta)]$. Вычислим производную $u_{\overline{\zeta}}$:

$$u_{\overline{\zeta}} = u_x \cdot x_{\overline{\zeta}} + u_y \cdot y_{\overline{\zeta}} = u_x(\frac{i}{2\beta}) + u_y(\frac{i\lambda}{2\beta}) = \frac{i\lambda}{2\beta}(u_x + \lambda u_y) = 0,$$

так как $u(x,y)$ — решение уравнения (12). Отсюда следует, что функция $u(\zeta)$ является аналитической по ζ. Поэтому найдется аналитическая функция $\varphi(z)$ такая, что $u = \varphi(\zeta) \equiv \varphi(\lambda x - y)$. Это и требовалось показать.

Лемма 2. *Пусть λ вещественное число, и функция $h(x,y)$ непрерывна по x и имеет непрерывную производную по y. Тогда функция*

$$w(x,y) = \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h[t,\ \lambda(t - x) + y]dt \tag{14}$$

будет частным решением неоднородного уравнения (11).

Доказательство. Из формулы (14) с учетом правила дифференцирования интеграла с переменными пределами имеем

$$w_x = h(x,y) - \lambda h[\lambda x - y,\ \lambda(\lambda x - y - x) + y] - \lambda \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h_y[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi,$$

$$w_y = h[\lambda x - y,\ \lambda(\lambda x - y - x) + y] + \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h_y[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi.$$

Отсюда получим

$$w_x + \lambda w_y = h(x,y),$$

т.е. функция $w(x,y)$ является решением неоднородного уравнения (11).

В случае вещественного λ формула

$$u(x,y) = \varphi(\lambda x - y) + \int\limits_{\lambda x - y}^{x} h[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi$$

дает общее решение неоднородного уравнения (11), где φ — произвольная функция класса C^1.

2. Предположим, что система (3) является гиперболической. Систему (7)–(10) будем решать снизу вверх. Из уравнения (10) в силу леммы 2 находим

$$w_\nu(x,y) = \varphi_\nu(\lambda x - y) + Lh_\nu(x,y),$$

где $Lh_\nu(x,y) = \int\limits_{\lambda x-y}^{x} h_\nu[\xi, \lambda(\xi-x)+y]d\xi$, φ_ν — произвольная функция класса C^1. Подставляя w_ν в уравнение (9), найдем $w_{\nu-1}$:

$$w_{\nu-1}(x,y) = \varphi_{\nu-1}(\lambda x - y) + L[\varphi'_\nu(\lambda x - y) - \frac{\partial}{\partial y}(Lh_\nu)] + Lh_{\nu-1},$$

где $\varphi_{\nu-1}$ — произвольная функция класса C^1.

Далее имеем

$$L\varphi'_\nu(\lambda x - y) = \int\limits_{\lambda x-y}^{x} \varphi'_\nu[\lambda\xi - \lambda(\xi - x) - y]d\xi = \varphi'_\nu(\lambda x - y)(x - \lambda x + y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lh_\nu) = h_\nu[\lambda x - y,\ \lambda(\lambda x - y - x) + y] + \int\limits_{\lambda x-y}^{x} \frac{\partial}{\partial y} h_\nu[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi.$$

Поэтому

$$w_{\nu-1}(x,y) = \varphi_{\nu-1}(\lambda x - y) + \varphi'_\nu(\lambda x - y)(x - \lambda x + y) + h_\nu[\lambda x - y,\ (\lambda - 1)(\lambda x - y)] +$$
$$+ \int\limits_{\lambda x-y}^{x} \frac{\partial}{\partial y} h_\nu[\xi,\ \lambda(\xi - x) + y]d\xi + Lh_{\nu-1}.$$

Продолжая эту процедуру, находим $w_{\nu-2}, ..., w_1$. Нужно отметить, что произвольные функции φ_j, возникающие при интегрировании уравнений (7)–(10), должны иметь соответствующую гладкость, а именно, функция φ_j при $1 \leqslant j \leqslant \nu$ должна принадлежать классу C^j.

Теперь рассмотрим эллиптический случай. Найдем общее решение однородной системы, соответствующей (7)–(10). Из уравнения (10) в силу леммы 1 находим

$$w_\nu(x,y) = \varphi_\nu(\lambda_k x - y),$$

где $\varphi_\nu(z)$ — аналитическая по z функция. Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial w_{\nu-1}}{\partial y} = \varphi'_\nu(\lambda_k x - y). \tag{15}$$

Функция $w = x\varphi'_\nu(\lambda_k x - y)$ является частным решением уравнения (15). Поэтому общее решение этого уравнения имеет вид

$$w_{\nu-1} = x\varphi'_\nu(\lambda_k x - y) + \varphi_{\nu-1}(\lambda_k x - y),$$

где $\varphi_{\nu-1}(z)$ — аналитическая по z функция. Аналогично находим

$$w_{\nu-2} = x^2\varphi''_\nu(\lambda_k x - y) + x\varphi'_{\nu-1}(\lambda_k x - y) + \varphi_{\nu-2}(\lambda_k x - y),$$

где $\varphi_{\nu-2}(z)$ — аналитическая по z функция. Продолжая эту процедуру, находим $w_{\nu-3}, ..., w_1$.

Пусть матрица A имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и $z_1, z_2, ..., z_n$ соответствующие собственные векторы. Если матрицы A и B перестановочны, то как известно (см., например, [6]]), $z_1, z_2, ..., z_n$ будут собственными векторами и матрицы B. Через $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ обозначим собственные значения матрицы B, которым соответствуют собственные векторы $z_1, z_2, ..., z_n$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть матрица A имеет n различных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и $z_1, z_2, ..., z_n$ соответствующие собственные векторы. Пусть матрицы A и B перестановочны. Тогда общее решение однородной системы*

$$U_x + AU_y + BU = 0 \tag{16}$$

имеет вид

$$U(x, y) = C(e^{-\mu_1 x}\varphi_1(\lambda_1 x - y), ..., e^{-\mu_n x}\varphi_n(\lambda_n x - y))^T, \tag{17}$$

где C — матрица, столбцы которой это собственные векторы $z_1, z_2, ..., z_n$ матрицы A, μ_j – собственные значения матрицы B, указанные выше, $\varphi_j(z)-$ функции класса C^1 в случае гиперболичности системы (16) и аналитические по z в случае эллиптичности системы (16).

Доказательство. Так как $C = [z_1, z_2, ..., z_n]$, то замена $U = e^{-Bx}CV$ систему (16) приводит к виду

$$V_x + \Lambda V_y = 0,$$

где $\Lambda = diag[\lambda_1, ..., \ \lambda_n]$. В силу леммы 1 общее решение последней системы имеет вид

$$V(x, y) = [\varphi_1(\lambda_1 x - y), ..., \ \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T,$$

где $\varphi_1(z), ..., \ \varphi_n(z)-$ функции класса C^1 в случае гиперболичности системы (16) и аналитические по z в случае эллиптичности системы (16). Поэтому

$$U(x, y) = e^{-Bx}C[\varphi_1(\lambda_1 x - y), ..., \ \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T. \tag{18}$$

Так как $z_1, ..., z_n$ собственные векторы матрицы B, соответствующие собственным значениям $\mu_1, ..., \mu_n$, то матрица C приводит матрицу B к диагональному виду $M = diag[\mu_1, ..., \mu_n]$, т.е. $C^{-1}BC = M$. Следовательно, в силу свойств экспоненциала матрицы справедливо равенство

$$e^{-Bx}C = e^{-CMC^{-1}x}C = Ce^{-Mx} = Cdiag[e^{-\mu_1 x}, ..., \ e^{-\mu_n x}].$$

Отсюда и из (18) получим формулу

$$U = Cdiag[e^{-\mu_1 x}, ..., \ e^{-\mu_n x}][\varphi_1(\lambda_1 x - y), ..., \ \varphi_n(\lambda_n x - y)]^T,$$

из которой следует (17). Теорема доказана.

В случае эллиптичности системы (16) общее решение (17) можно также представить в виде

$$U(x, y) = C(e^{-iRe(\lambda_1\overline{\mu_1}x - \mu_1 y)/Im\lambda_1}\psi_1(\lambda_1 x - y), ..., e^{-iRe(\lambda_n\overline{\mu_n}x - \mu_n y)/Im\lambda_n}\psi_n(\lambda_n x - y))^T. \tag{19}$$

Для этого в формулу (17) нужно положить

$$\varphi_j(z) = e^{i\gamma_j z}\psi_j(z),$$

где $\gamma_j = -Re\mu_j/Im\lambda_j, \ \ \psi_j(z)-$ аналитические по z функции.

3. Для однородной системы (16) рассмотрим задачу о решениях, определенных во всей плоскости и удовлетворяющих при $|x| + |y| \to \infty$ условию роста

$$\|U(x, y)\| \leqslant K(1 + |x|^N + |y|^N), \tag{20}$$

где $\|U\| = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n|$, $N-$целое неотрицательное число, $K-$постоянная, зависящая от U. Многообразие таких решений образует вещественное линейное пространство, которое обозначим через $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$.

Пусть система (16) является гиперболической. Тогда числа $\lambda_j, \ \mu_j, \ j = 1, ..., \ n$ будут вещественными. Из формулы (17) в силу (20) получим оценку

$$|e^{-\mu_j x}\varphi_j(\lambda_j x - y)| \leqslant K\|C^{-1}\|(1 + |x|^N + |y|^N), \tag{21}$$

при $|x| + |y| \to \infty$. Отсюда при $x = 0, \ |y| \to \infty$ имеем оценку

$$|\varphi_j(y)| \leqslant K\|C^{-1}\|(1 + |y|^N), \tag{22}$$

а при $y = 0,\ |x| \to \infty$– оценку

$$|e^{-\mu_j x}\varphi_j(\lambda_j x)| \leqslant K\|C^{-1}\|(1 + |x|^N). \qquad (23)$$

Из оценки (22) следует, что функция $\varphi_j(t)$ при $|t| \to \infty$ растет не быстрее степенной функции. Тогда из оценки (23) получаем, что либо $\mu_j = 0$ либо $\varphi_j = 0$. Поэтому в гиперболическом случае, если все собственные значения матрицы B ненулевые, то задача (16), (20) имеет только нулевое решение, если же какое-то собственное значение $\mu_{j_0} = 0$, то, взяв в формуле (17) в качестве функции $\varphi_{j_0}(t)$ функцию класса C^1, растущую при $|t| \to \infty$ не быстрее степенной функции, и полагая $\varphi_j = 0$ для $\mu_j \neq 0$, получим ненулевые решения задачи (16), (20). В этом случае пространство $\mathcal{P}_N$ будет бесконечномерным.

Пусть теперь система (16) является эллиптической. Из формулы (19) в силу (20) получим оценку

$$|\psi_j(\lambda_j x - y)| \leqslant K\|C^{-1}\|(1 + |x|^N + |y|^N)$$

при $|x|+|y| \to \infty$. Так как функция $\psi_j(z)$ аналитическая по z, то в силу теоремы Лиувилля она будет полиномом относительно z степени не выше N. Поэтому решения задачи (16), (20) имеют вид

$$U(x,y) = C(e^{-iRe(\lambda_1\overline{\mu_1}x-\mu_1 y)/Im\lambda_1}p_{1N}(\lambda_1 x - y), ..., \\ e^{-iRe(\lambda_n\overline{\mu_n}x-\mu_n y)/Im\lambda_n}p_{nN}(\lambda_n x - y))^T,$$

где $p_{jN}(z)$ полиномы относительно z степени не выше N. Тогда пространство $\mathcal{P}_N$ будет конечномерным, и его размерность равна $(N+1)n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* М.: Мир, 1986, 455 с.
2. Виноградов В.С. О теореме Лиувилля для обобщенных аналитических функций // *ДАН СССР,* 1968. Т. 183, № 3. С. 503–506.
3. Мухамадиев Э., Байзаев С. О нётеровости и индексе эллиптических операторов 1-го порядка на плоскости // *Доклады АН ТаджССР,* 1987. Т. 30, № 4. С. 206–210.
4. Байзаев С. Эллиптические системы с ограниченными коэффициентами на плоскости. Новосибирск. НГУ, 1999. 74 с.
5. Байзаев С., Воситова Д.А. О решениях одной эллиптической системы в пространстве функций умеренного роста // *Вестник Таджикского госуниверситета права, бизнеса и политики. 2009.* №1 (37). - С. 92 – 96.
6. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* М.: Наука, 1967. 576 с.

Саттор Байзаев,
Сибайский институт (филиал) Башкирского государственного университета,
ул. Белова, 21,
453838, г. Сибай, Россия
E-mail: `baisat54@rambler.ru`

Дилором Абдурасуловна Воситова,
Худжандский государственный университет,
ул. Мавлонбекова, 2,
735700, г. Худжанд, Республика Таджикистан
E-mail: `rasuli@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 18-30.

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В.Е. БОБКОВ

Аннотация. В ограниченной связной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения с выпукло-вогнутой нелинейностью

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{\gamma-2}u, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$. В основном результате доказывается существование знакопеременного решения данного уравнения на нелокальном интервале $\lambda \in (-\infty, \lambda_0^*)$, где значение λ_0^* задается вариационным принципом нелинейного спектрального анализа по процедуре проективного расслоения.

Ключевые слова: знакопеременные решения, выпукло-вогнутая нелинейность, метод расслоений.

Mathematics Subject Classification: 35D30, 35J25, 35J20, 35J60.

1. Введение

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{\gamma-2}u, & x \in \Omega, \\ \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$. При этом предполагается

$$1 < q < 2 < \gamma < 2^*, \quad \text{где} \quad 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \text{при} \quad N > 2, \\ +\infty & \text{при} \quad N \leqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Основная цель данной работы — исследование вопроса о существовании знакопеременных решений (nodal solutions) задачи ($\mathcal{D}$). Уравнения такого типа возникают в различных областях физики, например, статистической механике, теории поля, нелинейной оптике и пр. (см. [1]). Также, решения задачи ($\mathcal{D}$) могут рассматриваться (см. [2]) как стационарные решения соответствующей краевой задачи для нелинейного параболического уравнения

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{\gamma-2}u, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Подобные задачи возникают в популяционной динамике (см. [1]).

V.E. Bobkov, On existence of nodal solution of elliptic equations with convex-concave nonlinearities.

Работа поддержана РФФИ (грант №13-01-00294-а).

Поступила 5 марта 2012 г.

Существованию положительных решений краевой задачи ($\mathcal{D}$) посвящено большое число работ, см., например, [3], [4], [5], [6], [7]. При этом, например, в работе [5] показано существование положительных решений u_0, которые являются основными состояниями (ground state) соответствующего нелинейного уравнения Шредингера [8], т.е.

$$I_\lambda(u_0) \leqslant I_\lambda(v),$$

где $v \in W\backslash\{0\}$ — любое решение задачи ($\mathcal{D}$), а I_λ — соответствующий функционал энергии (см. ниже).

В то же время, используя топологические методы Красносельского и Люстерника-Шнирельмана, в ряде работ ([3], [5], [9]) доказано существование бесконечного числа bound state-решений u_k задачи ($\mathcal{D}$), т.е. таких решений, что

$$I_\lambda(u_0) < I_\lambda(u_k).$$

Однако, этот результат не дает информации о структуре решений, и более того, поскольку примененные методы не конструктивны, то затруднительно использовать их в дальнейшем для численного нахождения и анализа таких решений. Отметим, что нахождение bound state-решений также важно с точки зрения приложений (см. [10]).

В последнее время возрос интерес к конструктивному нахождению bound state-решений нелинейных эллиптических уравнений с их последующим численным анализом, что отражается появлением достаточно большого числа публикаций по этой теме (см., например, [11], [12], [13]). В основном, эти результаты получены для уравнений коэрцитивного типа, где применимы прямые вариационные методы. Ситуация с более сложной нелинейностью, такой как выпукло-вогнутая, мало изучена. Применительно к задаче ($\mathcal{D}$) основной трудностью является то, что соответствующий функционал энергии $I_\lambda(u)$ не коэрцитивен и не ограничен снизу. Геометрия ветвей решений такого типа уравнений сложноструктурированна. В частности, как известно ([5]), уравнение ($\mathcal{D}$) обладает кратными положительными решениями и бифуркациями типа точек поворота.

В данной работе развивается метод расслоений ([14, 15]) и спектральный анализ по методу расслоений ([16, 17]), применительно к многообразию знакопеременных решений.

Изложим наш основной результат.

Мы будем рассматривать *слабые решения* задачи ($\mathcal{D}$), т.е. функции $u \in W\backslash\{0\}$, такие что

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \lambda \int_\Omega |u|^{q-2} u \phi dx + \int_\Omega |u|^{\gamma-2} u \phi dx, \quad \forall \phi \in W\backslash\{0\},$$

где $W = W_0^{1,2}(\Omega)$ — стандартное соболевское пространство функций, являющееся замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Легко видеть, что слабые решения задачи ($\mathcal{D}$) являются критическими точками функционала энергии I_λ:

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2} H(u) - \frac{\lambda}{q} G(u) - \frac{1}{\gamma} F(u), \tag{2}$$

где

$$H(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad G(u) = \int_\Omega |u|^q dx, \quad F(u) = \int_\Omega |u|^\gamma dx. \tag{3}$$

Наряду с I_λ будем рассматривать как в [5] следующий функционал $\mathcal{L}_\lambda$ на W, заданный равенством

$$\mathcal{L}_\lambda(u) = H(u) - \lambda(q-1)G(u) - (\gamma-1)F(u),$$

и будем рассматривать следующее характеристическое значение, задаваемое по методу спектрального параметра ([5])

$$\lambda_0^* = \frac{q(\gamma-2)}{\gamma(2-q)}\left(\frac{\gamma(2-q)}{2(\gamma-q)}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \inf_{v\in W\setminus\{0\}}\left(\frac{H^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}}(v)}{G(v)F^{\frac{2-q}{\gamma-2}}(v)}\right). \tag{4}$$

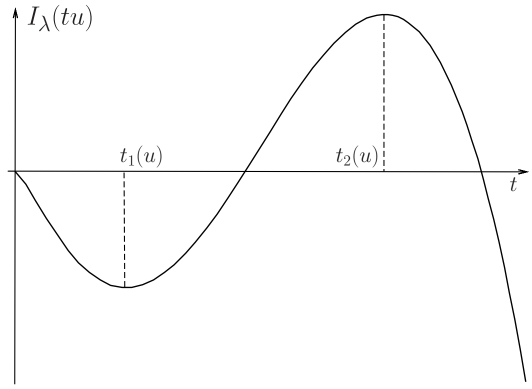

Рис. 1

Отметим, что $\mathcal{L}_\lambda(u)$ определяется (см. [14]) через расслоенный функционал $\tilde{I}_\lambda(t,u) = I_\lambda(tu)$ (зависимость $I_\lambda(tu)$ от t при $\lambda > 0$ см. на рис. 1) по формуле

$$\mathcal{L}_\lambda(u) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\lambda(tu)|_{t=1}.$$

Далее всюду при рассмотрении функций $I_\lambda(tu)$ и $\mathcal{L}_\lambda(tu)$ относительно t будем считать, что $t > 0$.

Как известно, любое слабое решение задачи $(\mathcal{D})$ лежит на многообразии Нехари, т.е. на множестве вида

$$\mathcal{N}_\lambda = \{u \in W\setminus\{0\} : \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu)|_{t=1} = H(u) - \lambda G(u) - F(u) = 0\}.$$

В [5] показано, используя метод расслоения, что если $\lambda < \lambda_0^*$, то многообразие Нехари состоит из двух непересекающихся компонент. В одной компоненте все слабые решения u задачи $(\mathcal{D})$ удовлетворяют неравенству $\mathcal{L}_\lambda(u) < 0$, тогда как в другой компоненте $\mathcal{L}_\lambda(u) > 0$.

Пусть $u \in W$. Введем функции $u_+ = \max\{u,0\} \geq 0$, и $u_- = \min\{u,0\} \leqslant 0$. Тогда $u = u_+ + u_-$, и можно доказать, что $u_+ \in W$ и $u_- \in W$ (см. Теорему 2, доказательство см. в [18]). Решения u, для которых $u_+ \neq 0$ и $u_- \neq 0$, будем называть *знакопеременными* (nodal solutions [19]). Соответственно, если $u \neq 0$, но $u_+ \neq 0$ и $u_- = 0$, либо $u_+ = 0$ и $u_- \neq 0$, то u будем называть *знакопостоянным* решением. Здесь и далее, для произвольного $w \in W$, будем считать, что $w \neq 0$, если $\mu(\{x \in \Omega : w(x) \neq 0\}) \neq 0$, где μ — мера Лебега на Ω.

Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, и значение λ_0^* задается вариационной задачей (4). Тогда для любого $\lambda \in (-\infty, \lambda_0^*)$ существует знакопеременное решение $u_\lambda = u_\lambda^+ + u_\lambda^-$, задачи $(\mathcal{D})$, такое что*

$$u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^1 = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : u_+ \in \mathcal{N}_\lambda, \quad \mathcal{L}_\lambda(u) < 0, \quad \mathcal{L}_\lambda(u_+) < 0, \quad \mathcal{L}_\lambda(u_-) < 0\}.$$

При этом u_λ является основным состоянием на множестве $\mathcal{N}_\lambda^1$, т.е. $I_\lambda(u_\lambda) \leqslant I_\lambda(v)$, для всех решений $v \in \mathcal{N}_\lambda^1$.

Статья организована следующим образом. В параграфе 2 приведены необходимые вспомогательные леммы, описывающие свойства функционала энергии I_λ, а также его критических точек, в зависимости от изменения параметра λ. В параграфе 3 доказывается основной результат работы — Теорема 1. Аппендикс содержит необходимые технические утверждения.

2. Анализ по методу расслоений

Для начала отметим, что вариационная задача, введенная выше равенством (4), может быть получена из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t^2H(u) - \lambda\frac{1}{q}t^qG(u) - \frac{1}{\gamma}t^\gamma F(u) = 0, \\ tH(u) - \lambda t^{q-1}G(u) - t^{\gamma-1}F(u) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

которая соответствует случаю, когда $I_\lambda(tu) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu) = 0$, для произвольной функции $u \in W\backslash\{0\}$. Решая эту систему относительно $\lambda = \lambda(u)$ и $t = t(u)$, получим

$$\lambda(u) = \frac{q(\gamma-2)}{\gamma(2-q)}\left(\frac{\gamma(2-q)}{2(\gamma-q)}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \frac{H^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}}(u)}{G(v)F^{\frac{2-q}{\gamma-2}}(u)}, \tag{6}$$

$$t(u) = \left(\frac{\gamma(2-q)}{2(\gamma-q)}\frac{H(u)}{F(u)}\right)^{1/(\gamma-2)}.$$

Таким образом, следуя [5], из (6) получаем характеристическое значение

$$\lambda_0^* = \inf_{u\in W\backslash\{0\}} \lambda(u).$$

Заметим, что $t(u) > 0$, причем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda(u)}(t(u)u) &= t(u)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}I_\lambda(tu)|_{t=t(u)} \\ &= -t(u)^2\frac{(2-q)(\gamma-q)}{2}H(u) < 0,\end{aligned}$$

т.е. $t(u)$ — точка максимума $I_{\lambda(u)}(tu)$ по t.

Предложение 1. *Пусть* $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, $u \in W\backslash\{0\}$. *Тогда существует такое* $\widetilde{\lambda}(u) > 0$, *что*

1) *если* $\lambda > \widetilde{\lambda}(u)$, *то функция* $I_\lambda(tu)$ *относительно* t *не имеет точек экстремума;*
2) *при всех* $\lambda \in (0, \widetilde{\lambda}(u))$ *функция* $I_\lambda(tu)$ *относительно* t *имеет ровно одну точку минимума* $t_1(u)$ *и одну точку максимума* $t_2(u)$, *причем* $t_1(u) < t_2(u)$;
3) *при* $\lambda \leqslant 0$ *функция* $I_\lambda(tu)$ *относительно* t *имеет лишь одну точку максимума* $t_3(u)$.

Доказательство. Пусть $u \in W\backslash\{0\}$. Тогда, уравнение $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu) = 0$ имеет не более двух корней при $t > 0$. Действительно, т.к. $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, то из

$$\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu) = t^{q-1}(t^{2-q}H(u) - \lambda G(u) - t^{\gamma-q}F(u)) = 0$$

следует, что если $t > 0$, то корни уравнения $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu) = 0$ совпадут с корнями уравнения

$$\alpha_\lambda(t) = t^{\gamma-q}F(u) - t^{2-q}H(u) + \lambda G(u) = 0.$$

Найдем экстремумы функции $\alpha_\lambda(t)$:

$$\alpha'_\lambda(t) = t^{1-q}((\gamma-q)t^{\gamma-2}F(u) - (2-q)H(u)) = 0.$$

Отсюда, в силу того, что $t > 0$, получаем

$$(\gamma - q)t^{\gamma-2}F(u) - (2-q)H(u) = 0.$$

Единственный корень этого уравнения

$$t = t(u) = \left(\frac{(2-q)H(u)}{(\gamma-q)F(u)}\right)^{1/\gamma-2}.$$

Заметим, что если $t \in (0, t(u))$, то $\alpha'_\lambda(t) < 0$, а если $t > t(u)$, то $\alpha'_\lambda(t) > 0$, т.е. $t(u)$ — точка минимума функции $\alpha_\lambda(t)$, являющаяся ее единственным экстремумом при $t > 0$. Из вида $\alpha_\lambda(t)$ очевидно, что для произвольных $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, таких что $\lambda_1 > \lambda_2$, выполнено $\alpha_{\lambda_1}(t) > \alpha_{\lambda_2}(t)$ для всех $t > 0$. Найдем значение $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(u)$, при котором минимум функции $\alpha_{\widetilde{\lambda}}(t)$ касается оси t:

$$\alpha_{\widetilde{\lambda}}(t(u)) = \left(\frac{(2-q)H(u)}{(\gamma-q)F(u)}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} F(u) - \left(\frac{(2-q)H(u)}{(\gamma-q)F(u)}\right)^{\frac{2-q}{\gamma-2}} H(u) + \widetilde{\lambda}G = 0.$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{\lambda} = \frac{\gamma-2}{2-q}\left(\frac{2-q}{\gamma-q}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \frac{H^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}}(u)}{G(u)F^{\frac{2-q}{\gamma-2}}(u)}. \tag{7}$$

Таким образом, если $\lambda > \widetilde{\lambda}$, то $\min\limits_{t>0} \alpha_\lambda(t) > 0$, т.е. уравнение $\alpha_\lambda(t) = 0$ не имеет корней. Следовательно, при $\lambda > \widetilde{\lambda}$ функция $I_\lambda(tu)$ относительно t не имеет точек экстремума.

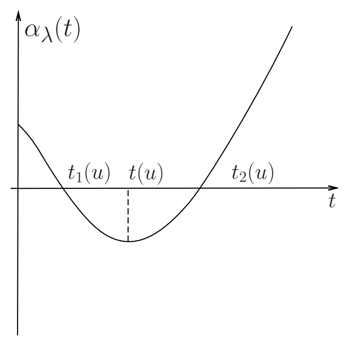

Рис. 2

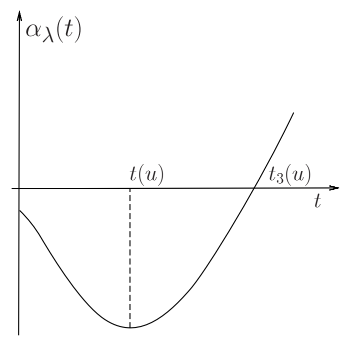

Рис. 3

Пусть $\lambda \in (0, \widetilde{\lambda})$ (см. рис. 2). Тогда $\alpha_\lambda(t) > 0$ при $t \to 0$, и $\min\limits_{t>0} \alpha_\lambda(t) < 0$. Так как $\alpha'_\lambda(t) < 0$ при $t \in (0, t(u))$, то существует единственное $t_1(u) > 0$, такое что $\alpha_\lambda(t_1(u)) = 0$. В то же время, так как $\alpha'_\lambda(t) > 0$ при $t > t(u)$ и $\alpha_\lambda(t) \to +\infty$, при $t \to +\infty$, то существует единственное $t_2(u) > 0$, такое что $\alpha_\lambda(t_2(u)) = 0$. Таким образом, $t_1(u)$ и $t_2(u)$ — корни уравнения $\alpha_\lambda(t) = 0$, при этом $t_1(u) < t_2(u)$. Более того, т.к. $-\alpha'_\lambda(t)$ соответствует $\frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\lambda(tu)$, то $t_1(u)$ — точка минимума, а $t_2(u)$ — точка максимума функции $I_\lambda(tu)$ относительно t (см. рис. 1).

Пусть теперь $\lambda \leqslant 0$ (см. рис. 3). Тогда $\alpha_\lambda(t) \leqslant 0$ при $t \to 0$, и $\min\limits_{t>0} \alpha_\lambda(t) < 0$. В силу монотонного убывания $\alpha_\lambda(t)$ при $t \in (0, t(u))$, на этом промежутке $\alpha_\lambda(t)$ не имеет корней. Аналогично, в силу монотонного возрастания $\alpha_\lambda(t)$ при $t > t(u)$ и того, что $\alpha_\lambda(t) \to +\infty$, при $t \to +\infty$, существует единственное $t_3(u) > 0$, такое что $\alpha_\lambda(t_3(u)) = 0$, т.е. $t_3(u)$ — искомый корень, причем $t_3(u)$ — точка максимума функции $I_\lambda(tu)$ относительно t. $\square$

Замечание 1. *Несложно убедиться, что* $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(u)$*, определенная из* (7)*, является решением системы*

$$\begin{cases} tH(u) - \widetilde{\lambda}\ t^{q-1}G(u) - t^{\gamma-1}F(u) = 0, \\ \\ 2H(u) - \widetilde{\lambda}\ q\ t^{q-2}G(u) - \gamma\ t^{\gamma-2}F(u) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

которая возникает в случае $\frac{\partial}{\partial t} I_{\widetilde{\lambda}}(tu) = 0$*,* $\frac{\partial^2}{\partial t^2} I_{\widetilde{\lambda}}(tu) = 0$.

Введем следующее характеристическое значение

$$\Lambda^* = \inf_{u \in W\setminus\{0\}} \widetilde{\lambda}(u), \tag{9}$$

где $\widetilde{\lambda}(u)$ определено из (7).

Предложение 2. *Пусть* λ_0^* *и* Λ^* *определены из вариационных задач* (4) *и* (9) *соответственно. Тогда* $\lambda_0^* < \Lambda^*$.

Доказательство. Предположим, от противного, что $\lambda_0^* \geq \Lambda^*$. Сравнивая λ_0^* и Λ^*, последнее неравенство запишем в виде

$$\frac{q}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \geq 1. \tag{10}$$

Пусть $2 = \alpha q$, $\gamma = 2\beta$, где по условию леммы $\alpha, \beta > 1$. Тогда неравенство (10) можно записать в виде

$$\frac{1}{\alpha}\beta^{\frac{\alpha-1}{\alpha(\beta-1)}} \geq 1.$$

Логарифмируя обе части этого неравенства, получим

$$\frac{(\alpha-1)\ln\beta}{\alpha(\beta-1)\ln\alpha} \geq 1.$$

Для значений функции логарифма воспользуемся оценкой $\frac{t-1}{t} \leqslant \ln t \leqslant t-1$. Заметим, что так как $\alpha, \beta > 1$, то имеют место строгие неравенства $\frac{\alpha-1}{\alpha} < \ln\alpha < \alpha - 1$ и $\frac{\beta-1}{\beta} < \ln\beta < \beta - 1$. Тогда

$$1 \leqslant \frac{(\alpha-1)\ln\beta}{\alpha(\beta-1)\ln\alpha} < 1,$$

т.е. получили противоречие. Таким образом, $\lambda_0^* < \Lambda^*$. □

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, $\lambda < \Lambda^*$ *и* $u \in \mathcal{N}_\lambda$*. Тогда:*

1. $\mathcal{L}_\lambda(u) \neq 0$,
2. $I_\lambda(u) \to +\infty$ *при* $||u|| \to +\infty$*, т.е. функционал* I_λ *коэрцитивен на* $\mathcal{N}_\lambda$.

Доказательство. Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, $\lambda < \Lambda^*$ и $u \in \mathcal{N}_\lambda$.

1) Предположим, от противного, что $\mathcal{L}_\lambda(u) = 0$. Тогда функция u удовлетворяет системе (8) при $t = 1$ и $\lambda = \widetilde{\lambda}(u)$, определяемым из (7). Но в этом случае $\Lambda^* \leqslant \lambda = \widetilde{\lambda}(u)$, что противоречит условию. Следовательно, $\mathcal{L}_\lambda(u) \neq 0$.

2) Докажем теперь коэрцитивность функционала I_λ на $\mathcal{N}_\lambda$. Пусть $u \in \mathcal{N}_\lambda$, т.е. выполнено условие $\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu)|_{t=1} = 0$. Тогда функционал I_λ на $\mathcal{N}_\lambda$ можно записать в виде

$$I_\lambda(u) = \frac{\gamma-2}{2\gamma}H(u) - \lambda\frac{\gamma-q}{\gamma q}G(u). \tag{11}$$

Отсюда, если $\lambda > 0$, то в силу теоремы вложения, имеем оценку

$$I_\lambda(u) > \frac{\gamma-2}{2\gamma}H(u) - \lambda\frac{\gamma-q}{\gamma q}C_q H(u)^{q/2},$$

где константа $C_q = C_q(q,\gamma,\Omega) > 0$.

Если $\lambda \leqslant 0$, то (11) оценим следующим образом

$$I_\lambda(u) \geq \frac{\gamma-2}{2\gamma}H(u).$$

Тогда, в обоих случаях, $I_\lambda(u) \to +\infty$ при $H(u) = ||u||^2 \to +\infty$. Т.е. функционал I_λ коэрцитивен на $\mathcal{N}_\lambda$. □

Следствие 1. *Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$ и $\lambda < \Lambda^*$. Если $u \in W\backslash\{0\}$ такая, что $u_+ \in \mathcal{N}_\lambda$ ($u_- \in \mathcal{N}_\lambda$), то $\mathcal{L}_\lambda(u_+) \neq 0$ ($\mathcal{L}_\lambda(u_-) \neq 0$).*

Доказательство. Пусть $u \in W\backslash\{0\}$ и $u_+ \in \mathcal{N}_\lambda$. Обозначим $\Omega_+ := \mathrm{supp} u_+$, тогда, очевидно,

$$u_+(x) = \begin{cases} u(x) & , \quad x \in \Omega_+ \\ 0 & \quad x \in \Omega\backslash\Omega_+. \end{cases}$$

Таким образом, для каждой пробной функции $u \in W\backslash\{0\}$ минимизационной задачи (9), функция $u_+ \in W$ так же является пробной для этой задачи, если $u_+ \neq 0$. Как известно, дополнительные ограничения, накладываемые на минимизационную задачу, *не уменьшают* точной нижней грани, поэтому

$$\Lambda^* = \Lambda^*_\Omega = \inf_{u \in W\backslash\{0\}} \widetilde{\lambda}(u) \leqslant \inf_{\substack{u \in W\backslash\{0\}:\\ u(x)=0,\ x \in \Omega\backslash\Omega_+}} \widetilde{\lambda}(u) = \Lambda^*_{\Omega_+}.$$

По условию, $\lambda < \Lambda^*$. Следовательно, $\lambda < \Lambda^* \leqslant \Lambda^*_{\Omega_+}$, и, в силу Леммы 1, $\mathcal{L}_\lambda(u_+) \neq 0$. □

Замечание 2. *В силу Предложения 2, результаты Леммы 1 и ее следствия сохраняются при $\lambda < \lambda_0^*$.*

В дальнейшем нам потребуются следующие свойства $I_\lambda(u)$ на множестве Нехари.

Лемма 2. *Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$ и $\lambda < \lambda_0^*$. Если $u \in \mathcal{N}_\lambda$ и $\mathcal{L}_\lambda(u) < 0$, то*

1) $I_\lambda(u) > 0$,
2) $t = 1$ *является точкой глобального максимума функции $I_\lambda(tu)$ по t при $t > 0$,*
3) $||u|| > \delta > 0$, *где δ не зависит от u.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{L}_\lambda(u) < 0$ и $\lambda < \lambda_0^*$.

1) Отметим, что $\lambda < \lambda_0^* \leqslant \lambda(u)$, где $\lambda(u)$ определено равенством (6). Тогда

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}H(u) - \frac{\lambda}{q}G(u) - \frac{1}{\gamma}F(u) > \frac{1}{2}H(u) - \frac{\lambda(u)}{q}G(u) - \frac{1}{\gamma}F(u) = 0.$$

2) В силу Предложения 1, $t = 1$ является единственной точкой локального максимума функции $I_\lambda(tu)$ по t при $t > 0$, и $I_\lambda(u) > 0$. При этом на границах области $(0,+\infty)$ имеем

$$I_\lambda(tu) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0,$$
$$I_\lambda(tu) \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Следовательно, $t = 1$ — точка глобального максимума $I_\lambda(tu)$ по t.

3) Запишем условия $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu)|_{t=1} = 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}I_\lambda(tu)|_{t=1} < 0$ в виде системы

$$\begin{cases} H(u) - \lambda G(u) - F(u) = 0, \\ \\ H(u) - \lambda(q-1)G(u) - (\gamma-1)F(u) < 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $\lambda G(v)$ и подставим в неравенство. Тогда, в силу теоремы вложения Соболева, получим следующую цепочку неравенств

$$\frac{2-q}{\gamma-q}H(u) < F(u) < C_\gamma H(u)^{\gamma/2}, \quad C_\gamma = C_\gamma(q,\gamma,\Omega) > 0.$$

Откуда следует, что

$$H(u) > \left(\frac{2-q}{(\gamma-q)C_\gamma}\right)^{\frac{2}{\gamma-2}} = \delta^2(q,\gamma,\Omega) = \delta^2 > 0.$$

Таким образом, $||u|| = H(u)^{1/2} > \delta > 0$. $\square$

Замечание 3. *Очевидно, что результаты Леммы 2 сохраняются для u, u_+, u_-, если $u \in \mathcal{N}^1_\lambda$.*

Отметим, что из Теоремы 2 (см. Аппендикс) следует, что если $u \in W$, то $u_+ \in W$ и $u_- \in W$. Более того, для представления $u = u_+ + u_-$ имеет место равенство

$$I_\lambda(u) = I_\lambda(u_+) + I_\lambda(u_-),$$

которое также следует из Теоремы 2. Из этого равенства легко вытекают следующие:

$$\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu) = \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_+) + \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_-), \tag{12}$$

$$\mathcal{L}_\lambda(u) = \mathcal{L}_\lambda(u_+) + \mathcal{L}_\lambda(u_-). \tag{13}$$

Покажем теперь, что при $\lambda < \lambda_0^*$ множество $\mathcal{N}^1_\lambda$ не пусто. Возьмем произвольную подобласть $\Omega_1 \subset \Omega$, и функцию $u_1 \in W\backslash\{0\}$, такую что $\mathrm{supp} u_1 = \overline{\Omega}_1$. Тогда, по Предложению 1, существует $t_1(u_1) > 0$, такое что $\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_1)|_{t=t_1(u_1)} = 0$ и $\mathcal{L}_\lambda(t_1(u_1)u_1) < 0$. Теперь выберем некоторую подобласть $\Omega_2 \subset \Omega$, такую что $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, и функцию $u_2 \in W\backslash\{0\}$, такую что $\mathrm{supp} u_2 = \overline{\Omega}_2$. Тогда существует такое $t_2(u_2) > 0$, что $\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_2)|_{t=t_2(u_2)} = 0$ и $\mathcal{L}_\lambda(t_2(u_2)u_2) < 0$. Обозначим $v_+ = t_1(u_1)u_1$, $v_- = -t_2(u_2)u_2$ и $v = v_+ + v_-$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tv)|_{t=1} = \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tv_+)|_{t=1} + \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tv_-)|_{t=1} = 0$$

$$\mathcal{L}_\lambda(v) = \mathcal{L}_\lambda(v_+) + \mathcal{L}_\lambda(v_-) < 0.$$

Таким образом, мы нашли функцию $v \in W\backslash\{0\}$, такую что $v \in \mathcal{N}^1_\lambda$, т.е. $\mathcal{N}^1_\lambda \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующую минимизационную задачу с ограничениями:

$$\begin{cases} I_\lambda(u) \to \min, \\ u \in \mathcal{N}^1_\lambda. \end{cases} \tag{14}$$

Лемма 3. *Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, и $\lambda < \lambda_0^*$. Если $u \in \mathcal{N}^1_\lambda$ — решение минимизационной задачи (14), то u — критическая точка I_λ на $W\backslash\{0\}$, т.е.*

$$\langle D_u I_\lambda(u), \phi\rangle = 0, \quad \forall \phi \in W.$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{N}^1_\lambda$ — решение минимизационной задачи (14), т.е. $\beta = I_\lambda(u) = \inf\{I_\lambda(v) : v \in \mathcal{N}^1_\lambda\}$. Преположим от противного, что $D_u I_\lambda(u) \neq 0$.

Так как $\lambda < \lambda_0^*$, то в силу Леммы 2 $t = 1$ является точкой глобального максимума функции $I_\lambda(tu)$ по t. Более того, из Замечания 3 следует, что $t = 1$ также является точкой глобального максимума функций $I_\lambda(tu_+)$ и $I_\lambda(tu_-)$ по t. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_\lambda(su_+ + tu_-) = I_\lambda(su_+) + I_\lambda(tu_-) < \\ I_\lambda(u_+) + I_\lambda(u_-) = I_\lambda(u_+ + u_-) = I_\lambda(u), \end{aligned} \tag{15}$$

для всех $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+\backslash\{1,1\}$.

Так как по предположению $D_u I_\lambda(u) \neq 0$, то в силу непрерывности функционала $D_u I_\lambda$ существуют $\alpha, \delta > 0$, такие что $||D_u I_\lambda(v)|| \geq \alpha$ при $v \in U_{3\delta}(u) = \{w \in W : ||u - w|| < 3\delta\}$.

Введем функцию

$$g : A = \left(\frac{1 - t_1(u_+)}{2}, \frac{1 + t_1(u_+)}{2}\right) \times \left(\frac{1 - t_1(u_-)}{2}, \frac{1 + t_1(u_-)}{2}\right) \to W,$$

$$g(s,t) = su_+ + tu_-.$$

Напомним, что $t_1(u_+)$ и $t_1(u_-)$, соответственно, точки минимума функций $I_\lambda(tu_+)$ и $I_\lambda(tu_-)$ по t.

Из Предложения 1 и условия $\lambda < \lambda_0^*$ следует, что $t_1(u_+), t_1(u_-) < 1$, следовательно, $A \neq \emptyset$. Более того, из (15) следует, что

$$\beta_0 := \max_{(s,t)\in\partial A} I_\lambda(g(s,t)) < \beta.$$

Обозначим $\varepsilon := \min\left\{\frac{\beta-\beta_0}{2}, \frac{\alpha\delta}{8}\right\}$ и $S = U_\delta(u)$. Тогда из Деформационной леммы (см. Теорему 3 из Аппендикса) следует существование гомотопии η, такой что для $\eta_1 := \eta(1,\cdot) : W \to W$ выполняется:

1) $\eta_1(v) = v$, если $I_\lambda(v) \leqslant \beta - 2\varepsilon$,
2) $\eta_1(\{v \in S : I_\lambda(v) \leqslant \beta + \varepsilon\}) \subset \{v \in W : I_\lambda(v) \leqslant \beta - \varepsilon\}$,
3) $I_\lambda(\eta_1(v)) \leqslant I_\lambda(v)$ для всех $v \in W$.

Из 2) следует, что

$$\max_{\{(s,t)\in A:\ g(s,t)\in S\}} I_\lambda(\eta_1(g(s,t))) < \beta. \tag{16}$$

С другой стороны, из 3) и (15) следует

$$\max_{\{(s,t)\in A:\ g(s,t)\notin S\}} I_\lambda(\eta_1(g(s,t))) \leqslant \max_{\{(s,t)\in A:\ g(s,t)\notin S\}} I_\lambda(g(s,t)) < \beta. \tag{17}$$

Обозначим для удобства

$$f := \eta_1(g(s,t)).$$

Тогда из 1) следует, что $f(s,t) = g(s,t)$ при $(s,t) \in \partial A$ в силу выбора ε. Рассмотрим отображение

$$\psi : A \to \mathbb{R}^2, \quad \psi(s,t) := (Q_\lambda(f(s,t)_+), Q_\lambda(f(s,t)_-)),$$

где $Q_\lambda(su) := \langle D_u I_\lambda(su), u\rangle = s\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu)|_{t=s}$. Отметим, что $\psi(s,t) = (0,0)$ тогда и только тогда, когда $f(s,t)_+, f(s,t)_- \in \mathcal{N}_\lambda$.

Так как $f = g$ при $(s,t) \in \partial A$, то

$$\psi(s,t) = (Q_\lambda(su_+), Q_\lambda(tu_-)), \quad (s,t) \in \partial A.$$

При этом

$$Q_\lambda\left(\frac{1-t_1(u_+)}{2}u_+\right) > 0 > Q_\lambda\left(\frac{1+t_1(u_+)}{2}u_+\right), \tag{18}$$

$$Q_\lambda\left(\frac{1-t_1(u_-)}{2}u_-\right) > 0 > Q_\lambda\left(\frac{1+t_1(u_-)}{2}u_-\right). \tag{19}$$

Тогда по Теореме 4 из Аппендикса следует существование точки $(s_0,t_0) \in A$, такой что $\psi(s_0,t_0) = (0,0)$, следовательно, $f(s_0,t_0)_+, f(s_0,t_0)_- \in \mathcal{N}_\lambda$. Более того, из (18), (19) и Предложения 1 следует, что $\mathcal{L}_\lambda(f(s_0,t_0)_+) < 0$ и $\mathcal{L}_\lambda(f(s_0,t_0)_-) < 0$, так как существует единственная точка максимума функций $I_\lambda(zf(s_0,t_0)_+)$ и $I_\lambda(zf(s_0,t_0)_-)$ по z при $z > 0$.

Таким образом, $f(s_0,t_0) \in \mathcal{N}_\lambda^1$, т.е. $f(s_0,t_0)$ — допустимая функция минимизационной задачи (14). Кроме этого, из (16) и (17) следует

$$I_\lambda(f(s_0,t_0)) < \beta = \inf\{I_\lambda(v) : v \in \mathcal{N}_\lambda^1\},$$

т.е. получили противоречие. Таким образом, $D_u I_\lambda(u) = 0$, т.е. u — критическая точка I_λ на $W\backslash\{0\}$. $\square$

3. Существование знакопеременных решений

Будем полагать, что $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, и $\lambda < \lambda_0^*$. Пусть

$$c_1 = \inf\{I_\lambda(v) : v \in \mathcal{N}_\lambda^1\},$$

и $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^1$ — минимизирующая последовательность, т.е. $I_\lambda(u_n) \to c_1$. При этом, в силу Леммы 2, $c_1 \geq 0$. Тогда, из коэрцитивности I_λ на $\mathcal{N}_\lambda$ (см. Лемму 1) следует, что последовательность u_n ограничена в W. Отсюда, в силу рефлексивности пространства W, из теоремы Эберлейна-Шмульяна [20] следует, что существуют $u, v, w \in W$, такие что

$$u_n \rightharpoonup u, \quad (u_n)_+ \rightharpoonup v, \quad (u_n)_- \rightharpoonup w \text{ слабо в } W. \tag{20}$$

Более того, оставляя прежнюю индексацию по n, из теоремы вложения Соболева следует, что

$$u_n \to u, \quad (u_n)_+ \to v, \quad (u_n)_- \to w \text{ в } L^\gamma, \tag{21}$$
$$u_n \to u, \quad (u_n)_+ \to v, \quad (u_n)_- \to w \text{ в } L^q, \tag{22}$$

т.к. $q < \gamma < 2^*$.

Из Леммы 4 известно, что при $r = q$ и $r = \gamma$ отображение $h : L^r \to L^r \quad (u \to u_+)$ непрерывно, поэтому из (21) следует, что $u_+ = v \geq 0$ и $u_- = w \leqslant 0$. Покажем, что u меняет знак, т.е. $u_+ > 0$ и $u_- < 0$. Так как $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^1$, то из Леммы 2 следует, что

$$\lambda \int\limits_\Omega (u)_+^q + \int\limits_\Omega (u)_+^\gamma dx = \lim_{n\to\infty} \left(\lambda \int\limits_\Omega (u_n)_+^q dx + \int\limits_\Omega (u_n)_+^\gamma dx \right) = \lim_{n\to\infty} ||(u_n)_+||^2 > 0.$$

Следовательно, $u_+ > 0$. Аналогично показывается, что $u_- < 0$.

Покажем теперь, что $(u_n)_+ \to u_+$ в W. Из слабой сходимости $(u_n)_+$ к u_+ в W и слабой полунепрерывности снизу нормы пространства W следует, что $||u_+||^2 \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} ||(u_n)_+||^2$. Докажем, что имеет место равенство. Предположим, что $||u_+||^2 < \liminf\limits_{n\to\infty} ||(u_n)_+||^2$. Тогда

$$||u_+||^2 - \lambda G(u_+) - F(u_+) < \liminf_{n\to\infty} \big(||(u_n)_+||^2 - \lambda G((u_n)_+) - F((u_n)_+) \big) = 0.$$

Пусть $\lambda \in (0, \lambda_0^*)$. В силу Предложения 1, существуют такие $\alpha = t_2(u_+) > 0$ и $\beta = t_2(u_-) > 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_+)|_{t=\alpha} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_-)|_{t=\beta} = 0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\lambda(tu_+)|_{t=\alpha} < 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\lambda(tu_-)|_{t=\beta} < 0.$$

В этом случае $\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(t(\alpha u_+ + \beta u_-))|_{t=1} = 0$. Тогда, по предположению,

$$\begin{aligned} I_\lambda(\alpha u_+ + \beta u_-) &< \liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda(\alpha(u_n)_+ + \beta(u_n)_-) \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda(\alpha(u_n)_+) + I_\lambda(\beta(u_n)_-) \right). \end{aligned} \tag{23}$$

В свою очередь, в силу Замечания 3,

$$\liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda(\alpha(u_n)_+) + I_\lambda(\beta(u_n)_-) \right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda((u_n)_+) + I_\lambda((u_n)_-) \right), \tag{24}$$

так как $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^1$, т.е. $t = 1$ — точка глобального максимума функций $I_\lambda(tu_+)$ и $I_\lambda(tu_-)$ по t. В то же время

$$\liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda((u_n)_+) + I_\lambda((u_n)_-) \right) = \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = \inf_{\mathcal{N}_\lambda^1} I_\lambda = c_1. \tag{25}$$

Таким образом, из (23), (24), (25) следует, что $I_\lambda(\alpha u_+ + \beta u_-) < c_1$, что противоречит условию. Получили противоречие, следовательно $(u_n)_+ \to u_+$, $(u_n)_- \to u_-$ в W, и $\alpha = \beta = 1$. Аналогичный результат имеет место при $\lambda \leqslant 0$.

Таким образом, $u \in \mathcal{N}^1_\lambda$ и

$$I_\lambda(u) = \inf\{I_\lambda(v) : v \in \mathcal{N}^1_\lambda\},$$

а значит u — решение типа основного состояния на множестве $\mathcal{N}^1_\lambda$.

4. Аппендикс

Приведем некоторые необходимые утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $0 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда* $\max\{u, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *и для* $1 \leqslant i \leqslant N$ *справедливо следующее равенство в обобщенном смысле:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \max\{u, 0\} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{в } \{x \in \Omega : u(x) > 0\}, \\ 0, & \text{в } \{x \in \Omega : u(x) \leqslant 0\}. \end{cases}$$

Доказательство. См. [18]. □

Следствие 2. *Пусть* $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $0 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \ \text{п.в. в } E = \{x \in \Omega : u = 0\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Зададим отображение $h : L^r \to L^r$, $r \geq 1$, формулой $h(u) = \max\{u, 0\}$.

Лемма 4. *Отображение h непрерывно.*

Доказательство. Пусть $u \in L^r(\Omega)$. Тогда, очевидно, $u_+ \in L^r(\Omega)$ и $u_- \in L^r(\Omega)$. Заметим, что отображение h почти всюду в Ω можно представить в виде $h(u) = j(u)u$, где $j(u) = 1$, если $u \geq 0$, и $j(u) = 0$, если $u < 0$. Пусть $u_n \to u$ в $L^r(\Omega)$. Тогда существует подпоследовательность u_{n_k}, такая что $u_{n_k} \to u$ почти всюду в Ω. Для краткости обозначений, без ограничения общности, оставим прежнюю индексацию по n, не переходя к индексации по подпоследовательности. Тогда

$$||h(u_n) - h(u)||_r^r = \int\limits_\Omega |h(u_n) - h(u)|^r dx =$$
$$= \int\limits_\Omega |j(u_n)(u_n - u) + (j(u_n) - j(u))u|^r dx.$$

Заметим, что так как $\varphi(s) = s^r$ — выпуклая функция при $r \geq 1$ и $s \geq 0$, то, воспользовавшись неравенством Йенсена $(s_1 + s_2)^r \leqslant 2^{r-1}(s_1^r + s_2^r)$, получим

$$||h(u_n) - h(u)||_r^r \leqslant 2^{r-1} \left(\int\limits_\Omega |(u_n - u)|^r dx + \int\limits_\Omega |(j(u_n) - j(u))u|^r dx \right).$$

Первый интеграл сходится к 0, так как $u_n \to u$ в $L^r(\Omega)$. С другой стороны, для п.в. $x \in \Omega$ выполняется $j(u_n) \to j(u) = 0$, либо $j(u_n) \to j(u) = 1$. Отсюда получаем

$$\int\limits_\Omega |(j(u_n) - j(u))u|^r dx \leqslant \sup_{x \in \Omega} (j(u_n) - j(u)) \int\limits_\Omega |u|^r dx \to 0,$$

в силу того, что $u \in L^r(\Omega)$. Таким образом, $||h(u_n) - h(u)||_r \to 0$. Следовательно, $h \in C(L^r; L^r)$. □

Следствие 3. *Используя аналогичное рассуждение, легко получить, что $h \in C(W;W)$.*

Следующая теорема является одним из вариантов деформационной леммы.

Теорема 3 (Деформационная лемма)**.** *Пусть X — банахово пространство, $I \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что*

$$||D_u I(u)||_{X^*} \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}, \quad \forall u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_{2\delta},$$

где $S_{2\delta} = \{v \in X : dist(v,S) \leqslant 2\delta\}$. Тогда существует гомотопия $\eta \in \mathcal{C}([0,1] \times X, X)$, такая что

- *если $t = 0$, либо если $u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, то $\eta(t,u) = u$;*
- *$\eta(1, \{v \in S : I(v) \leqslant c+\varepsilon\}) \subset \{v \in W : I \leqslant c-\varepsilon\}$;*
- *$\eta(1,\cdot)$ задает гомеоморфизм $X \to X$ для всех $t \in [0,1]$;*
- *$||\eta(t,u) - u||_X \leqslant \delta$ для любых $u \in X$, $t \in [0,1]$;*
- *$I(\eta(\cdot,u))$ не возрастает для любого $u \in X$;*
- *$I(\eta(t,u)) < c$ для всех $u \in I^{-1}((-\infty, c]) \cap S_\delta$, $t \in [0,1]$.*

Доказательство. см. [21], Лемма 1.4. □

Следующая теорема является двумерным вариантом теоремы Миранды (см., например, [22]).

Теорема 4 (Миранда, 1940)**.** *Пусть $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\}$, отображение*

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) : A \to \mathbb{R}^2$$

является непрерывным, и

$$\psi_1(a_1, x_2) \geq 0 \geq \psi_1(b_1, x_2), \quad \forall x_2 \in (a_2, b_2),$$
$$\psi_2(x_1, a_2) \geq 0 \geq \psi_2(x_1, b_2), \quad \forall x_1 \in (a_1, b_1).$$

Тогда существует точка $(x_1^0, x_2^0) \in A$, такая что $\psi(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$.

Доказательство. См. [22]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Berestycki, P.L. Lions *Nonlinear Scalar FieM Equations, I. Existence of a Ground State //* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 82. 1983. P. 313–345.
2. T. Cazenave, F. Dickstein, M. Escobedo *A semilinear heat equation with concave-convex nonlinearity) // Rendiconti di Matematica. VII:19. 1999. P. 211–242.*
3. *A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems // J. Funct. Anal. 122. 1994. P. 519-–543.*
4. *T. Bartsch, M. Willem On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities // Proc. Amer. Math. Soc., 123. 1995. P. 3555-–3561.*
5. *Ya. Il'yasov On nonlocal existence results for elliptic equations with convex-concave nonlinearities // Nonlinear Anal. 61. 2005. P. 211-–236.*
6. *L. Boccardo, M. Escobedo, I. Peral A Dirichlet problem involving critical exponents // Non-linear Anal.*, 24:11. 1995. P. 1639-–1648.
7. G. Azorero, J. Manfredi, I. Alonso *Sobolev versus Hlder local minimizes and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations //* Commun. Contemp. Math., 2:3. 2000. P. 385-–404.
8. S. Coleman, V. Glazer, A. Martin *Action minima among solution to a class of Euclidean scalar field equations //* Comm. Math. Phys., 58:2. 1978. P. 211-–221.

9. G. Azorero, I. Alonso *Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent or with a Nonsymmetric Term* // Transactions of the American Mathematical Society. 323:2. 1991. P. 877–895.
10. H. Berestycki, P.L. Lions *Nonlinear scalar field equations, II. existence of infinitely many solutions* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 82. 1983. P. 347–375.
11. A. Castro, J. Cossio, J.M. Neuberger *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem.* // Rocky Mountain J. Math. 27:4. 1997. P. 1041-—1053.
12. D. Costa, Z. Ding, J.M. Neuberger *A numerical investigation of sign-changing solutions to superlinear elliptic equations on symmetric domains* // Journal of Computational and Applied Mathematics, 131. 2001. P. 299-–319.
13. T. Bartsch, T. Weth *A note on additional properties of sign changing solutions to superlinear elliptic equations* // Topol. Methods Nonlinear Anal. 22:1. 2003. P. 1–14.
14. Похожаев С.И. *Об одном подходе к нелинейным уравнениям* // ДАН СССР. 247. 1979. С. 1327–1331.
15. Похожаев С.И. *О методе расслоения решения нелинейных краевых задач* // Тр. МИАН СССР. 192. 1990. С. 146-–163.
16. Ya. Il'yasov *On a procedure of projective fibering of functionals on Banach spaces* // Proc. Steklov Inst. Math. 232. 2001. P. 150-–156.
17. Ильясов Я.Ш. *Нелокальные исследования бифуркаций решений нелинейных эллиптических уравнений* // Изв. РАН. Сер. матем. 66:6. 2002. С. 19-–48.
18. D. Kinderlehrer, G. Stampacchia *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications* // Academic Press. 1979.
19. M. Balabane, J. Dolbeault, H. Ounaies *Nodal solutions for a sublinear elliptic equation* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods, Applications. 52. 2003. P. 219–237.
20. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Том 1. Общая теория.* М.: ИЛ, 1962.
21. M. Willem *Minimax Theorems.* Birkhauser, Boston, 1996.
22. M.N. Vrahatis *A short proof and a generalization of Miranda's existence theorem* // Proc. Amer. Math. Soc. 107:3. 1989. P. 701–703.

Владимир Евгеньевич Бобков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `bobkovve@gmail.com`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 31-42.

УДК 517.968.4+517.968.74

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С НЕКОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУПРЯМОЙ

М.Ф. БРОЯН, Х.А. ХАЧАТРЯН

Аннотация. Статья посвящена исследованию некоторых классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами Гаммерштейнского типа. Указанные уравнения имеют важное применение в кинетической теории газов и в теории распределения дохода в однопродуктовой экономике.

Ключевые слова: интегральное уравнение, оператор Гаммерштейна, пространство Соболева, сходимость, монотонность.

1. Введение

Работа посвящена вопросу разрешимости в определенных функциональных пространствах для следующих классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактным оператором типа Гаммерштейна-Винера-Хопфа:

$$f(x) = \int_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f(t))dt + \int_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f(t))dt, \quad x > 0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} + \lambda\varphi(x) = \displaystyle\int_0^\infty T(x-t)H(t,\varphi(t))dt + \int_0^\infty T_1(x+t)H_1(t,\varphi(t))dt, \quad x>0, & (2) \\ \varphi(0) = 0 & (3) \end{cases}$$

относительно искомых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно.

Указанные классы уравнений, кроме самостоятельного математического интереса, имеют непосредственное применение в кинетической теории газов (уравнение (1)), в эконометрике (задача (2)-(3)) (см. [1]-[4]).

В уравнении (1)

$$K_0(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad K_0 \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K_0(x)dx = 1, \tag{4}$$

$$K_1(x) \geq 0, \quad K_1 \not\equiv 0, \quad \int_x^\infty K_1(\tau)d\tau \leqslant \int_x^\infty K_0(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv (0, +\infty). \tag{5}$$

M.F. Broyan, Kh.A. Khachatryan, On some nonlinear integral and integro-differential equations with noncompact operators on positive semi axis.

Поступила 25 января 2012 г.

В задаче (2)-(3): λ — положительный числовой параметр уравнения (2), а ядра T и T_1 удовлетворяют следующим условиям:

$$T_1(x) \geq 0, \quad T_1 \not\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad T_1 \in L_1(\mathbb{R}^+), \tag{6}$$

$$T(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad T \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T(x)dx = \lambda, \tag{7}$$

$$\int\limits_x^\infty T_1(z)dz \leqslant \int\limits_x^\infty T(z)dz, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{8}$$

$$\nu(T) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau T(\tau)d\tau < -1, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j T(\tau)d\tau < +\infty, \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

N_0, N_1, H и H_1– определенные на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ вещественнозначные функции, удовлетворяющие определенным условиям (см. Теоремы 1-3).

В линейном случае, когда $N_0(t,z) \equiv N_1(t,z) \equiv z$, изучению и решению уравнения (1) были посвящены многочисленные работы (см. [5]–[8] и ссылки в них).

В случае, когда $K_0(x) = K_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ и $N_0(t,z) = N_1(t,z) = z^p$, $p \in (0,1)$, уравнение (1) в связи с важным применением в $p-$адической теории струны исследовалось в работах (см. [9]-[12]).

В том случае, когда $N_0(t,z) \equiv G(z)$, $N_1(t,z) \equiv G_1(z)$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ (где $G, G_1 \in C[0,\eta]$, $G(z) \geq z$, $G_1(z) \geq 0$, $z \in [0,\eta]$, $G, G_1 \uparrow$ на $[0,\eta]$ и $G(\eta) = G_1(\eta) = \eta$ при некотором $\eta > 0$,) уравнение (1) исследовалось в работе [13], и там доказано существование положительного и ограниченного решения с пределом η в бесконечности.

В случае, когда $N_0(t,z) \equiv z - \omega(z), N_1(t,z) \equiv 0$, а $K_0(-x) = K_0(x)$, $x > 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^j K_0(x)dx < +\infty$, $j = 1, 2$, где $0 \leqslant \omega \downarrow$ по z на $[A, +\infty)$, $A > 0$, $\omega \in C[A, +\infty) \cap L_1(0, +\infty)$, в работе [14] было доказано существование однопараметрического семейства положительных решений с асимптотическим поведением $O(x)$ при $x \to +\infty$. В дальнейшем этот результат был обобщен сперва на случай $\nu(K_0) \leqslant 0$, $N_0(t,z) \equiv \mu(t)(z - \overset{\circ}{\omega}(t,z))$, $N_1(t,z) \equiv z$ (где $0 < \mu(t) \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}^+, 1 - \mu \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\overset{\circ}{\omega}(t,z) \geq 0$, $\overset{\circ}{\omega}(t,z) \leqslant \omega(z)$, $(t,z) \in \mathbb{R}^+ \times [A, +\infty)$, $\overset{\circ}{\omega} \downarrow$ по z на $[A, +\infty)$) в работах [15, 16], а после этого, в случаях $N_0(t,z) \equiv \mu(t)(G(z) - \overset{\circ}{\omega}(t,z))$, $N_1(t,z) \equiv G_1(z)$ в [17, 18].

Задача (2)-(3), в том случае, когда $H(t,z) = G(z)$, $H_1 \equiv 0$, сравнительно недавно была изучена в работе [19]. В [19] построено неотрицательное и монотонно возрастающее ненулевое решение из пространства Соболева $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$.

В настоящей работе мы будем заниматься построением ненулевых и неотрицательных решений для уравнений (1) и (2) при совершенно других условиях на N_0, N_1, H и H_1. Отметим также, что решение уравнения (1) при различных значениях $\nu(K_0)$ строится в пространствах $L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$ и $L^0_\infty(\mathbb{R}^+) \equiv \{\varphi(x) : \varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^+), \ \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0\}$, а решение задачи (2)-(3) при условиях (6)-(9)-в пространстве Соболева $W^1_1(\mathbb{R}^+)$.

2. Разрешимость уравнения (1) в случае отрицательности первого момента ядра K_0

Пусть для функций $N_0(t,z)$ и $N_1(t,z)$ существуют числа $\eta > 0$ и $\eta_0 \in (0,\eta)$, такие, что

1) $N_0(t,z), N_1(t,z) \uparrow$ по z на $[\Phi_{\eta_0}(t),\eta]$, при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$, где

$$\Phi_{\eta_0}(t) \equiv \eta_0 \int\limits_t^\infty K_1(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{10}$$

2) N_0 и N_1 удовлетворяют условию Каратеодори на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, по аргументу z. Это условие в дальнейшем вкратце запишем в следующем виде:

$$N_0, N_1 \in Carat_z(\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]), \tag{11}$$

$$3) \quad N_0(t,0) \equiv 0, \quad N_1(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{12}$$

$$4) \quad 0 \leqslant N_0(t,z) \leqslant z, \quad (t,z) \in \mathbb{R}^+ \times [\Phi_{\eta_0}(t),\eta] \tag{13}$$

$$5) \quad N_1(t,\Phi_{\eta_0}(t)) \geq \eta_0, \quad N_1(t,\eta) \leqslant \eta. \tag{14}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть ядра* K_0 *и* K_1 *удовлетворяют условиям* (4)-(5), *причем* $\nu(K_0) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau K_0(\tau)d\tau < 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j K_0(\tau)d\tau < +\infty$, $j = 1,2$. *Тогда уравнение* (1) *в пространстве* $L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$ *имеет положительное решение.*

Доказательство. Сперва рассмотрим интегральное уравнение Винера-Хопфа:

$$S(x) = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)S(t)dt, \quad x > 0 \tag{15}$$

относительно искомой вещественной и измеримой функции $S(x)$, ядро K_0 которого удовлетворяет условиям теоремы 1.

Как известно (см.[20]), для уравнения (15) существует положительное и ограниченное решение со следующими свойствами:

$$S(x) \geq \eta(1-\gamma_+), \quad S(x) \uparrow \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+ \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \eta, \tag{17}$$

$$\gamma_+ \equiv \int\limits_0^\infty v_+(x)dx \in (0,1). \tag{18}$$

Здесь функции $v_\pm(x) \geq 0$ $v_\pm(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)-$ определяются из нелинейных уравнений факторизации Н.Б. Енгибаряна:

$$v_\pm(x) = K_0(\pm x) + \int\limits_0^\infty v_\mp(t)v_\pm(x+t)dt, \quad x > 0, \tag{19}$$

причем

$$\gamma_- \equiv \int\limits_0^\infty v_-(x)dx = 1, \quad \gamma_+ \in (0,1). \tag{20}$$

В недавней работе автора (см.[21]), в качестве вспомогательного утверждения, доказаны следующие дополнительные свойства функции $S(x)$:

$$\eta - S(x) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+), \tag{21}$$

$$\eta - S(x) \geq \eta \int\limits_x^\infty K_0(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{22}$$

Включение (21) и неравенство (22) в дальнейших рассуждениях нам понадобятся. Теперь введем следующие последовательные приближения:

$$f_0(x) = \eta - S(x), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} f_{n+1} = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f_n(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_n(t))dt, \\ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{24}$$

Индукцией по n докажем следующие свойства последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$:

$$a) \quad f_n(x) \downarrow \text{по} \quad n, \qquad b) \quad f_n(x) \geq \Phi_{\eta_0}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Заметим, что из (22) с учетом того, что $\eta_0 \in (0, \eta)$, непосредственно следует

$$\eta \geq f_0(x) \geq \eta \int\limits_x^\infty K_0(\tau)d\tau \geq \eta_0 \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau = \Phi_{\eta_0}(x). \tag{26}$$

В силу свойств функций N_0 и N_1 с учетом (26), в (24) получим

$$f_1(x) = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, \eta - S(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \eta - S(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)(\eta - S(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \eta)dt \leqslant$$

$$\leqslant \eta \int\limits_{-\infty}^x K_0(\tau)d\tau - \int\limits_0^\infty K_0(x-t)S(t)dt + \eta \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau \leqslant \eta - S(x) = f_0(x),$$

$$f_1(x) \geq \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_0(t))dt \geq \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \Phi_{\eta_0}(t))dt \geq$$

$$\geq \eta_0 \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau = \Phi_{\eta_0}(x).$$

Предположим теперь, что $\Phi_{\eta_0}(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, $\quad x \in \mathbb{R}^+$. Тогда, из (24) с учетом монотонности N_0 и N_1 и свойства (14), будем иметь:

$$f_{n+1}(x) \leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f_{n-1}(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_{n-1}(t))dt = f_n(x),$$

$$f_{n+1}(x) \geq \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \Phi_{\eta_0}(t))dt \geq \Phi_{\eta_0}(x).$$

Следовательно, последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Из условия (11), с учетом предельной теоремы Лебега (см.[22]), следует, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Кроме того, свойства (25) влекут следующие неравенства для предельной функции $f(x)$:

$$\Phi_{\eta_0}(x) \leqslant f(x) \leqslant \eta - S(x). \tag{27}$$

Так как $\eta - S(x) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$, то из (27) получаем, что $f(x) > 0$, $f \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$. **Теорема доказана.**

3. Разрешимость уравнения (1) в случае четного ядра K_0

Теперь займемся решением уравнения (1) при других предположениях относительно функций N_0 и N_1, в случае, когда

$$K_0(-x) = K_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{28}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть для некоторой измеримой функции $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ζ и $\eta-$ первые положительные корни уравнений $Q(x) = 2x$ и $Q(x) = x$ соответственно, причем $2\zeta < \eta$, $Q \in C[0,\eta]$, $Q(x) \uparrow$ по x на $[0,\eta]$. Предположим, что*
a) $0 \leqslant N_0(t,z) \leqslant \eta - Q(\eta - z)$, *при* $(t,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$,
b) $N_0, N_1 \in Carat_z(\mathbb{R}^+ \times [0,\eta])$,
c) $N_0, N_1 \uparrow$ *по* z *на отрезке* $[0,\eta]$ *при каждом фиксированном* $t \in \mathbb{R}^+$,
d) *существует* $\eta_0 \in (0,\eta)$, *такое что*

$$N_1(t, \Phi_{\eta_0}(t)) \geq \eta_0, \quad N_1(t,\eta) \geq \eta.$$

Тогда при условиях (4), (5), (28) уравнение (1) в пространстве $L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$ имеет положительное решение.

Доказательство. Сначала рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейновского типа:

$$\psi(x) = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)Q(\psi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{29}$$

относительно искомой функции $\psi(x)$. Введем следующие итерации:

$$\psi_{n+1}(x) = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)Q(\psi_n(t))dt, \quad \psi_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{30}$$

В силу свойств функций Q и K_0 индукцией по n нетрудно убедиться, что

$$\psi_n(x) \quad \downarrow \text{по} \quad n, \quad \psi_n(x) \geq \zeta, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, последовательность функций $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x)$, причем предельная функция по теореме Б. Леви будет удовлетворять уравнению (29) и соотношению

$$\zeta \leqslant \psi(x) \leqslant \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{31}$$

Индукцией также можно доказать, что

$$\psi_n(x) \quad \uparrow \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{32}$$

если итерации (30) записать в следующем виде:

$$\psi_{n+1}(x) = \int\limits_{-\infty}^x K_0(\tau)Q(\psi_n(x-\tau))d\tau, \quad \psi_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{33}$$

Следовательно, с учетом (32) получаем, что

$$\psi(x) \quad \uparrow \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+. \tag{34}$$

Таким образом, в силу (31) и (34) можем утверждать, что существует

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) \equiv \eta^* \leqslant \eta, \quad \eta^* > 0. \tag{35}$$

В обеих частях в (29), переходя к пределу когда $x \to \infty$, с использованием известного свойства операций в свертках, с учетом формулы (4) получим $\eta^* = Q(\eta^*)$. Так как η– первый положительный корень уравнения $Q(x) = x$ и $0 < \eta^* \leqslant \eta$, то $\eta^* = \eta$.

Следовательно,

$$0 \leqslant \eta - \psi \in L_\infty^0(\mathbb{R}^+). \tag{36}$$

Теперь докажем следующее вспомогательное неравенство:

$$\eta - \psi(x) \geq \eta \int_x^\infty K_0(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{37}$$

Из (29), с учетом (4) и свойств функции Q имеем

$$\eta - \psi(x) = \eta - \int_0^\infty K_0(x-t)Q(\psi(t))dt = \eta \int_x^\infty K_0(\tau)d\tau + \eta \int_{-\infty}^x K_0(\tau)d\tau -$$

$$-\int_0^\infty K_0(x-t)Q(\psi(t))dt = \eta \int_x^\infty K_0(\tau)d\tau + \int_0^\infty K_0(x-t)(Q(\eta) - Q(\psi(t)))dt \geq \eta \int_x^\infty K_0(t)dt.$$

Теперь для уравнения (1) рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f_n(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_n(t))dt, & (38) \\ f_0(x) = \Phi_{\eta_0}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad x \in \mathbb{R}^+. & (39) \end{cases}$$

Сперва по индукции докажем, что

$$f_n(x) \quad \uparrow \text{по} \quad n. \tag{40}$$

Так как

$$0 \leqslant f_0(x) \leqslant \eta \int_x^\infty K_1(z)dz \leqslant \eta \int_x^\infty K_0(z)dz,$$

то

$$f_1(x) \geq \int_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_0(t))dt \geq \Phi_{\eta_0}(x) \equiv f_0(x),$$

$$f_1(x) \leqslant \int_0^\infty K_0(x-t)N_0(t,\eta)dt + \int_0^\infty K_1(x+t)N_1(t,\eta)dt \leqslant \eta \int_{-\infty}^x K_0(\tau)d\tau +$$

$$+\eta \int_x^\infty K_1(\tau)d\tau \leqslant \eta.$$

Предполагая, что $\eta \geq f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, из (38), в силу условий c) и d), будем иметь:

$$f_{n+1}(x) \geq \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f_{n-1}(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_{n-1}(t))dt = f_n(x)$$

и

$$f_{n+1}(x) \leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t,\eta)dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t,\eta)dt \leqslant \eta.$$

Теперь убедимся в справедливости следующего неравенства

$$f_n(x) \leqslant \eta - \psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{41}$$

Действительно, при $n = 0-$ (41) сразу следует из (37). Пусть $f_n(x) \leqslant \eta - \psi(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (38), с учетом условий a) и d) теоремы 2, получим

$$f_{n+1}(x) \leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, \eta - \psi(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \eta - \psi(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)(\eta - Q(\psi(t)))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t,\eta)dt \leqslant$$

$$\leqslant \eta \int\limits_{-\infty}^x K_0(\tau)d\tau - \psi(x) + \eta \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau \leqslant \eta - \psi(x).$$

Следовательно, из (40) и (41) получаем поточечную сходимость последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем

$$0 \leqslant \Phi_{\eta_0}(x) \leqslant f(x) \leqslant \eta - \psi(x) \in L_\infty^0(\mathbb{R}^+), \quad x > 0. \tag{42}$$

По теореме Б. Леви $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Из (42) следует, что $f \in L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Результаты теоремы 2 остаются в силе, если вместо условия (28) потребовать более слабое условие: $\int\limits_{-\infty}^0 K_0(\tau)d\tau \geq \dfrac{1}{2}$.

4. Примеры функций N_0, N_1 и Q

Ниже приведем несколько примеров функций N_0, N_1 и Q в зависимости от условий выше доказанных теорем.

Примеры для теоремы 1.

I) $N_0(t,z) \equiv h(t,z)\widetilde{N}(z)$, где функция $h-$ непрерывна по совокупности своих аргументов на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, $0 \leqslant h(t,z) \leqslant 1$, $(t,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, $h \uparrow$ по z на $[0,\eta]$, $\widetilde{N} \in C[0,\eta]$, $\widetilde{N} \uparrow$ по z на $[0,\eta]$, $0 \leqslant \widetilde{N}(z) \leqslant z$, $z \in [0,\eta]$. В качестве функций h и $\widetilde{N}$ можно выбрать следующие примеры:

- $h(t,z) = ze^{-z} \cdot sin^2 t, \quad \widetilde{N}(z) = z^p, \quad p > 1, \quad \eta = 1.$
- $h(t,z) = \eta e^{\frac{z}{\eta}-1}, \quad \widetilde{N}(z) = sinz.$

II)

$$N_1(t,z)=\frac{\alpha z}{z+(\frac{\alpha}{\eta_0}-1)\Phi_{\eta_0}(t)},\quad \eta>\alpha>\eta_0>0, \tag{43a}$$

$$N_1(t,z)=\frac{\alpha z}{z+(\frac{\alpha}{\eta_0}-1)\Phi_{\eta_0}(t)}+\frac{1}{2\eta^{p-1}}z^p,\quad p>1,\quad \eta\geq 2\alpha,\quad \alpha>\eta_0. \tag{43b}$$

Примеры для теоремы 2.
III) $Q(z)=\frac{z^\alpha}{\eta^{\alpha-1}},\quad \alpha\in(0,1),$

IV) $Q(z)=\eta e^{\frac{z}{\eta}-1}$

V) $Q(z)=\sqrt{ze^{z-1}},\quad \eta=1$

VI) $N_0(t,z)=\dfrac{(\eta-Q(\eta-z))^\beta}{\eta^{\beta-1}},\quad \beta\geq 1$

VII) $N_0(t,z)=sin(\eta-Q(\eta-z))$
В качестве $N_1(t,z)$ в теореме 2 можно рассматривать примеры $(43a)$ и $(43b)$.

5. О разрешимости задачи (2)-(3) в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть функция $H(t,z)$ в уравнении (2) удовлетворяет всем условиям функции $N_0(t,z)$ теоремы 1, а $H_1(t,z)$ — определенная на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ вещественная функция, причем существуют положительные числа $\eta>0$, $\eta_0\in(0,\eta)$, $\xi\in(0,\frac{1}{\lambda})$, $\theta\in(0,1)$ такие, что*

$$i_1)\quad H_1(t,\xi\rho_{\eta_0}^\sigma(t))\geq\eta_0,\quad H_1(t,\eta)\leqslant\eta, \tag{44}$$

где

$$\rho_{\eta_0}^\sigma(t)=\eta_0\int\limits_{t+\sigma}^{\infty}T_1(z)dz,\quad \sigma=\frac{1}{\lambda\theta}ln\frac{1}{1-\lambda\xi} \tag{45}$$

$$i_2)\quad H_1(t,0)\equiv 0,\quad H_1\in Carat_z(\mathbb{R}^+\times[0,\eta]). \tag{46}$$

$i_3)$ $H_1(t,z)\uparrow$ *по* z *на* $[0,\eta]$ *при каждом фиксированном* $t\in\mathbb{R}^+$.
Тогда при условиях (6)–(9) задача (2)-(3) в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ имеет неотрицательное и нетривиальное решение.

Доказательство. Введем следующую функцию:

$$K_0(x)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}T(x-z)dz,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{47}$$

В силу теоремы Фубини, функция $K_0(x)$ обладает следующими "замечательными" свойствами:

$$K_0(x)\geq 0,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_0(x)dx=1,\quad K_0\in L_1(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R}), \tag{48}$$

$$\nu(K_0)<0,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau^2K_0(\tau)d\tau<+\infty. \tag{49}$$

Докажем справедливость следующего неравенства для $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_x^\infty K_0(t)dt \geq \frac{1}{\lambda}\int_x^\infty T(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{50}$$

Имеем

$$\int_x^\infty K_0(t)dt = \int_x^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda z}T(t-z)dzdt = \int_0^\infty e^{-\lambda z}\int_x^\infty T(t-z)dtdz =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda z}\int_{x-z}^\infty T(y)dydz \geq \frac{1}{\lambda}\int_x^\infty T(t)dt.$$

Рассмотрим однородное уравнение Винера-Хопфа:

$$S(x) = \int_0^\infty K_0(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{51}$$

с ядром вида (47). Как уже было отмечено из (48), (49) следует существование положительного решения со свойствами (16), (17), (21), (22).

Обозначим через

$$F(x) = \frac{d\varphi}{dx} + \lambda\varphi(x). \tag{52}$$

Тогда уравнение (2)(с начальным условием (3)) примет следующий вид:

$$\begin{gathered} F(x) = \int_0^\infty T(x-t)H\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F(\tau)d\tau\right)dt + \\ + \int_0^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F(\tau)d\tau\right)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{53}$$

Рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{gathered} F_{n+1}(x) = \int_0^\infty T(x-t)H\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F_n(\tau)d\tau\right)dt + \\ + \int_0^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F_n(\tau)d\tau\right)dt \\ F_0(x) = \lambda(\eta - S(x)), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{54}$$

Ниже докажем, что

$$j_1) \quad F_n(x) \downarrow \text{по} \quad n, \tag{55}$$

$$j_2) \quad F_n(x) \geq \rho^\sigma_{\eta_0}(x), \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{56}$$

В силу (22) и (50) имеем

$$F_0(x) = \lambda(\eta - S(x)) \geq \lambda\eta\int_x^\infty K_0(t)dt \geq \eta\int_x^\infty T(t)dt \geq \eta\int_x^\infty T_1(t)dt \geq$$

$$\geq \eta_0\int_{x+\sigma}^\infty T_1(t)dt = \rho^\sigma_{\eta_0}(x).$$

Отсюда, в частности, следует также, что

$$\rho^{\sigma}_{\eta_0}(x) \leqslant \lambda\eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{57}$$

Используя свойства функций H, H_1, T и T_1, будем иметь:

$$F_1(x) \leqslant \int\limits_0^\infty T(x-t)H\left(t, \eta - \lambda\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}S(\tau)d\tau\right)dt + \int\limits_0^\infty T_1(x+t)H_1(t,\eta)dt \leqslant$$

$$\leqslant \eta\int\limits_0^\infty T(x-t)dt - \lambda\int\limits_0^\infty T(x-t)\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}S(\tau)d\tau dt + \eta\int\limits_x^\infty T_1(z)dz \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\eta - \lambda\int\limits_0^\infty K_0(x-\tau)S(\tau)d\tau = \lambda(\eta - S(x)) = F_0(x).$$

Пусть $F_n(x) \geq \rho^{\sigma}_{\eta_0}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

Тогда, с учетом (44), (45), i_3) и монотонности $H(t,z)$, из (54) получим

$$F_{n+1}(x) \geq \int\limits_0^\infty T(x-t)H\left(t, \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\rho^{\sigma}_{\eta_0}(\tau)d\tau\right)dt +$$

$$+\int\limits_0^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\rho^{\sigma}_{\eta_0}(\tau)d\tau\right)dt \geq$$

$$\geq \int\limits_0^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\rho^{\sigma}_{\eta_0}(\tau)d\tau\right)dt \geq$$

$$\geq \int\limits_\sigma^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \int\limits_{(1-\theta)\sigma}^t e^{-\lambda(t-\tau)}\rho^{\sigma}_{\eta_0}(\tau)d\tau\right)dt \geq$$

$$\geq \int\limits_\sigma^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \rho^{\sigma}_{\eta_0}(t)\int\limits_{(1-\theta)\sigma}^\sigma e^{-\lambda(\sigma-\tau)}d\tau\right)dt \geq$$

$$\geq \int\limits_\sigma^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \rho^{\sigma}_{\eta_0}(t)\frac{(1-e^{-\lambda\theta\sigma})}{\lambda}\right)dt =$$

$$= \int\limits_\sigma^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \xi\rho^{\sigma}_{\eta_0}(t)\right)dt \geq \eta_0\int\limits_{x+\sigma}^\infty T_1(y)dy = \rho^{\sigma}_{\eta_0}(x).$$

Пусть $F_n(x) \leqslant F_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из монотонности H и H_1 сразу следует, что $F_{n+1} \leqslant F_n$. Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \tag{58}$$

причем $F(x)-$ удовлетворяет уравнению (53) и оценкам

$$\rho^{\sigma}_{\eta_0}(x) \leqslant F(x) \leqslant \lambda(\eta - S(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+). \tag{59}$$

Из (59) следует,что $F \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$.

Решая следующую простейшую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} + \lambda\varphi(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{60}$$

приходим к завершению доказательства. **Теорема доказана.**

Замечание 2. Поскольку решение задачи (60) имеет вид

$$\varphi(x) = \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)} F(t)dt,$$

то из (59) для $\varphi(x)$ получаем следующую двойную оценку:

$$\int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)} \rho_{\eta_0}^{\sigma}(t)dt \leqslant \varphi(x) \leqslant \lambda \int\limits_0^x e^{-\lambda(x-t)}(\eta - S(t))dt.$$

В конце работы приведем два примера $H_1(t,z)$:

$$1) \quad H_1(t,z) = \frac{\alpha z}{z + (\frac{\alpha}{\eta_0} - 1)\rho_{\eta_0}^{\sigma}(t)}, \quad \eta > \alpha > \eta_0 > 0,$$

$$2) \quad H_1(t,z) = \frac{\alpha z}{z + (\frac{\alpha}{\eta_0} - 1)\rho_{\eta_0}^{\sigma}(t)} + \frac{1}{2\eta^{p-1}} z^p, \quad p > 1, \quad \eta \geq 2\alpha, \quad \alpha > \eta_0.$$

В заключение выражаем благодарность проф. Н.Б. Енгибаряну и проф. В.Н. Маргаряну за полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М.Н. *Динамика разреженного газа.* Москва Изд."Наука"1962г, 440 с.
2. Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х. *О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в БГК модели* // ТМФ. Т. 119, №2. 2000. С. 339–342.
3. I.D. Sargan *The distribution of wealt. Econometrics* // 1957. V. 25, №4. P. 568–590.
4. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. *Об одном интегро-дифференциальном уравнении в задаче распределения богатства Саны* // Экономика и математические методы, ЦЭМИ РАН. 2009. Т. 45,№4. С. 84–96.
5. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* М. Изд."Наука". 1978. 295 с.
6. Енгибарян Б.Н. *Применение многократной факторизации к однородному уравнению свертки* // Известия НАН Армении, Математика. 1997. Т. 32,№1. С. 38–48.
7. Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х. *О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории* // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38, №3. С. 466–482.
8. Енгибарян Н.Б., Арабаджян Л.Г. *О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки* // Дифф.уравнения. 1990. Т. 26, №1, С. 1442–1452.
9. Владимиров В.С. *Об уравнении* р *-адической открытой Суны для скалярного поля тахинов* // Известия РАН, сер.матем., 2005. Т. 69, №3. С. 55–80.
10. V.S. Vladimirov, Y.I. Volovich *Nonlinear Dynamics equation in p-adic string theory* // Theoretical and Mathematical physics. 2004. V. 138, №3. P. 355–368.
11. P.H. Framton, Y. Okada *Effective scalar field theory of p-adic string* // Phys. Rev. D. 2004. V. 37, №10. P. 3077–3079.
12. V.S. Vladimirov *The equation of p-adic closed string for the scalar tachyon field* // Science in China, ser.A, Mathematics. 2008. V. 51, №4. P. 754–764.
13. A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan *On convolution type nonlinear integral equations, containing singular and discrete probability distributions* // Advances and Applications in Mathematical Sciences. India. 2010. V.5, №1, P. 1–16.
14. Арабаджян Л.Г. *Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна* // Известия НАН Армении, Математика. 1997. Т. 32, №1. С. 21–28.

15. A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan *On solvability of one class Hammerstein nonlinear integral equations* // Buletinul Academiei Stinte a Republici Moldova, Mathematica. 2010. V. 63, №2. P. 67–83.
16. Хачатрян Х.А. *Существование и асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений Урысона на полуоси* // Вестник РАУ. 2009. Т. 3, №2. С.15–25.
17. Хачатрян Х.А. *Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором* // Известия НАН Армении, Математика. 2011. Т. 46, №2. С.71–86.
18. Хачатрян Х.А. *Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью* // Известия РАН, сер.Математическая. 2012. Т. 76, №1. С. 173–200.
19. Хачатрян Х.А., Хачатрян Э.А. *О разрешимости некоторых классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с некомпактным оператором* // Известия Вузов, Математика. 2011. Т. 54, №1. С. 91–100.
20. Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б. *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники* // Математический анализ. 1984. Т. 22. С. 175–242.
21. A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan *On Solvability of a nonlinear problem in theoty of income distribution* // Eurasian Math. J. 2011. V. 2, №2. P. 75–88.
22. Колмогоров А.Н., Фомин В.С. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Москва, "Наука". 1981. 544 с.

Марине Фирдусовна Броян,
Армянский Гос.Агр.Университета,
ул. Ул. Теряна 74,
0019, г. Ереван
E-mail: `Broyan@rambler.ru`

Хачатур Агавардович Хачатрян,
Институт Математики НАН Армении,
Проспект Маршала Баграмяна 24/5,
0019, г. Ереван
E-mail: `Khach82@rambler.ru`

УДК 517.5, 517.9

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И СТЕПЕННЫМИ ВЕСАМИ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО СЕМЕЙСТВА НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

Р.Г. НАСИБУЛЛИН, А.М. ТУХВАТУЛЛИНА

Аннотация. В данной работе получены вариационные неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами, которые являются обобщениями соответствующих неравенств, представленных ранее в статьях М. Хоффман-Остенхоф, Т. Хоффман-Остенхоф, А. Лаптева и Ж. Тидблома. Мы формулируем и доказываем неравенства, справедливые для произвольных областей, затем существенно упрощаем их для класса выпуклых областей и специального семейства невыпуклых областей.

Ключевые слова: неравенства типа Харди, выпуклые области, регулярные области, функция расстояния, итерация логарифмов

Mathematics Subject Classification: 26D15.

1. Введение. Вариационные неравенства представляют собой важный инструмент решения задач математической физики. В настоящей работе мы рассматриваем вариационные неравенства типа Харди. Неравенства Харди используются в теории вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, спектральной теории, нелинейном анализе и теории интерполяции. Так, например, Ю. А. Дубинским в статье [1] показано, что корректная постановка решения задачи Пуассона эквивалентна выполнению соответствующего неравенства Харди. Применение неравенств типа Харди также описано в работах А. Лаптева, Т. Вейдла, А. Балинского, А. Соболева, М. Соломяка, Е. Дэвиса [2]–[6].

Исследованию и доказательству неравенств типа Харди посвящено множество научных работ (в частности недавние статьи Ф.Г. Авхадиева, К.-Й. Виртса, Е. Дэвиса, М. Маркуса, Х. Брэзиса, М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптева, Ж. Тидблома, Ж. Барбатиса, С. Филиппаса, А. Тертикаса [4]–[16]).

Неравенство типа Харди, доказанное Ж. Тидбломом в статье [15], для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ и произвольной функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p > 1)$ имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p dx \geq \frac{c_p \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu) dx}{\rho_\nu^p(x)} + (p-1) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{p}{n}}} dx \right), \tag{1}$$

R.G. Nasibullin, A.M. Tukhvatullina, Hardy type inequalities with logarithmic and power weights for a special family of non-convex domain.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00762).

Поступила 30 марта 2012 г.

где $\Omega_x := \{y \in \Omega : x + t(y - x) \in \Omega, \forall t \in [0,1]\}$, $|\Omega_x|$ – мера области Ω_x, $\rho_\nu(x)$ – расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы области Ω по направлению вектора $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ есть площадь поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, $d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)$ – элемент площади поверхности единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $d\omega(\nu) = \dfrac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{|\mathbb{S}^{n-1}|}, c_p = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p$.

Отметим, что неравенство (1) является распространением соответствующего неравенства, доказанного М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптевым в статье [14] для $p = 2$, на случай произвольного $p > 1$. В настоящей работе мы обобщаем неравенство (1) для функций пространства $C_0^\infty(\Omega)$ следующим образом:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u)|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) dx \geq$$

$$\geq a(p,s) \int\limits_\Omega |u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu) dx}{\rho_\nu^s(x)} + a(p,s)(p-1) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s}{n}}} dx, \tag{2}$$

где $p \geq s \geq 1$ и $a(p,s) = \left(\frac{s-1}{p}\right)^p$.

Очевидно, при $s = p$ последнее неравенство преобразуется в неравенство (1), а при $s = p = 2$ – в неравенство, доказанное М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптевым в [14].

В статье [15] также доказано, что в случае выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ неравенство (1) может быть существенно упрощено. А именно, (1) можно записать в виде

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p dx \geq c_p \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^p(x)} dx + \frac{c_p(p-1)\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{n+p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{p}{n}} \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx. \tag{3}$$

Доказанное нами неравенство (2) также может быть существенно упрощено для выпуклых областей:

$$\int\limits_\Omega \frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)} \geq a(p,s) \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)} + a(p,s)(p-1) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_\Omega |u(x)|^p dx. \tag{4}$$

В настоящей работе мы также представляем специальный класс невыпуклых областей (см. [5], [21], [22] и [23]), для которого справедливы аналоги неравенства (4).

В заключительной части статьи мы доказываем логарифмические неравенства, которые являются аналогами неравенств из [14] и [16]. Неравенство, доказанное в [14], для выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta(x)^2} \left(1 + \frac{1}{(1 - \ln(\alpha\delta(x)/D))^2}\right) dx +$$

$$+ \frac{n^{(n-2)/n} s_{n-1}^{2/n} \ln^2(\alpha/2)}{4(1 - \ln(\alpha/2))^2} \frac{1}{|\Omega|^{2/n}} \int\limits_\Omega |u(x)|^2 dx. \tag{5}$$

Особенностью доказанных нами логарифмических неравенств является наличие в них вложенных логарифмов и экспонент. Примеры использования логарифмов в неравенствах можно увидеть в работах [11], [12], [14], [17] – [19] и [20]. Отметим, что обобщение неравенства (5) с использованием вложенных логарифмов было получено ранее в работе [16]. Мы же получили неравенство для класса регулярных областей с логарифмическим весом другого вида. А, именно, мы доказали, что для произвольной регулярной с константой c области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ верно неравенство

$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \geq \frac{n}{2c^2} \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)} \left(1 + \sum_{i=0}^{k} \varphi_0^2 \left(\frac{\alpha\delta}{D}, e_k\right) \cdot ... \cdot \varphi_i^2 \left(\frac{\alpha\delta}{D}, e_k\right)\right) dx +$$

$$+ \left[1 - \sum_{i=0}^{k} \varphi_0(\frac{\alpha}{2}, e_k) \cdot ... \cdot \varphi_i(\frac{\alpha}{2}, e_k)\right]^2 \frac{n^{(n-2)/2}}{4} s_{n-1}^{2/n} \frac{1}{|\Omega|^{2/n}} \int_\Omega |u(x)|^2 dx,$$

где

$$e_0 = 1, \quad e_{k+1} = \exp e_k; \quad \ln_0 x = x, \quad \ln_{k+1}(x) = \ln \ln_k(x),$$

$$\varphi_i(x, e_k) = \frac{1}{(e_k - \ln x)\ln(e_k - \ln x) \cdot ... \cdot \ln_i(e_k - \ln x)}, \ i \leqslant k.$$

Последнее утверждение при $k = 0$ дает неравенство (5).

2. Одномерные неравенства. Докажем одномерные неравенства, которые будут использованы нами впоследствии для доказательства неравенств в многомерном случае. Введем необходимые определения и обозначения.

Пусть f определена и дифференцируема на $(0, b]$ для $b > 0$. Следуя Ж. Тидблому (см. [15]), будем говорить, что $f \in \Phi_s(0, b)$, если f – действительнозначная функция и существует константа $C = C(f)$ такая что

$$\sup_{0<t\leqslant b} (t^{s-1}|f(t)| + t^s|f'(t)|) \leqslant C, \quad s > 1. \tag{6}$$

Несложно заметить, что условие (3) равносильно двум условиям:

$$\exists C_1 = C_1(f) : t^{s-1}|f(t)| \leqslant C_1, \ 0 < t \leqslant b, \tag{7}$$

и

$$\exists C_2 = C_2(f) : t^s|f'(t)| \leqslant C_2, \ 0 < t \leqslant b. \tag{8}$$

Лемма 1. *Пусть $u \in C^1[0, b], b > 0, u(0) = 0$ и $f \in \Phi_s(0, b)$. Тогда при $p \geq s > 1$ справедливо неравенство*

$$\int_0^b \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq \frac{1}{p^p} \frac{\left|\int_0^b f'(t)|u(t)|^p dt\right|^p}{\left(\int_0^b |f(t) - f(b)|^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}} |u(t)|^p\right)^{p-1}}.$$

Доказательство. В силу условий леммы для функции $u(t)$ имеем:

$$\exists M > 0 : |u(t)| \leqslant \int_0^t |u'(x)| dx \leqslant Mt, \ \forall t \in (0, b].$$

Учитывая при этом условие (8) и неравенство $p \geq s$, мы получим

$$|f'(t)||u(t)|^p \leqslant |f'(t)|M^p t^p \leqslant |f'(t)|t^s M^p t^{p-s} \leqslant C_2 M^p b^{p-s}.$$

Следовательно,

$$\int_0^b f'(t)|u(t)|^p dt \leqslant +\infty.$$

Заметим также, что

$$f(0)|u(0)|^p = \lim_{t\to 0} f(t)|u(t)|^p = \lim_{t\to 0} f(t)t^{s-1} \frac{|u(t)|^p}{t^{s-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{t\to 0} C_1 \frac{|u(t)|^p}{t^{s-1}} \leqslant C_1 \lim_{t\to 0} \frac{M^{p-1}t^{p-1}|u(t)|}{t^{s-1}} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \lim_{t\to 0} M^{p-1}t^{p-s}|u(t)| \leqslant C_1 M^{p-1} b^{p-s}|u(0)| = 0.$$

Для произвольной константы c имеем:

$$\left|(f(b)-c)|u(b)|^p - \int\limits_0^b f'(t)|u(t)|^p dt\right| = \left|\int\limits_0^b (f(t)-c)(|u(t)|^p)dt\right| =$$

$$= \frac{p}{2}\left|\int\limits_0^b (f(t)-c)(u^{\frac{p}{2}-1}\overline{u}^{\frac{p}{2}}u' + \overline{u}^{\frac{p}{2}-1}u^{\frac{p}{2}}\overline{u}')dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant p\int\limits_0^b |f(t)-c||u|^{p-1}|u'(t)|dt = p\int\limits_0^b \left[|f(t)-c|^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}} u^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}}\right]^{\frac{1}{p}} dt \leqslant$$

$$\leqslant p\left(\int\limits_0^b |f(t)-c|^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}} |u|^p dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_0^b \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}} dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Подставляя $c = f(b)$ и возводя обе части неравенства в степень p, получим требуемое неравенство.

Замечание. Для того чтобы интеграл в первом множителе последнего неравенства не имел особенностей, необходимы ограничения на s и p. При $p \geq s \geq 1$ интеграл в первом множителе последнего неравенства не имеет особенностей, так как верно неравенство

$$\frac{s-p}{p-1} + p \geq 0,$$

поскольку $|u(t)| \leqslant Mt$.

Приведем некоторые следствия леммы 1.

Следствие 1. *Пусть $u(t)$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы и $f(t) = \frac{t^{1-s}}{1-s}$. Тогда верно неравенство*

$$\int\limits_0^b \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq a(p,s) \frac{\left|\int\limits_0^b \frac{|u(t)|^p}{t^s} dt\right|^p}{\left(\int\limits_0^b |t^{1-s} - b^{1-s}|^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}} |u(t)|^p\right)^{p-1}},$$

где $a(p,s) = \left(\frac{s-1}{p}\right)^p$.

Следствие 2. *Пусть $u \in C^1[0,b], b > 0, u(0) = 0$. Тогда*

$$\int\limits_0^b \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}} dt \geq a(p,s)\left(\int\limits_0^b \left(\frac{p}{t^s} - (p-1)(t^{1-s} - b^{1-s})^{\frac{p}{p-1}} t^{\frac{s-p}{p-1}}\right)|u(t)|^p dt\right). \qquad (9)$$

Доказательство. Уравнение следует из следствия 1 и простого неравенства

$$\frac{A^p}{B^{p-1}} \geq pA - (p-1)B,$$

если положить

$$A = \int_0^b \frac{|u(t)|^p}{t^s} dt$$

и

$$B = \int_0^b |t^{1-s} - b^{1-s}|^{\frac{p}{p-1}} |u(t)|^p dt.$$

Лемма 2. *Пусть $u \in C_0^\infty(0, 2b), b > 0$. Тогда имеем*

$$\int\limits_0^{2b} \frac{|u'(t)|^p}{\rho(t)^{s-p}} dt \geq a(p,s) \left(\int\limits_0^{2b} \left(\frac{p}{\rho^s(t)} - (p-1)(\rho^{1-s} - b^{1-s})^{\frac{p}{p-1}} \rho^{\frac{s-p}{p-1}}(t) \right) |u(t)|^p dt \right),$$

где

$$\rho(t) = \operatorname{dist}(t, \mathbb{R} \setminus [0, 2b]) = \min(t, 2b - t).$$

Доказательство. Применим неравенство (9) к функции $u \in C^1[b, 2b]$ такой, что $u(2b) = 0$. Имеем

$$\int\limits_b^{2b} \frac{|u'(t)|^p}{(2b-t)^{s-p}} dt \geq a(p,s) \left(\int\limits_b^{2b} \left(\frac{p}{(2b-t)^s} - (p-1)((2b-t)^{1-s} - b^{1-s})^{\frac{p}{p-1}} (2b-t)^{\frac{s-p}{p-1}} \right) |u|^p dt \right).$$

Складывая полученное неравенство с неравенством (9), мы получим утверждение леммы.

Теорема 1. *Пусть $u \in C_0^\infty(a, b)$. Тогда мы имеем*

$$\int\limits_a^b \frac{|u'(t)|^p}{\rho(t)^{s-p}} dt \geq a(p,s) \left(\int\limits_a^b \frac{|u(t)|^p}{\rho^s(t)} dt - \frac{p-1}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^s} \int\limits_a^b |u(t)|^p dt \right). \tag{10}$$

Доказательство. Без ограничения общности мы можем взять за промежуток интегрирования отрезок $[0, 2b]$. Правую часть неравенства из леммы 2 можем переписать в следующем виде

$$a(p,s) \left(\int\limits_0^{2b} \frac{|u(t)|^p}{\rho(t)^s} dt + \int\limits_0^{2b} \frac{p-1}{\rho(t)^s} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{b} \right)^{s-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right) |u(t)|^p dt \right).$$

Здесь мы воспользовались равенством $s - \frac{p(s-1)}{p-1} + \frac{s-p}{p-1} = 0$.

Заметим, что $\rho(t) \leqslant b$. Следовательно,

$$\frac{1}{\rho(t)^s} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{b} \right)^{s-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} \right) \geq \frac{1}{\rho(t)^s} \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\rho(t)}{b} \right)^{s-1} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{\rho(t) b^s} \geq \frac{1}{b^s}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

3. Многомерные неравенства типа Харди для произвольных открытых областей. В этом разделе мы приведем многомерный аналог неравенства из теоремы 1.

Пусть Ω – открытая область в $\mathbb{R}^n$. Следуя М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптеву [14], обозначим через $\tau_\nu(x)$ – расстояние между точкой $x \in \Omega$ и ближайшей точкой, принадлежащей границе $\partial\Omega$ по направлению вектора $\nu \in \mathbb{S}^{n-1}$:

$$\tau_\nu(x) = \min\{s > 0 : x + s\nu \in \Omega\}.$$

Введем $\rho_\nu(x)$ – расстояние до границы множества по направлению ν и $D_\nu(x)$ – диаметр множества вдоль направления ν следующим образом

$$\rho_\nu(x) = \min\{\tau_{-\nu}(x), \tau_\nu(x)\}, \; D_\nu(x) = \tau_\nu(x) + \tau_{-\nu}(x).$$

Положим

$$\delta(x) = \inf_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \tau_\nu(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \ \Omega_x = \{y \in \Omega : x + t(y - x) \in \Omega, \forall t \in [0, 1]\}.$$

Теорема 2. *Для произвольной открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ верно следующее неравенство типа Харди:*

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) dx \geq$$

$$\geq a(p, s) \left[\int\limits_\Omega |u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)} dx + (p-1) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{s/n}} dx \right].$$

Доказательство. Используя аргументы Е.Б. Дэвиса (см. [5]) и одномерное неравенство (10), несложно получить следующее неравенство

$$\int\limits_\Omega \frac{|\partial_\nu u(x)|^p}{\rho_\nu(x)^{s-p}} dx \geq a(p, s) \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{\rho_\nu^s(x)} dt - a(p, s)(p-1) \int\limits_\Omega \left(\frac{2}{D_\nu(x)} \right)^s |u(x)|^p dx.$$

Исходя из определения градиента функции, мы имеем

$$|\partial_\nu u(x)| = |\nu \cdot \nabla u(x)| = |\nabla u(x)||cos(\nu, \nabla u(x))|.$$

Проинтегрируем обе части неравенства по нормальной поверхностной мере $\mathbb{S}^{n-1}$. Получим

$$\int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|cos(\nu, \nabla u(x))|^p}{\rho_\nu(x)^{s-p}} d\omega(\nu) |\nabla u(x)|^p dx \geq$$

$$\geq a(p, s) \left(\int\limits_\Omega \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{1}{\rho_\nu^s(x)} - (p-1) \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(x)} \right)^s d\omega(\nu) \right) |u(x)|^p dx \right).$$

Из [15] известно, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\frac{2}{D_\nu(x)} \right)^s d\omega(\nu) \geq \left(\frac{n|\Omega_x|}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \right)^{-\frac{s}{n}}.$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) dx \geq$$

$$\geq a(p, s) \left[\int\limits_\Omega |u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)} dx + (p-1) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_\Omega \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{s/n}} dx \right].$$

Теорема доказана.

4. Неравенства типа Харди для выпуклых областей. В пункте 2 мы доказали, что для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и функции $u \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо следующее неравенство типа Харди:

$$\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) dx \geq$$

$$\geq a(p,s)\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)dx}{\rho_\nu^s(x)}+a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s}{n}}}dx. \tag{11}$$

Как будет показано в следующей теореме, в случае выпуклой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ неравенство (11) может быть существенно упрощено.

Теорема 3. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – произвольная выпуклая область, $u\in C_0^\infty(\Omega)$ – произвольная функция. Тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}\geq a(p,s)\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)}+a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p dx. \tag{12}$$

Доказательство. Для произвольной выпуклой области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ оценим сверху внутренний интеграл левой части неравенства (11):

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}d\omega(\nu)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p\rho_\nu^p(x)}{\rho_\nu^s(x)}d\omega(\nu)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p\rho_\nu^p(x)}{\delta^s(x)}d\omega(\nu)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,e)|^p\rho_\nu^p(x)}{\delta^s(x)}d\omega(\nu)\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\delta^p(x)}{\delta^s(x)}d\omega(\nu)=\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\delta^{s-p}(x)}=\frac{1}{\delta^{s-p}(x)},$$

где $e=\nu_0\in\mathbb{S}^{n-1}:\tau_{\nu_0}(x)=\delta(x)$.

В последней цепочке соотношений мы использовали очевидное из геометрических соображений неравенство $|\cos(\nu,e)|\rho_\nu(x)\leqslant\delta(x)$, справедливое для всех точек $x\in\Omega$.

Таким образом, для левой части неравенства (11) мы получили оценку:

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,\nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)}d\omega(\nu)dx\leqslant\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^{s-p}(x)}.$$

Применяя неравенство $|\cos(\nu,e)|\rho_\nu(x)\leqslant\delta(x)$ к внутреннему интегралу первого слагаемого правой части неравенства (11), очевидно, получим:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)}\geq\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{|\cos(\nu,e)|^s d\omega(\nu)}{\delta^s(x)}=\frac{1}{\delta^s(x)}\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\cos(\nu,e)|^s d\omega(\nu).$$

Последний интеграл несложно вычислить путем замены переменных:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}|\cos(\nu,e)|^s d\omega(\nu)=\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}.$$

Таким образом, мы получим нижнюю оценку для первого слагаемого правой части неравенства (11):

$$a(p,s)\int\limits_{\Omega}|u(x)|^p\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)dx}{\rho_\nu^s(x)}\geq a(p,s)\frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)}.$$

Далее, используя очевидное для выпуклых областей равенство $\Omega_x = \Omega$, легко получим равенство для второго слагаемого правой части неравенства (11):

$$a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s}{n}}} dx = a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx.$$

Теорема доказана.

Сопоставив неравенства (11) и (12), мы задались вопросом – существуют ли невыпуклые области, для которых справедливы аналоги неравенства (12), доказанного в теореме 3 для выпуклых областей? Мы даем положительный ответ на поставленный вопрос и представляем специальный класс невыпуклых областей, для которых существуют аналоги неравенства (12).

5. Неравенства типа Харди для невыпуклых регулярных областей. Следуя Е.Б. Дэвису [5], определим псевдодистанцию $m(x)$ от точки x до границы области Ω:

$$\frac{1}{m^2(x)} := \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\mathbb{S}^{n-1}(\nu)}{\tau_\nu^2(x)} .$$

Введем понятие регулярной области в пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – регулярная область, если существует конечная константа $c > 0$ такая, что

$$\delta(x) \leqslant m(x) \leqslant c\delta(x) \qquad \forall x \in \Omega.$$

Константу c назовем константой регулярности области Ω.

Как будет показано в следующей теореме, для регулярных областей можно получить неравенство, аналогичное неравенству (12), доказанному в теореме 3 для выпуклых областей.

Теорема 4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная регулярная область с константой регулярности c, $u \in C_0^\infty(\Omega)$ – произвольная функция. Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{D_p(\Omega)\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^s(x)} dx \geq$$

$$\geq \frac{a(p,s)2^{s/2}}{c^s} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)} dx + a(p,s)(p-1)\left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|}\right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx,$$

где $D_p(\Omega) := \sup\limits_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \rho_\nu^p(x),\ x \in \Omega.$

Доказательство. Для произвольной регулярной с константой c области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ оценим сверху внутренний интеграл левой части неравенства (11):

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p \rho_\nu^p(x)}{\rho_\nu^s(x)} d\omega(\nu) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p \rho_\nu^p(x)}{\delta^s(x)} d\omega(\nu) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, e)|^p \rho_\nu^p(x)}{\delta^s(x)} d\omega(\nu) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{D_p(\Omega)}{\delta^s(x)} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} |\cos(\nu, e)|^p d\omega(\nu) = \frac{D_p(\Omega)\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\delta^s(x)\,\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)},$$

где $e = \nu_0 \in \mathbb{S}^{n-1} : \tau_{\nu_0}(x) = \delta(x),\ D_p(\Omega) := \sup\limits_{\nu \in \mathbb{S}^{n-1}} \rho_\nu^p(x),\ x \in \Omega.$

Таким образом, для левой части неравенства (11) мы получили оценку:

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\cos(\nu, \nabla u(x))|^p}{\rho_\nu^{s-p}(x)} d\omega(\nu) dx \leqslant \frac{D_p(\Omega)\, \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla u(x)|^p}{\delta^s(x)}.$$

Для оценки внутреннего интеграла первого слагаемого правой части неравенства (11) используем результат, доказанный в [21] для регулярных областей:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)} \geq \frac{2^{s/2}}{m^s(x)}.$$

Далее, учитывая неравенство

$$m(x) \leqslant c\delta(x),$$

справедливое для каждой точки x регулярной с константой c области Ω, легко придем к неравенству

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^s(x)} \geq \frac{2^{s/2}}{c^s \delta^s(x)} .$$

Таким образом,

$$a(p,s) \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{d\omega(\nu) dx}{\rho_\nu^s(x)} \geq \frac{a(p,s) 2^{s/2}}{c^s} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{\delta^s(x)} dx.$$

Используя очевидное неравенство $|\Omega_x| \leqslant |\Omega|$, справедливое для любой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, легко получим оценку для второго слагаемого правой части неравенства (11):

$$a(p,s)(p-1) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_{\Omega} \frac{|u(x)|^p}{|\Omega_x|^{\frac{s}{n}}} dx \geq a(p,s)(p-1) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|} \right)^{\frac{s}{n}} \int\limits_{\Omega} |u(x)|^p dx.$$

Получили требуемое.

6. Неравенства типа Харди с логарифмическими весами для регулярных областей и функций из пространства H_0^1. Пусть

$$f(t) = -\frac{1}{t} + \frac{1}{t(e - \ln \frac{\alpha t}{D})} + \frac{1}{t(e - \ln \frac{\alpha t}{D}) \ln(e - \ln \frac{\alpha t}{D})}, \quad 0 < t < D/2,$$

где $D = \operatorname{diam} \Omega$ и $0 < \alpha \leqslant 2$.

Тогда выполняется следующее равенство

$$2f'(\rho_\nu) - f^2(\rho_\nu) = \frac{2}{\rho_\nu^2} - \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})} + \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2} - \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D}) \ln(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})} +$$

$$+ \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})} + \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})} -$$

$$- \frac{1}{\rho_\nu^2} - \frac{1}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2} - \frac{1}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})} +$$

$$+ \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})} + \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D}) \ln(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})} - \frac{2}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})} =$$

$$= \frac{1}{\rho_\nu^2} + \frac{1}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2} + \frac{1}{\rho_\nu^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2 \ln^2(e - \ln \frac{\alpha\rho_\nu}{D})}.$$

Также верна оценка

$$2f(\rho_\nu)f(D_\nu/2)-f^2(D_\nu/2)=\frac{4}{\rho_\nu D_\nu}\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})\ln(e-\ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})}\right]\times$$
$$\times\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})\ln(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})}\right]-$$
$$-\frac{4}{D_\nu^2}\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})\ln(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})}\right]^2\geq$$
$$\geq\left(\frac{4}{\rho_\nu D_\nu}-\frac{4}{D_\nu^2}\right)\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})\ln(e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D})}\right]^2\geq$$
$$\geq\left(\frac{4}{\rho_\nu D_\nu}-\frac{4}{D_\nu^2}\right)\left[1-\frac{1}{e-\ln\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{(e-\ln\frac{\alpha}{2})\ln(e-\ln\frac{\alpha}{2})}\right]^2.$$

Здесь мы воспользовались неравенством

$$e-\ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D}\geq e-\ln\frac{\alpha D_\nu}{2D}>e,$$

справедливость которого очевидна, поскольку $0<\rho_\nu\leqslant\frac{D_\nu}{2}$.

Для целых $k\geq 0$ положим

$$e_0=1,\quad e_{k+1}=\exp e_k;\quad \ln_0 x=x,\quad \ln_{k+1}(x)=\ln\ln_k(x).$$

Пусть

$$f_k(t,a)=-\frac{1}{t}+\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{t(a-\ln\frac{\alpha t}{D})\ln(a-\ln\frac{\alpha t}{D})\cdot\ldots\cdot\ln_i(a-\ln\frac{\alpha t}{D})},\quad 0<t<D/2.$$

Отметим, что функция $f(t)=f_0(t,1)$ была использована в статье [14] для доказательства неравенства (5).

Введем следующее обозначение

$$\varphi_i(x,a)=\frac{1}{(a-\ln x)\ln(a-\ln x)\cdot\ldots\cdot\ln_i(a-\ln x)}.$$

Далее покажем, что для функции $f_k(t,a)$ верно равенство

$$2f_k'(\rho_\nu,e_k)-f_k^2(\rho_\nu,e_k)=\frac{1}{\rho_\nu^2}+\sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi_i^2(\frac{\alpha\rho_\nu}{D},e_k)}{\rho_\nu^2}$$

и неравенство

$$2f(\rho_\nu,e_k)f(D_\nu/2,e_k)-f^2(D_\nu/2,e_k)\geq\left(\frac{4}{\rho_\nu D_\nu}-\frac{4}{D_\nu^2}\right)\left[1-\sum_{i=0}^{k}\varphi_i^2\left(\frac{\alpha}{2},e_k\right)\right]^2. \qquad (13)$$

Для доказательства первого равенства применим метод математической индукции. Случай $k=0$ доказан в [14]. Выше мы привели доказательство случая $k=1$. Пусть неравенство верно для всех натуральных чисел, меньших k. Покажем, что утверждение верно для натурального числа $k+1$.

Заметим, что

$$f_{k+1}(t,e_{k+1})=f_k(t,e_{k+1})+\frac{1}{t(e_{k+1}-\ln\frac{\alpha t}{D})\ln(e_{k+1}-\ln\frac{\alpha t}{D})\cdot\ldots\cdot\ln_{k+1}(e_{k+1}-\ln\frac{\alpha t}{D})}=$$
$$=f_k(t,e_{k+1})+\frac{1}{t}\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D},e_{k+1}\right).$$

Тогда

$$2f'_{k+1}(\rho_\nu, e_{k+1}) - f^2_{k+1}(\rho_\nu, e_{k+1}) =$$

$$= 2\left(f_k(t, e_{k+1}) + \frac{1}{t}\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)\right)' - \left(f_k(t, e_{k+1}) + \frac{1}{t}\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)\right)^2 =$$

$$= 2f'_k(t, e_{k+1}) - f^2_k(t, e_{k+1}) + 2\left(\frac{1}{t}\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)\right)' -$$

$$-2\frac{1}{t}f_k(t, e_{k+1})\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right) - \frac{1}{t^2}\varphi^2_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right) =$$

$$= 2f'_k(t, e_{k+1}) - f^2_k(t, e_{k+1}) - \frac{2\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)}{t^2} +$$

$$+\sum_{i=0}^{k+1}\frac{2\varphi_i(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})\varphi_{k+1}(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})}{t^2} + \frac{2\varphi_{k+1}\left(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1}\right)}{t^2} -$$

$$-\sum_{i=0}^{k}\frac{2\varphi^2_i(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})\varphi_{k+1}(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})}{t^2} - \frac{\varphi^2_{k+1}(\frac{\alpha t}{D}, e_{k+1})}{\rho^2_\nu} =$$

$$= 2f'_k(t, e_{k+1}) - f^2_k(t, e_{k+1}) + \frac{1}{\rho^2_\nu(e_k - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})^2\ln^2(e_k - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})\cdot\ldots\cdot\ln^2_{k+1}(e_k - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D})}.$$

Последнее равенство дает требуемое утверждение.

Неравенство (13) доказывается аналогично случаю $k = 1$ с учетом неравенства

$$e_k - \ln\frac{\alpha\rho_\nu}{D} \geq e_k - \ln\frac{\alpha D_\nu}{2D},$$

справедливость которого очевидна, поскольку $0 < \rho_\nu \leqslant \frac{D_\nu}{2}$.

М. Хоффманн-Остенхоф, Т. Хоффманн-Остенхоф, А. Лаптев в [14] доказали, что для произвольного открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и произвольной функции $u \in H^1_0(\Omega)$ верно неравенство

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{n}{4}\int\limits_\Omega\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}(2f'(\rho_\nu(x)) - f(\rho_\nu(x)) +$$

$$+2f(\rho_\nu(x))f(D_\nu(x)/2) + f^2(D_\nu(x)/2))|u(x)|^2 dx, \qquad (14)$$

где $D \in (0, \infty]$ – диаметр и $f \in \Phi_2(0, D/2)$.

Заметим, что $f(t, e_k) \in \Phi_2(0, D/2)$. Следовательно, неравенство (14) при $f = f(t, e_k)$ дает нам следующее соотношение

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{n}{4}\int\limits_\Omega\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big(\frac{1}{\rho^2_\nu(x)} + \sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi^2_i(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D}, e_k)}{\rho^2_\nu(x)}\Big)d\omega(\nu)|u(x)|^2 dx +$$

$$+\frac{n}{4}\left[1 - \sum_{i=0}^{k}\varphi^2_i\left(\frac{\alpha}{2}, e_k\right)\right]^2\int\limits_\Omega\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{4}{\rho_\nu(x)D_\nu(x)} - \frac{4}{D^2(x)_\nu}\right)d\omega(\nu)|u(x)|^2 dx. \qquad (15)$$

В [14] авторами также было доказано, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{4}{\rho_\nu(x)D_\nu(x)} - \frac{4}{D^2_\nu(x)}d\omega(\nu) \geq \Big(\frac{s_{n-1}}{n}\Big)^{2/n}\frac{1}{|\Omega_x|^{2/n}}.$$

Объединяя два последних неравенства, мы получим

$$\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq \frac{n}{4}\int\limits_\Omega\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big(\frac{1}{\rho^2_\nu(x)} + \sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi^2_i(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D}, e_k)}{\rho^2_\nu(x)}\Big)d\omega(\nu)|u(x)|^2 dx +$$

$$+\left[1-\sum_{i=0}^{k}\varphi_i^2\left(\frac{\alpha}{2},e_k\right)\right]^2\frac{n^{(n-2)/2}}{4}s_{n-1}^{2/n}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{|\Omega_x|^{2/n}}dx.$$

Пусть теперь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – регулярная область с константой регулярности c. А.М. Тухватуллина в [21] доказала, что тогда

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)}\geq\frac{2}{c^2\delta^2(x)},\ \forall x\in\Omega.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{1}{\rho_\nu^2(x)}+\sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D},e_k\right)}{\rho_\nu^2(x)}\right)d\omega(\nu)\geq$$
$$\geq\left(1+\sum_{i=0}^{k}\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D},e_k\right)\right)\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d\omega(\nu)}{\rho_\nu^2(x)}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}\left(\frac{1}{\rho_\nu^2(x)}+\sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D},e_k\right)}{\rho_\nu^2(x)}\right)d\omega(\nu)\geq$$
$$\geq\left(1+\sum_{i=0}^{k}\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\rho_\nu(x)}{D},e_k\right)\right)\frac{2}{c^2\delta^2(x)}.$$

Таким образом, мы пришли к следующему результату

Теорема 5. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – регулярная область с константой регулярности c и $0<\alpha\leqslant 2$. Тогда для произвольной функции $u\in C_0^\infty(\Omega)$ и $k\in\mathbb{N}$ верно неравенство*

$$\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2dx\geq\frac{n}{2c^2}\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta^2(x)}\left(1+\sum_{i=0}^{k}\varphi_0^2\left(\frac{\alpha\delta}{D},e_k\right)\cdot\ldots\cdot\varphi_i^2\left(\frac{\alpha\delta}{D},e_k\right)\right)dx+$$
$$+\left[1-\sum_{i=0}^{k}\varphi_0\Big(\frac{\alpha}{2},e_k\Big)\cdot\ldots\cdot\varphi_i\Big(\frac{\alpha}{2},e_k\Big)\right]^2\frac{n^{(n-2)/2}}{4}s_{n-1}^{2/n}\frac{1}{|\Omega|^{2/n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2dx,$$

где

$$\varphi_i(x,e_k)=\frac{1}{(e_k-\ln x)\ln(e_k-\ln x)\cdot\ldots\cdot\ln_i(e_k-\ln x)},\ i\leqslant k.$$

Выражаем искреннюю благодарность своему научному руководителю, профессору Фариту Габидиновичу Авхадиеву за полезные советы и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дубинский Ю.А *Об одном неравенстве типа Харди и его приложениях* // Тр. МИАН **269**. 2010. С. 112–132.
2. A. Balinsky, A. Laptev, A.V. Sobolev *Generalized Hardy inequality for the magnetic Dirichlet forms* // Journal of statistical physics(ISSN 0022-4715)(EISSN 1572-9613). 116. 2004. P. 507–521.
3. A. Laptev, T. Weidl *Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms* // Operator Theory: Advances and Applications 108. 1999. P. 299–305.
4. M. Solomyak *A remark on the Hardy inequalities* // Integr Equat Oper Th. **19** . 1994. P. 120–124.
5. E.B. Davies *Spectral Theory and Differential Operators.* Cambridge: Cambridge Univ.Press. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 1995. V. 42. 186 P.
6. E.B. Davies *A Review of Hardy Inequalities* // The Maz'ya anniversary Collection. V. 2. Oper. Theory Adv. Appl. **110**. 1999. P. 55–67.

7. E.B. Avkhadiev F.G., K.-J. Wirths *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 18. 2011. P. 723–736.
8. Авхадиев Ф.Г. *Неравенства для интегральных характеристик областей.* Казань: КГУ. 2006. 140 с.
9. F.G. Avkhadiev *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. **XXI**. 2006. P. 3–31 (electronic, http://ljm.ksu.ru).
10. F.G. Avkhadiev, K.-J. Wirths *Unified Poincaré and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angew. Math. Mech. **87**. 2007. № 8–9. P. 632–642.
11. Авхадиев Ф.Г *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* // Тр. МИАН **255**. 2006. С. 8–18.
12. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К. *Неравенства типа Харди со степенными и логарифмическими весами в областях евклидова пространства* // Известия вузов. Матем. № 9. 2011. С. 90–94.
13. H. Brezis, M. Marcus *Hardy's inequality revisited* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **25**. 1997. № 1–2. P. 217–237.
14. M. Hoffmann-Ostenhof, T Hoffmann-Ostenhof., A. Laptev *A geometrical version of Hardy's inequality* // J. Funct. Anal. **189**. 2002. № 2. P. 539–548.
15. Tidblom J. *A geometrical version of Hardy's inequality for* $W_0^{1,p}(\Omega)$ // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. № 132. P. 2265–2271.
16. G. Barbatis, S. Filippas, A. Tertikas *Refined geometric* L^p *Hardy inequalities* // Communications in Contemporary Mathematics. V. 5, № 6. 2003. P. 869–881.
17. M. Del Pino, J. Dolbeault, S. Filippas and A. Tertikas *A logarithmic Hardy inequality* // J. Funct. Anal. **259**. 2010. P. 2045–2072.
18. S.M. Buckley, R. Hurri-Syrjänene *Iterated log-scale Orlicz-Hardy inequalities* // (2011) Iterated Log-scale Orlicz-Hardy Inequalities. (Preprint) Department of Mathematics, National University of Ireland Maynooth.
19. Насибуллин Р.Г. *Неравенства типа Харди, включающие повторные логарифмы* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 2011. Т. 43, С. 262–263.
20. Насибуллин Р.Г. *Некоторое обобщение неравенства Харди* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 2011. Т. 44. С. 221–222.
21. Тухватуллина А.М. *Неравенства типа Харди для специального семейства невыпуклых областей* // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2011. Т.153, №1. С. 211–220.
22. Тухватуллина А.М. *Распространение критерия регулярности области Дэвиса на многомерные области и его применение в неравенствах типа Харди* // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 2011. Т. 43. С. 350–351.
23. Тухватуллина А.М. *Достаточное условие регулярности области и его применение в неравенствах типа Харди* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Изд-во Казанского математического общества. 2009. Т. 38, С.285–287.

Рамиль Гайсаевич Насибуллин,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `NasibullinRamil@gmail.com`

Алина Михайловна Тухватуллина,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18,
420008, г. Казань, Россия
E-mail: `kzn.alina@gmail.com`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 56-62.

УДК 517.98

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Д.К. ПОТАПОВ

Аннотация. В вещественном рефлексивном банаховом пространстве рассматривается проблема существования решений задачи со спектральным параметром для уравнений с разрывными операторами. Вариационным методом получены теоремы о числе решений для исследуемых задач. В качестве приложения рассмотрены основные краевые задачи для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывными нелинейностями.

Ключевые слова: спектральный параметр, разрывный оператор, вариационный метод, число решений.

Mathematics Subject Classification: 47J10, 47J30, 35P30, 35J60, 35J20.

Введение. Постановка задачи

Общая постановка задач на собственные значения для нелинейных уравнений была дана в работе [1]. В работах [1], [2] нелинейные задачи со спектральным параметром изучались топологическими методами, в работах [3], [4] – в полуупорядоченных пространствах, в работах [5], [6] – вариационным методом. Во всех перечисленных работах структура множества собственных значений операторного уравнения исследовалась для непрерывных отображений. В данной работе рассматриваются нелинейные спектральные задачи в общей операторной постановке без предположения о непрерывности оператора. В дальнейшем потребуются следующие определения.

Пусть E – вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* – сопряженное с E пространство. Через (z, x) обозначается значение функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$.

Определение 1. Линейный оператор $A : E \to E^*$ называется *самосопряженным*, если $(Ax, h) = (Ah, x)$ для любых $x, h \in E$.

Определение 2. Отображение $T : E \to E^*$ называется *компактным* на E, если оно ограниченные множества из E переводит в предкомпактные в E^*.

Определение 3. Отображение $T : E \to E^*$ называется *монотонным* на E, если $(Tx - Ty, x - y) \geq 0$ для любых $x, y \in E$. Отображение $T : E \to E^*$ называется *антимонотонным*, если отображение $-T$ монотонно.

Определение 4. Отображение $T : E \to E^*$ называется *ограниченным* на E, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $||Tx|| \leqslant M$ для любого $x \in E$.

В данной работе рассматривается уравнение вида

$$Au = \lambda Tu \tag{1}$$

D.K. Potapov, On a number of solutions in problems with spectral parameter for equations with discontinuous operators.

Поступила 04 февраля 2012 г.

с параметром $\lambda > 0$. Здесь A – линейный самосопряженный оператор из E в E^*, $T : E \to E^*$ – разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на E.

Работы [7], [8] были посвящены существованию луча положительных собственных значений для таких уравнений с разрывными операторами. При достаточно больших λ в этих работах доказаны теоремы о существовании ненулевых решений уравнения (1). В работах [9], [10] получены оценки величины бифуркационного параметра и норм оператора в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами вида (1). Наличие нулевого решения уравнения (1) при любом λ обеспечивается априорным предположением $T(0) = 0$. В данной работе рассмотрим вопрос о числе решений уравнения (1).

1. Общие результаты

Как и ранее [7]–[10], уравнение (1) изучается вариационным методом. Для применимости вариационного подхода к изучению уравнения (1) относительно оператора T дополнительно предполагается, что он квазипотенциальный.

Определение 5. Отображение $T : E \to E^*$ называется *квазипотенциальным*, если существует функционал $f : E \to \mathbf{R}$, для которого верно равенство $f(x+h) - f(x) = \int\limits_0^1 (T(x+th), h)\,dt$ для любых $x, h \in E$ (интеграл понимается в смысле Лебега). При этом f называют *квазипотенциалом* оператора T.

Свяжем с уравнением (1) функционал $f^\lambda(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - \lambda f(u)$, где f – квазипотенциал оператора T. В работе [11] указаны достаточные условия (ограничения на точки разрыва оператора $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$), при выполнении которых точки минимума функционала f^λ являются решениями уравнения (1). А именно, надо предполагать, что точки разрыва оператора F_λ регулярные.

Определение 6. Элемент $x \in E$ называется *точкой разрыва* оператора $T : E \to E^*$, если найдется $h \in E$, для которого либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h)$ не существует, либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h) \neq (Tx, h)$.

Определение 7. Элемент $x \in E$ называется *регулярной точкой* для оператора $T : E \to E^*$, если для некоторого $h \in E$ $\overline{\lim\limits_{t\to+0}}(T(x+th), h) < 0$.

Согласно результатам работ [7], [8] справедлива нижеследующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) A – линейный самосопряженный оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства E в сопряженное пространство E^*, пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств E_1 и E_2, $E_1 = \ker A$, причем существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $(Au, u) \geq \alpha ||u||^2$ для любого $u \in E_2$;

2) отображение T компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом f) и ограниченное на E, $f(0) = 0$ и для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{u\in E_1, ||u||\to+\infty} f(u) = -\infty$;

3) если отображение T компактное, то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{t\to+0}(T(u+th) - Tu, h) \geq 0$ для всех $u, h \in E$;

4) если отображение T антимонотонное, то дополнительно предполагается, что любая точка разрыва оператора T при $\lambda > \lambda_0 > 0$ регулярная для $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$ (λ_0 – величина, начиная с которой задача на собственные значения разрешима).

Тогда для любого $\lambda > \lambda_0$ уравнение (1) имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Отметим, что если в условиях теоремы 1 дополнительно потребовать $T(0) = 0$, то для компактного отображения T уравнение (1) будет иметь по крайней мере два решения (нулевое и ненулевое) для любого $\lambda > \lambda_0$, а если отображение T – антимонотонное, то уравнение (1) имеет только тривиальное решение, поскольку в этом случае ненулевые решения будут невозможны.

Центральным понятием современной вариационной теории является условие Palais-Smale ((PS)-условие), а ее основанием – деформационная лемма. Базируясь на понятии обобщенного градиента Кларка для локально липшицевых функций, (PS)-условие и деформационная лемма были модифицированы K.C. Chang [12].

Определение 8. Функция $f : E \to \mathbf{R}$ называется *локально липшицевой*, если для любого $x \in E$ найдутся окрестность U точки x и постоянная $L > 0$ такие, что $|f(u) - f(v)| \leqslant L||u - v||$ для любых $u, v \in U$.

Определение 9. *Обобщенной производной по направлению* l локально липшицевой функции f в точке x называется $f^{\circ}(x, l) = \overline{\lim\limits_{z \to x, t \to +0}} \frac{f(z+tl) - f(z)}{t}$, а *обобщенной производной* f *в точке* x множество $\partial f(x) = \{y \in E^* : f^{\circ}(x, l) \geq (y, l) \;\; \forall l \in E\}$.

Определение 10. Локально липшицева функция $f : E \to \mathbf{R}$ удовлетворяет *(PS)-условию*, если любая последовательность $(x_n) \subset E$, для которой множество значений $(f(x_n))$ ограничено и $m(x_n) = \inf\limits_{x^* \in \partial f(x_n)} ||x^*|| \to 0$ при $n \to \infty$, содержит сходящуюся подпоследовательность, где $\partial f(x)$ – обобщенный градиент Кларка для f в точке x.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть E – вещественное гильбертово пространство плотно и компактно вложенное в вещественное рефлексивное банахово пространство E_3, $A : E \to E$ – линейный самосопряженный и ограниченный оператор, нуль является изолированной точкой его спектра, причем ядро и отрицательное подпространство оператора A конечномерны и выполнены условия 2)–3) теоремы 1 для отображения $T : E_3 \to E_3^*$, $T(0) = 0$. Тогда существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ уравнение (1) имеет по крайней мере три решения.*

Доказательство теоремы 2. Известно [13], что если E – гильбертово пространство, то условие 1) теоремы 1 выполняется, если нуль – изолированная точка спектра неотрицательного оператора A. В этом случае существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $(Au, u) \geq \alpha||u||^2 \;\forall\; u \in E_2$ ($E_1 = \ker A$, $E_2 = E_1^{\perp}$). В силу этого и условий теоремы 2 по теореме 1 найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ уравнение (1) имеет по крайней мере одно ненулевое решение, т. е. и для некоторой константы $\lambda_* > 0$ для каждого $\lambda > \lambda_*$ найдется элемент $u_\lambda \in E$, $u_\lambda \neq 0$ такой, что $f^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v \in E} f^\lambda(v) < 0$, как это следует из утверждения теоремы 2 из работы [7]. Покажем, что при $\lambda > \lambda_*$ уравнение (1) имеет по крайней мере еще одно нетривиальное решение v_λ, которое может быть найдено с помощью теоремы о горном перевале [12], если $f^\lambda(v_\lambda) > 0$. Для выполнения условий теоремы о горном перевале [12] достаточно показать, что функция f^λ удовлетворяет (PS)-условию для любого $\lambda > 0$. Для этого достаточно доказать, что функция f^λ локально липшицева на E (все остальные условия теоремы 4.5 из [12] идентичны условиям доказываемой теоремы 2). Это действительно так, поскольку A – линейный ограниченный оператор, а функция f удовлетворяет условию Липшица на E_3, так как для произвольных $u, v \in E_3$ имеем

$$|f(u) - f(v)| = |\int\limits_0^1 (T(v + t(u - v)), u - v)dt| \leqslant$$

$$\int\limits_0^1 |(T(v + t(u - v)), u - v)|dt \leqslant M||u - v||_{E_3},$$

поскольку отображение T, ограниченное на E_3, $M > 0$ – константа из неравенства $||Tx|| \leqslant M \ \forall x \in E_3$. Поэтому, по теореме 4.5 из [12], функционал f^λ удовлетворяет (PS)-условию для каждого $\lambda > 0$. Значит, функционал f^λ удовлетворяет условиям теоремы о горном перевале [12], следовательно, он имеет критическую точку $v_\lambda \in E$ (решение уравнения (1)) такую, что $f^\lambda(v_\lambda) = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \sup\limits_{t\in[0,1]} f^\lambda(\gamma(t)) \geq \max\{f^\lambda(0), f^\lambda(u_\lambda)\} = 0$ (поскольку $f^\lambda(0) = 0, f^\lambda(u_\lambda) < 0$), где $\Gamma = \{\gamma \in \mathbf{C}([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_\lambda\}$. Более того, аналогично [7], [14] можно показать, что $f^\lambda(u) > \varepsilon > 0$ для $||u|| = r > 0$ и $||u_\lambda|| > r$. Следовательно, существует $v_\lambda \in E$ такое, что $f^\lambda(v_\lambda) > 0$. Таким образом, для любого $\lambda > \lambda_*$ существует второе нетривиальное решение v_λ, а уравнение (1) для любого $\lambda > \lambda_*$ имеет по крайней мере три решения (нулевое, $u_\lambda \neq 0$, $v_\lambda \neq 0$). Отметим, что решения u_λ и v_λ различны, поскольку $f^\lambda(u_\lambda) < 0$, а $f^\lambda(v_\lambda) > 0$. Теорема 2 доказана.

2. Приложения

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим вопрос существования решений задачи

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где λ – положительный параметр. Здесь L – равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega}), c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$; функция $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ суперпозиционно измерима [15], и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbf{R}$ разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)] \ \forall \ u \in \mathbf{R}$, $g_-(x, u) = \varliminf\limits_{\eta\to u} g(x, \eta)$, $g_+(x, u) = \varlimsup\limits_{\eta\to u} g(x, \eta)$; граничное условие (3) имеет вид: либо условие Дирихле $u(x)|_\Gamma = 0$, либо условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x)|_\Gamma = 0$ с конормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(\mathbf{n}, x_j)$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ – направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$, либо третье краевое условие $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_\Gamma = 0$, функция $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$, неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ.

В зависимости от вида граничного условия (3) определим пространство X. Пусть $X = \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$, если (3) – граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (3) – граничное условие Неймана или третье краевое условие. Сопоставим краевой задаче (2)–(3) функционал J^λ, определенный на X, следующим образом: $J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u)$, где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega c(x)u^2(x)dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_\Gamma \sigma(s)u^2(s)ds$$

в случае третьего краевого условия;

$$J_2(u) = \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x, s)ds.$$

Определение 11. Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Назовем $u \in \mathbf{R}$ *прыгающим разрывом* функции f, если $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s \to u\pm} f(s)$.

Определение 12. *Сильным решением* задачи (2)–(3) называется функция $u \in \mathbf{W}^2_r(\Omega)$, $r > 1$, которая удовлетворяет для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (2) и для которой след $Bu(x)$ на Γ равен нулю.

Определение 13. *Полуправильным решением* задачи (2)–(3) называется такое сильное ее решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

В работе [12] вариационное исчисление Кларка применено для локально липшицевых функций к доказательству существования сильных решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывной нелинейностью, развит вариационный подход применительно к краевым задачам для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями. Полуправильные решения в работе [12] не рассматривались. В работах [7], [8] получены достаточные условия существования нетривиального полуправильного решения задачи (2)–(3).

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*
1) $J_1(u) \geq 0 \ \ \forall u \in X$;
2) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы, $g(x, 0) = 0$ и $|g(x, u)| \leqslant a(x)$ $\forall u \in \mathbf{R}$, где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > \frac{2n}{n+2}$, фиксирована;
3) найдется $u_0 \in X$, для которого $J_2(u_0) > 0$;
4) если пространство $N(L)$ решений задачи

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ Bu|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{u \in N(L),\, ||u|| \to +\infty} J_2(u) = -\infty$.
Тогда существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ задача (2)–(3) имеет по крайней мере три сильных решения, причем по крайней мере одно из ненулевых решений является полуправильным.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 1), 3), 4) теоремы 3 и дополнительно условия*
$1'$) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x, \cdot)$ невозрастающая на $\mathbf{R}$ и для некоторой $a \in \mathbf{L}_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ справедливо неравенство $|g(x, u)| \leqslant a(x) \ \ \forall u \in \mathbf{R}$;
$2'$) для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва функции $g(x, \cdot)$ лежат на плоскостях $u = u_i$, $i \in I$ (I – не более чем счетно), и если $g(x, u_i-) > g(x, u_i+)$, то $g(x, u_i-)g(x, u_i+) > 0$ для любого $i \in I$.
Тогда существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ задача (2)–(3) имеет по крайней мере одно ненулевое полуправильное решение.

Доказательство теорем 3, 4. Важным условием, обеспечивающим существование нетривиального решения задачи (2)–(3), является условие 3) теоремы 3. В работах [7], [8] доказано, что при выполнении условий теорем 3, 4 существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v) < 0$, и найдется $u_\lambda \in X$, для которого $J^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v)$, и любое такое u_λ является ненулевым полуправильным решением задачи (2)–(3). Таким образом, найдется и $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ существует по крайней мере одно ненулевое полуправильное решение u_λ задачи (2)–(3). Теорема 4 доказана. Наличие второго, тривиального, решения задачи (2)–(3) в теореме 3 обуславливается условием 2) теоремы 3 ($g(x, 0) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$). Отметим, что оператор $A : X \to X$, определяемый равенством

$$(Au, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx + \int\limits_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx \ \ \forall u, v \in X$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана, и равенством

$$(Au, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx +$$

$$\int\limits_{\Omega} c(x) u(x) v(x) dx + \int\limits_{\Gamma} \sigma(s) u(s) v(s) ds \ \ \forall u, v \in X$$

в случае третьего краевого условия, является самосопряженным, линейным и ограниченным. Ядро оператора A совпадает с пространством $N(L)$. Согласно теории Фредгольма отрицательное подпространство оператора A конечномерно и если $N(L) \neq \{0\}$, то нуль — изолированная точка спектра оператора A конечной кратности [16]. Гильбертово пространство X плотно и компактно (в силу условия 2) теоремы 3) вложено в рефлексивное банахово пространство $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $p = \frac{q}{q-1}$, $q > \frac{2n}{n+2}$ [17]. Аналогично [7] показывается, что для компактного отображения $T : \mathbf{L}_p \to \mathbf{L}_q$ выполнены условия 2)-3) теоремы 1. Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ задача (2)–(3) имеет по крайней мере три решения. Действительно, применив теорему о горном перевале [12] получим, что для каждого $\lambda > \lambda_*$ существует также элемент $v_\lambda \in X$ – критическая точка функционала J^λ такая, что $J^\lambda(v_\lambda) > 0$ ($J^\lambda(v_\lambda) = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \sup\limits_{t \in [0,1]} J^\lambda(\gamma(t))$, где $\Gamma = \{\gamma \in \mathbf{C}([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_\lambda\}$). Итак, в условиях теоремы 3 функционал J^λ имеет по крайней мере три различные критические точки. Таким образом, для любого $\lambda > \lambda_*$ существует по крайней мере два ненулевых решения задачи (2)–(3). Решение u_λ будет полуправильным при сделанных предположениях на разрывы нелинейности [7]. Теорема 3 доказана.

Отметим, что в работе [18] получены аналогичные теоремы о числе решений однопараметрического семейства задач Дирихле для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями. Доказательство этих теорем может быть также сведено к проверке выполнения условий теорем 1, 2 данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.
2. Rabinowitz P.H. *Some global results for nonlinear eigenvalue problems* // J. Funct. Anal. 1971. Vol. 7. P. 487–513.
3. Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений.* М.: Физматгиз, 1962. 396 с.
4. Amann H. *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spases* // SIAM Review. 1976. Vol. 18. № 4. P. 620–709.
5. Rabinowitz P.H. *Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems* // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 23. № 8. P. 729–754.
6. Rabinowitz P.H. *A bifurcation theorem for potentional operators* // J. Funct. Anal. 1977. Vol. 25. P. 412–424.
7. Павленко В.Н., Потапов Д.К. *О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами* // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 4. С. 911–919.
8. Потапов Д.К. *О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае* // Вестн. С.-Петерб. ун-та.

Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. Вып. 4. С. 125–132.
9. Потапов Д.К. *Оценка бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 1. С. 43–46.
10. Потапов Д.К. *Оценивание норм оператора в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными операторами* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 4. С. 41–45.
11. Павленко В.Н. *Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами* // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. 3. Математика. Механика. 1994. № 1(2). С. 87–95.
12. Chang K.C. *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations* // J. Math. Anal. and Appl. 1981. Vol. 80. № 1. P. 102–129.
13. Рисс Ф., Секефальви–Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* М.: Мир, 1979. 588 с.
14. Павленко В.Н., Винокур В.В. *Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Изв. вузов. Матем. 2001. № 5. С. 43–58.
15. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* М.: Наука, 1983. 272 с.
16. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1983. 424 с.
17. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1982. 336 с.
18. Потапов Д.К. *О числе полуправильных решений в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 447-449.

Дмитрий Константинович Потапов,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 63-81.

Посвящается памяти Василия Сергеевича Владимирова

УДК 517.956.226

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РОТОРА И СТОКСА

Р.С. САКС

Аннотация. В работе явно решаются спектральные задачи для операторов ротора, градиента дивергенции и Стокса в шаре B радиуса R. Собственные вектор-функции $\mathbf{u}_\kappa^\pm$ ротора, отвечающие ненулевым собственным значениям $\pm\lambda_\kappa$, выражаются явными формулами, также как и вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa$, соответствующие нулевому собственному значению:

$$rot\,\mathbf{u}_\kappa^\pm = \pm\lambda_\kappa\,\mathbf{u}_\kappa^\pm, \quad \psi_n(\pm\lambda_\kappa R) = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_\kappa^\pm|_S = 0; \quad rot\,\mathbf{q}_\kappa = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_\kappa|_S = 0,$$

где

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad \kappa = (n,m,k),\ n \geq 0,\ m \in \mathbb{N},\ |k| \leqslant n$$

Эти же вектор-функции являются собственными для оператора градиент дивергенции с другими собственными значениями:

$$\nabla\,div\,\mathbf{u}_\kappa^\pm = 0; \quad \nabla\,div\,\mathbf{q}_\kappa = \mu_\kappa \mathbf{q}_\kappa, \quad \mu_\kappa = (\alpha_{n,m}/R)^2, \quad \psi_n'(\alpha_{n,m}) = 0.$$

Построенная система собственных вектор-функций ротора полна и ортогональна в пространстве $\mathbf{L}_2(B)$.

Собственные вектор-функции $(\mathbf{v}_\kappa,\ p_\kappa)$ оператора Стокса в шаре представляются в виде суммы двух собственных функций ротора, соответствующих противоположным собственным значениям: $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{u}_\kappa^+ + \mathbf{u}_\kappa^-$, $p_\kappa = \mathrm{const}$.

Ключевые слова: операторы ротора, градиента дивергенции, Стокса, собственные значения, собственные функции, ряды Фурье.

Mathematics Subject Classification: 35P05, 35P10.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть G — ограниченная область в R^3 с кусочно-гладкой границей Γ, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ.

В частности, G может быть шаром B, $|x| < R$, с границей S.

Задача 1. *Найти все собственные значения λ и собственные вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\mathbf{L}_2(G)$ оператора ротор такие, что*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad \text{в} \quad G, \tag{1}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$.

R.S. Saks, Solution of spectral problems for curl and Stokes operators.

Поступила 12 января 2012 г.

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ оператора $\mathcal{R}$ задачи 1 отнесем все вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(G)\cap\mathcal{C}(\overline{G})$, удовлетворяющие граничному условию (2) и условию $\operatorname{rot}\mathbf{v}\in\mathbf{L}_2(G)$.

Пространство основных вектор-функций $\mathbf{D}(G)$ содержится в $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ и плотно в $\mathbf{L}_2(G)$ [3].

Итак, задача состоит в нахождении тех значений λ, при которых уравнение (1) имеет ненулевые решения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ из области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$, то есть в определении пары $(\lambda,\mathbf{u})$ — собственного значения λ и собственной функции $\mathbf{u}\neq 0$.

1.2. О приложениях. Собственные функции задачи 1 имеют приложения в гидродинамике, где они называются полями Бельтрами [9], в небесной механике и в физике плазмы они называются бессиловыми полями (см. С. Чандрасекхар [11] и Д. Тэйлор [12]).

По теории Д. Тэйлора, последнее перед распадом устойчивое равновесие в токамаках плазма принимает на бессиловых полях $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, для которых rot $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{u}$ и $\lambda=const$.

Согласно С. Чандрасекхару, магнитное поле $\mathbf{H}$ вне фотосферы звезды такого, что сила Лоренца L, пропорциональная векторному произведению $[\operatorname{rot}\mathbf{H},\mathbf{H}]$, исчезает.

По теореме В.И. Арнольда [13] 1965, почти все линии тока течений идеальной жидкости наматываются либо на цилиндры, либо на торы. При этом, стационарные течения со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условию $[\operatorname{rot}\mathbf{v},\mathbf{v}]=0$, исключается из рассмотрения. Течения со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, удовлетворяющей уравнению (1), очевидно, удовлетворяют этому условию. Ссылаясь на вычисления М. Энона [14], В. Арнольд пишет, что такие течения "могут иметь линии тока с весьма сложной топологией, характерной для задач небесной механики".

В 1970 автор изучал краевые задачи для *не эллиптической* системы

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u}+\lambda\mathbf{u}=\mathbf{f} \tag{3}$$

в ограниченной области G с гладкой границей и доказал, что при любых $\lambda\neq 0$ система имеет краевые задачи, разрешимые по Фредгольму с ненулевым индексом [17], [18]. Таковой является задача с краевым условием

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma=g. \tag{4}$$

В шаре B был найден способ явного решения задачи (3),(4) (см. [19]), выписаны формулы собственных функций ротора при $\lambda\neq 0$, как решения однородной задачи.

Особенность этой задачи состоит в том, что младший член $\lambda\mathbf{u}$ в системе (3) существенно улучшает ее разрешимость (см. §7).

Я опубликовал этот результат (формулы (36),(37)) в 2000 году [21], когда узнал о приложениях и о работе С. Чандрасекхара и П. Кендала [22] 1957, предложивших другой подход к решению спектральной задачи 1 в шаре и в цилиндре.

В шаре их метод *не проходит,* а в цилиндре он был реализован в работе Д. Монтгомери, Л. Тернера и Г. Вахалы [23] 1978 , которые предлагали использовать собственные функции ротора при изучении *турбулентности* в плазме.

Самосопряженные расширения оператора задачи 1 изучали П.Е. Берхин [24] 1975, И. Гига с З. Иошидой [25] 1990 и Р. Пикар [26] 1996.

Другие аспекты теории см. в книге В.В. Козлова [4] и в обзорах В.В. Пухначева [9] и А. Махалова и В. Николаенко [28].

В 2003 году О.А. Ладыженская решала задачу "О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей" [1] и интересовалась возможностью вычисления собственных функций оператора Стокса в областях простейших форм в явном виде.

Оказалось [16], что в периодическом случае собственные вектор-функции $(\mathbf{v}_k,p_k)$ оператора Стокса таковы, что $\nabla p_k=0$, а вектор-функции $\mathbf{v}_k$ совпадают с соленоидальными собственными функциями ротора $\mathbf{u}_k^{\pm}$ при $k\neq 0$ и $\mathbf{u}_0^j$ при $k=0$.

На их основе были построены глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве [29] и найдены уравнения, которые описывают взаимодействие базисных *вихревых* потоков [30].

Позднее [15] удалось вычислить *собственные функции* $(\mathbf{v}_n, p_n)$ *оператора Стокса в шаре с условием* $\mathbf{v}_n|_S = 0$. В этом случае каждая собственная вектор-функция $\mathbf{v}_n$ оператора Стокса есть сумма, $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n^+ + \mathbf{u}_n^-$, собственных вектор-функций ротора $\mathbf{u}_n^\pm$ с противоположеными собственными значениями, а $p_n = \text{const.}$ (см. §6).

1.3. Структура работы и основные результаты. Решение задачи 1 в шаре при $\lambda \neq 0$ в § 1 сводится к решению спектральной задачи Дирихле для скалярного оператора Лапласа с условием $v(0) = 0$ в центре шара, которая решается явно в § 2. Ее собственные значения определяются нулями функций Бесселя полуцелого порядка, а собственные функции являются произведениями функций Бесселя и сферических функций.

В § 3 приводятся явные формулы для ненулевых собственных значений $\pm\lambda_{n,m}$ и собственных функций $\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}(\mathbf{x})$ ротора в шаре. Формулы (36),(37) были опубликованы в [21], а формулы (43) публикуются впервые. Они дают возможность вычислить распределение скоростей потока жидкости $\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}(\mathbf{x})$ внутри шара и представить себе движение такого потока.

Спектральная задача для оператора градиент дивергенции в § 4 сводится к решению спектральной задачи Неймана для скалярного оператора Лапласа, решения которой известны. Приводятся формулы (53) собственных функций $\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x})$ ротора в шаре с нулевым собственным значением. Эти формулы публикуются впервые.

В § 5 мы доказываем, что построенное семейство собственных вектор-функций ротора

$$\{\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}),\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}),\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})\} \quad n \geq 0,\ m \in \mathbb{N},\ |k| \leqslant n,$$

ортогонально и полно в пространстве $\mathbf{L}_2(B)$ вектор-функций $\mathbf{f}$ с интегрируемым квадратом модуля. Оно образует ортонормированный базис $\mathbf{L}_2(B)$.

Приводится аналог разложения Г. Вейля [10] векторного поля $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(B)$ (с нулевой компонентой $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\,\big|_S = 0$) на безвихревое поле $\mathbf{a}$ и соленоидальное поле $\mathbf{b}$: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})$.

В § 6 определяется связь между решениями спектральных задач для операторов ротора и Стокса и указан явный вид решений спектральной задачи для оператора Стокса в шаре. Формулы (93) собственных вектор-функций оператора Стокса публикуются впервые.

В § 7 в качестве примера мы приводим решение краевой задачи (2),(3) методом Фурье в двух случаях: при $\lambda \neq 0, \pm\lambda_{n,m}$ и при $\lambda = 0$. Отметим, что при $\lambda = 0$ разрешимость задачи существенно ухудшается, и ее ядро становится бесконечномерным.

1.4. Исследование оператора задачи. Указанная система (3), а также система

$$\nabla\,\mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{5}$$

при $\lambda \neq 0$ принадлежат классу систем эллиптических по Вайнбергу и Грушину [6]. Так оператор rot $+\lambda$I первого порядка не является эллиптическим, так как ранг его символической матрицы $\sigma_1(\mathrm{rot})(\xi)$ равен двум при всех $\xi \in \mathcal{R}^3\backslash 0$ и меньше трех [20].

Из соотношения div rot $\mathbf{u} \equiv 0$ для любой гладкой вектор-функции $\mathbf{u}$ и системы уравнений (1) при $\lambda \neq 0$ вытекает, что div$\mathbf{u} = 0$. Значит, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ является решением эллиптической системы:

$$rot\,\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} = 0, \quad div\,\mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

Такой оператор $rot + \lambda I$ называется *приводимым к эллиптическому* оператором [6].

Легко проверить, что система (6) и краевое условие (2) составляют переопределенную эллиптическую краевую задачу в смысле теории В.А. Солонникова [7]. Из соотношения

$$(rot + \lambda\, I)(rot - \lambda\, I)\mathbf{u} = -\Delta\,\mathbf{u} + \nabla\, div\,\mathbf{u} - \lambda^2\,\mathbf{u} \tag{7}$$

видно, что решение $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(B)$ уравнения (1) при $\lambda \neq 0$ является также решением эллиптической системы 2-го порядка:

$$-\Delta \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad div\, \mathbf{u} = 0. \tag{8}$$

Кроме того, любому решению $\mathbf{u}$ задачи (3),(4) соответствует решение $(\mathbf{u}, q)$ эллиптической краевой задачи

$$rot\, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f}, \quad \lambda div\, \mathbf{u} = div\, \mathbf{f}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g, \quad q|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

с компонентой $q = 0$ в G и обратно.

Согласно теории эллиптической краевой задачи, в применении к задаче (9) в ограниченной области G с гладкой границей Γ, имеет место следующая оценка нормы $\|\mathbf{u}\|_{s+1}$ вектор-функции $\mathbf{u}$ в пространстве Соболева $\mathbf{H}^{s+1}(G) \equiv \mathbf{W}_2^{s+1}(G)$:

$$C_s \|\mathbf{u}\|_{s+1} \leqslant \|\mathrm{rot}\mathbf{u}\|_s + \|\mathrm{div}\mathbf{u}\|_s + |\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s, \tag{10}$$

где C_s — положительная постоянная, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ — след на Γ нормальной компоненты $\mathbf{u}$, а $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{s+1/2}$ — его норма в $H^{s+1/2}(\Gamma)$, $s \geq 0$ (см. [7], [8], [20], [25]).

Из этой теории следует, что при $\lambda \neq 0$

a)*число линейно независимых решений задачи 1 конечно,*

b)*любое (обобщенное) решение задачи бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если граница области бесконечно дифференцируема.*

1.5. Сведение задачи 1 в шаре к спектральной задаче Дирихле. При построении собственных функций для ненулевых собственных значений ротора в шаре B мы приходим к следующей задаче Дирихле для оператора Лапласа.

Задача 2. *Найти собственные значения μ и собственные функции $v(x)$ скалярного оператора Лапласа $-\Delta$ такие, что*

$$-\Delta v = \mu\, v \quad \text{в} \quad B, \quad v|_S = 0, \quad v(0) = 0. \tag{11}$$

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$ оператора $\mathcal{L}_1$ задачи 2 отнесем все функции $v(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$, удовлетворяющие условиям $v|_S = 0$, $v(0) = 0$ и $\Delta v \in L_2(B)$.

Обозначим $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = r\, u_r$ скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Имеет место

Лемма 1. *Любому решению $(\lambda, \mathbf{u})$ задачи 1 в шаре B при $\lambda \neq 0$ соответствует решение $(\lambda^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u})$ задачи 2.*

Действительно, в силу (8), (2) и ограниченности $\mathbf{u}$ в окрестности нуля имеем

$$-\Delta\, v = -\mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{u} - 2\mathrm{div}\mathbf{u} = \lambda^2\, v, \quad v|_S = R\, u_r|_{r=R} = 0, \quad v(0) = r\, u_r|_{r=0} = 0.$$

2. Решение спектральной задачи 2.

2.1. Нули функций $\psi_n(z)$. Пусть $\rho_{m,n} > 0$ суть нули функций Бесселя полуцелого порядка, т.е. $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho_{m,n}) = 0$, где $n \geq 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Они же являются нулями функций

$$\psi_n(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! \Gamma\left(n+1+p+\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p+\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

Как показал Л. Эйлер (см. [3], §23 с. 356), цилиндрические функции $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ полуцелого порядка выражаются через элементарные, а именно,

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right). \tag{13}$$

Откуда видно, что

$$\psi_n(-z) = (-1)^n \psi_n(z), \tag{14}$$

и что нули функций $\psi_n(z)$ лежат на действительной оси и располагаются на ней симметрично относительно точки $z = 0$.

2.2. Спектральная задача Дирихле. Она решается методом разделения переменных в сферической системе координат (r, θ, φ). Обозначим через $\mathcal{L}$ оператор задачи. В учебнике В.С. Владимирова [3] в §26 доказано, что

собственные значения оператора $\mathcal{L}$ *в шаре* B *равны* $\lambda_{n,m}^2$, *где* $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m}R^{-1}$, $n \geq 0$, $m \in N$, *а числа* $\rho_{n,m} > 0$ *суть нули функций* $\psi_n(z)$,

соответствующие $\lambda_{n,m}^2$ *действительные собственные функции* v_κ *имеют вид:*

$$v_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\lambda_{n,m} r) Y_n^k(\theta, \varphi), \tag{15}$$

где $\kappa = (n, m, k)$ *— мультииндекс,* $n \geq 0$, $|k| \leq n$, $m \in \mathbb{N}$, c_κ *— произвольные действительные постоянные,* $P_n^k(\cos\theta)$ *— присоединенные функции Лежандра,* $0 < r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $Y_n^k(\theta, \varphi)$ *— действительные сферические функции,* $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Они равны

$$Y_n^k(\theta, \varphi) = \left\{ \begin{array}{ll} P_n^k(\cos\theta)\cos(k\varphi), & \text{если} \quad k = 0, 1, ..., n; \\ P_n^{|k|}(\cos\theta)\sin(|k|\varphi), & \text{если} \quad k = -1, ..., -n. \end{array} \right. \tag{16}$$

Функции $Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{k=-n}^{n} a_{kn} Y_n^k(\theta, \varphi)$ при $n = 0, 1, 2$ имеют вид:

$$Y_0 = a_{00},\ Y_1 = a_{01}\cos\theta + (a_{11}\cos\varphi + a_{-1,1}\sin\varphi)\sin\theta, \tag{17}$$

$$Y_2 = a_{02}(3\cos^2\theta - 1) + (a_{12}\cos\varphi + a_{-1,2}\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta + (a_{22}\cos 2\varphi + a_{-2,2}\sin 2\varphi)\sin^2\theta.$$

По определению сферических функций, произведение $r^n Y_n^k(\theta, \varphi)$ является однородным гармоническим полиномом от x_1, x_2, x_3 степени n. Из формул (15),(13) видно, что функции $v_\kappa(x)$ принадлежат классу $C^\infty(B)$ в шаре B любого радиуса $R > 0$.

Из ортогональности и полноты функций Бесселя в $L_2[(0, R); r]$ и сферических функций в $L_2(S_1)$ вытекает, что функции v_κ при различных $\kappa = (n, m, k)$ ортогональны в $L_2(B)$.

Система функций $\{v_\kappa\}$ полна в $L_2(B)$ [3]. Нормированная условием

$$\begin{gathered} \int\limits_B v_{\kappa'} v_\kappa \, d\mathbf{x} = \\ = a_{\kappa'}\, a_\kappa \int\limits_0^R \psi_{n'}(\rho_{n',m'} r/R)\, \psi_n(\rho_{n,m} r/R) r^2\, dr \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}(\theta, \varphi)\, Y_n^k(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta\, d\varphi = \delta_{\kappa',\kappa} \end{gathered} \tag{18}$$

она образует в $L_2(B)$ ортонормированный базис. Нормирующие множители a_κ таковы, что

$$(a_{n,m,k})^{-1} = R|J'_{n+1/2}(\rho_{n,m})|\sqrt{\pi\frac{1 + \delta_{0k}}{2n + 1}\frac{(n + |k|)!}{(n - |k|)!}}. \tag{19}$$

2.3. Эквивалентное интегральное уравнение. В §29 книги [3] доказано, что если $f \in C^1(B) \cap C(\overline{B})$, то краевая задача

$$-\Delta v = \mu\, v + f(x), \quad v|_S = 0, \quad v \in C^2(B) \cap C(\overline{B}), \tag{20}$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$v(x) = \int\limits_B G(x, y)[\mu\, v(y) + f(y)]\, d\, y, \quad v \in C(\overline{B}), \tag{21}$$

с симметричным слабо полярным ядром

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi|x - y|} - \frac{R|y|}{4\pi|x|y|^2 - yR^2|}. \tag{22}$$

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ задачи (20) относят [3] все функции v класса $\mathcal{C}^2(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$, удовлетворяющие граничному условию $v|_S = 0$ и условию $\Delta v \in L_2(B)$.

Собственные значения и собственные функции оператора $\mathcal{L}$ совпадают с характеристическими числами и соответствующими собственными функциями ядра $G(x, y)$.

Согласно теории интегральных уравнений *множество собственных значений оператора $\mathcal{L}$ не имеет конечных предельных точек; каждое собственное значение имеет конечную кратность. Всякая функция из $\mathcal{M}_\mathcal{L}$ разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$.*

Следовательно, все собственные значения $\lambda^2_{n,m} = \rho^2_{n,m} R^{-2}$оператора $\mathcal{L}$ можно перенумеровать в порядке возрастания их величин

$$0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant ..., \quad \mu_l \to \infty, \quad l \to \infty, \tag{23}$$

повторяя в этом ряде μ_l столько раз, какова его кратность (число $\lambda^2_{n,m}$ повторяется $2n+1$ раз). Соответствующие собственные функции обозначим через $V_1, V_2, ...,$ так что в ряде чисел (23) каждому собственному значению μ_l соответствует собственная функция $V_l(x)$,

$$\mathcal{L}V_l = \mu_l V_l, \quad l = 1, 2, ..., \quad V_l \in \mathcal{M}_\mathcal{L}, \tag{24}$$

причем собственные функции $V_l(x)$ выбираем вещественными и ортонормальными:

$$(\mathcal{L}V_l, V_m) = \mu_l (V_l, V_m) = \mu_l \delta_{lm} \tag{25}$$

Всякая функция $f(x)$ из $\mathcal{M}_\mathcal{L}$ разлагается в ряд Фурье по ортонормальной системе $\{V_l(x)\}$,

$$f(x) = \sum_{l=1}^{\infty} (f, V_l) V_l(x). \tag{26}$$

Этот ряд сходится в $L_2(B)$, и в силу теоремы Гильберта-Шмидта ряд сходится регулярно на $\overline{B}$ (см.[3] §20.1). Но множество $\mathcal{M}_\mathcal{L}$ плотно в $L_2(B)$.

Откуда получаем доказательство полноты системы $\{V_l(x)\}$ в $L_2(B)$. Отметим, что $\{V_l(x)\}$ — это система $\{v_\kappa(x)\}$ с выше определенным порядком нумерации элементов.

Ряд (26) (и другие аналогичные ряды) будем записывать в виде

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} (f, v_{n,m,k}) v_{n,m,k}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\kappa} (f, v_\kappa) v_\kappa(\mathbf{x}), \tag{27}$$

предполагая, что суммирование ряда (27) идет по n, m, для которых $0 < \rho_{n,m} < N$, а затем $N \to \infty$.

2.4. Сходимость ряда в норме пространства Соболева $H^s(B)$. Согласно теоремам 8 и 9 гл. 4 в [5] для шара имеем.

Для того, чтобы f разлагалась в ряд Фурье (27) *по системе собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа в шаре, сходящийся в норме пространства Соболева $H^s(B)$, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежала*

$$H^s_\mathcal{D}(B) = \{f \in H^s(B) : f|_S = 0, ..., \triangle^\sigma f|_S = 0\}, \quad \text{где} \quad \sigma = [(s-1)/2], \quad s \geq 1. \tag{28}$$

Если $f \in H^s_\mathcal{D}(B)$, то сходится ряд

$$\sum_\kappa (f, v_\kappa)^2 \lambda_\kappa^{2s}, \tag{29}$$

и существует такая положительная постоянная $C > 0$, не зависящая от f, что

$$\sum_\kappa (f, v_\kappa)^2 \lambda_\kappa^{2s} \leqslant C\|f\|^2_{H^s(B)}. \tag{30}$$

Если $s \geq 2$, то любая функция f из $H^s_\mathcal{D}(B)$ разлагается в в ряд Фурье (27)*, сходящийся в пространстве $\mathcal{C}^{s-2}(B)$.*

2.5. Решение задачи 2. Так как $\psi_0(0) = 1$, то функции $\{v_\kappa\}$ при $\kappa = (0, m, 0)$ удовлетворяют последнему условию $v_\kappa(0) = 0$ задачи 2 тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты $c_{(0,m,0)} = 0$. Откуда следует

Теорема 1. *Собственные значения $\mu_{n,m}$ задачи 2 равны $\lambda^2_{n,m}$, где $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m} R^{-1}$, а числа $\rho_{n,m}$ – нули функций $\psi_n(z)$, m, $n \in \mathbb{N}$.*
Собственные функции v_κ задачи, соответствующие значениям $\lambda^2_{n,m}$, имеют вид

$$v_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\lambda_{n,m} r) Y^k_n(\theta, \varphi), \tag{31}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$ и $|k| \le n$, $\kappa = (n, m, k)$. Кратность значения $\mu_{n,m}$ равна $2n + 1$.

Итак, спектр задачи 2 дискретен и не имеет конечных точек накопления, а собственные функции v_κ задачи выражаются через цилиндрические и сферические функции.

3. Решение спектральной задачи 1 в шаре

3.1. Построение решений задачи 1. Попутно мы доказываем, что ее собственные значения $\pm\lambda_{n,m}$ суть корни квадратные из собственных чисел задачи 2.

Лемма 2. *В шаре B любому решению (μ, v) задачи 2 при $\mu > 0$ соответствуют два и только два решения $(\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^+)$ и $(-\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^-)$ задачи 1 такие, что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^+ = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^- = v$.*

Доказательство леммы 2 базируются на представлении системы $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$, $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ из четырех действительных уравнений, записанных в сферических координатах, как системы двух комплексных уравнений

$$(\partial_r - i\lambda)\, rw = r^{-1} Hv, \quad \mathrm{K}w = \lambda v - ir^{-1}\partial_r(rv), \tag{32}$$

относительно комплексной функции $w = u_\varphi + iu_\theta$ и действительной функции $v = ru_r$. Операторы H и K имеют вид:

$$\mathrm{H}v = \left(\sin^{-1}\theta \partial_\varphi + i\partial_\theta\right) v \quad \mathrm{K}w = \sin^{-1}\theta\, (\partial_\theta \sin\theta + i\partial_\varphi) w. \tag{33}$$

Нетрудно убедиться, что $-\Delta v = \lambda^2 v$ есть условие согласованности уравнений (32).

Пусть (μ, v) — фиксированное решение задачи 2. Ненулевые решения задачи 1 находим так. Функция u_r определяется как дробь v/r. Положим $\underline{\lambda} = \sqrt{\mu}$ или $\underline{\lambda} = -\sqrt{\mu}$, и подставим $\underline{\lambda}$ и $\underline{v} = v$ в уравнения (32). Теперь их правые части заданы и уравнения совместны. Функции u_θ и u_φ определим, решая эту систему. Общее решение первого уравнения в (32) имеет вид

$$\underline{w} = dr^{-1} e^{i\underline{\lambda} r} + r^{-1} \int\limits_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)} H\underline{v}(t,\theta,\varphi) t^{-1} dt, \tag{34}$$

где d есть функция от переменных φ и θ, которая равна нулю, если решение ищем в классе Соболева $W^1_2(B)$ или в классе ограниченных функций. Остается проверить, что функция $\underline{w}$ удовлетворяет второму уравнению в (32). Получаем

$$K\underline{w} = r^{-1} \int\limits_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)} KH\underline{v}(t, \theta, \varphi) t^{-1} dt = r^{-1} \int\limits_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)} \left[\sin^{-1}\theta\, (\partial_\theta\partial_\varphi - \partial_\varphi\partial_\theta)\underline{v} + i\Delta_{\theta,\varphi}\underline{v}\right] t^{-1} dt,$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ — оператор Лапласа-Бельтрами. Уравнение Гельмгольца в сферических координатах запишем так:

$$\frac{1}{rsin\theta}\left[\partial_\theta\left(sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{sin\theta}(\partial_\varphi)^2\right] v = -\lambda^2 rv - \frac{1}{r}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) v. \tag{35}$$

Функция $\underline{v}$ является его решением при $\lambda^2 = \underline{\lambda}^2 = \mu$. Подставляя правую часть этого равенства под интеграл, вместо выражения $r^{-1}\Delta_{\theta,\varphi}\underline{v}$ при $\lambda^2 = \underline{\lambda}^2$, $v = \underline{v}$, $r = t$, получаем

$$K\underline{w} = -ir^{-1}\int\limits_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)}\left(\underline{\lambda}^2 t\underline{v} + \frac{1}{t}\partial_t\left(t^2\partial_t\underline{v}\right)\right)dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая соотношение $v(0) = 0$, получим правую часть второго равенства в (32). Лемма 2 доказана.

3.2. Формулы решений. Подставляя конкретные выражения $\lambda_\kappa^\pm = \pm\lambda_{n,m}$ и v_κ из (31) в дробь v/r и в интеграл (34) (вместо $\underline{\lambda}$ и $\underline{v}$), а также d=0, получим явные формулы собственных функций задачи. Имеет место

Теорема 2. *Ненулевые собственные значения $\lambda_{n,m}^\pm$ задачи 1 равны $\pm\lambda_{n,m}$, где $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m}R^{-1}$, R–радиус шара, а числа $\rho_{n,m}$ – нули функций $\psi_n(z)$, m, $n \in \mathbb{N}$.*
Компоненты u_r и $w = u_\varphi + iu_\theta$ собственных функций $u_\kappa^\pm$ задачи 1 в сферических координатах вычисляются по формулам:

$$(u_r)_\kappa^\pm = c_\kappa^\pm(\lambda_{n,m}^\pm r)^{-1}\psi_n(\lambda_{n,m}^\pm r)Y_n^k(\theta,\varphi), \tag{36}$$

$$(u_\varphi + iu_\theta)_\kappa^\pm = c_\kappa^\pm\ (\lambda_{n,m}^\pm r)^{-1}\Phi_n(\lambda_{n,m}^\pm r)HY_n^k(\theta,\varphi), \tag{37}$$

где i — мнимая единица, $c_\kappa^\pm \in \mathbb{R}$, m,$n \in \mathbb{N}$, $|k| \le n$,$\kappa = (n,m,k)$,

$$\Phi_n(\lambda_{n,m}^\pm r) = \int\limits_0^r e^{i\lambda_{n,m}^\pm(r-t)}\psi_n(\lambda_{n,m}^\pm t)t^{-1}dt, \tag{38}$$

$$HY_n^k(\theta,\varphi) = \left(\sin^{-1}\theta\,\partial_\varphi + i\partial_\theta\right)Y_n^k(\theta,\varphi). \tag{39}$$

Функции u_r, u_θ, u_φ принадлежат классу C^∞ всюду в $\overline{B}$, кроме оси x_3, на которой $r sin\theta = 0$, и ограничены в $\overline{B}$. В исходных координатах x_1,x_2,x_3 компоненты u_j собственных функций задачи 1 принадлежат классу $C^\infty(\overline{B})$.

Через функции u_r и $w = u_\varphi + iu_\theta$ они выражаются так:

$$u_1 = u_rY_1^1 + \mathrm{Re}(w\,\overline{\mathrm{H}}Y_1^1),\quad u_2 = u_rY_1^{-1} + \mathrm{Re}(w\,\overline{\mathrm{H}}Y_1^{-1}),\quad u_3 = u_rY_1^0 + \mathrm{Re}(w\,\overline{\mathrm{H}}Y_1^0), \tag{40}$$

где согласно учебнику Владимирова [3]

$$x_1/r = Y_1^1(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi,\quad x_2/r = Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi,\quad x_3/r = Y_1^0(\theta) = \cos\theta, \tag{41}$$

$$HY_1^1 = -\sin\varphi + i\cos\theta\cos\varphi,\quad HY_1^{-1} = \cos\varphi + i\cos\theta\sin\varphi,\quad HY_1^0 = -i\sin\theta. \tag{42}$$

Гладкость вектор-функций $u_\kappa^\pm(x)$ в $\overline{B}$ вытекает из общей теории (см. утверждение b) в п. 1.4), и можно проверить непосредственно. Теорема доказана.

Вектор-функции $u_\kappa^\pm$ представим в виде суммы трех вещественных взаимно ортогональных векторов. Используя репер $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ и разделяя действительные и мнимые части в (37), (38), (39), имеем

$$\begin{gathered} u_\kappa^\pm = c_\kappa^\pm(\lambda_{n,m}^\pm r)^{-1}\psi_n(\lambda_{n,m}^\pm r)Y_n^k(\theta,\varphi)\,\mathbf{i}_r + \\ c_\kappa^\pm(\lambda_{n,m}^\pm r)^{-1}Re[\Phi_n(\lambda_{n,m}^\pm r)](ReHY_n^k\,\mathbf{i}_\varphi + ImHY_n^k\,\mathbf{i}_\theta) + \\ c_\kappa^\pm(\lambda_{n,m}^\pm r)^{-1}Im[\Phi_n(\lambda_{n,m}^\pm r)](-ImHY_n^k\,\mathbf{i}_\varphi + ReHY_n^k\,\mathbf{i}_\theta). \end{gathered} \tag{43}$$

Эти формулы позволяют представить движение вихревого потока жидкости в шаре, скорость которого есть $u_\kappa^\pm(x)$, при $n = 1, 2, \ldots$. Завихренность этих потоков $\mathrm{rot}\,u_\kappa^\pm$, равная $\lambda_{n,m}^\pm u_\kappa^\pm$, отлична от нуля в каждой точке шара.

3.3. Свойство функций $\Phi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)$. Функции $\psi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)$, $Y^k_n(\theta,\varphi)$ и числа $\lambda^{\pm}_{n,m}=\pm\rho_{n,m}/R$ вещественные. Согласно (14) $\psi_n(\lambda^{-}_{n,m}r)=(-1)^n\,\psi_n(\lambda_{n,m}r)$. Поэтому

$$\begin{gathered}\Phi_n(\lambda^{-}_{n,m}r)=\int\limits_0^r e^{-i\lambda_{n,m}(r-t)}\psi_n(-\lambda_{n,m}t)t^{-1}d\,t=\\=(-1)^n\int\limits_0^r e^{-i\lambda_{n,m}(r-t)}\psi_n(\lambda_{n,m}t)t^{-1}d\,t=(-1)^n\overline{\Phi_n(\lambda_{n,m}r)}.\end{gathered}\tag{44}$$

Докажем, что число $\Phi_n(\lambda_{n,m}R)$ действительное и, значит,

$$\Phi_n(\rho_{n,m})=\int\limits_0^R \cos\lambda_{n,m}(R-t)\psi_n(\lambda_{n,m}t)t^{-1}dt.\tag{45}$$

По построению, вектор-функции $u^{\pm}_{\kappa}(x)$ удовлетворяют уравнению (1) при $\lambda=\pm\lambda_{n,m}$, а комплексные функции

$$w^{\pm}_{\kappa}=(u_\varphi+iu_\theta)^{\pm}_{\kappa}=a^{\pm}_{\kappa}\ (\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)\mathrm{H}Y^k_n(\theta,\varphi),\quad a^{\pm}_{\kappa}\in\mathbb{R},\tag{46}$$

удовлетворяют системе уравнений (32) при $\lambda=\pm\lambda_{n,m}$, $v=v_\kappa(x)$, причем $v_\kappa|_{r=R}=0$.

Из второго уравнения в (32) видим, что при $r\to R$

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{K}w^{\pm}_{\kappa}|_{r\to R}=\pm\lambda_{n,m}\,v_\kappa|_{r=R}=0.\tag{47}$$

Композиция KH операторов K и H на действительных функциях $Y^k_n(\theta,\varphi)$ равна

$$\begin{gathered}\mathrm{KH}Y^k_n=\sin^{-1}\theta\,(\partial_\theta\sin\theta+i\partial_\varphi)\left(\sin^{-1}\theta\partial_\varphi+i\partial_\theta\right)Y^k_n=\\ \sin^{-1}(\partial_\theta\partial_\varphi-\partial_\varphi\partial_\theta)Y^k_n+i\Delta_{\theta,\varphi}Y^k_n=in(n+1)Y^k_n.\end{gathered}\tag{48}$$

Значит,

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{K}w^{\pm}_{\kappa}|_{r=R}=-n(n+1)a^{\pm}_{\kappa}(\rho^{\pm}_{n,m})^{-1}\mathrm{Im}\ \Phi_n(\rho^{\pm}_{n,m})Y^k_n(\theta,\varphi)=0\tag{49}$$

при любых θ и φ. Следовательно, $\mathrm{Im}\Phi_n(\rho_{n,m})=0$, и число $\Phi_n(\rho_{n,m})$ действительно.

4. Решение спектральной задачи 1 при $\lambda=0$

4.1. Сведение задачи 1 при $\lambda=0$ к спектральной задаче Неймана. Собственные вектор-функции оператора ротор, отвечающие нулевому собственному значению, будем искать среди решений следующей спектральной задачи.

Задача 3. *Найти ненулевые собственные значения μ и собственные вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\mathbf{L}_2(G)$ оператора градиент дивергенции такие, что*

$$-\nabla\ div\,\mathbf{u}=\mu\mathbf{u}\quad в\quad G,\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma=0,\tag{50}$$

где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ — проекция вектора $\mathbf{u}$ на нормальный вектор $\mathbf{n}$.

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{GD}}$ оператора $\mathcal{GD}$ задачи 4 отнесем все вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(G)\cap\mathcal{C}^1(\overline{G})$, которые удовлетворяют граничному условию $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma=0$ и условию ∇ div $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(G)$.

Эта задача связана со спектральной задачей Неймана для скалярного оператора Лапласа.

Задача 4. *Найти все собственные значения ν и собственные функции $g(\mathbf{x})$ оператора Лапласа $-\Delta$ такие, что*

$$-\Delta g=\nu g\quad в\ G,\quad \mathbf{n}\cdot\nabla\,g|_\Gamma=0.\tag{51}$$

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ оператора $\mathcal{N}$ задачи 4 относят все функции $g(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(G)\cap\mathcal{C}^1(\overline{G})$, удовлетворяющие условиям $\mathbf{n}\cdot\nabla\,g|_\Gamma=0$, $\Delta\,g\in L_2(G)$.

Легко убедиться, что имеет место

Лемма 3. *Любому решению $(\mu, \mathbf{u})$ задачи 3 в области G соответствует решение $(\nu, g) = (\mu, div\, \mathbf{u})$ задачи 4. Обратно, любому решению (ν, g) задачи 4 соответствует решение $(\mu, \mathbf{u}) = (\nu, \nabla g)$ задачи 3.*

4.2. Решение спектральной задачи 4 в шаре. Решение этой задачи известно. Согласно книге В.С. Владимирова [3]

собственные значения оператора $-\Delta$ в шаре B с условием Неймана равны $\nu_{n,m}^2$, где $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m} R^{-1}$, $n \geq 0$, $m \in N$, а числа $\alpha_{n,m} > 0$ суть нули функций $\psi_n'(z)$, производных $\psi_n(z)$, т.е. $\psi_n{}'(\alpha_{n,m}) = 0$. Соответствующие $\nu_{n,m}^2$ собственные функции g_κ имеют вид:

$$g_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) Y_n^k(\theta, \varphi), \tag{52}$$

где $\kappa = (n, m, k)$ — мультииндекс, c_κ — произвольные действительные постоянные, $Y_n^k(\theta, \varphi)$ — действительные сферические функции, $n \geq 0$, $|k| \leq n$, $m \in N$.

Функции $g_\kappa(x)$ принадлежат классу $C^\infty(\overline{B})$ и при различных κ ортогональны в $L_2(B)$. Система функций $\{g_\kappa\}$ полна в $L_2(B)$ [5]. Нормируя их, получим ортонормированный в $L_2(B)$ базис.

4.3. Решение спектральной задачи 3 в шаре. Согласно лемме 3 вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla g_\kappa(x)$ являются решениями задачи 3 при $\mu_{n,m} = \alpha_{n,m}^2 R^{-2}$ в $\mathbf{L}_2(B)$. Их компоненты $(q_r, q_\theta, q_\varphi)$ имеют вид

$$\begin{gathered} q_{r,\kappa}(r, \theta, \varphi) = c_\kappa (\alpha_{n,m}/R) \psi_n'(\alpha_{n,m} r/R) Y_n^k(\theta, \varphi), \\ (q_\varphi + i q_\theta)_\kappa = c_\kappa (1/r) \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) \mathrm{H} Y_n^k(\theta, \varphi). \end{gathered} \tag{53}$$

При $\kappa = (0, m, 0)$ функция $Y_0^0(\theta, \varphi) = 1$, $\mathrm{H}Y_0^0 = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} & q_{r,(0,m,0)}(r) = c_{(0,m,0)} (\alpha_{0,m}/R) \psi_0'(\alpha_{0,m} r/R), \\ & (q_\varphi + i q_\theta)_{(0,m,0)} = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Из этих формул легко выписать величины нормирующих множителей c_κ, при которых $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = 1$.

4.4. Решение спектральной задачи 1 при $\lambda = 0$ в шаре. Числа $\mu_{n,m} = \alpha_{n,m}^2 R^{-2} > 0$ при любых $n \geq 0$, $m \in N$. Поэтому вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa$ являются также решениями задачи 1 при $\lambda = 0$. Причем, $\mathbf{q}_\kappa$ и $\mathbf{q}_{\kappa'}$ ортогональны при $\kappa' \neq \kappa$.

Действительно, согласно формуле Гаусса-Остроградского

$$\int_B \nabla g_{\kappa'} \cdot \nabla g_\kappa dx = -\int_B g_{\kappa'} \Delta g_\kappa dx + \int_S g_{\kappa'} (n \cdot \nabla) g_\kappa dS. \tag{55}$$

Функции $g_\kappa(x)$ являются решениями задачи 4 , они удовлетворяет уравнению Гельмгольтца (51) при $\nu = \alpha_{n,m}^2/R^2 > 0$ с краевым условием Неймана. Следовательно, граничный интеграл пропадает, а

$$\int_B \mathbf{q}_{\kappa'} \cdot \mathbf{q}_\kappa dx = \frac{\alpha_{n,m}^2}{R^2} \int_B g_{\kappa'} g_\kappa dx. \tag{56}$$

Но функции $g_\kappa(x)$ и $g_{\kappa'}(x)$, согласно (52), взаимно ортогональны в $\mathrm{L}_2(B)$ при $\kappa' \neq \kappa$. Значит, последний интеграл в (56) равен нулю и вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa$ и $\mathbf{q}_{\kappa'}$ взаимно ортогональны в $\mathbf{L}_2(B)$.

Заметим, что $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = (\alpha_{n,m}/R)\, \|g_\kappa(x)\|$.

5. Пространство $\mathbf{L}_2(B)$ и собственные функции ротора

5.1. Подпространство $\mathcal{A} = \nabla H^1(B)$. Линейное подпространство в $\mathbf{L}_2(B)$, образованное ортонормированной системой вектор-функций $\{\mathbf{q}_\kappa(x)\}$, обозначим через $\mathcal{A}$. Фактически,

$$\mathcal{A} = \{\nabla h : \quad h \in H^1(B)\}. \tag{57}$$

Действительно, каждый элемент $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla g_\kappa$, где $g_\kappa \in H^1(B)$. С другой стороны, функция h из $H^1(B)$ разлагается в сходящийся ряд

$$h = \sum_\kappa (h, \widehat{g}_\kappa)\widehat{g}_\kappa, \quad \widehat{g}_\kappa = (\alpha_{n,m}/R)g_\kappa, \quad (\widehat{g}_\kappa, \widehat{g}_{\kappa'}) = \delta_{\kappa,\kappa'}. \tag{58}$$

5.2. Подпространство $\mathcal{B} = \mathbf{V}^0(B)$. Обозначим через $\mathbf{q}^\pm_\kappa(x)$ решения задачи 1, которые, согласно Теореме 2 соответствуют собственным значениям $\lambda^\pm_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, и нормированы в $\mathbf{L}_2(B)$), то есть $\|\mathbf{q}^\pm_\kappa(x)\| = 1$. Они принадлежат подпространству

$$\mathbf{V}^0(B) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(B) : div\, \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S = 0, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^0(B)} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(B)}\}, \tag{59}$$

где $div\, \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S = 0$ понимаются в смысле теории распределений:

$$\mathbf{V}^0(B) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(B) : \int_B \mathbf{u}\cdot\nabla h\, d\,x = 0, \quad \text{для любой} \quad h \in H^1(B)\}. \tag{60}$$

Очевидно, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \equiv \mathbf{V}^0(B)$ ортогональные подпротранства в $\mathbf{L}_2(B)$. Через $\mathcal{B}^\pm$ обозначим подпространства в $\mathcal{B}$, образованные системами вектор-функций $\{\mathbf{q}^\pm_\kappa(x)\}$. Имеет место

Лемма 4. *Вектор-функции $\mathbf{q}^+_\kappa(x)$ (соотв., $\mathbf{q}^-_\kappa(x)$) взаимно ортогональны при различных κ. Вектор-функции $\mathbf{q}^+_\kappa(x)$ и $\mathbf{q}^-_\kappa(x)$ взаимно ортогональны при любых κ.*

Доказательство. Воспользуемся формулой Грина оператора ротор

$$\int_B \mathrm{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\, d\mathbf{x} - \int_B \mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \int_S [\mathbf{u},\mathbf{v}]\cdot\mathbf{n}\, dS. \tag{61}$$

Смешанное произведение $[\mathbf{u},\mathbf{v}]\cdot\mathbf{n}$ на сфере S совпадает с определителем

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_r & u_\theta & u_\varphi \\ v_r & v_\theta & v_\varphi \end{vmatrix} \tag{62}$$

и равно $u_\theta v_\varphi - u_\varphi v_\theta$ или $\mathrm{Im}(W\,\overline{V})$ в комплексных обозначениях $W = (u_\varphi + iu_\theta)$ и $\overline{V} = (v_\varphi - iv_\theta)$.

Докажем ортогональность вектор-функций $\mathbf{q}^+_{\kappa'}(x)$ и $\mathbf{q}^+_\kappa(x)$, при $\kappa' \neq \kappa$. Они являются решениями задачи 1 и вычисляются по формулам (36), (37), где числа $\lambda^+_{n,m} = \rho_{n,m}/R$ и c^+_κ — действительные постоянные.

В начале рассмотрим случай, когда $(n', m') \neq (n, m)$, а значит, $\lambda^+_{n',m'} \neq \lambda^+_{n,m}$. Подставляя эти функции в формулу (61), получим равенство:

$$(\lambda_{n',m'} - \lambda_{n,m}) \int_B \mathbf{q}^+_{\kappa'}\cdot\mathbf{q}^+_\kappa\, dx = \mathrm{Im}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} W^+_{k'}\,\overline{W}^+_k \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{63}$$

Ортогональность будет доказана, если последний интеграл I обращается в нуль. Согласно формулам (37) он равен:

$$I = A\,\mathrm{Im}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{H}Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)\,\overline{\mathrm{H}}Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{64}$$

где $A = c_{\kappa'}^{+}(\rho_{n',m'})^{-1}c_{\kappa}^{+}(\rho_{n,m})^{-1}\,\Phi_{n'}(\rho_{n',m'})\overline{\Phi}_n(\rho_{n,m})$ — действительная постоянная согласно п. 3.3.

Оператор H в этом интеграле перебросим, интегрируя по частям. Имеем:

$$\mathrm{Im}[A\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)[-\sin^{-1}\theta\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)-\sin^{-2}\theta\partial_\varphi^2]\,Y_n^k(\theta,\varphi)\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi]+$$
$$\mathrm{Im}[iA\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)[\sin^{-1}\theta(\partial_\varphi\partial_\theta-\partial_\theta\partial_\varphi)]\,Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi].$$

Последний интеграл равен нулю, так как сферические функции непрерывны вместе с производными любого порядка по φ и θ. В первом интеграле, оператор, взятый в квадратные скобки, есть оператор Лапласа-Бельтрами: $-\Delta_{\theta\varphi}$. Согласно свойству сферических функций, $-\Delta_{\theta\varphi}Y_n^k(\theta,\varphi) = n(n+1)Y_n^k(\theta,k)$, подставляя это выражение под знак интеграла, получим:

$$(\lambda_{n',m'}-\lambda_{n,m})\int_B q_{\kappa'}^{+}\cdot q_{\kappa}^{+}\,dx = \mathrm{Im}[n(n+1)A\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}\,Y_n^k\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi]. \tag{65}$$

Так как сферические функции взаимно ортогональны при $(n',k')\neq(n,k)$, то этот интеграл равен нулю. Итак, *вектор-функции* $\mathbf{q}_{\kappa'}^{+}(x)$ *и* $\mathbf{q}_{\kappa}^{+}(x)$ *ортогональны при* $(n',m')\neq(n,m)$ *и* $(n',k')\neq(n,k)$. .

Если же $(n',k')=(n,k)$, $m'\neq m$, то интеграл справа в (65) есть действительное число. Числа c_κ, $\Phi_n(\rho_{n,m})$ и A также действительны, поэтому $\mathbf{q}_{k,m',n}^{+}(x)$ и $\mathbf{q}_{k,m,n}^{+}(x)$ — ортогональны.

В случае $(n',m')=(n,m)$ и $k'\neq k$ формула (65) не годится, так как ее левая и правая части обращаются в нуль. Согласно формулам (36), (37), имеем

$$\int_B \mathbf{q}_{k',m,n}^{+}\cdot\mathbf{q}_{k,m,n}^{+}\,dx = c_{k',m,n}^{+}c_{k',m,n}^{+}\lambda_{m,n}^{-2}[\int_0^R \psi_n^2(\lambda_{n,m}r)\,dr\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n^{k'}(\theta,\varphi)Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi+$$
$$+\int_0^R \Phi_n(\lambda_{n,m}r)\overline{\Phi}_n(\lambda_{n,m}r)\,dr\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{H}Y_n^{k'}(\theta,\varphi)\overline{\mathrm{H}}Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta]. \tag{66}$$

Ввиду ортогональности функций $Y_n^{k'}$ и Y_n^k в $L_2(S_1)$ оба интеграла исчезают и, значит, векторы $\mathbf{q}_{k',m,n}^{+}$ и $\mathbf{q}_{k,m,n}^{+}$ — ортогональны.

Ортогональность вектор-функций $\mathbf{q}_{\kappa'}^{-}(x)$ и $\mathbf{q}_{\kappa}^{-}(x)$, при $\kappa'\neq\kappa$ доказывается аналогично.

Рассмотрим собственные функции $\mathbf{q}_{\kappa'}^{+}(x)$ и $\mathbf{q}_{\kappa}^{-}(x)$, соответствующие значениям $\lambda_{n,m}$ и $-\lambda_{n,m}$ различных знаков, при любых κ' и κ. Повторяя предыдущие вычисления, имеем

$$\begin{aligned}(\lambda_{n',m'}+\lambda_{n,m})\int_B \mathbf{q}_{\kappa'}^{+}\cdot\mathbf{q}_{\kappa}^{-}\,dx &= \mathrm{Im}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} W_{k'}^{+}\,\overline{W}_k^{-}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = \\ &= \mathrm{Im}[n(n+1)B\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi],\end{aligned} \tag{67}$$

где постоянная $B = (-1)^{(n+1)}\,c_{\kappa'}^{+}(\rho_{n',m'})^{-1}c_{\kappa}^{-}(\rho_{n,m})^{-1}\,\Phi_{n'}(\rho_{n',m'})\Phi_n(\rho_{n,m})$ действительна.

Правая часть (67) исчезает при любых κ' и κ. Следовательно, вектор-функции $\mathbf{q}_{\kappa'}^{+}(x)$ и $\mathbf{q}_{\kappa}^{-}(x)$ ортогональны. Лемма доказана.

5.3. Разложение Г. Вейля. Из полноты в $L_2(B)$ семейств собственных функций оператора Лапласа с условиями Дирихле и Неймана вытекает, что *система вектор-функций* $\{\mathbf{q}_\kappa(x)\}$ *полна в подпространстве* $\mathcal{A}$, *системы* $\{\mathbf{q}^+_\kappa(x)\}$ *и* $\{\mathbf{q}^-_\kappa(x)\}$ *в совокупности полны в подпространстве* $\mathcal{B}$. *Других решений задача 1 не имеет.*

Подпространства $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *взаимно ортогональны в* $\mathbf{L}_2(B)$. *В случае шара их объединение совпадает с* $\mathbf{L}_2(B)$ (см. Г. Вейль [10]). Таким образом, мы получили ортогональное разложение пространства $\mathbf{L}_2(B)$ по собственным вектор-функциям оператора ротор.

$$\mathbf{L}_2(B) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}^+ \oplus \mathcal{B}^-. \tag{68}$$

Теорема 3. *Система* $\{\mathbf{q}_\kappa(x)\}$, $\{\mathbf{q}^+_\kappa(x)\}$ *и* $\{\mathbf{q}^-_\kappa(x)\}$ *собственных вектор-функций задачи 1 в совокупности образует в пространстве* $\mathbf{L}_2(B)$ *ортонормированный базис. Любую вектор-функцию из* $\mathbf{L}_2(B)$ *можно разложить в ряд Фурье по этому базису.*

Разложение Вейля векторного поля $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(B)$ на безвихревое поле $\mathbf{a}$ и соленоидальное $\mathbf{b}$ имеет вид $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})$, где

$$\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{69}$$

$$\mathbf{b} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})] \tag{70}$$

суммирование рядов (69), (70) идет по n, m, для которых $0 < \alpha_{n,m} < N$ и $0 < \rho_{n,m} < N$, а затем $N \to \infty$.

Имеет место равенство Парсеваля-Стеклова: $\|\mathbf{f}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$, которое запишем так

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{(n,m)\in\mathbb{P}_N}\sum_{k\in[-n,n]} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})^2], \tag{71}$$

где решетка $\mathbb{P}_N = \{(n,m) : 0 < \rho_{n,m} < N, 0 < \alpha_{n,m} < N\}$, векторы $\mathbf{q}^\pm_{0,m,0} = 0$.

Отметим, что разложение векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ на безвихревое поле $\nabla h(\mathbf{x})$ и соленоидальное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ связано с решением задачи Неймана

$$\triangle h = \operatorname{div}\mathbf{f} \quad \text{в} \quad B, \quad \mathbf{n}\cdot\nabla h|_S = \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S, \tag{72}$$

в классической или обобщенной постановках [2].

Мы же получаем решение этой задачи в виде рядов (69), (70). Отметим их свойства.

Если $\mathbf{f} = \nabla h$, где $h(\mathbf{x})$ – финитная в B бесконечно дифференцируемая функция, то есть $h \in \mathcal{D}(B)$, то $\nabla\, div\, \mathbf{f} = \nabla\triangle h$ и для любого целого $s > 1$: $(\nabla\, div)^s\, \mathbf{f} = \nabla\triangle^s h \in \mathbf{L}_2(B)$.

Следовательно, интегрируя по частям, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} ((\nabla\, div)^s\, \mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} (\alpha_{n,m}/R)^{2s} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}). \tag{73}$$

Ряд сходится в $\mathbf{L}_2(B)$ к $(\nabla\mathrm{div})^s\,\mathbf{f}$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} (\alpha_{n,m}/R)^{4s} |(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})|^2 = \|(\nabla\mathrm{div})^s\,\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_2(B)}. \tag{74}$$

Если вектор-функция $\mathbf{f}$ соленоидальна, и ее компоненты принадлежат пространству $\mathcal{D}(B)$, то для любого целого $s \geq 1$: $(rot)^s\, \mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(B)$. Значит, аналогично предыдущему

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} [((rot)^s\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + ((rot)^s\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})] = \tag{75}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(\rho_{n,m}/R)^s[(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_{n,m,k})\,\mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x})+(-1)^s(\mathbf{f},\mathbf{q}^-_{n,m,k})\,\mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})].$$

Ряды сходится к $(rot)^s\,\mathbf{f}$ в $\mathbf{L}_2(B)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(\rho_{n,m}/R)^{2s}[|(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_{n,m,k})|^2\;+|(\mathbf{f},\mathbf{q}^-_{n,m,k})|^2]=\|(rot)^s\,\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_2(B)}. \tag{76}$$

Эти ряды сходится также в $\mathbf{H}^l(B)$, при $l=1,2,....$ Действительно, обозначим через $\mathbf{S}_j$ частичную сумму ряда (75) и воспользуемся оценкой (10). Получим

$$\|\mathbf{S}_j-\mathbf{S}_i\|^2_{\mathbf{H}^1(B)}\leqslant C\,(\|rot(\mathbf{S}_j-\mathbf{S}_i)\|^2_{\mathbf{H}^0(B)}+\|\mathbf{S}_j-\mathbf{S}_i\|^2_{\mathbf{H}^0(B)}), \tag{77}$$

так как $div\,(\mathbf{S}_j-\mathbf{S}_i)=0$ и $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{S}_j-\mathbf{S}_i)|_S=0$. При $i,j\to\infty$ правая часть в (77) стремится к нулю согласно (76). Значит, ряд сходится в $\mathbf{H}^1(B)$. И так далее.

6. Решение спектральной задачи Стокса

6.1. Связь между решениями спектральных задач операторов Стокса и ротора. Перейдем к изучению спектральной задачи для оператора Стокса в ограниченной области G с параметром вязкости $\nu>0$.

Задача 5. *Найти все собственные вектор-функции* $(\mathbf{v}(\mathbf{x}),p(\mathbf{x}))$ *и собственные значения* μ *оператора Стокса такие, что*

$$-\nu\Delta\mathbf{v}+\nabla p=\mu\mathbf{v},\quad div\;\mathbf{v}=0\quad \textit{в}\quad G, \tag{78}$$

$$\mathbf{v}|_\Gamma=0. \tag{79}$$

Отметим, что собственной функцией этого оператора обычно считается только вектор-функция $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, так как ∇p определяется через v и μ. В монографии О.А. Ладыженской [2] доказано, что в ограниченной области G с гладкой границей Γ эта задача имеет дискретный спектр $\{\mu_k\}$, где $k=1,2,\ldots$; причем, каждое $\mu_k>0$ и имеет конечную кратность. В случае шара мы уточним этот результат.

Имеются полезные соотношения между решениями задач 1 и 5.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^-$ *удовлетворяют в области* G *уравнениям* $rot\;\mathbf{u}^\pm=\pm\lambda\mathbf{u}^\pm$, $\lambda>0$, *а* $p(\mathbf{x})$ — *гармоническая в* G *функция.*
Тогда пара $(\mathbf{v},p)$, *где*

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}^++\mathbf{u}^-+\nu^{-1}\lambda^{-2}\nabla p \tag{80}$$

есть решение уравнений Стокса (78) *с* $\mu=\nu\lambda^2$.

Если функции $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^-$ *и* $p(\mathbf{x})$ *удовлетворяют также краевым условиям*

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^\pm|_\Gamma=0,\quad(\mathbf{u}^++\mathbf{u}^-)|_\Gamma=0, \tag{81}$$

$$(\mathbf{n}\cdot\nabla)p|_\Gamma=0. \tag{82}$$

Тогда решение $(\mathbf{v},p)$ *задачи 5 с* $\mu=\nu\lambda^2$ *имеет вид*

$$\mathbf{v}=\mathbf{u}^++\mathbf{u}^-,\quad p=Const. \tag{83}$$

Доказательство первого утверждения проводится непосредственной проверкой, учитывая, что функции $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{u}^-$ являются решениями уравнений (6),(8). Действительно,

$$-\nu\Delta\mathbf{v}+\nabla p=\nu\lambda^2(\mathbf{u}^++\mathbf{u}^-)+\nabla p=\nu\lambda^2\,\mathbf{v}.$$

Далее, если p удовлетворяет условию Неймана (82), то $p = Const$. Однородная задача Неймана (82) для гармонической функции $p(\mathbf{x})$ в ограниченной области G с гладкой границей Γ имеет решение $p = Const$, так как из формулы Гаусса-Остроградского вытекает, что

$$\int_{\mathbf{G}} |\nabla p|^2 dx = 0. \tag{84}$$

Следовательно, разложение (80) вектора $\mathbf{v}$ упрощается и принимает вид $\mathbf{v} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-$, а краевое условие $\mathbf{v}|_\Gamma = 0$ вытекает из соотношения $(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)|_\Gamma = 0$.

С другой стороны имеет место

Теорема 5. *a) Пусть вектор-функция* $(\mathbf{v}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$ *есть решение уравнений Стокса* (78) *с* $\mu > 0$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq 0$, $p(\mathbf{x})$ *— гармоническая в* G *функция, и пусть* $\lambda = \sqrt{\mu\nu^{-1}}$. *Тогда вектор-функция* $\mathbf{v}$ *представляется в виде суммы:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mu^{-1}\nabla p, \tag{85}$$

где $\mathbf{w}$ *удовлетворяет уравнениям*

$$(rot\ + \lambda\, I)(rot - \lambda\ \ I)\mathbf{w} = 0, \quad div\, \mathbf{w} = 0. \tag{86}$$

b) Если $p(\mathbf{x})$ *удовлетворяет краевому условию* (82), *тогда* $\nabla p(\mathbf{x}) = 0$ *и* $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

В случае $G = B$ *существуют вектор-функции* $\mathbf{u}^\pm$, *решения уравнений* $rot\mathbf{u}^\pm = \pm\lambda\mathbf{u}^\pm$ *с краевыми условиями* (81) *такие, что вектор-функция* $\mathbf{v}$ *представляется в виде суммы:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-. \tag{87}$$

Доказательство. Вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $\nabla p(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнениям (78).

Первые три из них запишем так:

$$(\mathrm{rot}\ + \lambda\, \mathrm{I})(\mathrm{rot} - \lambda\ \ \mathrm{I})\mathbf{v} = -\nu^{-1}\nabla p. \tag{88}$$

Зафиксировав p, рассмотрим соотношение (88) как матричное дифференциальное уравнение относительно вектора $\mathbf{v}$. Так как $\mathrm{rot}\ \nabla p \equiv 0$ и $\mu = \nu\lambda^2$, то $\mu^{-1}\nabla p$ есть его частное решение, а выражение $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mu^{-1}\nabla p$ — решение однородного уравнения, то есть первого уравнения в (86). Второе уравнение $div\, \mathbf{w} = 0$ следует из уравнения $div\, \mathbf{v} = 0$.

Кроме того, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}|_\Gamma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_\Gamma - \mu^{-1}\mathbf{n}\cdot\nabla p|_\Gamma = \mu^{-1}\mathbf{n}\cdot\nabla p|_\Gamma$, так как $\mathbf{v}|_\Gamma = 0$.

Ясно, что в случае $\mathbf{n}\cdot\nabla p|_\Gamma \neq 0$, не существует $\mathbf{w}$ такое, что $\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}|_\Gamma = 0$.

b) Если p удовлетворяет условию Неймана (82), то $\nabla p = 0$ и $\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

В случае $G = B$ $\mathbf{v}$ есть элемент пространства $\mathcal{B}$, так как $div\, \mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_S = 0$. Представим $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$ в виде ряда

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} [(\mathbf{v}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (\mathbf{v}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})] \tag{89}$$

и подставим ряд в уравнение. Получим равенство

$$(\mathrm{rot}\ + \lambda\, \mathrm{I})(\mathrm{rot} - \lambda\ \ \mathrm{I})\mathbf{v} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\lambda^2_{n,m} - \lambda^2) \sum_{k=-n}^{n} [(\mathbf{v}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (\mathbf{v}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})] = 0. \tag{90}$$

Если $\lambda^2_{n,m} - \lambda^2 \neq 0$ для любых $n, m \in \mathcal{N}$, то $(\mathbf{v}, \mathbf{q}^\pm_{n,m,k}) = 0$ для любых $n, m \in \mathcal{N}, k \in [-n, n]$, ввиду ортогональности между базисными векторами $\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}$. Из полноты системы $\{\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}\}$

в $\mathcal{B}$ вытекает, что $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$. Но это невозможно по условию. Следовательно, существует пара $n', m' \in \mathcal{N}$ такая, что $\lambda^2 = \lambda^2_{n',m'}$. Полагая

$$\mathbf{u}^{\pm}(\mathbf{x}) = \sum_{k=-n'}^{n'} (\mathbf{v}, \mathbf{q}^{\pm}_{n',m',k})\, \mathbf{q}^{\pm}_{n',m',k}(\mathbf{x}),$$

получим разложение (87). Утверждение доказано.

Итак, решение задачи 5 сводится к отысканию решений $(\lambda, \mathbf{u}^+)$ и $(-\lambda, \mathbf{u}^-)$ задачи 1 при $\lambda \neq 0$, удовлетворяющих условию $(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)|_S = 0$.

6.2. Формулы для собственных функций оператора Стокса в шаре. В формулах (37) положим $c^{\pm}_{\kappa} = c_{\kappa}\Phi_n(\lambda^{\mp}_{n,m}R)$. Получим

$$(u_{\varphi} + iu_{\theta})^{+}_{\kappa} = c_{\kappa}\Phi_n(\lambda^{-}_{n,m}R)(\lambda^{+}_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\lambda^{+}_{n,m}r)\mathrm{H}Y^k_n(\theta,\varphi),$$

$$(u_{\varphi} + iu_{\theta})^{-}_{\kappa} = c_{\kappa}\Phi_n(\lambda^{+}_{n,m}R)(\lambda^{-}_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\lambda^{-}_{n,m}r)\mathrm{H}Y^k_n(\theta,\varphi).$$

Откуда видим, что при $r = R$ сумма $w^+_{\kappa} + w^-_{\kappa}$ равна нулю для любых углов θ и φ и любой комплексной постоянной c_{κ}.

Функции $\psi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)$, $Y^k_n(\theta,\varphi)$ и числа $\lambda^{\pm}_{n,m} = \pm\rho_{n,m}/R$ вещественные. Согласно (14) $\psi_n(\lambda^{-}_{n,m}r) = (-1)^n\,\psi_n(\lambda_{n,m}r)$. Значит, $\Phi_n(\lambda^{-}_{n,m}r) = (-1)^n\overline{\Phi_n(\lambda_{n,m}r)}$ (см.п. 3.3), где доказано, что число $\Phi_n(\rho_{n,m})$ — действительное.

Поэтому радиальная составляющая вектора $\mathbf{v}_{\kappa} = \mathbf{u}^+_{\kappa} + \mathbf{u}^-_{\kappa}$ исчезает,

$$\begin{aligned} &c_{\kappa}(\lambda_{n,m}r)^{-1}[\Phi_n(\lambda^{-}_{n,m}R)\psi_n(\lambda^{+}_{n,m}r) - \Phi_n(\lambda^{+}_{n,m}R)\psi_n(\lambda^{-}_{n,m}r)]Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_r = \\ &= c_{\kappa}(-1)^n(\lambda_{n,m}r)^{-1}[\overline{\Phi}_n(\rho_{n,m}) - \Phi_n(\rho_{n,m})]\,\psi_n(\lambda_{n,m}r)Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_r = 0, \end{aligned} \tag{91}$$

а его касательная проекция равна

$$\begin{aligned} &Re\{c_{\kappa}(-1)^n(\lambda_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\rho_{n,m})[\Phi_n(\lambda_{n,m}r) - \overline{\Phi}_n(\lambda_{n,m}r)]\,H\,Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_{\varphi}\} + \\ &+ Im\{c_{\kappa}(-1)^n(\lambda_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\rho_{n,m})[\Phi_n(\lambda_{n,m}r) - \overline{\Phi}_n(\lambda_{n,m}]\,H\,Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_{\theta}\}. \end{aligned} \tag{92}$$

Выражение в квадратных скобках является мнимой величиной. Выбирая постоянную $c_{\kappa} = i\,b_{\kappa}$ также мнимой, $b_{\kappa} \in \mathcal{R}$, получаем вектор-функцию $\mathbf{v}_{\kappa} = \mathbf{u}^+_{\kappa} + \mathbf{u}^-_{\kappa}$, которая представляется в виде суммы двух взаимно ортогональных векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\kappa} = b_{\kappa}\Phi_n(\rho_{n,m})\,(\lambda_{n,m}r)^{-1}Im\,[\Phi_n(\lambda_{n,m}r)] \\ (Re\,H\,Y^k_n(\theta,\varphi)\,\mathbf{i}_{\varphi} + Im\,H\,Y^k_n(\theta,\varphi)\,\mathbf{i}_{\theta}). \end{aligned} \tag{93}$$

Таким образом, $\mathbf{v}_{\kappa} = \mathbf{u}^+_{\kappa} + \mathbf{u}^-_{\kappa}$ является вещественной собственной вектор-функцией оператора Стокса, отвечающей собственному значению $\nu\lambda^2_{n,m}$. Нормируя вектор-функции $\mathbf{u}^{\pm}_{\kappa}$ в $\mathbf{L}_2(B)$, получим собственные вектор-функции оператора Стокса в виде $\mathbf{v}_{\kappa} = \mathbf{q}^+_{\kappa} + \mathbf{q}^-_{\kappa}$. Итак, доказана

Теорема 6. *Собственные значения $\mu_{n,m}$ задачи 5 в шаре B равны $\nu\lambda^2_{n,m}$, где $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m}R^{-1}$, R — радиус шара, а числа $\rho_{n,m}$ — нули функций $\psi_n(z)$, m, $n \in \mathbb{N}$.*

При этом $p_{\kappa} = const$, а соответствующие собственные вектор-функции $\mathbf{v}_{\kappa}$ оператора Стокса являются суммой $\mathbf{q}^+_{\kappa} + \mathbf{q}^-_{\kappa}$ собственных вектор-функций ротора.

В сферических координатах они представляются в виде суммы (93) *двух векторов.*

Вектор-функции $\mathbf{v}_{\kappa} = \mathbf{q}^+_{\kappa} + \mathbf{q}^-_{\kappa}$ принадлежат пространству $\mathbf{J}^0(B)$ – замыканию множества финитных бесконечно дифференцируемых и соленоидальных вектор-функций $\dot{J}(B)$ в $\mathbf{L}_2(B)$ [2] и образуют в нем ортогональную систему, учитывая, что системы $\{\mathbf{q}^+_{\kappa}\}, \{\mathbf{q}^-_{\kappa}\}$ ортонормированы.

Система $\{\mathbf{v}_{\kappa}\}$ полна в $\mathbf{J}^0(B) \subset \mathcal{B}$, разложение вектор-функции $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{J}^0(B)$ имеет вид

$$\mathbf{g} = 1/2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(\mathbf{g}, \mathbf{v}_{n,m,k})\,\mathbf{v}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{94}$$

где суммирование ряда (94) идет по n, m, для которых $0 < \rho_{n,m} < N$, а затем $N \to \infty$.

7. Решение краевой задачи (2),(3)

Методом Фурье легко решается краевая

Задача 6. *Пусть задана вектор-функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *в* $\mathbf{H}^1(B)$ *такую, что*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad B, \tag{95}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S = 0, \tag{96}$$

где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ *— проекция вектора* $\mathbf{u}$ *на внешнюю нормаль* $\mathbf{n}$.

Через $\mathbf{E}^s(B)$ или $\mathbf{H}^s_{div}(B)$ обозначают [8] следующие подпространства в $\mathbf{L}_2(B)$:

$$\mathbf{E}^s(B) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(B) : \mathrm{div}\mathbf{v} \in H^s(B), \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^s} + \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|^2_{H^s})^{1/2}\}, \tag{97}$$

где числа $s \geq 0$ целые. Они является полными гильбертовыми пространствами и

$$\mathcal{D}(\overline{B}) \subset \mathbf{E}^s(B), \quad \mathbf{H}^{s+1}(B) \subset \mathbf{E}^s(B) \subset \mathbf{H}^s(B). \tag{98}$$

Для вектор-функция $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}^0(B)$ определено значение $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_S$.

Приведем решение задачи в двух случаях.

7.1. Решение краевой задачи (95), (96) при $\lambda \neq Sp\,(rot)$.

Теорема 7. *Если* $\lambda \neq 0, \pm\lambda_{n,m},\ n, m \in \mathbf{N}$, *а* $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0(B)$ *и* $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S = 0$, *то единственное решение* $\mathbf{u}$ *задачи 6 дается суммой рядов* $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, *где*

$$\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\,\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{99}$$

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}[(\lambda + \lambda_{n,m})^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\,\mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (\lambda - \lambda_{n,m})^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\,\mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})]. \tag{100}$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^1(B)$.

Доказательство. Формулы (99) получают различными способами. Например, предположив, что $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ в уравнении (95) принадлежат основному пространству $\mathcal{D}(B)$, умножим его левую и правую части на $\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x})$ (соотв. на $\mathbf{q}^{\pm}_{n,m,k}(\mathbf{x})$) и проинтегрируем по частям. Единственность решения задачи вытекает из полноты семейства собственных функций ротора в $\mathbf{L}_2(B)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(B)$, то согласно п.5.3 ряды (99), (100) сходятся в любом из пространств $\mathbf{H}^s(B),\ s = 1, 2, ...$ и представляют в сумме классическое решение задачи.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{A} \subset \mathbf{L}_2(B)$, то согласно п. 5.3 ряд $\mathbf{b} = 0$ и, значит, $\mathbf{u}_2 = 0$, а $\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1}\mathbf{f}$. В этом случае *решение задачи сводится к умножению* $\mathbf{f}$ *на* λ^{-1}.

Если же $\mathbf{f} \in \mathcal{B}\perp\mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(B)$, то согласно п. 5.3 ряд $\mathbf{a} = 0,\ \mathbf{b} = \mathbf{f}$ и, значит, ряд $\mathbf{u}_1$ пропадает, а $\mathbf{u}_2$ задается рядом (100). Этот ряд сходится в $\mathbf{L}_2(B)$, так как числа $|\lambda \pm \lambda_{n,m}|^{-1}$ стремятся к нулю, при $\lambda_{n,m} \to \infty$. Пространство $\mathbf{L}_2(B)$ вложено в пространство распределений $\mathcal{D}'(B)$, в котором ряд (100) можно дифференцировать почленно. Применив к нему оператор $\mathbf{rot}$ поэлементно, получим ряд

$$\mathbf{rot}\mathbf{u}_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}[\frac{\lambda_{n,m}}{\lambda + \lambda_{n,m}}(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\,\mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_{n,m}}{\lambda - \lambda_{n,m}}(\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\,\mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})], \tag{101}$$

сходящийся в $\mathbf{L}_2(B)$. Кроме того, частичные суммы $\mathbf{S}_j u$ ряда (100) по построению удовлетворяют соотношениям $div\,\mathbf{S}_j u = 0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_j u|_S = 0$. Следовательно, $\mathbf{div}\mathbf{u}_2 = 0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_2|_S = 0$ как распределения. Согласно п. 5.3 ряд (100) сходится в норме $\mathbf{H}^1(B)$.

Применив к нему оператор $\mathbf{rot} + \lambda\mathbf{I}$, получим разложение вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{B}$. Значит, этот ряд есть обобщенное решение задачи 6.

В общем случае, при $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0(B)$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_S = 0$, ряд (99) также принадлежит $\mathbf{H}^1(B)$. Так как $\operatorname{div} \mathbf{q}_{n,m,k} = \Delta\, g_{n,m,k} = -(\alpha_{n,m}/R)^2\, g_{n,m,k}$ и $\|(\alpha_{n,m}/R)\, g_{n,m,k}\| = 1$, то

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k}) \bigtriangleup g_{n,m,k}(\mathbf{x}) = \tag{102}$$

$$\lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} (\operatorname{div} \mathbf{f}, g_{n,m,k})\, (\alpha_{n,m}/R)^2\, g_{n,m,k}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1} \operatorname{div} \mathbf{f}.$$

Следовательно, сумма рядов (99) и (100) есть решение задачи 6. Теорема доказана.

7.2. Решение задачи 6 при $\lambda = 0$.

Теорема 8. *Если $\lambda = 0$, $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0(B)$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_S = 0$, то задача 6 разрешима в $\mathbf{L}_2(B)$ тогда и только тогда, когда $div\, \mathbf{f} = 0$. Однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых решений:*

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \xi_{n,m,k}\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{103}$$

где $\xi_{n,m,k}$ — произвольные постоянные, такие что $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_2(B)$.

Общее решение неоднороной задачи имеет вид $\mathbf{u}_0 + G_0^+\mathbf{f} + G_0^-\mathbf{f}$, где

$$G_0^{\pm}\mathbf{f} \equiv \pm \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} \lambda_{n,m}^{-1} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k}^{\pm})\, \mathbf{q}_{n,m,k}^{\pm}(\mathbf{x}), \quad G_0^{\pm}\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(B). \tag{104}$$

Если $\xi_{n,m,k}$ таковы, что $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(B)$, то решение задачи принадлежит $\mathbf{H}^1(B)$.

Необходимость условия $\operatorname{div} \mathbf{f} = 0$ очевидна, а достаточность вытекает из равенства $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = \lambda^{-1} \operatorname{div} \mathbf{f}$. Соотношения $G_0^{\pm}\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(B)$ доказаны в п.7.1. Далее, $\operatorname{rot} \mathbf{u}_0 = 0$, если $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(B)$, а $\operatorname{rot}(G_0^+\mathbf{f} + G_0^-\mathbf{f}) = \mathbf{f}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. *О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей* // Записки Науч. семинаров ПОМИ. 2003. Т. 306. С. 71–85.
2. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970. 288 с.
3. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988. 512 с.
4. Козлов В.В. *Общая теория вихрей.* Ижевск: Изд.Дом «Удмурдский университет». 1998. 240 с.
5. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1975. 392 с.
6. Вайнберг Б.Р., Грушин В.В. *О равномерно неэллиптических задачах I* // Мат. Сб. 1967. т. 72 (114) № 4. С. 602–636.
7. Солонников В.А. *Переопределенные эллиптические задачи* // Записки Научных Сем. ЛОМИ. 1971. Т.21. № 5. С. 112–158.
8. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ.* М.: Мир. 1981. 408 с.
9. Пухначев В.В. *Симметрии в уравнениях Навье-Стокса* // Успехи механики. 2006. № 1.
10. H. Weil *The method of orthogonal projection in potetial theory* // Duke Math. V.7. 1941. P. 411–444.
11. S. Chandrasekhar *On force-free magnetic fields* Proc. Nat. Ac. Sci.. 1956. V. 42. № 1. P.1–5.
12. J.B. Taylor *Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields* // Phys. Rev. Letters. 1974. V. 33. P. 1139–1141.
13. Арнольд В.И. *Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. 261. P. 17–20.

14. M. Henon *Sur la topologie des lignes de courant dans un case particulier* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1966. 262. P. 312–314.
15. Сакс Р.С. *Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса* // Доклады Акад. Наук. 2007. Т. 416, № 4, С. 446–450.
16. Сакс Р.С. *Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиям* // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 36 (Записки научн. Семинаров ПОМИ, т. 318). 2004. С.-П. С. 246–276.
17. Сакс Р.С. *О краевых задачах для системы* $rot\ u + \lambda\ u = h$ // ДАН. 1971. Т. 199, № 5. С. 1022–1025.
18. Сакс Р.С. *О краевых задачах для системы* $rot\ u+\lambda\ u = h$ // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 1. С. 126-140.
19. Фурсенко А.А. *Краевая задача для одной равномерно неэллиптической системы.* Рукопись дипломной работы студента матем. фак.-та НГУ, Новосибирск 1971. 29 с.
20. Сакс Р.С. *Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений.* Новосибирск: НГУ, 1975. 164 с.
21. Сакс Р.С. *Спектр оператора вихря в шаре при условии непротекания и собственные значения колебаний упругого шара, закрепленного на границе* // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. IV. Прикладная математика. Труды международной конференции. Уфа ИМ с ВЦ УНЦ РАН. 2000. С. 61–68.
22. S. Chandrasekhar, P.S. Kendall *On force-free magnetic fields* // Astrophys. Journal.1957. V. 126. P. 457–460.
23. D. Montgomery, L. Turner, G. Vahala *Three-dimentional magnetohydrodyamic turbulence in cylindrical geometry* // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 5. P. 757–764.
24. Берхин П.Е. *Самосопряженная краевая задача для системы* $*d\ u + \lambda\ u = f$ // ДАН. 1975. Т. 222, № 1. С. 15–17.
25. Y. Giga, Z. Yoshida *Remark on spectra of operator rot* // Math. Z. 1990. V. 204. P. 235–245.
26. R. Picard *On selfadjoint realization of curl and some its applications* // Preprint : Technische Universitat Dresden: MATH-AN-02-96). Dresden, Marz. 1996.
27. Сакс Р.С. *О свойствах обобщенно эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых многообразиях* // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 28 (Записки научн. Семинаров ПОМИ, Т. 243). 1997. С.-П. С. 215–269.
28. Махалов А.С., Николаенко В.П. *Глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье-Стокса с равномерно большой начальной завихренностью* // Успехи математических наук. 2003. V. 58. № 2. С. 79–93.
29. Сакс Р.С. *Глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве* Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 162, № 2. С. 196–215.
30. Сакс Р.С. *Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 1. С. 53–79.

Ромэн Семенович Сакс
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: romen-saks@yandex.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 82-93.

УДК 517.54

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ И ДВУСТОРОННИМ ЗАВИХРЕНИЕМ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ПОРЯДКА МЕНЬШЕ 1/2

Р.Б. САЛИМОВ, П.Л. ШАБАЛИН

Аннотация. Рассмотрена однородная задача Гильберта для верхней полуплоскости со счетным множеством точек разрыва первого рода коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности. В случае, когда индекс задачи имеет степенную особенность порядка меньше $1/2$ в специальном классе функций получены формулы общего решения и проведено полное исследование разрешимости задачи.

Ключевые слова: краевая задача Гильберта, завихрение на бесконечности, бесконечный индекс, целые функции.

Mathematics Subject Classification: 30E25, 30E20, 30D10.

1. Введение

Краевая задача Гильберта теории аналитических функций для полуплоскости — это задача об определении аналитической в верхней полуплоскости D функции $F(z)$ по краевому условию

$$a(t)\Re F(t) - b(t)\Im F(t) = c(t), \tag{1}$$

$a(t), b(t), c(t)-$ заданные функции переменной точки t вещественной оси L, $a^2(t)+b^2(t) \neq 0$. Для задачи (1) получена полная картина разрешимости в классе ограниченных непрерывных вплоть до границы функций, если коэффициенты и правая часть краевого условия принадлежат классу $H_L(\mu)$ (см., например, [1], с. 150, [2], с. 280), в классе функций со степенными особенностями в точках разрыва коэффициентов, когда $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ имеют конечное число точек разрыва первого рода и непрерывны по Гельдеру в интервалах между точками разрыва (см. например [3]), в классе ограниченных в D функций, когда задача имеет непрерывные при $t \in (-\infty, +\infty)$ коэффициенты и двустороннее завихрение на бесконечности степенного порядка $\rho < 1/2$ (см. [4], [5]). Последнюю задачу с двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка меньше 1 сформулировал И.Е. Сандрыгайло [6], который в классе ограниченных функций и в классе ограниченных функций экспоненциального порядка убывания на бесконечности при некоторых ограничениях на характеристики особенности получил предварительные результаты о разрешимости. Однако, примененный в этой работе метод решения Н.И. Мусхелишвили с привлечением идей и результатов из [7] не позволил выбрать класс решений, в котором бы удалось провести полное исследование картины разрешимости.

R.B. Salimov, P.L. Shabalin, On solvability of homogeneous Riemann-Hilbert problem with a countable set of coefficient discontinuities and two-side curling at infinity of order less than $1/2$.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00762-а, 12-01-00636-а).

Поступила 9 марта 2012 г.

Задача Гильберта для полуплоскости со счетным множеством точек разрыва коэффициентов впервые исследовалась в работах [8], [9], в которых были получены формулы общего решения во введенных классах и разработаны методы построения примеров целых функций с заявленными свойствами. В настоящей статье предложено полное описание картины разрешимости задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка $\rho < 1/2$.

2. Постановка и решение однородной задачи в классе функций с особенностями в точках разрыва

Пусть L – вещественная ось в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, D – полуплоскость $\Im z > 0$, t – точка линии L. Требуется найти функцию $F(z)$, аналитическую в области D по краевому условию (1), в котором $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ – заданные на L действительные функции точки t контура L, непрерывные всюду, кроме точек разрыва первого рода t_j, $j = \pm 1, \pm 2, \cdots$, причем $a^2(t) + b^2(t) \neq 0$ во всех точках непрерывности коэффициентов, $0 < t_1 < \cdots < t_k < t_{k+1} < \cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$, $0 > t_{-1} > \cdots > t_{-k} > t_{-k-1} > \cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_{-k} = -\infty$. Будем считать, что краевое условие выполняется всюду на L, исключая точки t_k, t_{-k}, $k = \overline{1, \infty}$. Некоторые уточнения постановки задачи приведем ниже.

Если $c(t) \equiv 0$, то задача называется однородной, если $c(t) \not\equiv 0-$ неоднородной. В этой работе нас интересует однородная задача Гильберта.

Краевое условие (1) с $c(t) \equiv 0$ перепишем в виде

$$\Re[e^{-i\nu(t)} F(t)] = 0, \tag{2}$$

где $\nu(t) = \arg[a(t) - ib(t)]$ – ветвь, выбранная на каждом из интервалов непрерывности коэффициентов так, чтобы число $\delta_j = \nu(t_j + 0) - \nu(t_j - 0)$ удовлетворяло условию $0 \leqslant \delta_j < 2\pi$, $\quad j = \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Введем функцию $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, где $\beta(t)$ – целочисленная функция, принимающая значения β_k, β_{-k} в интервалах (t_k, t_{k+1}) и (t_{-k}, t_{-k-1}), $k = \overline{1, \infty}$, соответственно и значение $\beta_0 = 0$ в интервале (t_{-1}, t_1). Число β_k выберем так, чтобы

$$0 \leqslant \varphi(t_k + 0) - \varphi(t_k - 0) < \pi,$$

значение β_{-k} выберем так, чтобы

$$0 \leqslant \varphi(t_{-k} + 0) - \varphi(t_{-k} - 0) < \pi.$$

Обозначим

$$\kappa_j = \frac{\varphi(t_j + 0) - \varphi(t_j - 0)}{\pi}, \quad j = \pm 1, \pm 2, \cdots ,$$

тогда имеем $0 \leqslant \kappa_k < 1$, $0 \leqslant \kappa_{-k} < 1$, $\quad k = \overline{1, \infty}$.

Примем, что точки разрыва удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-t_{-k}} < \infty, \tag{3}$$

и рассмотрим бесконечные произведения

$$P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_k}\right)^{\kappa_k}, \quad P_-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{t_{-k}}\right)^{\kappa_{-k}}, \tag{4}$$

в которых под $\arg(1 - z/t_j)$ понимаем однозначную ветвь, обращающуюся в нуль при $z = 0$ и непрерывную в плоскости z, разрезанной по части вещественной оси, соединяющей точки

$t = t_j$, $t = +\infty$ при $j > 0$ и соединяющей точки $t = -\infty$, $t = t_j$ при $j < 0$. Таким образом, для точек верхних берегов разрезов имеем

$$\begin{aligned} &\arg P_+(t) = -\sum_{j=1}^{k} \kappa_j \pi, \quad t_k < t < t_{k+1}, \\ &\arg P_-(t) = \sum_{j=1}^{k} \kappa_{-j}\pi, \quad t_{-k-1} < t < t_{-k}, \end{aligned} \qquad k = \overline{1,\infty}, \tag{5}$$

$$\arg P_+(t) = 0, \ \ t < t_1, \quad \arg P_-(t) = 0, \ \ t > t_{-1}. \tag{6}$$

Краевое условие (2) запишем так

$$\Re[e^{-i\varphi_1(t)} F(t) P_+(t) P_-(t)] = 0, \tag{7}$$

где

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) + \arg P_+(t) + \arg P_-(t), \tag{8}$$

функции $\arg P_+(t)$, $\arg P_-(t)$ определяются формулами (5), (6).

Вводя новую искомую функцию $F_1(z) = F(z)P_+(z)P_-(z)$, условие (7) запишем в виде

$$\Re[e^{-i\varphi_1(t)} F_1(t)] = 0,$$

причем, как видно из формул (8), (5), функция $\varphi_1(t)$ непрерывна во всех конечных точках L. Таким образом, мы пришли к краевой задаче Гильберта с непрерывными коэффициентами для функции $F_1(z)$. Будем считать при этом, что функция $\varphi_1(t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \nu^- t^\rho + \tilde{\nu}(t), & t > 0, \\ \nu^+ |t|^\rho + \tilde{\nu}(t), & t < 0, \end{cases} \tag{9}$$

$(\nu^-)^2 + (\nu^+)^2 \neq 0$, где ν^-, ν^+, ρ – постоянные, $0 < \rho < 1/2$, $\tilde{\nu}(t)$ – функция, непрерывная всюду на L, включая бесконечно удаленную точку и удовлетворяющая условию Гельдера с показателем μ, $0 < \mu \leqslant 1$, на всем контуре L, включая бесконечно удаленную точку ([1], с. 18, 67) – условию $H_L(\mu)$ (см. ([7], с. 113)).

Решение $F(z)$ однородной задачи будем искать в классе функций, для которых произведение

$$F(z)P_+(z)P_-(z) = F_1(z)$$

является функцией, ограниченной в D. Тем самым, задача сводится к уже рассмотренной в [5]. После нахождения функции $F_1(z)$ определяем решение однородной краевой задачи, соответствующей задаче (2), по формуле

$$F(z) = F_1(z)/P_+(z)P_-(z).$$

Это решение в точке t_j, вообще говоря, обращается в бесконечность порядка κ_j.

При дополнительных ограничениях изучим поведение этого решения однородной краевой задачи на луче $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta = \mathrm{const}$, $0 < \theta < \pi$, $r \to \infty$. Как и в [9], (см. также [8], с. 112) введем функции

$$n_-^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < -t_{-1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \kappa_{-j}, & -t_{-k+1} \leqslant x < -t_{-k}, \end{cases} \quad n_+^*(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < t_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{k-1} \kappa_j, & t_{k-1} \leqslant x < t_k, \end{cases}$$

и потребуем выполнения условий

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{n_+^*(x)}{x^{\kappa_+}} = \Delta_+, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{n_-^*(x)}{x^{\kappa_-}} = \Delta_-, \tag{10}$$

с положительными постоянными Δ_+, Δ_- и $0<\kappa_-<1/2$, $0<\kappa_+<1/2$. В [9], ([8], с. 112) получены структурные формулы

$$\ln P_+(z)=\frac{\pi\Delta_+e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}+I_+(z),\ I_+(z)=-z\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau)-\Delta_+\tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau-z)}d\tau \tag{11}$$

для $0<\arg z<2\pi$ и

$$\ln P_-(z)=\frac{\pi\Delta_-}{\sin\pi\kappa_-}z^{\kappa_-}+I_-(z),\quad I_-(z)=z\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_-^*(\tau)-\Delta_-\tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau+z)}d\tau, \tag{12}$$

если $-\pi<\arg z<\pi$. Выражая по формулам Сохоцкого предельные значения интегралов типа Коши и выделяя вещественные части из (11), (12), получим равенства

$$\begin{gathered}\ln|P_+(t)|=\frac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\kappa_+\pi)}t^{\kappa^+}+I_+(t),\ t>0,\\ I_+(t)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_+^*(\tau)-\Delta_+\tau^{\kappa_+}}{\tau(\tau-t)}d\tau,\ t>0,\ t\neq t_k,\ k=\overline{1,\infty},\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\ln|P_-(-t)|=\frac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\kappa_-\pi)}t^{\kappa^-}+I_-(-t),\\ I_-(-t)=-\int\limits_0^{+\infty}\frac{n_-^*(\tau)-\Delta_-\tau^{\kappa_-}}{\tau(\tau-t)}d\tau,\ t>0,\ t\neq -t_{-k},\ k=\overline{1,\infty}.\end{gathered} \tag{14}$$

Из формул (4), (13), (14) следует, что функция $|\exp\{I_+(z)\}|$ ($|\exp\{I_-(z)\}|$) обращается в нуль порядка κ_k (порядка κ_{-k}) в точке t_k (t_{-k}), $k=\overline{1,\infty}$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (10), δ – заданное малое положительное число, $z=re^{i\theta}$, тогда справедливы следующие асимптотические оценки*

$$I_+(re^{i\theta})=\mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_+}),\ \mathrm{r}\to+\infty,\ \delta<\theta<2\pi-\delta,$$
$$I_-(re^{i\theta})=\mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_-}),\ \mathrm{r}\to+\infty,\ -\pi+\delta<\theta<\pi+\delta.$$

Пусть δ – достаточно малое положительное число, тогда для каждого θ, $\delta<\theta<2\pi-\delta$, очевидно неравенство $|\tau-z|\geq(\tau+r)\sin(\delta/2)$. Для заданного произвольно малого положительного числа ε и $\tau>r_1(\varepsilon)$ в силу (10) имеем $n_+^*(\tau)-\Delta_+\tau^{\kappa_+}<\varepsilon\tau^{\kappa_+}$, следовательно,

$$|I_+(re^{i\theta})|<\frac{r^{\kappa_+}}{\sin(\delta/2)}\left(r^{1-\kappa_+}\int\limits_{t_1}^{r_1(\varepsilon)}\frac{n_+^*(\tau)}{\tau(\tau+r)}d\tau+\right.$$
$$\left.+\Delta_+r^{1-\kappa_+}\int\limits_0^{r_1(\varepsilon)}\frac{d\tau}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau+r)}+\varepsilon r^{1-\kappa_+}\int\limits_{r_1(\varepsilon)}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau+r)}\right),$$

для $z=re^{i\theta}$, $\delta<\theta<2\pi-\delta$. При заданном ε первые два интеграла есть величины $\mathrm{O}(\frac{1}{r})$, а последний

$$r^{1-\kappa_+}\int\limits_{r_1(\varepsilon)}^{\infty}\frac{1}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau+r)}d\tau<r^{1-\kappa_+}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\tau^{1-\kappa_+}(\tau+r)}d\tau=\frac{\pi}{\sin(\pi\kappa_+)},$$

следовательно, (ср. [10], с. 178, [8], с.115)

$$I_+(re^{i\theta}) = \mathrm{o}(\mathrm{r}^{\kappa_+}), \quad \mathrm{r} \to +\infty,\ \delta < \theta < 2\pi - \delta.$$

Не сложнее проводится оценка $I_-(re^{i\theta})$.

Из леммы 1 в силу ограничений $\kappa_+ < 1/2$, $\kappa_- < 1/2$, вытекает, что решение $F(re^{i\theta})$ однородной задачи (7) для $\delta < \theta < \pi - \delta$ удовлетворяет условию $F(re^{i\theta}) \to 0$, $r \to \infty$.

Введем как и в [5] функцию

$$P(z) + iQ(z) = le^{i\alpha} r^{\rho} e^{i\theta\rho}, \tag{15}$$

где l, α – действительные постоянные, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ – однозначная непрерывная в полуплоскости D ветвь $\arg z$, удовлетворяющая соотношению $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Эта функция является аналитической в области D, а на её границе L принимает значения

$$P(t) + iQ(t) = l|t|^{\rho}[\cos(\alpha + \theta\rho) + i\sin(\alpha + \theta\rho)],$$

где $\theta = 0$, при $t > 0$, $\theta = \pi$, при $t < 0$.

Выберем числа l, $l > 0$, α, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ так, чтобы

$$l\cos\alpha = \nu^-, \quad l\cos(\alpha + \pi\rho) = \nu^+,$$

т.е. чтобы

$$l\cos\alpha = \nu^-, \quad l\sin\alpha = \frac{\nu^-\cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)}.$$

Отметим, что при этом

$$l\sin(\alpha + \pi\rho) = \frac{\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}, \quad l = \frac{[(\nu^-)^2 + (\nu^+)^2 - 2\nu^-\nu^+\cos(\pi\rho)]^{1/2}}{\sin(\pi\rho)},$$

$$P(t) = \begin{cases} \nu^- t^{\rho}, & t > 0, \\ \nu^+|t|^{\rho}, & t < 0, \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} (\nu^-\cos(\pi\rho) - \nu^+)t^{\rho}/\sin(\pi\rho), & t > 0, \\ (\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho))|t|^{\rho}/\sin(\pi\rho), & t < 0, \end{cases} \tag{16}$$

и

$$Q(re^{i\theta}) = r^{\rho}\frac{\nu^-\cos(\rho(\pi - \theta)) - \nu^+\cos(\rho\theta)}{\sin(\pi\rho)}.$$

Далее определим аналитическую ограниченную в области D функцию, граничные значения мнимой части которой равны $\varphi_1(t) - P(t) = \tilde{\nu}(t)$, по формуле

$$\Gamma(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\nu}(t)\frac{dt}{t - z}.$$

На контуре L эта функция принимает значения $\Gamma^+(t) = \Gamma(t) + i\tilde{\nu}(t)$, где

$$\Gamma(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\nu}(t_1)\frac{dt_1}{t_1 - t}.$$

Краевое условие (7) запишем так

$$\Im\left\{ie^{-\Gamma^+(t)}e^{-iP(t)+Q(t)}F(t)P_+(t)P_-(t)\right\} = 0, \tag{17}$$

преобразовав при дополнительных ограничениях (3), (9), (10) краевые условия однородной задачи к виду задачи (17).

В фигурных скобках формулы (17) стоит граничное значение аналитической в области D функции

$$\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)}e^{-iP(z)+Q(z)}F(z)P_+(z)P_-(z), \tag{18}$$

которую с учетом (11), (12) можно записать следующим образом

$$\begin{gathered}\Phi(z) = ie^{-\Gamma^+(z)}\exp\{Q(z) - iP(z)\}F(z)e^{I_+(z)}e^{+I_-(z)}\times \\ \times\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ e^{-i\kappa_+\pi}}{\sin\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}\right\}\exp\left\{\frac{\pi\Delta_-}{\sin\pi\kappa_-}z^{\kappa_-}\right\}.\end{gathered} \tag{19}$$

Согласно (17) для граничного значения функции $\Phi(z)$ имеем

$$\Im\Phi_+(t) = 0 \tag{20}$$

всюду на L. Это означает, что функция $\Phi(z)$ аналитически продолжается на полуплоскость $\Im z < 0$, причем для точки z этой полуплоскости

$$\Phi(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}, \quad \Im z < 0. \tag{21}$$

Пусть $\tilde{B}-$ класс решений $F(z)$ однородной задачи (17), для которых произведение $|F(z)||z-t_j|^{\kappa_j}$ ограничено вблизи точки t_j для всех $j = \pm1, \pm2, \cdots$.

Для таких решений условие $\Im\Phi_+(t) = 0$ мы должны считать выполненным и в точках t_k, t_{-k}, $k = \overline{1, +\infty}$. В самом деле, продолжая функцию $\Phi(z)$ на полуплоскость $\Im z < 0$, как указано выше, через участки $t_{k-1}t_k$ и t_kt_{k+1} мы получаем одну и ту же функцию в силу (21). Для класса $\tilde{B}$ решений $\Phi(z)$ задачи (17) величина $|\Phi(z)|$ является ограниченной вблизи t_k, поэтому точка t_k является устранимой особой точкой аналитической в окрестности t_k функции $\Phi(z)$, полученной при аналитическом продолжении, следовательно, можно принять $\Im\Phi^+(t_k) = 0$. Таким образом, после вышеуказанного аналитического продолжения мы получаем целую функцию $\Phi(z)$.

Из изложенного ясно, что мы приходим к теореме 1.

Теорема 1. *Для того чтобы однородная краевая задача* (17) *в классе* $\tilde{B}$ *имела решение* $F(z)$*, необходимо и достаточно чтобы для этой функции была справедлива формула* (18)*, в которой* $\Phi(z)$*– произвольная целая функция, принимающая действительные значения на* L*.*

Далее решение однородной задачи (17) будем искать в классе B_* функций $F(z)$, для которых произведение $|F(z)|e^{\Re I_+(z)}e^{\Re I_-(z)}$ является функцией, аналитической и ограниченной в области D. Ясно, что $B_* \subset \tilde{B}$.

В силу симметрии для вышеуказанной целой функции $\Phi(z)$ формулы (18) (когда имеют место (20), (21))

$$M(r) := \max_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi}|\Phi(re^{i\theta})| = \max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}|\Phi(re^{i\theta})|. \tag{22}$$

Согласно (19)

$$\begin{gathered}|\Phi(re^{i\theta})| = \exp\{Q(re^{i\theta}) - \Re\Gamma(re^{i\theta}) + \Re I_+(re^{i\theta}) + \Re I_-(re^{i\theta})\}|F(re^{i\theta})|\times \\ \times\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+ r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}\cos(\kappa_+(\theta-\pi)) + \frac{\pi\Delta_- r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\cos(\kappa_-\theta)\right\}, \quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi.\end{gathered} \tag{23}$$

Так как $\Re\Gamma(z)$, $|F(z)|e^{\Re(I_+(z)+I_-(z))}$ — функции ограниченные в D, то

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi}\left\{\exp\{-\Re\Gamma(re^{i\theta})\}|F(re^{i\theta})|\exp\{\Re(I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta}))\}\right\} \leqslant C, \tag{24}$$

$C = \mathrm{const} > 0$, кроме того, согласно (15) $Q(re^{i\theta}) \leqslant lr^\rho$. Поэтому в силу (22), (23) имеем

$$M(r) \leqslant C\exp\left\{lr^\rho + \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)}r^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}r^{\kappa_-}\right\},$$

$$\ln M(r) \leqslant \ln C + lr^{\rho} + \frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} r^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)} r^{\kappa_-}. \qquad (25)$$

Будем различать случаи $\rho > \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, $\rho = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ и $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$.

Пусть $\rho \geq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$. Здесь по формуле (25) имеем

$$\ln\ln M(r) \leqslant \rho \ln r + \ln\left[l + \frac{\ln C}{r^{\rho}} + \frac{\pi\Delta_+}{r^{\rho-\kappa_+}\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{r^{\rho-\kappa_-}\sin(\pi\kappa_-)}\right],$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leqslant$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left\{\rho + \frac{1}{\ln r} \ln\left[l + \frac{\ln C}{r^{\rho}} + \frac{\pi\Delta_+}{r^{\rho-\kappa_+}\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{r^{\rho-\kappa_-}\sin(\pi\kappa_-)}\right]\right\} = \rho.$$

Следовательно, порядок $\rho_\Phi = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}}[\ln\ln M(r)/\ln r]$ целой функции $\Phi(z)$, определяемой формулами (18), (20), (21), не превосходит ρ.

Теорема 2. *Для того чтобы краевая задача* (17) *при* $\rho \geq \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ *имела решение* $F(z)$ *класса* B_* *необходимо и достаточно, чтобы для этой функции* $F(z)$ *была справедлива формула* (18), *в которой* $\Phi(z)$ *является целой произвольной функцией порядка* $\rho_\Phi \leqslant \rho$, *удовлетворяющей условию* (20) *и на контуре* L *для всех достаточно больших* $t-$ *неравенствам*

$$|\Phi(t)| \leqslant C \exp\left\{\frac{\nu^- \cos(\pi\rho) - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} t^{\rho} + \frac{\pi\Delta_+ \cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)} t^{\kappa_+} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)} t^{\kappa_-}\right\}, \qquad (26)$$

если $t > 0$, *и*

$$|\Phi(t)| \leqslant C \exp\left\{\frac{\nu^- - \nu^+ \cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |t|^{\rho} + \frac{\pi\Delta_+ |t|^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_- \cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)} |t|^{\kappa_-}\right\}, \qquad (27)$$

если $t < 0$. *Здесь* $C = \mathrm{const} > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $F(z)$ есть решение краевой задачи (17) класса B_*. Но тогда, как было показано выше, имеют место соотношения (18), (20), в которых $\Phi(z)$ с условием (21) является целой функцией порядка $\rho_\Phi \leqslant \rho$. Полагая в формуле (23) $\theta = 0$, затем $\theta = \pi$, с учетом (24) получаем, соответственно, неравенства (26), (27).

Достаточность. Пусть теперь для функции $F(z)$ справедлива формула (18), причем $\Phi(z)$ есть целая функция порядка $\rho_\Phi \leqslant \rho$, удовлетворяющая условию (20) и неравенствам (26), (27) (тогда функция $F(z)$, определяемая по формуле (18), является решением задачи (17)). В силу указанных неравенств и формул (23), (16) для аналитической в области D функции $F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}$ при достаточно больших t, учитывая, что $\Re\Gamma(z)$ есть функция, ограниченная в области D, т.е.

$$|\Re\Gamma(re^{i\theta})| \leqslant q, \quad q = \mathrm{const}, \quad r \geq 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \qquad (28)$$

имеем

$$|F(t)e^{I_+(t)+I_-(t)}| \leqslant Ce^{q}, \quad \text{при} \quad t > 0 \quad \text{и} \quad t < 0.$$

Следовательно, всюду на L выполняется неравенство

$$|F(t)e^{I_+(t)+I_-(t)}| \leqslant \tilde{C}, \quad \tilde{C} = \mathrm{const} > 0.$$

На основании (23) с учетом (15) имеем

$$|F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta}) + I_-(re^{i\theta})\}| = |\Phi(re^{i\theta})| \exp\left\{-lr^{\rho}\sin(\alpha + \rho\theta) + \Re\Gamma(re^{i\theta})\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\pi\Delta_+ r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}\cos(\kappa_+(\theta - \pi)) - \frac{\pi\Delta_- r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\cos(\kappa_-\theta)\right\}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Отсюда, принимая во внимание (22) и (28), получим

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} |F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta})+I_-(re^{i\theta})\}| \leqslant M(r)e^{lr^\rho+q}\exp\left\{\frac{\pi\Delta_+r^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}+\frac{\pi\Delta_-r^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\}.$$

Поскольку для любого числа $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$M(r)<\exp\{r^{\rho_\Phi+\varepsilon}\}$$

при всех $r>r_\varepsilon$, то, выбрав числа ε, ρ_1 так, чтобы $\rho<\rho_1<1$, $\rho_\Phi+\varepsilon<\rho_1$, из предыдущего соотношения получим

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant\pi} |F(re^{i\theta})\exp\{I_+(re^{i\theta})+I_-(re^{i\theta})\}| < \exp\{r^{\rho_1}\}$$

для всех достаточно больших r, для которых

$$r>r_\varepsilon, \quad \frac{r^{\rho_\Phi+\varepsilon}}{r^{\rho_1}}+\frac{lr^\rho}{r^{\rho_1}}+\frac{q}{r^{\rho_1}}+\frac{\pi\Delta_+r^{\kappa_+}}{r^{\rho_1}\sin(\pi\kappa_+)}+\frac{\pi\Delta_-r^{\kappa_-}}{r^{\rho_1}\sin(\pi\kappa_-)}<1.$$

Следовательно, порядок функции $F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}$ внутри угла $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ не превышает ρ_1 (см., например, [11], с.69). Поэтому согласно принципу Фрагмена–Линделёфа будем иметь $|F(z)e^{I_+(z)+I_-(z)}|<\tilde{C}$ всюду в D, т.е. $F(z)$ принадлежит классу B_*.

Теорема 3. *Общее решение краевой задачи* (17) *при* $\rho\geq\max\{\kappa_+,\kappa_-\}$ *в классе функций* B_* *определяется формулой*

$$F(z)=-ie^{\Gamma(z)}e^{i[P(z)+iQ(z)]}\Phi(z)[P_+(z)P_-(z)]^{-1}, \tag{29}$$

или

$$F(z)=-ie^{-I_+(z)-I_-(z)}e^{\Gamma(z)}e^{i[P(z)+iQ(z)]}\Phi(z)\exp\left\{-\frac{\pi\Delta_+e^{-i\pi\kappa_+}z^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}+\frac{\pi\Delta_-z^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\},$$

где $\Phi(z)$*– произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi\leqslant\rho$*, удовлетворяющая условию* (20) *и неравенствам* (26), (27) *для достаточно больших* $|t|$.

В самом деле, для функции $F(z)$, определяемой формулой (29), выполняется соотношение (18), и утверждение теоремы вытекает из предыдущего.

3. Разрешимость однородной задачи Гильберта

В этом пункте проведем полное описание картины разрешимости однородной задачи Гильберта в классе B_*.

Теорема 4. *Пусть* $\rho>\max\{\kappa_+,\kappa_-\}$, $\rho<1/2$. *Тогда*

a) если

$$\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+<0, \quad \text{либо} \quad \nu^--\nu^+\cos(\pi\rho)<0,$$

то однородная краевая задача (17) *не имеет нетривиальных решений в классе* B_**;*

b) если

$$\begin{cases}\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+=0,\\ \nu^--\nu^+\cos(\pi\rho)>0,\end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases}\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+>0,\\ \nu^--\nu^+\cos(\pi\rho)=0,\end{cases} \tag{30}$$

то однородная краевая задача (17) *имеет в классе* B_* *решения, определяемые формулой* (29)*, в которой* $\Phi(z)$*– произвольная целая функция порядка* ρ_Φ, $\rho_\Phi\leqslant\rho$*, удовлетворяющая условию* (20) *и неравенству*

$$|\Phi(t)|\leqslant\begin{cases} C\exp\left\{\dfrac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)}t^{\kappa_+}+\dfrac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-)}t^{\kappa_-}\right\}, \quad t>0,\\ C\exp\left\{\dfrac{\nu^--\nu^+\cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)}|t|^\rho+\dfrac{\pi\Delta_+|t|^{\kappa_+}}{\sin(\pi\kappa_+)}+\dfrac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)}|t|^{\kappa_-}\right\}, t<0,\end{cases} \tag{31}$$

либо, соответственно,

$$|\Phi(t)| \leqslant \begin{cases} C\exp\left\{\dfrac{\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+}{\sin(\pi\rho)}t^\rho + \dfrac{\pi\Delta_+\cos(\kappa_+\pi)}{\sin(\pi\kappa_+)}t^{\kappa_+} + \dfrac{\pi\Delta_- t^{\kappa_-}}{\sin(\pi\kappa_-)}\right\}, t>0, \\ C\exp\left\{\dfrac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)}|t|^{\kappa_+} + \dfrac{\pi\Delta_-\cos(\kappa_-\pi)}{\sin(\pi\kappa_-)}|t|^{\kappa_-}\right\}, \quad t<0, \end{cases}$$

для достаточно больших $|t|$;

c) если

$$\begin{cases} \nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+>0, \\ \nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)>0, \end{cases}$$

то однородная краевая задача (17) *имеет в классе* B_* *решения, определяемые формулой* (29)*, в которой* $\Phi(z)$*– произвольная целая функция порядка* ρ_Φ, $\rho_\Phi \leqslant \rho$*, удовлетворяющая условию* (20) *и при* $\rho_\Phi = \rho$ *еще и неравенствам* (26)*,* (27)*.*

Доказательство. a) Действительно, пусть $\rho < 1/2$ и имеет место

$$\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+<0,$$

тогда в силу (26) $\lim_{t\to+\infty}|\Phi(t)| = 0$, поэтому по принципу Фрагмена–Линделёфа для плоскости, разрезанной по положительной вещественной полуоси, получаем $\Phi(z)\equiv 0$. Ясно, что то же получим и в случае, когда $\rho<1/2$ и $\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho)<0$.

b) Пусть выполнено первое из условий (30). Для определенности будем считать, что $\kappa_+ \geq \kappa_-$. Согласно теореме 3 целая функция $\Phi(z)$, входящая в формулу общего решения (29), должна в силу (20) принимать на вещественной оси вещественные значения, удовлетворять условиям (26), (27), которые в силу равенства $\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+=0$ примут вид неравенства (31), и иметь порядок $\rho_\Phi \leqslant \rho < 1/2$. Существование таких целых функций следует из построений, подробно проведенных в работе [5], (см. также [8], с.100). Именно, возьмем целую функцию

$$\Phi_0(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{r_k e^{i\theta_0}}\right)\left(1-\frac{z}{r_k e^{-i\theta_0}}\right), \tag{32}$$

в которой $0\leqslant\theta_0\leqslant\pi$, r_k – возрастающая последовательность чисел, которую определим ниже. Здесь $\arg(1-z/r_k e^{i\theta_0})$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z=re^{i\theta_0}$, $r>r_k$, принимающую нулевое значение при $z=0$, $\arg(1-z/r_k e^{-i\theta_0})$ означает ветвь, непрерывную и однозначную в плоскости, разрезанной по лучу $z=re^{i\theta_0}$, $r>r_k$, принимающую нулевое значение при $z=0$.

Примем, что порядок функции $\Phi_0(z)$ равен κ_0 (т.е. показатель сходимости (см. [12], с.278) последовательности её нулей равен κ_0). Дополнительно предположим, что для числа нулей $n(r)$ данной целой функции, лежащих в замкнутом круге $|z|\leqslant r$, существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{\kappa_0}} = \Delta_0, \quad 0<\Delta_0<\infty. \tag{33}$$

При сделанных предположениях о последовательности нулей целой функции (32) для функции $\ln\Phi_0(z)$, $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, доказана [5] формула

$$\ln\Phi_0(z) = -ze^{-i\theta_0}\int\limits_0^\infty \frac{n(\tau)-\tau^{\kappa_0}\Delta_0}{\tau(\tau-ze^{-i\theta_0})}d\tau - ze^{i\theta_0}\int\limits_0^\infty \frac{n(\tau)-\tau^{\kappa_0}\Delta_0}{\tau(\tau-ze^{i\theta_0})}d\tau +$$

$$+\begin{cases} \Delta_0\pi(re^{i\theta})^{\kappa_0}2\cos((\theta_0-\pi)\kappa_0)/\sin(\pi\kappa_0), & 0\leqslant\theta<\theta_0, \\ \Delta_0\pi e^{-i\kappa_0\pi}(re^{i\theta})^{\kappa_0}2\cos(\theta_0\kappa_0)/\sin(\pi\kappa_0), & \theta_0\leqslant\theta<2\pi-\theta_0, \\ \Delta_0\pi e^{-2i\kappa_0\pi}(re^{i\theta})^{\kappa_0}2\cos((\theta_0-\pi)\kappa_0)/\sin(\pi\kappa_0), & 2\pi-\theta_0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{34}$$

Если последовательность нулей $z_k = r_k e^{i\theta_0}$ функции $\Phi_0(z)$ выбрать так, чтобы

$$r_k = \left(\frac{2k-1}{2\Delta_0}\right)^{1/\kappa_0}, \quad n(x) = \begin{cases} k, & r_k\leqslant x<r_{(k+1)}, \\ 0, & 0\leqslant x<r_0, \end{cases}$$

то оба интеграла правой части формулы (34) есть величины $o(r^{\kappa_0})$, при $r\to+\infty$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ (см. [5]). На вещественной оси функция $\ln\Phi_0(z)$ принимает действительные значения

$$\ln\Phi_0(t) = 2I_0(t,\theta_0) + \begin{cases} \dfrac{\Delta_0\pi 2\cos\Big((\theta_0-\pi)\kappa_0\Big)}{\sin(\pi\kappa_0)}t^{\kappa_0}, & t>0, \\ \dfrac{\Delta_0\pi 2\cos(\theta_0\kappa_0)}{\sin(\pi\kappa_0)}|t|^{\kappa_0}, & t<0, \end{cases}$$

где

$$I_0(t,\theta_0) = \int\limits_0^\infty (n(x)-x^{\kappa_0}\Delta_0)\frac{t^2-tx\cos(\theta_0)}{x(t^2-2tx\cos(\theta_0)+x^2)}dx.$$

Таким образом, условие (31) для целой функции $\Phi_0(z)$ будет выполняться для любых Δ_0, θ_0, если взять $\kappa_0<\kappa_+$, а в случае $\kappa_0=\kappa_+$, числа $\Delta_0>0$, $\theta_0\in(0,\pi)$ следует выбрать так, чтобы имело место неравенство

$$\Delta_0 2\cos\Big((\theta_0-\pi)\kappa_0\Big)\leqslant\Delta_+\cos(\pi\kappa_+).$$

c) Построение целых функций порядка $\rho_\Phi\leqslant\rho$, удовлетворяющих условию (20) и неравенствам (26), (27) можно провести так же, как в пункте b), отказавшись от условия $\kappa_0\leqslant\kappa_+$ и выбирать $\kappa_0\leqslant\rho$. Если взять $\kappa_0<\rho$, то Δ_0, θ_0 в формулах (32), (33), (34) – любые, а если $\kappa_0=\rho$, то Δ_0, θ_0 должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} \Delta_0 2\cos\Big((\theta_0-\pi)\kappa_0\Big)\leqslant\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+, \\ \Delta_0 2\cos(\theta_0\kappa_0)\leqslant\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho). \end{cases}$$

Знаки равенства в этой системе будут выполняться, если взять

$$\operatorname{tg}(\theta_0\kappa_0) = \frac{\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+}{(\nu^- - \nu^+\cos(\pi\rho))\sin(\pi\kappa_0)} - \operatorname{ctg}(\pi\kappa_0), \quad \Delta_0 = \frac{\nu^-\cos(\pi\rho)-\nu^+}{2\cos(\theta_0\kappa_0)},$$

следовательно, система совместна.

Теорема 5. *Пусть $\kappa_+=\kappa_-=\rho<1/2$. Тогда однородная краевая задача* (17)
a) не имеет нетривиальных решений в классе B_*, если

$$(\nu^-+\pi\Delta_+)\cos(\pi\rho)-(\nu^+-\pi\Delta_-)<0, \quad \textit{либо} \quad \nu^-+\pi\Delta_+-(\nu^+-\pi\Delta_-)\cos(\pi\rho)<0;$$

b) имеет в классе B_* решение $F(z)=Ae^{\Gamma(z)}e^{i[P(z)+iQ(z)]}/P_+(z)P_-(z)$, где A – произвольная вещественная постоянная, если

$$\begin{cases} (\nu^-+\pi\Delta_+)\cos(\pi\rho)=\nu^+-\pi\Delta_-, \\ \nu^-+\pi\Delta_+>(\nu^+-\pi\Delta_-)\cos(\pi\rho), \end{cases} \quad \textit{либо} \quad \begin{cases} (\nu^-+\pi\Delta_+)\cos(\pi\rho)>\nu^+-\pi\Delta_-, \\ \nu^-+\pi\Delta_+=(\nu^+-\pi\Delta_-)\cos(\pi\rho); \end{cases}$$

c) имеет решения класса B_*, определенные формулой (29), в которой $\Phi(z)$– произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leqslant \rho$, удовлетворяющая условию (20) и при $\rho_\Phi = \rho$ еще и неравенствам (26), (27) для достаточно больших $|t|$, если

$$\begin{cases} (\nu^- + \pi\Delta_+)\cos(\pi\rho) - (\nu^+ - \pi\Delta_-) > 0, \\ \nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-)\cos(\pi\rho) > 0. \end{cases}$$

Докажем случай b) теоремы 5. Пусть выполнены условия

$$\begin{cases} (\nu^- + \pi\Delta_+)\cos(\pi\rho) - (\nu^+ - \pi\Delta_-) = 0, \\ \nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-)\cos(\pi\rho) > 0. \end{cases}$$

Согласно теореме 3 общее решение задачи (17) определяется формулой (29), содержащей произвольную целую функцию $\Phi(z)$ порядка $\rho_\Phi \leqslant \rho$, удовлетворяющую условию (20) и неравенствам (26), (27), которые в условиях теоремы 5 примут вид

$$|\Phi(t)| \leqslant C\exp\left\{\frac{(\nu^- + \pi\Delta_+)\cos(\pi\rho) + \pi\Delta_- - \nu^+}{\sin(\pi\rho)} t^\rho\right\}, \quad t > 0, \tag{35}$$

$$|\Phi(t)| \leqslant C\exp\left\{\frac{\nu^- + \pi\Delta_+ - (\nu^+ - \pi\Delta_-)\cos(\pi\rho)}{\sin(\pi\rho)} |t|^\rho\right\}, \quad t < 0,$$

причем в силу первого из условий b) неравенство (35) принимает вид $|\Phi(t)| \leqslant C,\ t > 0$. Из-за симметрии функции $\Phi(z)$ следует, что $\Phi(z)$ ограничена по модулю на обеих берегах разреза, проведенного по положительной вещественной полуоси, а поскольку $\rho_\Phi < 1/2$, то функция $\Phi(z)$ ограничена во всей плоскости, т.е. является постоянной.

Случаи a) и c) доказываются так же, как в теореме 4.

Пусть теперь $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\} < 1/2$. Здесь при $\kappa_+ \geq \kappa_-$ согласно (25) имеем

$$\ln\ln M(r) \leqslant \kappa_+ \ln r + \ln\left[\frac{\pi\Delta_+}{\sin(\pi\kappa_+)} + \frac{\pi\Delta_-}{\sin(\pi\kappa_-) r^{\kappa_+ - \kappa_-}} + \frac{\ln C}{r^{\kappa_+}} + \frac{l}{r^{\kappa_+ - \rho}}\right],$$

поэтому

$$\rho_\Phi = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} \leqslant \kappa_+,$$

следовательно, порядок целой функции $\Phi(z)$, выражаемой формулами (18), (20), (21), не превышает κ_+ при $\kappa_+ \geq \kappa_-$. Аналогично получаем неравенство $\rho_\Phi \leqslant \kappa_-$ в случае, когда $\kappa_- > \kappa_+$.

Поскольку коэффициенты при $t^{\kappa_+}, t^{\kappa_-}$ в правой части неравенств (26), (27) всегда строго больше нуля, то при $\rho_\Phi < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ эти неравенства выполняются автоматически. Поэтому справедлива

Теорема 6. *Для того чтобы однородная краевая задача (17) имела решение $F(z)$ класса B_* при $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, необходимо и достаточно выполнения формулы (18), в которой $\Phi(z)$ является произвольной целой функцией порядка $\rho_\Phi \leqslant \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, удовлетворяющей условию (20) и при $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ условиям (26), (27).*

Теорема 7. *Общее решение однородной краевой задачи (17) в классе функций B_* при $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ определяется формулой (29), в которой $\Phi(z)$ есть произвольная целая функция порядка $\rho_\Phi \leqslant \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, принимающая на L действительные значения и при $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ удовлетворяющая неравенствам (26), (27) для достаточно больших $|t|$.*

Теорема 8. *Пусть $\rho < \max\{\kappa_+, \kappa_-\} < 1/2$. Тогда однородная краевая задача (17) в классе функций B_* имеет решения, определяемые формулой (29), в которой $\Phi(z)$ есть* *произвольная целая функция порядка* $\rho_\Phi \leqslant \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$, *принимающая на* L *действительные значения и при* $\rho_\Phi = \max\{\kappa_+, \kappa_-\}$ *удовлетворяющая неравенствам* (26), (27) *для достаточно больших* $|t|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука. 1968. 511 с.
2. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи* М. Наука. 1977. 640 с.
3. Салимов Р.Б., Селезнев В.В. *К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами* // Труды семинара по краевым задачам. Казань. Изд-во Казан ун-та. Вып. 16. 1979. С. 149–162.
4. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Метод регуляризующего множителя для решения однородной задачи Гильберта с бесконечным индексом* // Изв. вузов. Математика. № 4. 2001. С. 76–79.
5. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом* // Матем. заметки. Т. 73. Вып. 5. 2003. С. 724–734.
6. Сандрыгайло И.Е. *О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. № 6. 1974. С. 16–23.
7. Говоров Н.В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом* М.: Наука. 1986. 239 с.
8. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения* Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва. 2005. 297 с.
9. Салимов Р,Б.,Шабалин П.Л. *Задача Гильберта. Случай бесконечного множества точек разрыва коэффициентов* // Сиб. матем. журн. Т. 49. № 4. 2008. С. 898–915.
10. У. Хейман *Мероморфные функции.* М.: Мир, 1966. 287 с.
11. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
12. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций* Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

Расих Бахтигареевич Салимов,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, 1,
420043, г. Казань, Россия
E-mail: salimov@5354.ru

Павел Леонидович Шабалин,
Казанский государственный архитектурно-строительный университет,
ул. Зеленая, 1,
420043, г. Казань, Россия
E-mail: pavel.shabalin@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 94-108.

УДК 519.2

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ДОЗ ПО ДАННЫМ БИНАРНЫХ ОТКЛИКОВ

М.С. ТИХОВ

Аннотация. Для модели бинарного отклика мы предлагаем новый прямой способ непараметрического оценивания эффективной дозы $ED_{100\lambda}$ ($0< \lambda < 1$). Этот метод приводит к простой и надежной монотонной оценке эффективной дозы зависимости $\lambda \to ED_{100\lambda}$ и удобен для пользователей традиционных методов сглаживания ядерных оценок. Кроме того, он эффективен в вычислительном отношении, потому что не требует численной инверсии оценки кривой квантильной функции. Мы доказываем асимптотическую нормальность этой новой оценки и сравниваем ее с DNP-оценкой.

Ключевые слова: модель бинарного отклика, эффективная доза, непараметрическая оценка.

Mathematics Subject Classification: 62G05, 62G08, 62G20, 62P10.

1. Введение

Рассмотрим следующую модель бинарных откликов, которая носит условное название *зависимость доза-эффект* [1] и которую можно описать следующим образом.

Пусть $\{(X_i, U_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ – потенциальная повторная выборка из неизвестного распределения $F(x)\,Q(y)$, $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$, $Q(y) = \mathbf{P}(U_i < y)$, $x, y \in \mathbf{R}$, вместо которой наблюдается выборка $\mathcal{U}^{(n)} = \{(U_i, W_i),\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$, где $W_i = \chi(X_i < U_i)$ есть индикатор события $(X_i < U_i)$. Здесь U_i рассматриваются как вводимые дозы, а W_i – как эффект от воздействия дозы U_i. Пусть $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, причем $f(x) > 0$. Эту ситуацию будем называть *случайным* планом эксперимента.

Наряду со случайным планом рассматриваются *фиксированные* планы эксперимента. Именно, будем полагать вводимую дозу U неслучайной и положим $U_i = u_i$, $i = 0, 1, ..., n+1$, где $0 = u_0 < u_1 < ... < u_n < u_{n+1} = 1$.

Одной из основных задач зависимости доза-эффект является оценка *эффективных доз* $ED_{100\lambda} = F^{-1}(\lambda) = x_\lambda$, $0 < \lambda < 1$, по выборке $\mathcal{U}^{(n)}$. Для фиксированных планов эксперимента мы рассмотрим несколько непараметрических оценок и найдем их асимптотические (при $n \to \infty$) распределения.

Непараметрический подход к оцениванию предполагает наличие ядерных функций $K_r(x)$, $K_d(x)$, фактически четных и финитных плотностей распределения с носителем на $[-1, 1]$, и величин h_r, h_d – сглаживающих параметров, которые неслучайны, зависят от объема выборки n и которые сходятся к нулю, когда $n \to \infty$, но $nh_r \to \infty$, $nh_d \to \infty$ при $n \to \infty$. Положим также $H_d(u) = \int_{-\infty}^{u} K_d(x)\,dx$.

Для оценки функции $F(x)$ будем использовать статистику

$$F_{nh_r}(x) = \frac{1}{nh_r} \sum_{i=1}^{n} K_r\left(\frac{x - u_i}{h_r}\right) W_i.$$

M.S. Tikhov, Nonparametric estimates of the effective doses at quantal response.

Поступила 16 февраля 2012 г.

В данной работе для фиксированных планов эксперимента в зависимости доза-эффект мы доказываем асимптотическую нормальность оценки

$$\hat{x}_{1,\lambda} = \frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)du =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_d\left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right) \qquad (1)$$

эффективной дозы x_λ , которую мы называем DNP-*оценкой*.

Мы также изучим асимптотическое поведение оценки для x_λ вида

$$\hat{x}_{2,\lambda} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)du}{\sum\limits_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{u-F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right)du} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}H_d\left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}H_d\left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right)}, \qquad (2)$$

которая была предложена в работе [2]. Мы показываем, что оценка $\hat{x}_{2,\lambda}$ имеет такое же предельное распределение, что и оценка $\hat{x}_{1,\lambda}$.

Рассматривается также асимптотическое поведение оценки

$$\hat{x}_{3,\lambda} = \sqrt{\hat{S}_{2,\lambda} - b(h_r, h_d)},$$

где

$$\hat{S}_{2,\lambda} = \frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)du = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}H_d\left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d}\right),$$

а $b(h_r, h_d)$ – некоторые константы, зависящие от h_r, h_d (см. теорему 4.1), и показываем, что оценка $\hat{x}_{3,\lambda}$ является состоятельной оценкой x_λ, а ее предельная дисперсия меньше, чем предельная дисперсия оценок $\hat{x}_{1,\lambda}, \hat{x}_{2,\lambda}$.

Отметим, что в работе [3] для регрессионной модели

$$Y_i = m(X_i) + \sigma(X_i)\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (3)$$

где $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$ есть двумерная выборка независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (с.в.), причем с.в. X_i имеет плотность распределения $f(x) > 0$, а её значения расположены на отрезке $[0,1]$, с.в. ε_i также предполагаются н.о.р. с нулевым ожиданием и имеют четвертый момент (причем $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ независимы от $\{X_i\}_{i=1}^n$), а регрессионная функция $m(x)$ предполагается строго монотонной, была предложена оценка $m_I^{-1}(\lambda)$ для функции $m^{-1}(\lambda)$ вида (1). Там же было показано, что оценка $m_I^{-1}(\lambda)$ является асимптотически нормальной. В [3] для доказательства асимптотической нормальности оценки $m_I^{-1}(\lambda)$ существенно использовалась независимость величин $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$. В зависимости *доза-эффект* величины W_i являются бинарными величинами, поэтому мы не можем использовать представление (3). Здесь для доказательства асимптотической нормальности требуется несколько иной подход.

2. Основные условия

Пусть $\{X_i,\ \ i\ =\ 1,\dots,n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных с X на отрезке $[0,1]$ случайных величин с функцией распределения $F(x)$; $P=\{u_0,u_1,\ \dots,\ u_n,u_{n+1}\}$ – упорядоченное разбиение отрезка $[0,1]$, $u_0=0<u_1<\ldots<u_n<1=u_{n+1}$.

Сформулируем условия на параметры h_r и h_d.

Условия (H).

($\mathbf{H}_1$) $h_r=h_r(n)$, $h_d=h_d(n)$, причем $h_r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $h_d \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, но $nh_r\to\infty$, $nh_d\to\infty$ при $n\to\infty$.

($\mathbf{H}_2$) $h_d/h_r \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

($\mathbf{H}_3$) $nh_r^5=O(1)$ при $n\to\infty$.

($\mathbf{H}_4$) $nh_rh_d^{8/3} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

В качестве примера рассмотрим $h_r=n^{-1/5}$, $h_d=n^{-1/4}$. Очевидно, что для этих последовательностей условия ($\mathbf{H}$) будут выполнены.

Положим $\|\, K\,\|^2=\int_{-1}^1 K^2(x)\,dx$.

Условия на ядерные функции $K_r(x)$ и $K_d(x)$.

Условия (K).

($\mathbf{K}_1$) $K_{r(d)}(x)\ge 0$, причем $K_{r(d)}(x)=0, x\notin[-1,1]$.

($\mathbf{K}_2$) $\int\limits_{-1}^{1} K_r(x)\,dx=1, \quad \int\limits_{-1}^{1} K_d(x)\,dx=1.$

($\mathbf{K}_3$) $K_{r(d)}(x)=K_{r(d)}(-x), x\in\mathbf{R}$.

($\mathbf{K}_4$) Существуют непрерывные ограниченные производные функций $K_r(x)$, $K_d(x)$ до третьего порядка включительно на отрезке $[-1,1]$.

($\mathbf{K}_5$) $\|\, K_j\,\|_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|\,K_j(x)\,|=k_j<\infty$ для $j=r,d$.

Замечание 2.1. При условиях ($\mathbf{K}$) существуют четверные моменты у распределений с плотностями $K_r(x)$, $K_d(x)$, причем

$$\nu_r^2=\int x^2K_r(x)\,dx, \qquad \nu_d^2=\int x^2K_d(x)\,dx,$$

$$\mu_r^4=\int x^4K_r(x)\,dx, \qquad \mu_d^4=\int x^4K_d(x)\,dx.$$

Определим вариацию функции K (см. [4], с. 234).

Пусть $K:[a,b]\to\mathbf{R}$. *Вариацией* функции $K=K(u)$ на отрезке $[a,b]$ называется следующая величина: $\bigvee(K)=\bigvee_a^b(K)=\sup\limits_P\sum\limits_{k=0}^{m}|\,K(u_{k+1})-K(u_k)\,|$, т.е. точная верхняя грань по всем упорядоченным разбиениям P отрезка $[a,b]$. Всюду в работе мы рассматриваем вариации функций на отрезке $[0,1]$.

Замечание 2.2. Из условия ограниченности производных функций $K_r(x)$, $K_d(x)$ на отрезке $[-1,1]$ (условие $\mathbf{K}_4$) следует, что их вариации ограничены (см. [4], с. 235), т.е. $\bigvee(K_{d(r)})<\infty$.

Условие (F).

($\mathbf{F}_1$) Существует третья непрерывная ограниченная производная плотности распределения $f(x) = F'(x)$, причем $f(x) \geq C_0 > 0$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, т.е. плотность $f(x)$ на отрезке $[0,1]$ отделима от нуля.

Условие (P).

($\mathbf{P}_1$) При $n \to \infty$

$$\max_{k=0,1,\ldots,n} \max\left\{\left|u_k - \frac{k}{n}\right|, \left|u_{k+1} - \frac{k}{n}\right|\right\} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из условия (**P**) следует, что $u_k = \dfrac{k}{n} + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$, причем последовательность $n\left(u_k - \dfrac{k}{n}\right)$ равномерно по $0 \leqslant k \leqslant n$ ограничена константой C.

Всюду в работе будем предполагать, что выполнены (основные) условия (**H**), (**K**), (**F**), (**P**).

3. Вспомогательные результаты

В этом разделе представлены вспомогательные результаты, необходимые для изучения асимптотики введенных выше оценок $\hat{x}_{1,\lambda}$, $\hat{x}_{2,\lambda}$, $\hat{x}_{3,\lambda}$.

Приведем сначала неравенство Koksma-Hlawka (см. [5], с.18), которое позволяет оценить скорость сходимости интегральных сумм к соответствующему интегралу.

Пусть $\mathcal{B}$ – лебегова σ-алгебра на $I = [0,1]$ и ρ – лебегова мера на $\mathcal{B}$. Для $P = \{u_0, u_1, \ \ldots, \ u_n, u_{n+1}\}$ с $u_0 = 0 < u_1 < \ldots < u_n < 1 = u_{n+1}$ и $B \in \mathcal{B}$ определим

$$A(B;P) = \sum_{i=1}^{n} \chi_B(u_i), \quad D_n(\mathcal{B};P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left|\frac{A(B;P)}{n} - \rho(B)\right|,$$

где $\chi_B(x)$ – индикатор множества B. Положим $D_n^*(P) = D_n(J_c^*, P)$, где J_c^* есть подмножества на I вида $[0, u_i]$.

Для любой ограниченной функции $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ положим $\|\,\psi\,\|_I = \sup_{x \in I} |\,\psi(x)\,|$.

Теорема 3.1 [5] (Неравенство Koksma-Hlawka). *Если функция $f(u)$ $(0 \leqslant u \leqslant 1)$ имеет ограниченную вариацию $\bigvee(f)$ на $[0,1]$, то для любых $0 < u_1 < u_2 < ... < u_n < 1$ мы имеем*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(u_i) - \int_0^1 f(u)\,du\right| \leqslant \bigvee(f) D_n^*(u_1, ..., u_n).$$

Приведем также еще две леммы из [5].

Лемма 3.2. *Если $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in [0,1]$ удовлетворяют неравенствам $|\,x_i - y_i\,| \leqslant \varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant n$, то*

$$|\,D_n^*(x_1, ..., x_n) - D_n^*(y_1, ..., y_n)\,| \leqslant \varepsilon.$$

Замечание 3.1. Из леммы 3.2 следует, что $D_n^*(x_1, ..., x_n)$ есть непрерывная функция переменных $(x_1, ..., x_n)$.

Лемма 3.3. *Если $0 < u_1 < u_2 < ... < u_n < 1$, то*

$$D_n^*(u_1, ..., u_n) = \frac{1}{2n} + \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left|\,u_i - \frac{2i-1}{2n}\,\right|.$$

Замечание 3.2. Если $u_i = \dfrac{i}{n}$, то $\dfrac{i}{n} - \dfrac{2i-1}{2n} = \dfrac{1}{2n}$ и $D_n^*(u_1, ..., u_n) = \dfrac{1}{n}$.

Теорема 3.2 ([6], с.337; [7], с. 299). *Если* $\varphi(n) \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *и*

$$\varphi(n)(T_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \tau^2)$$

то

$$\varphi(n)(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, \tau^2(g'(\theta))^2).$$

при условии, что существует непрерывная не равная нулю производная $g'(\theta)$ *функции* $g(\theta)$.

Для дальнейшего нам понадобится также следующий вспомогательный результат.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{f} = \tilde{f}(u) = \frac{1}{h_d} K_d\left(\frac{F(u) - \lambda}{h_d}\right)$$

и оценим ее вариацию на отрезке $[0, 1]$.

Лемма 3.4. *Если выполнены основные условия, то*

$$\bigvee(\tilde{f}\,) = \sup \sum_{j=1}^{l} |\, \tilde{f}(u_j) - \tilde{f}(u_{j-1})\,| = O\left(\frac{1}{h_d}\right),$$

где супремум берется по всем возможным упорядоченным разбиениям $0 < u_1 < u_2 < ... <$ $< u_l < 1$ *отрезка* $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $0 < u_1 < u_2 < ... < u_l < 1$ есть произвольное упорядоченное разбиение отрезка $[0, 1]$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{l} |\, \tilde{f}(u_j) - \tilde{f}(u_{j-1})\,| = \frac{1}{h_d} \sum_{j=1}^{l} \left| K_d\left(\frac{F(u_j) - \lambda}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(u_{j-1}) - \lambda}{h_d}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{h_d}\left\{\sum_{j=1}^{l_1} + \sum_{j=l_2+2}^{l} + \sum_{j=l_1+2}^{l_2}\right\}\left| K_d\left(\frac{F(u_j) - \lambda}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(u_{j-1}) - \lambda}{h_d}\right)\right| +$$

$$+ \frac{1}{h_d}\left| K_d\left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(u_{l_1}) - \lambda}{h_d}\right)\right| +$$

$$+ \frac{1}{h_d}\left| K_d\left(\frac{F(u_{l_2+1}) - \lambda}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(u_{l_2+2}) - \lambda}{h_d}\right)\right|,$$

где l_1 и l_2 таковы, что

$$F(u_{l_1}) \leqslant \lambda - h_d, \qquad F(u_{l_1+1}) > \lambda - h_d,$$

$$F(u_{l_2+1}) < \lambda + h_d, \qquad F(u_{l_2+2}) \geq \lambda + h_d.$$

Поскольку $K_d(x) = 0$ для $|\, x\,| \geq 1$, то сумма $\sum_{j=1}^{l_1} + \sum_{j=l_2+2}^{l}$ будет равна нулю, а

$$K_d\left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d}\right) = K_d(-1) + K_d'(\xi)\left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d} + 1\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $-1 \leqslant \xi \leqslant \dfrac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d}$.

Аналогично можно показать, что $K_d\left(\dfrac{F(u_{l_2}) - \lambda}{h_d}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

В оставшейся сумме все точки $\dfrac{F(u_j)-\lambda}{h_d}$ принадлежат отрезку $[-1,1]$, и поэтому

$$\frac{1}{h_d}\sum_{j=l_1+2}^{l_2}\left|K_d\left(\frac{F(u_j)-\lambda}{h_d}\right)-K_d\left(\frac{F(u_{j-1})-\lambda}{h_d}\right)\right| =$$

$$=\frac{1}{h_d}\sum_{j=l_1+2}^{l_2}|K_d'(\xi_j)|\ \frac{F(u_j)-F(u_{j-1})}{h_d}\leqslant\frac{M}{h_d^2}(F(u_{l_2})-F(u_{l_1+2}))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2Mh_d}{h_d^2}=\frac{2M}{h_d},$$

где $\xi_j\in[-1,1]$, $|K_d'(\xi_j)|\leqslant M$ и M не зависит от n. Отсюда следует результат леммы.

4. Основные результаты

4.1. Асимптотика оценки $\hat{x}_{1,\lambda}$. Представим статистику $\hat{x}_{1,\lambda}$ в следующем виде:

$$\hat{x}_{1,\lambda}=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)du=x_{\lambda,n}+\Delta,$$

где

$$x_{\lambda,n}=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{F(i/n)-u}{h_d}\right)du,$$

$$\Delta=\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\lambda}\left\{K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)-K_d\left(\frac{F(i/n)-u}{h_d}\right)\right\}du=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(H_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n)-u}{h_d}\right)-H_d\left(\frac{F(i/n)-u}{h_d}\right)\right).$$

Асимптотическое поведение $x_{\lambda,n}$ представлено в следующей лемме.

Лемма 4.1. *При $n\to\infty$*

$$x_{\lambda,n}=x_\lambda+a_{2,d}h_d^2+o(h_d^2),$$

где

$$x_\lambda=F^{-1}(\lambda),\quad a_{2,d}=\frac{1}{2}(F^{-1})''(\lambda)\nu_d^2=-\frac{\nu_d^2f'(x_\lambda)}{2f^3(x_\lambda)}.$$

Доказательство. Используя неравенство Koksma-Hlawka, лемму 3.4 и замечание 3.2, получаем:

$$x_{\lambda,n}=\frac{1}{h_d}\int\limits_0^1\int\limits_{-\infty}^{\lambda}K_d\left(\frac{F(x)-u}{h_d}\right)dudx+O\left(\frac{1}{nh_d}\right)=$$

$$=\int\limits_0^1dx\int\limits_{\frac{F(x)-\lambda}{h_d}}^{1}K_d(z)\,dz+O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Поскольку $\frac{F(x)-\lambda}{h_d} \leqslant -1$ при $x \leqslant F^{-1}(\lambda - h_d) \leqslant 1$, то

$$x_{\lambda,n} = \int\limits_0^{F^{-1}(\lambda-h_d)} dx \int\limits_{-1}^{1} K_d(z)\,dz + \int\limits_{F^{-1}(\lambda-h_d)}^{1} dx \int\limits_{\frac{F(x)-\lambda}{h_d}}^{1} K_d(z)\,dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Первый интеграл равен $F^{-1}(\lambda - h_d)$, а во втором сделаем замену $y = \frac{F(x)-\lambda}{h_d}$ и замечая, что $\lambda < F(1) = 1$, а $F \in C^2$, $f(x) \geq C_0 > 0$, получим

$$x_{\lambda,n} = F^{-1}(\lambda - h_d) + h_d \int\limits_{-1}^{\frac{F(1)-\lambda}{h_d}} dy \int\limits_{y}^{1} K_d(z)(F^{-1})'(\lambda + h_d y)\,dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= F^{-1}(\lambda - h_d) + h_d \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y}^{1} K_d(z)\{(F^{-1})'(\lambda) + (F^{-1})''(\lambda) y h_d + O(h_d^2)\}\,dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Так как

$$\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y}^{1} K_d(z)\,dz = 1, \quad \int\limits_{-1}^{1} y\,dy \int\limits_{y}^{1} K_d(z)\,dz = \frac{1}{2}\nu_d^2 - \frac{1}{2},$$

$$\sup_{t,x\in[0,1]} |(F^{-1})'(t) - (F^{-1})'(x) - (t-x)(F^{-1})''(x)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{x\in[0,1]} |(F^{-1})'''(x)|,$$

а

$$(F^{-1})'''(x) = \frac{3(f'(F^{-1}(x)))^2}{(f(F^{-1}(x)))^5} - \frac{f''(F^{-1}(x))}{(f(F^{-1}(x)))^4},$$

то в силу отделимости плотности от нуля и ограниченности производных функции распределения получаем, что

$$\sup_{t,x\in[0,1]} |(F^{-1})'(t) - (F^{-1})'(x) - (t-x)(F^{-1})''(x)| \leqslant C.$$

Таким образом,

$$x_{\lambda,n} = F^{-1}(\lambda - h_d) +$$

$$+ h_d \left((F^{-1})'(\lambda) + (F^{-1})''(\lambda) h_d \int\limits_{-1}^{1} y\,dy \int\limits_{y}^{1} K_d(z)\,dz + O(h_d^2) \right) + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= F^{-1}(\lambda) + \frac{1}{2} h_d^2 (F^{-1})''(\lambda) \nu_d^2 + O\left(h_d^3 + \frac{1}{nh_d}\right),$$

что завершает доказательство леммы 4.1.

Рассмотрим величину Δ и представим ее в следующем виде:

$$\Delta = \Delta_1 + \frac{1}{2}\Delta_2 + \frac{1}{6}\Delta_3.$$

Здесь

$$\Delta_1 = -\frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^{n} K_d\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right)(F_{nh_r}(i/n) - F(i/n)),$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{nh_d^2} \sum_{i=1}^{n} K_d'\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right)(F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^2,$$

$$\Delta_3 = -\frac{1}{nh_d^3}\sum_{i=1}^{n} K_d''\left(\frac{\lambda-\xi_i}{h_d}\right)(F_{nh_r}(i/n)-F(i/n))^3,$$

где $|\,\xi_i - F(i/n)\,| \leqslant |\,F(i/n) - F_{nh_r}(i/n)\,|$.

Лемма 4.2. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\Delta_1 - a_{2,r}h_d^2) \xrightarrow{d} N(0, g_2^2),$$

где

$$a_{2,r} = -\frac{\nu_r^2}{2}F''(F^{-1}(\lambda))(F^{-1})'(\lambda) = -\frac{\nu_r^2 f'(x_\lambda)}{2f(x_\lambda)},$$

$$g_2^2 = \lambda(1-\lambda)\|\,K_r\,\|^2\left[(F^{-1})'(\lambda)\right]^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{f^2(x_\lambda)}\|\,K_r\,\|^2.$$

Доказательство. Определим величины

$$\Delta_{1,1} = -\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n} K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)(F_{nh_r}(i/n) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))),$$

$$\Delta_{1,2} = -\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n} K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)(\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n)) - F(i/n)).$$

Тогда $\Delta_1 = \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}$, причем величина $\Delta_{1,2}$ неслучайна.
Из [8], с. 68, следует, что

$$\sup_x |\,\mathbf{E}(F_{nh_r}(x) - F(x))\,| \leqslant \frac{1}{2}h_r^2\nu_r^2\sup_x|\,f'(x)\,| \leqslant \frac{M_1h_r^2\nu_r^2}{2}.$$

Используя это замечание, получаем, что

$$\mathbf{E}(\Delta_1) = \mathbf{E}(\Delta_{1,2}) = -\frac{\nu_r^2h_r^2}{2nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)F''(i/n)(1+o(1)) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2h_r^2}{2h_d}\int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right)F''(x)\,dx(1+o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2h_r^2}{2}\int\limits_{-1}^{1} K_d(z)(F^{-1})'(\lambda+zh_d)F''(F^{-1}(\lambda+zh_d))\,dz\,(1+o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2}{2}h_r^2(F^{-1})'(\lambda)F''(F^{-1}(\lambda)) + o(h_r^2).$$

Далее, подсчитаем дисперсию величины Δ_1. Имеем:

$$\mathbf{D}(\Delta_1) = \mathbf{D}(\Delta_{1,1}) =$$

$$= \frac{1}{n^4h_d^2h_r^2}\sum_{j=1}^{n}F(u_j)(1-F(u_j))\left\{\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{i/n-u_j}{h_r}\right)\right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2h_d^2h_r^2}\sum_{j=1}^{n}F(u_j)(1-F(u_j))\left\{\int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{x-u_j}{h_r}\right)dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^2.$$

Сделаем замену $z = \dfrac{F(x)-\lambda}{h_d}$ и применим неравенство Koksma-Hlavka. Тогда

$$\mathbf{D}(\Delta_1) = \frac{1}{nh_d^2h_r^2}\int\limits_0^1 F(y)(1-F(y))\times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{x-y}{h_r}\right)\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^2 dy + O\left(\frac{1}{n^2h_r^2}\right).$$

Кроме того, при $n\to\infty$

$$K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda+h_dz)-y}{h_r}\right) = K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda)-y}{h_r}\right) + o(1).$$

Учитывая последнее и делая замену $t = \dfrac{F^{-1}(\lambda)-y}{h_r}$, получаем окончательно

$$\mathbf{D}(\Delta_1) = \frac{\lambda(1-\lambda)\|\,K_r\,\|^2}{f^2(x_\lambda)nh_r} + o\left(\frac{1}{nh_r}\right).$$

Теперь, чтобы доказать асимптотическую нормальность величины Δ_1, достаточно доказать асимптотическую нормальность $\Delta_{1,1}$. Для этого представим $\Delta_{1,1}$ в виде суммы $\Delta_{1,1} = \sum_{i=1}^n \xi_j$, где

$$\xi_j = -\frac{1}{n^2h_dh_r}\left(\chi(X_j<u_j)-F(u_j)\right)\sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{i/n-u_j}{h_r}\right).$$

Пусть $G(u) = F(u)-4F^2(u)+6F^3(u)-3F^4(u)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j-\mathbf{E}(\xi_j))^4 = \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j)^4 = \frac{1}{n^8h_d^4h_r^4}\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\chi(X_j<u_j)-F(u_j))^4\times$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{i/n-u_j}{h_r}\right)\right\}^4 =$$

$$= \frac{1}{n^8h_d^4h_r^4}\sum_{j=1}^n G(u_j)\left\{\int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right)K_r\left(\frac{x-u_j}{h_r}\right)\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^4 =$$

$$= \frac{1}{n^4h_r^4}\sum_{j=1}^n G(u_j)\left\{\int\limits_0^1 K_d(y)K_r\left(\frac{x-u_j}{h_r}\right)x'_y\,dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right)\right\}^4 =$$

$$= \frac{1}{n^3h_r^3}\int\limits_{-1}^1 G(x-zh_r)\left\{\int\limits_{-1}^1 K_d(y)K_r(z)(F^{-1})'(\lambda+h_dy)\,dy\right\}^4 dz + O\left(\frac{1}{n^4h_d^4}\right) = O\left(\frac{1}{n^3h_d^3}\right).$$

Поскольку

$$\frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j-\mathbf{E}(\xi_j))^4}{\left(\mathbf{D}\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)\right)^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j-\mathbf{E}(\xi_j))^4}{(\mathbf{D}(\Delta_1))^2} = O\left(\frac{1}{nh_r}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то для последовательности $\sum_{j=1}^n \xi_j$ выполнены условия центральной предельной теоремы Ляпунова. Отсюда получаем утверждение леммы 4.2.

Лемма 4.3. *При* $n \to \infty$
$$\Delta_2 + \Delta_3 = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала Δ_2. Имеем:
$$|\,\mathbf{E}(\Delta_2)\,| \leqslant \frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\left|\,\frac{1}{h_d}K_d'\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right)\right|\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_1 h_r^4}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\left|\,\frac{1}{h_d}K_d'\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right)\right| =$$
$$= \frac{C_1 h_r^4}{h_d}\int\limits_{-1}^{1}|\,K_d'(t)\,|\,dt + O\left(\frac{h_r^4}{nh_d^2}\right) =$$
$$= O\left(\frac{h_r^4}{h_d}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Далее,
$$-\mathbf{E}(\Delta_3) = \frac{1}{nh_d^3}\sum_{i=1}^{n}K_d''\left(\frac{\lambda - \xi_i}{h_d}\right)\mathbf{E}((F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^3).$$

Пусть $A(x) = \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - F(x))^3)$. Тогда
$$A(x) = \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) + \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x))^3) =$$
$$= \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) + (\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x)))^3 + 3\mathbf{D}(F_{nh_r})\cdot(\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x))) =$$
$$= \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) + O\left(h_r^6 + \frac{h_r}{n}\right),$$
причем оценки равномерны по x и, значит,
$$|\,\mathbf{E}(\Delta_3\,| \leqslant \frac{M_2}{h_d^3}\int_{-1}^{1}A(x)\,dx.$$

Рассмотрим теперь
$$\mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) = \mathbf{E}((n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\eta_j(x))^3),$$
где
$$\eta_j(x) = \frac{1}{h_r}(\chi(X_j < x) - F(x))K_r\left(\frac{x-u}{h_r}\right).$$

Тогда (см. [9], с. 379)
$$\mathbf{E}((n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\eta_j(x))^3) = n^{-2}\mathbf{E}(\eta_1^3(x)) = \frac{F(x) - 3F^2(x) + 2F^3(x)}{n^2h_r^3}K_r^3\left(\frac{x-u}{h_r}\right).$$

Воспользовавшись ограниченностью $K_d''(t)$ и тем, что
$$\frac{1}{h_r}\int_{-1}^{1}K_r^3\left(\frac{x-u}{h_r}\right)\,dx \leqslant M_3 < \infty,$$
получим
$$|\,\mathbf{E}(\Delta_3)\,| = O\left(\frac{1}{n^2h_d^3h_r^2}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Аналогично можно показать, что $\mathbf{E}(\Delta_2^2)$, $\mathbf{E}(\Delta_3^2)$ сходятся к нулю при $n \to \infty$. Значит, из неравенства Чебышева получаем результат леммы 4.3

Из лемм 4.1 – 4.3 имеем следующую теорему.

Теорема 4.1. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{1,\lambda} - x_\lambda - b_2(h_r, h_d)) \xrightarrow{d} N(0, g_2^2),$$

где

$$b_2(h_r, h_d) = a_{2,d}h_d^2 + a_{2,r}h_r^2, \quad a_{2,r} = -\frac{\nu_r^2 f'(x_\lambda)}{2f(x_\lambda)}, \quad a_{2,d} = -\frac{\nu_d^2 f'(x_\lambda)}{2f^3(x_\lambda)},$$

$$g_2^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)\| K_r \|^2}{f^2(x_\lambda)}.$$

4.2. Асимптотика оценок $\hat{x}_{2,\lambda}$ и $\hat{x}_{3,\lambda}$. Для изучения асимптотики оценки $\hat{x}_{2,\lambda}$ представим ее в следующем виде:

$$\hat{x}_{2,\lambda} = \frac{\hat{S}_{2,\lambda}}{\hat{x}_{1,\lambda}},$$

где

$$\hat{S}_{2,\lambda} = x_{2,\lambda} + 2\Lambda, \quad x_{2,\lambda} = \frac{2}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda} K_d\left(\frac{F(i/n) - u}{h_d}\right) du,$$

$$\Lambda = \frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\int_{-\infty}^{\lambda}\left\{K_d\left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d}\right) - K_d\left(\frac{F(i/n) - u}{h_d}\right)\right\} du.$$

Лемма 4.4. *При* $n \to \infty$

$$x_{2,\lambda} = x_\lambda^2 + h_d^2\nu_d^2 x_\lambda\left(-\frac{f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)}\right) + o(h_d^2).$$

Доказательство. Применяя неравенство Koksma-Hlawka, получаем

$$x_{2,\lambda} = \frac{2}{h_d}\int_0^1\int_{-\infty}^{\lambda} xK_d\left(\frac{F(x) - u}{h_d}\right) dudx + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= 2\int_0^1 x\,dx\int_{(F(x)-\lambda)/h_d}^{1} K_d(y)\,dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= 2\int_0^{F^{-1}(\lambda - h_d)} x\,dx\int_{-1}^{1} K_d(y)\,dy + 2\int_{F^{-1}(\lambda-h_d)}^{1} x\,dx\int_{(F(x)-\lambda)/h_d}^{1} K_d(y)\,dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Первый интеграл вычисляется непосредственно, а во втором сделаем замену $t = \dfrac{F(x) - \lambda}{h_d}$. Тогда получаем

$$x_{2,\lambda} = (F^{-1}(\lambda - h_d))^2 +$$

$$+2h_d\int_{-1}^{(F(1)-\lambda)/h_d}(F^{-1})'(\lambda + th_d)F^{-1}(\lambda + th_d)\,dt\int_t^1 K_d(y)\,dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= \left\{F^{-1}(\lambda) - (F^{-1})'(\lambda)h_d + (F^{-1})''(\lambda)\frac{h_d^2}{2} + o(h_d^2)\right\}^2 +$$

$$+2h_d(F^{-1})'(\lambda)F^{-1}(\lambda)\int_{-1}^{1}dt\int_{t}^{1}K_d(y)\,dy+$$

$$+2h_d^2\int_{-1}^{1}t\,dt\int_{t}^{1}K_d(y)\,dy\left\{(F^{-1})''(\lambda)F^{-1}(\lambda)+\left[(F^{-1})'(\lambda)\right]^2\right\}+o(h_d^2).$$

Так как

$$\int_{-1}^{1}dt\int_{t}^{1}K_d(y)\,dy=1,\quad 2\int_{-1}^{1}dt\int_{t}^{1}K_d(y)t\,dy=\nu_d^2-1,$$

то

$$x_{2,\lambda}=\{(F^{-1}(\lambda))^2+((F^{-1})'(\lambda))^2h_d^2-2F^{-1}(\lambda)(F^{-1})'(\lambda)h_d+$$

$$+F^{-1}(\lambda)(F^{-1})''(\lambda)h_d^2\}+2(F^{-1})'(\lambda)F^{-1}(\lambda)h_d+$$

$$+h_d^2(\nu_d^2-1)F^{-1}(\lambda)\left\{(F^{-1})''(\lambda)+((F^{-1})'(\lambda))^2\right\}+o(h_d^2).$$

Последнее завершает доказательство леммы 4.4.

Представим теперь величину Λ в виде суммы $\Lambda=\Lambda_1+\frac{1}{2}\Lambda_2+\frac{1}{6}\Lambda_3$, где

$$\Lambda_1=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{\lambda-F(i/n)}{h_d}\right)\frac{i}{n}(F_{nh_r}(i/n)-F(i/n)),$$

$$\Lambda_2=\frac{1}{nh_d^2}\sum_{i=1}^{n}K_d'\left(\frac{F(i/n)-u}{h_d}\right)\frac{i}{n}(F_{nh_r}(i/n)-F(i/n))^2,$$

$$\Lambda_3=-\frac{1}{nh_d^3}\sum_{i=1}^{n}K_d''\left(\frac{\xi_i-u}{h_d}\right)\frac{i}{n}(F_{nh_r}(i/n)-F(i/n))^3,$$

$$|\,\xi_i-F(i/n)\,|\leqslant|\,F(i/n)-F_{nh_r}(i/n)\,|.$$

Лемма 4.5 *При* $n\to\infty$

$$\sqrt{nh_r}(\Lambda_1-a_{1,r}h_r^2)\xrightarrow{d}N(0,g_1^2),$$

где

$$a_{1,r}=-\frac{\nu_r^2x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^4(x_\lambda)},\quad g_1^2=\frac{4\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{f^2(x_\lambda)}\|\,K_r\,\|^2.$$

Доказательство. Пусть

$$\Lambda_{1,1}=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\frac{i}{n}(F_{nh_r}(i/n)-\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))),$$

$$\Lambda_{1,2}=-\frac{1}{nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\frac{i}{n}(\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))-F(i/n)).$$

Тогда $\Lambda_1=\Lambda_{1,1}+\Lambda_{1,2}$.

Учитывая, что $\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)-F(x))=\dfrac{\nu_r^2h_r^2}{2}f'(x)+o(h_r^2)$, получим

$$\mathbf{E}(\Lambda_1)=\mathbf{E}(\Lambda_{1,2})=-\frac{\nu_r^2h_r^2}{2nh_d}\sum_{i=1}^{n}K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right)\frac{i}{n}F''(i/n)(1+o(1))=$$

$$= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2h_d} \int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right) xF''(x)\,dx(1+o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} \int\limits_{-1}^1 K_d(z)F^{-1}(\lambda+zh_d)(F^{-1})'(\lambda+zh_d)F''(F^{-1}(\lambda+zh_d))\,dz(1+o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) =$$

$$= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} F^{-1}(\lambda)(F^{-1})'(\lambda)F''(F^{-1}(\lambda)) + o(h_d^2).$$

Вычислим теперь дисперсию величины Λ_1. Имеем:

$$\mathbf{D}(\Lambda_1) = \mathbf{D}(\Lambda_{1,1}) =$$

$$= \frac{1}{n^4 h_d^2 h_r^2} \sum_{j=1}^n F(u_j)(1-F(u_j)) \left\{ \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{F(i/n)-\lambda}{h_d}\right) K_r\left(\frac{i/n-u_j}{h_r}\right)\frac{i}{n} \right\}^2 =$$

$$= \frac{1}{n^2 h_d^2 h_r^2} \sum_{j=1}^n F(u_j)(1-F(u_j)) \left\{ \int\limits_0^1 K_d\left(\frac{F(x)-\lambda}{h_d}\right) K_r\left(\frac{x-u_j}{h_r}\right) x\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^2.$$

Делая замену $z = \dfrac{F(x)-\lambda}{h_d}$ и снова применяя неравенство Koksma-Hlawka, получим

$$\mathbf{D}(\Lambda_1) = \frac{1}{nh_d^2 h_r^2} \int\limits_0^1 F(u)(1-F(u))\,du \times$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^1 K_d(z) K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda+zh_d)-u}{h_r}\right) F^{-1}(\lambda+zh_d)(F^{-1})'(\lambda+zh_d)\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^2 + O\left(\frac{1}{n^2 h_r^2}\right).$$

Используя то, что при $n \to \infty$

$$K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda+h_d z)-y}{h_r}\right) = K_r\left(\frac{F^{-1}(\lambda)-y}{h_r}\right) + o(1),$$

и делая замену $\dfrac{F^{-1}(\lambda)-u}{h_r}$, получим окончательно

$$\mathbf{D}(\Lambda_1) = \frac{1}{nh_r}\lambda(1-\lambda)(F^{-1}(\lambda)(F^{-1})'(\lambda))^2 \| K_r \|^2 + o\left(\frac{1}{nh_r}\right) = \frac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2 \| K_r \|^2}{nh_r f^2(x_\lambda)} + o\left(\frac{1}{nh_r}\right).$$

Учитывая множитель 2 в определении статистики $\hat{S}_{2,\lambda}$, получим результат леммы 4.5.

Лемма 4.6. *При* $n \to \infty$

$$\Lambda_2 + \Lambda_3 = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Доказательство. Замечая, что $0 \leqslant i/n \leqslant 1$, и повторяя доказательство леммы 4.3, получим результат леммы 4.6.

Лемма 4.7. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{S}_{2,\lambda} - x_\lambda^2 - a_1(h_r,h_d)h_d^2) \xrightarrow{d} N(0, g_1^2),$$

где

$$g_1^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{f^2(x_\lambda)} \| K_r \|^2,$$

$$a_{1,d} = \nu_d^2 \left(-\frac{x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)} \right).$$

Доказательство этой леммы в основных чертах повторяет доказательство леммы 4.4, поэтому опущено.

Представим оценку $\hat{x}_{2,\lambda}$ в виде отношения $\dfrac{\beta}{\alpha}$, где

$$\beta = x_{2,\lambda} + \Lambda_1, \quad \alpha = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) du.$$

Положим

$$\mu_1 = x_\lambda^2 \quad \mu_2 = x_\lambda.$$

Из представления

$$\hat{x}_{2,\lambda} - \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\beta - \mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2^2}(\alpha - \mu_2) +$$
$$+ O_p((\beta - \mu_1)(\alpha - \mu_2)) + O_p((\alpha - \mu_2))$$

(см. [10], p.327) и учитывая, что при $n \to \infty$

$$\tilde{g}^2 = \frac{g_1^2}{\mu_2^2} + \frac{g_2^2 \mu_1^2}{\mu_2^4} - 2\mathbf{cov} \left(\frac{\beta}{\mu_2}, \frac{\alpha \mu_1}{\mu_2^2} \right) \sim g^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{f^2(x_\lambda)} \| K_r \|^2,$$

получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{2,\lambda} - x_\lambda - b(h_r, h_d)) \xrightarrow{d} N(0, g^2),$$

где

$$b_1(h_r, h_d) = a_{1,d} h_d^2 + a_{1,r} h_r^2,$$

$$a_{1,r} = -\frac{\nu_r^2 x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^4(x_\lambda)}, \quad a_{1,d} = \nu_d^2 \left(-\frac{x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)} \right).$$

В лемме 4.7 и в теореме 4.2 присутствуют величины $a_{1,r}$ и $a_{1,d}$, в которые входят производные от обратной функции $F^{-1}(\lambda)$, а именно, $(F^{-1})'(\lambda)$, $(F^{-1})''(\lambda)$, и которые неизвестны. Для их оценки мы предлагаем следующие статистики:

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^{n} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - \lambda}{h_d} \right) \quad \text{и} \quad \hat{c}_2 = -\frac{1}{nh_d^2} \sum_{i=1}^{n} K_d' \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - \lambda}{h_d} \right).$$

Рассуждая аналогично предыдущему можно показать, что при $n \to \infty$ они сходятся по вероятности к $(F^{-1})'(\lambda)$ и $(F^{-1})''(\lambda)$ соответственно. Тогда состоятельной оценкой для $\hat{b}_1(h_r, h_d)$ будет $\nu_r^2 h_r^2 \hat{c}_1 \hat{c}_2 + \nu_d^2 h_d^2 (\hat{c}_2 + \hat{c}_1^2)$.

Из теоремы 4.2 следует, что дисперсия предельного распределения оценки $\hat{x}_{2,\lambda}$ такая же, как и у оценки $\hat{x}_{1,\lambda}$, поэтому рассмотрим оценку

$$\hat{x}_{3,\lambda} = \sqrt{\hat{S}_{2,\lambda} - \hat{b}_1(h_r, h_d)}.$$

Воспользовавшись теоремой 3.1, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 4.3. *При* $n \to \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{3,\lambda} - x_\lambda) \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0, g_3^2),$$

где

$$g_3^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda}{f^2(x_\lambda)} \| K_r \|^2.$$

Так как $0 < x_\lambda < 1$, то из теоремы 4.3 заключаем, что предельная дисперсия оценки $\hat{x}_{3,\lambda}$ меньше, чем предельная дисперсия оценок $\hat{x}_{1,\lambda}$ и $\hat{x}_{2,\lambda}$.

Построенная оценка $\hat{x}_{3,\lambda}$ использовалась для нахождения эффективных доз для примеров, взятых из книги [1], а также для примера Finney (см. [11], с.98).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Криштопенко С.В., Тихов М.С., Попова Е.Б. *Доза-эффект* М.: Медицина. 2008. 288 с.
2. Кочеганов В.М., Тихов М.С. *Оценивание эффективных доз в зависимости доза-эффект* // Обозрение Прикладной и Промышленной Математики. Т. 18, В. 1. 2011. С. 85–86.
3. H. Dette, N. Neumeyer, K.F. Pilz *A note on nonparametric estimation of the effective dose in quantal bioassay* // Journal of the American Statistical Association. V. 100. 2005. P. 503–510.
4. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной* Лань. М. 2008. 560 с.
5. H. Niederreiter *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods* Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia. Pensilvania. 1992. 241 p.
6. E.L. Lehmann *Theory of Point Estimation.* John Wiley & Sons. NY. 1983. 506 p.
7. Леман Э. *Теория точечного оценивания.* М.: Наука. 1991. 448 с.
8. Тихов М.С., Криштопенко Д.С., Ярощук М.В. *Оценивание распределений в зависимости доза-эффект при фиксированном плане эксперимента* // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. Перм. ун-т. Пермь. 2006. С. 66–77.
9. Крамер Г. *Математические методы статистики.* М.: Мир. 1976. 648 с.
10. M.S. Tikhov *Statistical Estimation on the Basis of Interval-Censored Data* // Journal Math. Sciences. V. 119, No. 3. 1974. P. 321–335.
11. D.J. Finney *Probit Analysis.* Cambridge University Press, NY. 1971. 333 p.

Михаил Семенович Тихов,
Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,
пр. Гагарина, 23,
603950, г. Нижний Новгород, Россия
E-mail: tikhovm@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 109-131.

УДК 517.91

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ЯЗЫКОВ АРНОЛЬДА ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М.Г. ЮМАГУЛОВ

Аннотация. Работа посвящена изложению метода локализации языков Арнольда конечномерных динамических систем с дискретным временем – множеств, соответствующих рационально синхронизированным соотношениям параметров системы. Такие множества отвечают областям значений параметров, при которых система имеет циклы определенных периодов. Метод позволяет получить приближенное представление языков Арнольда, изучить их свойства в основных и неосновных резонансах.

Ключевые слова: бифуркация, динамические системы, языки Арнольда, операторные уравнения, функционализация параметра.

Mathematics Subject Classification: 37G10, 37G15.

Pacs: 05.45.-a Nonlinear dynamics and chaos

1. Введение

Одним из интересных и важных с теоретической и практической точек зрения понятий теории динамических систем является понятие языков Арнольда [1]–[3] – множеств, соответствующих рационально синхронизированным соотношениям параметров системы. Такие множества отвечают областям значений параметров, при которых система имеет циклы определенных периодов. Различные вопросы, связанные со свойствами и приложениями языков Арнольда в нелинейной динамике, обсуждались в ряде работ (см., например, [1]–[8] и имеющуюся там библиографию).

Систему языков Арнольда можно наблюдать во многих задачах нелинейной динамики. Например, в задаче о потере устойчивости цикла периода T автономной системы при прохождении мультипликатора цикла через единичную окружность в качестве параметров системы можно рассматривать модуль и аргумент мультипликатора. В этом случае на плоскости параметров образуются узкие клювообразные множества (языки), выходящие своим острием на точки $e^{2\pi\theta i}$ единичной окружности, где $\theta = \dfrac{p}{q}$ – рационально; такие множества соответствуют областям существования qT-периодических решений системы, возникающих в окрестности исходного цикла периода T.

Другим примером, где естественным образом возникают языки Арнольда, является задача о синхронизации автоколебательной системы, имеющей собственную частоту ν_0, внешним сигналом частоты ν. Здесь в качестве параметров можно использовать отношение частот $\varkappa = \dfrac{\nu}{\nu_0}$ и амплитуду a внешнего сигнала. На плоскости параметров $(\varkappa, a)$

M.G. Yumagulov, Localization of Arnold tongues of discrete dynamical systems.

Работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований: 10-01-93112-НЦНИЛ_а и 11-01-97009 -“Поволжье” и программы ГНТП РБ “Инновационные технологии Республики Башкортостан: физико-математические основы и технические решения” (2011-2012 гг.).

Поступила 26 февраля 2012 г.

образуется характерная структура областей режимов, которая представляет собой области синхронизации с разным соотношением частот ν и ν_0. Эти области имеют вид языков, выходящих из каждого рационального числа на оси $\varkappa$; соответствующим значениям параметров $\varkappa$ и a, отвечают области периодических (как правило, длиннопериодических) режимов системы. Между языками существуют области квазипериодических режимов с иррациональным соотношением частот.

В настоящей статье приводятся основные положения нового операторного метода локализации языков Арнольда конечномерных динамических систем с дискретным временем. Метод позволяет получить приближенное представление этих множеств, изучить их свойства в основных и неосновных резонансах. При обосновании метода получены новые асимптотические формулы для решений задач о бифуркациях циклов динамических систем, позволяющие провести детальный анализ бифуркаций.

1.1. Бифуркация q-циклов. Рассматривается конечномерная динамическая система с дискретным временем

$$x_{n+1} = F(x_n, \mu), \quad n = 0, 1, 2, ..., \quad x_k \in R^N, \tag{1}$$

зависящая от параметра $\mu \in R^m$. Предполагается, что функция $F(x, \mu)$ определена и непрерывно дифференцируема по совокупности переменных на множестве

$$\Omega = \{(x, \mu) : \ \|x\| \leqslant \delta_1, \ \ \|\mu - \mu_0\| \leqslant \delta_2\},$$

где δ_1 и δ_2 – некоторые положительные числа; здесь и ниже запись $\|\cdot\|$ используется для обозначения евклидовых норм в пространствах R^N и R^m.

Как обычно, m-циклом или m-периодическим решением системы (1) будем называть такой набор различных векторов x_0^*, x_1^*, $x_2^*, \ldots, x_{m-1}^*$, что:

$$x_1^* = F(x_0^*, \mu), \ x_2^* = F(x_1^*, \mu), \ \ldots, x_{m-1}^* = F(x_{m-2}^*, \mu), \ x_0^* = F(x_{m-1}^*, \mu);$$

При $m = 1$ приведенное определение переходит в понятие точки равновесия (неподвижной точки) системы (1): вектор x_0^* является точкой равновесия, если $x_0^* = F(x_0^*, \mu)$.

Пусть система (1) при всех значениях μ имеет точку равновесия $x^* = 0$, т.е. $F(0, \mu) \equiv 0$. Обозначим через $A(\mu) = F_x'(0, \mu)$ матрицу Якоби функции $F(x, \mu)$, вычисленную в точке $x = 0$. Основным является предположение:

S1) матрица $A(\mu_0)$ имеет пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $0 < \theta_0 \leqslant \dfrac{1}{2}$ и θ_0 рационально: $\theta_0 = \dfrac{p}{q}$ – несократимая дробь.

При этом предполагается, что остальные собственные значения матрицы $A(\mu_0)$ не равны 1 по модулю.

В указанных предположениях точка равновесия $x^* = 0$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ является (см., например, [4]) негиперболической, а значение $\mu = \mu_0$ является бифуркационным. Коразмерность соответствующей бифуркации равна двум. Поэтому здесь естественным будет предположение, что параметр μ является двумерным, т.е. $\mu = (\alpha, \beta)$, где α и β – скалярные параметры; положим также $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$.

Пусть P – это плоскость параметров $\mu = (\alpha, \beta)$ системы (1). Сценарии бифуркаций в окрестности точки равновесия $x^* = 0$ системы (1) определяются характером перехода параметра $\mu \in P$ через точку μ_0. Этот переход может осуществляться по бесконечному числу различных направлений: по прямым или кривым, проходящим через точку μ_0. Здесь могут возникать или исчезать периодические решения различных периодов.

Одним из основных сценариев (но не единственным) здесь является бифуркация q-циклов системы (1), когда при значениях параметров μ, близких к μ_0, у системы (1) возникают циклы периода q, при этом амплитуды циклов стремятся к нулю при стремлении точки μ к μ_0. Другими словами, значение μ_0 является *точкой бифуркации q-циклов* *системы (1)*, если существует последовательность $\mu_k \to \mu_0$ такая, что при $\mu = \mu_k$ система (1) имеет q-цикл $x_0^k, x_1^k, x_2^k, ..., x_{q-1}^k$, причем $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant q-1} \|x_j^k\| \to 0$ при $k \to \infty$.

1.2. Языки Арнольда. С целью описания возможных сценариев бифуркаций системы (1) в окрестности точки равновесия $x^* = 0$ обозначим через $\mathcal{K}$ множество тех точек плоскости P параметров (α, β), при которых матрица $A(\alpha, \beta)$ имеет собственное значение λ, $|\lambda| = 1$. Множество $\mathcal{K}$ обычно представляет собой некоторую гладкую кривую на плоскости P.

На плоскости P образуется характерная структура областей режимов нелинейной системы (1), которая представляет собой области синхронизации с разным соотношением параметров α и β. Эти области имеют клювообразную форму или языка $\Psi(\alpha^*, \beta^*)$, вершины которых лежат в тех точках (α^*, β^*) кривой $\mathcal{K}$, в которых матрица $A(\alpha^*, \beta^*)$ имеет собственные значения $e^{\pm 2\pi\theta^* i}$ с рациональным θ^*: $\theta^* = \dfrac{l}{m}$ (см. рис. 1).

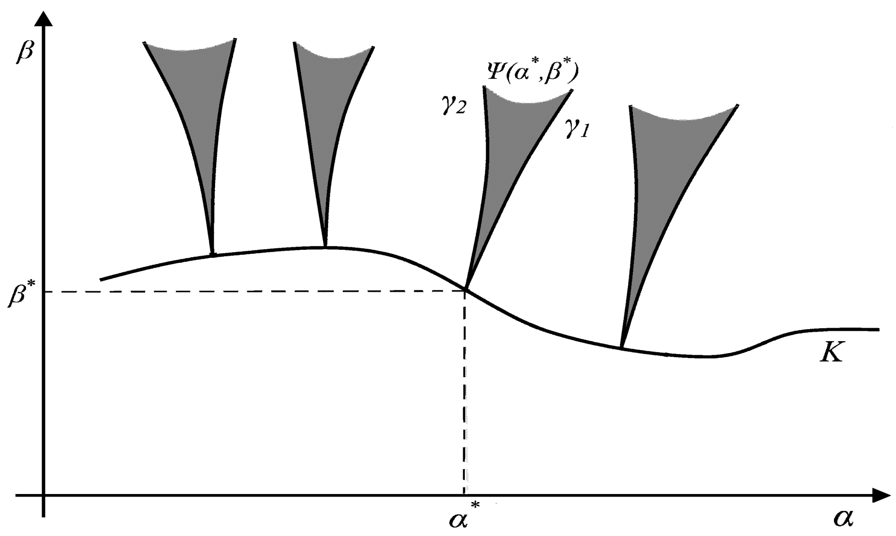

Рис. 1. Языки Арнольда на плоскости параметров

Такие языки соответствуют областям значений параметров (α, β), при которых система (1) имеет периодические режимы периода m, амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении точки (α, β) к (α^*, β^*). Другими словами, множество $\Psi(\alpha^*, \beta^*)$ содержит те последовательности $(\alpha_k, \beta_k) \to (\alpha^*, \beta^*)$, при которых реализуется сценарий бифуркации m-циклов системы (1).

Например, в силу условия S1) верно включение $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{K}$, так как матрица $A(\alpha_0, \beta_0)$ имеет собственные значения $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $\theta_0 = \dfrac{p}{q}$. Соответствующий язык $\Psi(\alpha_0, \beta_0)$ представляет множество тех значений параметров (α, β), при которых система (1) имеет q-циклы, амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении точки (α, β) к (α_0, β_0).

Таким образом, указанные языки $\Psi(\alpha^*, \beta^*)$ соответствуют рационально синхронизированным (в естественном смысле) соотношениям параметров α и β. Между указанными языками существуют области квазипериодических режимов с иррациональным соотношением параметров. Основные черты этой картины были выявлены российским математиком В.И. Арнольдом [1], так что система языков синхронизации, соответствующих рационально синхронизированным соотношениям параметров, получила название языков Арнольда [2], [3].

Указанная структура областей режимов имеет локальный характер. При удалении параметров α и β от точки (α^*, β^*) области периодических режимов вытесняют квазипериодические, и языки начинают перекрываться. Становится возможным хаос. Систему языков Арнольда можно наблюдать в возбуждаемых периодическим сигналом автоколебательных системах, в задачах о взаимной синхронизации двух автоколебательных систем и др. (см., например, [5], [6]).

В литературе понятие языков Арнольда может вводиться и в других интерпретациях. Часто (см., например, [3], [7]) это понятие вводится в терминах спектральных характеристик матрицы $A(\alpha,\beta)$. Эта интерпретация также используется в настоящей работе; приведем ее.

Пусть $\mathbb{C}$ – это комплексная плоскость, а $S=\{z:\ |z|=1\}$ – единичная окружность на этой плоскости. Пусть значение $\mu=(\alpha^*,\beta^*)$ системы (1) является точкой бифуркации m-циклов. Для реализации у системы (1) такого сценария требуется, чтобы матрица $A(\mu)$ имела собственные значения из некоторого множества $U(m)\in\mathbb{C}$, представляющего собрание узких клювообразных множеств $\Psi(l,m)$, где $0<\dfrac{l}{m}\leqslant\dfrac{1}{2}$ и число $\dfrac{l}{m}$ – несократимая дробь.

Множества $\Psi(l,m)$ и называют языками Арнольда на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Каждое множество $\Psi(l,m)$ своим клювом упирается в точку $e^{2\pi\theta^* i}$ окружности S, где $\theta^*=\dfrac{l}{m}$. Типичный язык Арнольда $\Psi(l,m)$ заключен между двумя гладкими кривыми γ_1 и γ_2, как это изображено на рис. 2.

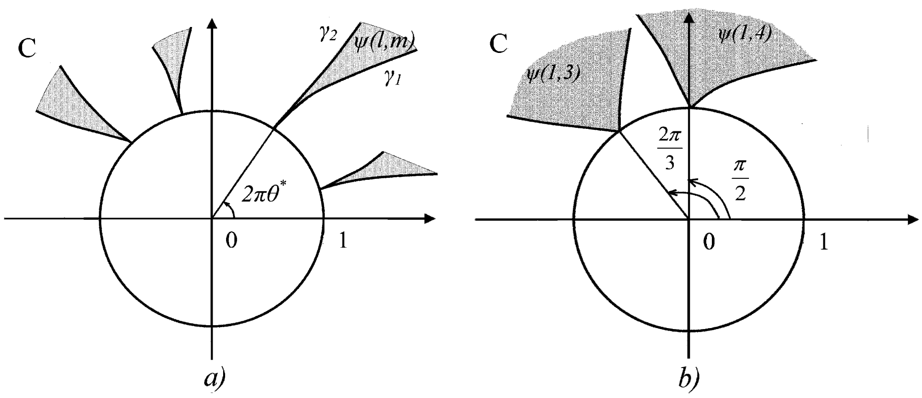

Рис. 2. Языки Арнольда на комплексной плоскости

При $m\geqslant 5$ эти кривые соприкасаются в точке $e^{2\pi\theta^* i}$; в этом случае язык Арнольда $\Psi(l,m)$ в малой окрестности точки $e^{2\pi\theta^* i}$ фактически вырождается в кривую (рис. 2 a)). При $m\leqslant 4$ язык Арнольда $\Psi(l,m)$ представляет собой существенно более широкое множество (рис. 2 b)).

Такое устройство языков Арнольда обусловливается структурой так называемых резонансных членов в тейлоровском разложении отображения $F(x,\mu)$ в нуле. За существование циклов малых периодов $m\leqslant 4$ отвечают главные резонансные члены. Соответственно, циклы малых периодов у системы (1) наблюдаются достаточно часто, а длиннопериодические циклы (при $m\geqslant 5$) являются нетипичными и наблюдаются редко.

На единичной окружности S комплексной плоскости $\mathbb{C}$ имеется счетное множество точек вида $e^{2\pi\theta i}$ с рациональными θ, причем они плотно расположены на окружности. Каждой такой точке соответствует свой язык Арнольда. В частности, это означает, что в однопараметрическом случае (т.е. когда параметр μ является скалярным) при переходе μ через μ_0 в общей ситуации у системы (1) в окрестности точки $x=0$ возникают и исчезают длиннопериодические циклы. Указанный эффект (субфуркация периодических колебаний) был впервые отмечен В.С. Козякиным [9].

2. Постановка задачи

В настоящей работе приводится схема, позволяющая локализовать языки Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (1). С этой целью укажем несколько упрощающих предположений.

Во-первых, для простоты изложения будем предполагать, что система (1) является двумерной, т.е. $N = 2$. Случай, когда $N \geqslant 3$, может быть сведен к двумерному, например, на основе теорем о центральном многообразии (см., например, [4]).

Во-вторых, нам удобно считать, что параметры α и β системы (1) связаны простыми соотношениями с собственными значениями матрицы $A(\mu)$. Воспользуемся тем фактом, что в силу теории возмущений линейных операторов [10] матрица $A(\mu)$ при каждом близком к μ_0 значении двумерного параметра μ имеет единственное близкое к $e^{2\pi\theta_0 i}$ собственное значение $\lambda = \rho(\mu)e^{2\pi\theta(\mu)i}$, при этом функции $\rho(\mu)$ и $\theta(\mu)$ являются гладкими и выполняются равенства $\rho(\mu_0) = 1$ и $\theta(\mu_0) = \theta_0$. Определим функции $\alpha = \alpha(\mu) \equiv \rho(\mu) - 1$ и $\beta = \beta(\mu) \equiv \theta(\mu) - \theta_0$.

Без ограничения общности будем предполагать, что параметрами системы (1) являются именно эти α и β. А именно, будем считать, что матрица $A(\alpha,\beta)$ имеет вид

$$A(\alpha,\beta) = (1+\alpha)Q(\beta)\,, \tag{2}$$

где

$$Q(\beta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi(\theta_0+\beta) & -\sin 2\pi(\theta_0+\beta) \\ \sin 2\pi(\theta_0+\beta) & \cos 2\pi(\theta_0+\beta) \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Матрица $A(\alpha,\beta)$ имеет пару простых собственных значений

$$\lambda(\alpha,\beta) = (1+\alpha)e^{\pm 2\pi(\theta_0+\beta)i}. \tag{4}$$

При этом матрица $A(\alpha,\beta)$ удовлетворяет условию S1) при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Таким образом, рассматривается двумерная динамическая система с дискретным временем

$$x_{n+1} = A(\alpha,\beta)x_n + a(x_n,\alpha,\beta), \quad n = 0,1,2,..., \quad x_n \in R^2\,, \tag{5}$$

в которой $A(\alpha,\beta)$ – это матрица (2), нелинейность $a(x,\alpha,\beta)$ удовлетворяет соотношению $\|a(x,\alpha,\beta)\| = O(\|x\|^2)$ при $\|x\| \to 0$ равномерно по α и β. Будем считать, что нелинейность $a(x,\alpha,\beta)$ представима в виде:

$$a(x,\alpha,\beta) = a_2(x,\alpha,\beta) + a_3(x,\alpha,\beta) + \tilde{a}_4(x,\alpha,\beta)\,, \tag{6}$$

где $a_2(x,\alpha,\beta)$ и $a_3(x,\alpha,\beta)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x,\alpha,\beta)$ является гладкой по x, при этом $\tilde{a}_4(x,\alpha,\beta) = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по α и β.

Основной задачей, рассматриваемой в данной работе, является локализация языков Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5).

3. Переход к операторным уравнениям

Основой последующих построений является следующая

Теорема 1. *Значение $\mu_0 = (0,0)$ является точкой бифуркации q-циклов системы (5).*

Доказательства этого и других основных утверждений работы приводятся в п. 7.

Для более детального изучения бифуркации q-циклов системы (5) нам понадобятся некоторые вспомогательные построения.

Периодические решения периода q системы (1) определяются решениями операторного уравнения

$$x = F^{(q)}(x,\mu)\,, \tag{7}$$

где
$$F^{(q)}(x,\mu) = \underbrace{F(F(\cdots(F}_{q}(x,\mu),\mu)\cdots)).$$
А именно, верно следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Вектор x^* является решением уравнения (7) тогда и только тогда, когда x^* либо является неподвижной точкой системы (1), либо определяет цикл $x_0 = x^*$, $x_1 = F(x_0,\mu)$, $x_2 = F(x_1,\mu)$, ... , $x_{r-1} = F(x_{r-2},\mu)$ периода r этой системы, где r – делитель числа q.*

Например, если $q = 6$, то решения уравнения (7) могут быть либо неподвижными точками системы (1), либо определяют ее циклы периода 2, 3 или 6.

В частности, уравнение (7) для системы (5) принимает вид
$$x = B(\mu)x + b(x,\mu), \tag{8}$$
где $\mu = (\alpha,\beta)$, матрица $B(\mu)$ определяется равенством
$$B(\mu) = A^q(\mu), \tag{9}$$
а нелинейность $b(x,\mu)$ имеет аналогичное (6) представление вида
$$b(x,\mu) = b_2(x,\mu) + b_3(x,\mu) + \tilde{b}_4(x,\mu), \tag{10}$$
При этом верна

Лемма 2. *Квадратичная нелинейность $b_2(x,\mu)$ в (10) представима в виде*
$$b_2(x,\mu) = A^{q-1}a_2(x,\mu) + A^{q-2}a_2(Ax,\mu)+ \tag{11}$$
$$+\cdots + Aa_2(A^{q-2}x,\mu) + a_2(A^{q-1}x,\mu),$$
а кубическая нелинейность $b_3(x,\mu)$ – в виде
$$b_3(x,\mu) = A^{q-1}a_3(x,\mu) + A^{q-2}a_3(Ax,\mu)+ \tag{12}$$
$$+\cdots + Aa_3(A^{q-2}x,\mu) + a_3(A^{q-1}x,\mu) + g_3(x,\mu),$$
где
$$g_3(x,\mu) = A^{q-2}a'_{2x}(Ax,\mu)a_2(x,\mu) + A^{q-3}a'_{2x}(A^2x,\mu)[Aa_2(x,\mu) + a_2(Ax,\mu)]+$$
$$+\cdots + a'_{2x}(A^{q-1}x,\mu)[A^{q-2}a_2(x,\mu) + A^{q-3}a_2(Ax,\mu) + \cdots + a_2(A^{q-2}x,\mu)].$$

Здесь используются обозначения: $A = A(\mu)$, $a'_{2x}(x,\mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $a_2(x,\mu)$.

В справедливости формул (9)–(12) несложно убедиться непосредственным подсчетом.

4. Правильные бифуркации

Одним из важных свойств бифуркации q-циклов системы (5) является свойство ее направленности; приведем соответствующее определение. Пусть $e \in R^2$ – некоторый ненулевой вектор. Значение $\mu_0 = (0,0)$ параметра $\mu = (\alpha,\beta)$ назовем *правильной точкой бифуркации q-циклов системы (5) по направлению вектора e*, если существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ непрерывные функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ и $x = x(\varepsilon)$ такие, что:

1) $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 0$, $x(0) = 0$;
2) $\|x(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$;
3) для каждого $\varepsilon > 0$ вектор $x(\varepsilon)$ является точкой q-цикла системы (5) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$.

Векторы $x(\varepsilon)$ и функции $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ назовем *бифурцирующими решениями* системы (5).

Правильные точки бифуркации соответствуют тому, что система (5) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ имеет q-цикл, стартующий из точки $x(\varepsilon)$, при этом кривая $x = x(\varepsilon)$ в пространстве R^2 при $\varepsilon \to 0$ асимптотически стремится к прямой $x = \varepsilon e$.

Теорема 2. *Значение $\mu_0 = (0,0)$ параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ является правильной точкой бифуркации q-циклов системы (5) по направлению любого ненулевого вектора e.*

Приведем формулы, позволяющие более детально изучить свойство правильности бифуркации q-циклов системы (5). С этой целью определим векторы

$$e = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} -c_2 \\ c_1 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

компоненты c_1 и c_2 которых таковы, что $c_1^2 + c_2^2 = 1$. Другими словами, e – произвольный единичный вектор: $\|e\| = 1$, а единичный вектор g ортогонален вектору e. Полагая в (11) и (12) $x = e$ и $\mu = \mu_0 = (0,0)$, определим векторы

$$b_2 = b_2(e, \mu_0)\,, \qquad b_3 = b_3(e, \mu_0)\,; \tag{14}$$

в частности, из (11) и (2) получим

$$b_2 = Q^{q-1} a_2(e, \mu_0) + Q^{q-2} a_2(Qe, \mu_0) + \\ + \cdots + Q a_2(Q^{q-2} e, \mu_0) + a_2(Q^{q-1} e, \mu_0)\,, \tag{15}$$

где $Q = Q(0)$, а $Q(\beta)$ – матрица (3). Из (2) и (12) может быть получена аналогичная формула для вектора b_3.

Определим числа

$$\alpha_1 = -\frac{1}{q}(b_2, e)\,, \quad \beta_1 = -\frac{1}{2\pi q}(b_2, g) \tag{16}$$

и векторы

$$e_1 = \alpha_1 e + \beta_1 g\,, \tag{17}$$

$$\chi = q\left[\frac{1}{2}\alpha_1^2(1+q) - 2\pi\beta_1^2(1+\pi q)\right] e + \\ + \alpha_1\beta_1 q(1 + 2\pi + 2\pi q) g + b'_{2x}\cdot(\alpha_1 e + \beta_1 g) + \alpha_1 b'_{2\alpha} + \beta_1 b'_{2\beta}\,; \tag{18}$$

здесь $b'_{2x} = b'_{2x}(e, \mu_0)$ – матрица Якоби нелинейности (11), вычисленная в точке $x = e$ при $\mu = \mu_0 = (0,0)$, $b'_{2\alpha}$ и $b'_{2\beta}$ – производные нелинейности (11) по параметрам α и β соответственно, вычисленные в точке $x = e$ при $\mu = \mu_0 = (0,0)$.

Наконец, положим

$$\alpha_2 = -\frac{1}{q}(\chi + b_3, e)\,, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2\pi q}(\chi + b_3, g)\,, \tag{19}$$

$$e_2 = \alpha_2 e + \beta_2 g\,. \tag{20}$$

4.1. Бифуркации в случае нечетного q. Свойства бифуркации q-циклов системы (5) во многом зависят от того, является ли q четным или нечетным. Рассмотрим сначала случай нечетного q.

Теорема 3. *Пусть число q является нечетным. Пусть e и g – единичные векторы (13). Тогда существующие в соответствии с теоремой 2 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ системы (5) представимы в виде:*

$$\alpha(\varepsilon) = \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + \alpha_3(\varepsilon)\,, \quad \beta(\varepsilon) = \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \alpha_3(\varepsilon)\,, \tag{21}$$

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + e_3(\varepsilon)\,; \tag{22}$$

в этих формулах $\alpha_3(\varepsilon)$*,* $\beta_3(\varepsilon)$ *и* $e_3(\varepsilon)$ *– это некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям:*

$$\alpha_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)\,, \quad \beta_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^2)\,, \quad \|e_3(\varepsilon)\| = o(\varepsilon^3) \quad \textit{при } \varepsilon \to 0\,. \tag{23}$$

Функции (21) в плоскости P параметров (α, β) системы (5) задают непрерывную кривую $\omega(\varepsilon)$, начинающуюся (при $\varepsilon = 0$) в начале координат (рис. 3 a)).

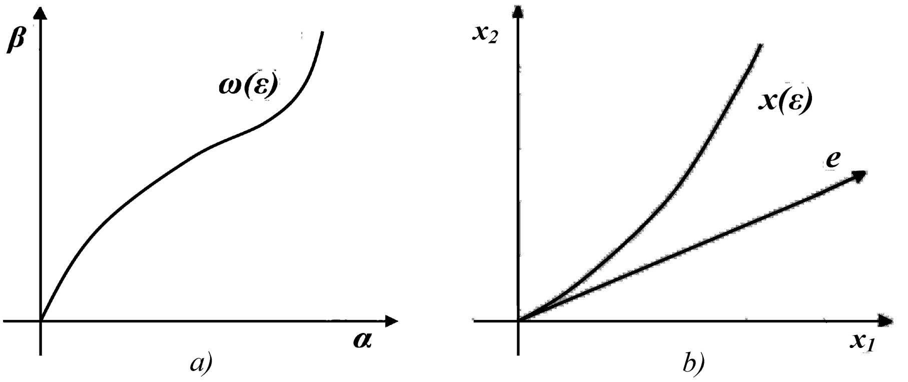

Рис. 3. Кривые бифурцирующих решений

Эти функции зависят от чисел p и q, а также вектора e; поэтому кривая $\omega(\varepsilon)$ различна для разных p, q и e. Аналогично, функция (22) в фазовом пространстве R^2 системы (5) задает непрерывную кривую $x(\varepsilon)$, которая при $\varepsilon = 0$ соприкасается в начале координат с вектором e (рис. 3 b)).

Из теорем 1 и 3 следует, что в случае нечетного q для любого единичного вектора $e \in R^2$ семейство возникающих q-циклов системы (5) содержит непрерывные ветви циклов, которые стартуют из определенных равенством (22) точек кривой $x(\varepsilon)$ при значениях параметров, принадлежащих кривой $\omega(\varepsilon)$. Другими словами, значение $\mu = \mu_0 = (0, 0)$ является правильной точкой бифуркации q-циклов системы (5) по направлению вектора e. Формулы (21) и (22) будем называть *асимптотическими формулами* для возникающих бифурцирующих решений системы (5).

4.2. Бифуркации в случае четного q.

Рассмотрим теперь случай четного q.

Лемма 3. *Пусть q – четно. Тогда определенный равенством (15) вектор b_2 является нулевым: $b_2 = 0$.*

Следствие 1. *Пусть q – четно. Тогда числа (16) и векторы (17) и (18) являются нулевыми:*

$$\alpha_1 = 0\,, \quad \beta_1 = 0\,, \quad e_1 = 0\,, \quad \chi = 0\,, \tag{24}$$

а числа (19) и вектор (20) равны

$$\alpha_2 = -\frac{1}{q}(b_3, e)\,, \quad \beta_2 = -\frac{1}{2\pi q}(b_3, g)\,, \tag{25}$$

$$e_2 = \alpha_2 e + \beta_2 g\,. \tag{26}$$

Теорема 4. *Пусть число q является четным. Пусть e и g – единичные векторы (13). Тогда существующие в соответствии с теоремой 2 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ системы (5) представимы в виде:*

$$\alpha(\varepsilon) = \varepsilon^2\alpha_2 + \alpha_3(\varepsilon)\,, \quad \beta(\varepsilon) = \varepsilon^2\beta_2 + \beta_3(\varepsilon)\,, \tag{27}$$

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^3 e_2 + e_3(\varepsilon)\,; \tag{28}$$

в этих формулах числа α_2 и β_2 и вектор e_2 определяются равенствами (25) и (26), а $\alpha_3(\varepsilon)$, $\beta_3(\varepsilon)$ и $e_3(\varepsilon)$ – это некоторые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношениям (23).

Таким образом, основное различие четного и нечетного q в сценарии бифуркации q-циклов системы (5) по направлению вектора e состоит в виде асимптотических формул для бифурцирующих решений. В частности, в случае четного q главные асимптотики формул (27) и (28) не зависят от квадратичных слагаемых. Справедливы также следствия.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 3 числа (16) являются ненулевыми. Пусть для определенности $\alpha_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Тогда значение $\mu = \mu_0 = (0,0)$ является правильной точкой бифуркации q-циклов системы (5) по направлению векторов e и $-e$. Возникающие при этом две непрерывные ветви q-циклов таковы, что одна из них существует при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, другая – при $\alpha < 0$ и $\beta < 0$.*

Следствие 3. *Пусть в условиях теоремы 4 числа (25) являются ненулевыми. Пусть для определенности $\alpha_2 > 0$ и $\beta_2 > 0$. Тогда значение $\mu = \mu_0 = (0,0)$ является правильной точкой бифуркации q-циклов системы (5) по направлению векторов e и $-e$. Возникающие при этом две непрерывные ветви q-циклов таковы, что обе они существуют при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.*

Другими словами, в естественном смысле в случае нечетного q бифуркация q-циклов системы (5) является транскритической, а в случае четного q является бифуркацией типа "вилки" (см., например, [4]).

Теоремы 3 и 4 указывают асимптотические формулы, позволяющие получить приближенное представление возникающих в окрестности нулевого состояния равновесия q-циклов системы (5), а также соответствующих значений параметров α и β. Эти формулы используются ниже для локализации языков Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5).

5. Локализация языков Арнольда

5.1. Вспомогательные построения. Пусть e и g – единичные векторы (13). Определим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ кривую $\Upsilon(p,q,e)$, описываемую уравнением

$$z = \rho(\varepsilon)e^{\varphi(\varepsilon)i}, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1, \tag{29}$$

где

$$\rho(\varepsilon) = 1 + \alpha(\varepsilon), \quad \varphi(\varepsilon) = 2\pi(\theta_0 + \beta(\varepsilon));$$

здесь $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ – это функции (21) или (27) (в зависимости от свойства четности числа q). При $\varepsilon = 0$ точка кривой $\Upsilon(p,q,e)$ совпадает с точкой $e^{2\pi\theta_0 i}$ (рис. 4).

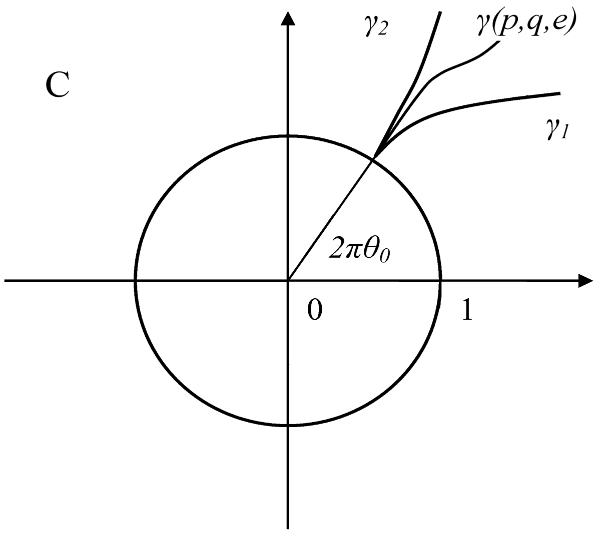

Рис. 4. Кривая синхронизации

Собственные значения определенной равенством (2) матрицы $A(\alpha,\beta)$ – это числа (4). С другой стороны, в силу теорем 3 и 4 у системы (5) реализуется сценарий бифуркации q-циклов по направлению вектора e, если собственные значения матрицы $A(\alpha,\beta)$ – это точки кривой $\Upsilon(p,q,e)$ (при малых $\varepsilon \geqslant 0$). Поэтому кривую $\Upsilon(p,q,e)$ можно рассматривать как одну из непрерывных ветвей собственных значений матрицы $A(\alpha,\beta)$, вдоль которой реализуется сценарий бифуркации q-циклов системы (5). Эту кривую будем называть *кривой синхронизации*, соответствующей бифуркации q-циклов по направлению вектора e. Кривая синхронизации при малых $\varepsilon \geqslant 0$ располагается в языке Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5).

Кривая $\Upsilon(p,q,e)$ при фиксированных p и q зависит от вектора e: для разных e получим и различные кривые $\Upsilon(p,q,e)$, при этом кривая $\Upsilon(p,q,e)$ в естественном смысле (например, в метрике Хаусдорфа) непрерывно зависит от вектора e. Это позволяет определять язык Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5) как совокупность (по различным векторам $e \in R^2$) всех кривых синхронизации.

А именно, язык Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5) ниже будет определяться по следующей схеме. Определим континуальное семейство векторов $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$:

$$e(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Для любого t векторы $e(t)$ и $g(t)$ являются единичными векторами вида (13). Для каждого $t \in [0,2\pi]$ определим кривую $\Upsilon(p,q,e(t))$ (точка каждой из этих кривых синхронизации при $\varepsilon = 0$ совпадает с точкой $e^{2\pi\theta_0 i}$).

Языком Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5) будем называть множество

$$\Psi(p,q) = \bigcup_{t\in[0,2\pi]} \Upsilon(p,q,e(t)). \tag{31}$$

В следующих пунктах решается основная задача о локализации множеств (31).

5.2. Семейства правильных бифуркаций. Для каждой фиксированной пары векторов $e(t)$ и $g(t)$ имеют место аналоги теорем 3 и 4. Для получения таких утверждений следует в (11) и (12) положить $x = e(t)$ и $\mu = \mu_0 = (0,0)$ и определить зависящие от параметра $t \in [0,2\pi]$ векторы

$$b_2(t) = b_2(e(t),\mu_0), \qquad b_3(t) = b_3(e(t),\mu_0); \tag{32}$$

в частности, из (2) и (11) получим

$$b_2(t) = Q^{q-1}a_2(e(t),\mu_0) + Q^{q-2}a_2(Qe(t),\mu_0) + \cdots + \\ +Qa_2(Q^{q-2}e(t),\mu_0) + a_2(Q^{q-1}e(t),\mu_0), \tag{33}$$

где $Q = Q(0)$. Аналогично, из (2) и (12) может быть получено представление вектора $b_3(t)$. Далее, определим функции

$$\alpha_1(t) = -\frac{1}{q}(b_2(t),e(t)), \quad \beta_1(t) = -\frac{1}{2\pi q}(b_2(t),g(t)) \tag{34}$$

и

$$\chi(t) = q\left[\frac{1}{2}\alpha_1^2(t)(1+q) - 2\pi\beta_1^2(t)(1+\pi q)\right]e(t)+ \\ +\alpha_1(t)\beta_1(t)q(1+2\pi+2\pi q)g(t)+ \\ +b'_{2x}(t)\cdot(\alpha_1(t)e(t)+\beta_1(t)g(t)) + \alpha_1(t)b'_{2\alpha}(t) + \beta_1(t)b'_{2\beta}(t); \tag{35}$$

здесь $b'_{2x}(t) = b'_{2x}(e(t),\mu_0)$ – матрица Якоби нелинейности (11), вычисленная в точке $x = e(t)$ при $\mu_0 = (0,0)$, $b'_{2\alpha}(t)$ и $b'_{2\beta}(t)$ – производные нелинейности (11) по параметрам α и β соответственно, вычисленные в точке $x = e(t)$ при $\mu = \mu_0 = (0,0)$.

Наконец, положим

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{q}(\chi(t) + b_3(t), e(t)), \quad \beta_2(t) = -\frac{1}{2\pi q}(\chi(t) + b_3(t), g(t)). \tag{36}$$

При каждом фиксированном t приведенные формулы приводят к аналогам теорем 3 и 4. А именно, верны следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть число q является нечетным. Пусть $e = e(t)$ и $g = g(t)$ – векторы (30) при фиксированном $t \in [0, 2\pi]$. Тогда существующие в соответствии с теоремой 2 бифурцирующие решения $x(\varepsilon, t)$, $\alpha(\varepsilon, t)$ и $\beta(\varepsilon, t)$ системы (5) представимы в виде:*

$$x(\varepsilon, t) = \varepsilon e(t) + e_1(\varepsilon, t), \tag{37}$$

$$\alpha(\varepsilon, t) = \varepsilon\alpha_1(t) + \varepsilon^2\alpha_2(t) + \alpha_3(\varepsilon, t), \ \beta(\varepsilon, t) = \varepsilon\beta_1(t) + \varepsilon^2\beta_2(t) + \beta_3(\varepsilon, t), \tag{38}$$

где $e_1(\varepsilon, t)$, $\alpha_3(\varepsilon, t)$ и $\beta_3(\varepsilon, t)$ – это некоторые непрерывные по совокупности переменных и 2π-периодические по t функции, удовлетворяющие соотношениям

$$e_1(\varepsilon, t) = o(\varepsilon), \quad \alpha_3(\varepsilon, t) = o(\varepsilon^2), \quad \beta_3(\varepsilon, t) = o(\varepsilon^2) \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{39}$$

равномерно по $t \in [0, 2\pi]$.

Теорема 6. *Пусть число q является четным. Пусть $e = e(t)$ и $g = g(t)$ – векторы (30) при фиксированном $t \in [0, 2\pi]$. Тогда существующие в соответствии с теоремой 2 бифурцирующие решения $x(\varepsilon, t)$, $\alpha(\varepsilon, t)$ и $\beta(\varepsilon, t)$ системы (5) представимы в виде:*

$$x(\varepsilon, t) = \varepsilon e(t) + e_1(\varepsilon, t), \tag{40}$$

$$\alpha(\varepsilon, t) = \varepsilon^2\alpha_2(t) + \alpha_3(\varepsilon, t), \quad \beta(\varepsilon, t) = \varepsilon^2\beta_2(t) + \beta_3(\varepsilon, t), \tag{41}$$

где

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{q}(b_3(t), e(t)), \quad \beta_2(t) = -\frac{1}{2\pi q}(b_3(t), g(t)), \tag{42}$$

$e_1(\varepsilon, t)$, $\alpha_3(\varepsilon, t)$ и $\beta_3(\varepsilon, t)$ – это некоторые непрерывные по совокупности переменных и 2π-периодические по t функции, удовлетворяющие соотношениям (39).

Формулы (37) и (40) могут быть уточнены аналогами приведенных в теоремах 3 и 4 асимптотических формул (22) и (28). Однако, ниже нас будут интересовать только асимптотические формулы (38) и (41).

5.3. Основные утверждения: слаборезонансный случай. Приведем теперь основные утверждения работы, позволяющие локализовать определенные равенством (31) языки Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5). Здесь принципиально различными являются случаи $q \geqslant 5$ и $q \leqslant 4$. Первый из этих случаев называют слаборезонансным, а второй – сильнорезонансным. Рассмотрим сначала слаборезонансный случай.

Лемма 4. *Пусть $q \geqslant 5$. Тогда определенные равенством (34) функции для любого t равны нулю: $\alpha_1(t) \equiv 0$, $\beta_1(t) \equiv 0$.*

Следствие 4. *Пусть $q \geqslant 5$. Тогда определенная равенством (35) функция $\chi(t)$ является нулевой: $\chi(t) \equiv 0$, а функции (36) совпадает с функциями (42).*

Лемма 5. *Пусть $q \geqslant 5$. Тогда функции (36) и (42) являются константами, равными соответствующим числам (25).*

Теорема 7. *Пусть $q \geqslant 5$. Тогда язык Арнольда $\Psi(p, q)$ системы (5) определяется равенством (31), в котором $\Upsilon(p, q, e(t))$ – это (при фиксированном t) кривая, описываемая уравнением*

$$z = (1 + \alpha(\varepsilon, t))e^{2\pi(\theta_0 + \beta(\varepsilon, t))i}, \ \ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1. \tag{43}$$

Здесь

$$\alpha(\varepsilon,t)=\alpha_2\varepsilon^2+\varepsilon^3\alpha_3(\varepsilon,t)\,, \tag{44}$$

$$\beta(\varepsilon,t)=\beta_2\varepsilon^2+\varepsilon^3\beta_3(\varepsilon,t)\,; \tag{45}$$

α_2 и β_2 – числа (25), а функции $\alpha_3(\varepsilon,t)$ и $\beta_3(\varepsilon,t)$ непрерывны и являются 2π-периодическими по t.

Из равенств (44) и (45) следует, что для $q \geqslant 5$ при малых $\varepsilon \geqslant 0$ языки Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5) чрезвычайно узкие. А именно, если числа (25) являются ненулевыми, то множество $\Psi(p,q)$ локально можно отождествить с кривой $\tilde{\Psi}(p,q)$, описываемой уравнением

$$z=(1+\alpha_2\xi)e^{2\pi(\theta_0+\beta_2\xi)i}\,,\ \ 0\leqslant\xi\leqslant 1\,, \tag{46}$$

начинающейся (при $\xi=0$) из точки $e^{\varphi_0 i}$ на единичной окружности $S\in\mathbb{C}$; здесь $\varphi_0=2\pi p/q$.

Из равенств (44) и (45) вытекает также следующий факт. Пусть числа (25) являются ненулевыми, причем пусть для определенности $\alpha_2>0$ и $\beta_2>0$. Тогда язык Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5) соответствует тем значениям параметров α и β, для которых выполнены неравенства $\alpha>0$ и $\beta>0$.

5.4. Основные утверждения: сильнорезонансный случай. Рассмотрим теперь сильнорезонансный случай, т.е. пусть $2\leqslant q\leqslant 4$. В этом случае языки Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5) в естественном смысле существенно шире, чем при $q\geqslant 5$. Пусть сначала q – четно.

Теорема 8. *Пусть $q=2$ или $q=4$. Тогда язык Арнольда $\Psi(1,q)$ системы (5) определяется равенством (31) (где $p=1$, а $q=2$ или $q=4$), в котором $\Upsilon(p,q,e(t))$ – это (при фиксированном t) кривая, описываемая уравнением (43) при*

$$\alpha(\varepsilon,t)=\alpha_2(t)\varepsilon^2+\varepsilon^3\alpha_3(\varepsilon,t)\,, \tag{47}$$

$$\beta(\varepsilon,t)=\beta_2(t)\varepsilon^2+\varepsilon^3\beta_3(\varepsilon,t)\,; \tag{48}$$

здесь $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ – функции (42) (при $q=2$ или $q=4$), а функции $\alpha_3(\varepsilon,t)$ и $\beta_3(\varepsilon,t)$ непрерывны и являются 2π-периодическими по t.

Из равенств (47) и (48) следует, что для $q=2$ или $q=4$ языки Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5) локально можно отождествить с совокупностью (по $t\in[0,2\pi]$) кривых, описываемых уравнениями

$$z=(1+\alpha_2(t)\xi)e^{2\pi(\theta_0+\beta_2(t)\xi)i}\,,\ \ 0\leqslant\xi\leqslant 1\,. \tag{49}$$

Пусть теперь q – нечетно, т.е. пусть $q=3$.

Теорема 9. *Язык Арнольда $\Psi(1,3)$ системы (5) определяется равенством (31) (при $p=1$ и $q=3$), в котором $\Upsilon(p,q,e(t))$ – это (при фиксированном t) кривая, описываемая уравнением (43) при*

$$\alpha(\varepsilon,t)=\alpha_1(t)\varepsilon+\alpha_2(t)\varepsilon^2+\varepsilon^3\alpha_3(\varepsilon,t)\,, \tag{50}$$

$$\beta(\varepsilon,t)=\beta_1(t)\varepsilon+\beta_2(t)\varepsilon^2+\varepsilon^3\beta_3(\varepsilon,t)\,; \tag{51}$$

здесь $\alpha_1(t)$ и $\beta_1(t)$ – функции (34) (при $q=3$), $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ – функции (36) (при $q=3$), а функции $\alpha_3(\varepsilon,t)$ и $\beta_3(\varepsilon,t)$ непрерывны и являются 2π-периодическими по t.

Из равенств (50) и (51) следует, что язык Арнольда $\Psi(1,3)$ системы (5) локально можно отождествить с совокупностью (по $t\in[0,2\pi]$) кривых, описываемых уравнениями

$$z=(1+\alpha_1(t)\xi)e^{2\pi(\theta_0+\beta_1(t)\xi)i}\,,\ \ 0\leqslant\xi\leqslant 1\,. \tag{52}$$

Кривые γ_1 и γ_2, являющиеся в естественном смысле крайними в совокупности кривых (49) или (52), можно рассматривать как кривые, локально ограничивающие язык Арнольда $\Psi(p,q)$ системы (5).

6. Примеры

6.1. Пример 1. Рассмотрим дискретную систему

$$x_{n+1} = A(\alpha,\beta)x_n + a_3(x_n), \quad n = 0,1,2,..., \quad x_n \in R^2\,, \tag{53}$$

в которой $A(\alpha,\beta) = (1+\alpha)Q(\beta)$, где

$$Q(\beta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi(0,25+\beta) & -\sin 2\pi(0,25+\beta) \\ \sin 2\pi(0,25+\beta) & \cos 2\pi(0,25+\beta) \end{bmatrix},$$

а нелинейность $a_3(x)$ имеет вид

$$a_3(x) = \begin{bmatrix} x_1^3 + 2x_2^3 \\ 2x_1x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Так как

$$Q(0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то в этом примере условие S1) выполнено при $\theta_0 = 1/4$ Для локализации языка Арнольда $\Psi(1,4)$ системы (53) воспользуемся теоремой 8. Из этой теоремы следует, что множество $\Psi(1,4)$ локально можно отождествить с совокупностью кривых (49), в которых $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$ – функции (42) (при $q = 4$).

Вычислим функции $\alpha_2(t)$ и $\beta_2(t)$. Так как рассматриваемая система (53) содержит только кубическую нелинейность $a_3(x)$, то формулы (30), (32), (11) и (12) приводят к равенствам $b_2(t) \equiv 0$ и

$$b_3(t) = Q^3a_3(e(t)) + Q^2a_3(Qe(t)) + Qa_3(Q^2e(t)) + a_3(Q^3e(t))\,,$$

где $Q = Q(0)$. Несложные вычисления приводят к равенству

$$b_3(t) = 2\begin{bmatrix} 2\sin^2 t\cos t + \sin^3 t - 2\cos^3 t \\ 2\sin t\cos^2 t - 2\sin^3 t - \cos^3 t \end{bmatrix}.$$

Тогда из (42) получим

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{4}(b_3(t), e(t)) = \frac{1}{4}\cos 2t(4\cos 2t + \sin 2t)\,,$$

$$\beta_2(t) = -\frac{1}{8\pi}(b_3(t), g(t)) = \frac{1}{8\pi}(1 + \cos^2 2t - 2\sin 4t)\,.$$

Подставляя эти формулы в (49) и проведя анализ полученного равенства получим, что локально язык Арнольда $\Psi(1,4)$ системы (53) заключен между двумя кривыми γ_1 и γ_2, которые описываются, соответственно, уравнениями

$$z = (1+\alpha_1\xi)e^{2\pi(0,25+\beta_1\xi)i}\,, \qquad z = (1+\alpha_2\xi)e^{2\pi(0,25+\beta_2\xi)i} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant 1)\,;$$

здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,, \quad \beta_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{16\pi}\,, \quad \alpha_2 = \frac{4-\sqrt{17}}{8}\,, \quad \beta_2 = \frac{3}{16\pi}\,.$$

Полученный результат подтверждается и прямым численным вычислением кривых синхронизации, локализующих язык Арнольда $\Psi(1,4)$ системы (53), в соответствии с формулами теоремы 8 (рис. 5).

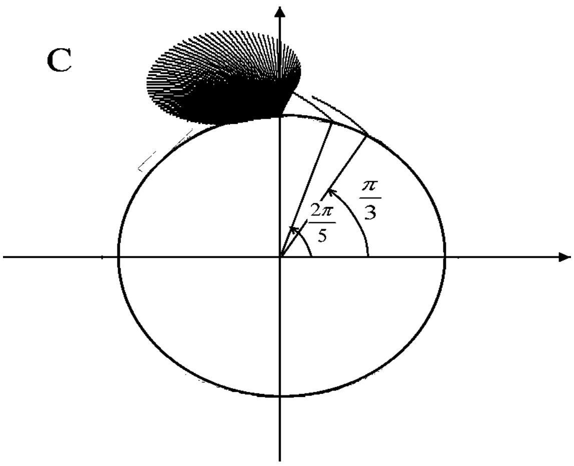

Рис. 5. Языки Арнольда системы (53)

На рис. 5 изображены также кривые синхронизации, локализующие языки Арнольда $\Psi(1,5)$ и $\Psi(1,6)$ системы (53), вычисленные в соответствии с формулами теоремы 7. Вычисления подтверждают, что совокупность этих кривых (как для языков $\Psi(1,5)$, так и для языков $\Psi(1,6)$) по сути образует одну кривую. Другими словами, языки $\Psi(1,5)$ и $\Psi(1,6)$ локально представляют собой чрезвычайно узкие множества, фактически совпадающие с кривыми синхронизации, начинающимися из соответствующей рациональной точки единичной окружности.

6.2. Пример 2. Рассмотрим теперь зависящую от вещественных параметров α и β неавтономную динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$x' = A(\alpha,\beta)x + a(x,t,\alpha,\beta)\,, \quad x \in R^2\,, \tag{54}$$

в котором

$$A(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix},$$

а нелинейность $a(x,t,\alpha,\beta)$ является гладкой по совокупности переменных, 2π-периодической по t и представимой в виде

$$a(x,t,\alpha,\beta) = a_2(x,t,\alpha,\beta) + a_3(x,t,\alpha,\beta) + \tilde{a}_4(x,t,\alpha,\beta)\,,$$

где $a_2(x,t,\alpha,\beta)$ и $a_3(x,t,\alpha,\beta)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{a}_4(x,t,\alpha,\beta)$ удовлетворяет соотношению $\tilde{a}_4(x,t,\alpha,\beta) = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по t, α и β. Система (54) при всех значениях параметров α и β имеет состояние равновесия $x = 0$.

Положим $\mu = (\alpha,\beta)$ и $\mu_0 = (0,\beta_0)$, где β_0 – некоторое положительное число. Состояние равновесия $x = 0$ системы (54) при $\mu = \mu_0$ является негиперболическим; при переходе параметра μ через значение μ_0 возможны различные сценарии бифуркаций. В частном случае, когда нелинейность $a(x,t,\alpha,\beta)$ от t не зависит, основным сценарием является бифуркация Андронова-Хопфа: при переходе μ через μ_0 в окрестности состояния равновесия $x = 0$ системы (54) возникают нестационарные периодические решения малой амплитуды с периодом, близким к числу $T_0 = \dfrac{2\pi}{\beta_0}$.

Наличие нестационарной периодической нелинейности $a(x,t,\alpha,\beta)$ влечет изменение указанного сценария бифуркации. А именно, становятся возможными различные сценарии возникновения у системы (54) в окрестности состояния равновесия $x = 0$ субгармонических (т.е. периодических решений с периодом кратным 2π) и квазипериодических решений.

Для изучения таких сценариев и, в частности, локализации языков Арнольда системы (54) можно использовать предложенную в настоящей работе схему исследования. На первом этапе такого исследования от системы (54) перейдем к дискретной динамической системе, описываемой уравнением:

$$x_{n+1} = V(\mu)x_n + v(x_n,\mu), \quad n = 0,1,2,..., \tag{55}$$

где $x_n \in R^2$, $V(\mu) = e^{2\pi A(\mu)}$, а нелинейный оператор $v(\cdot,\mu):\ R^2 \to R^2$ представим в виде

$$v(x,\mu) = \int\limits_0^{2\pi} e^{(2\pi-\tau)A(\mu)} a(x(\tau),\tau,\mu)\,d\tau\,,$$

где $x(t)$ – решение системы (54), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x$. Неподвижные точки системы (55) определяют начальные значения 2π-периодических решений системы (54), а циклы периода q определяют начальные значения $2\pi q$-периодических решений этой системы.

Несложно показать, что матрица $V(\mu)$ равна

$$V(\mu) = e^{2\pi\alpha}\begin{bmatrix} \cos 2\pi\beta & -\sin 2\pi\beta \\ \sin 2\pi\beta & \cos 2\pi\beta \end{bmatrix}.$$

Перейдем от α и β к новым параметрам, определяемым равенствами

$$\alpha^* = e^{2\pi\alpha} - 1\,, \quad \beta^* = \beta - \beta_0\,,$$

и представим систему (55) в виде

$$x_{n+1} = A(\alpha^*,\beta^*)x_n + b(x_n,\alpha^*,\beta^*), \quad n = 0,1,2,...\,, \tag{56}$$

в которой

$$b(x,\alpha^*,\beta^*) = v(x, \ln(1+\alpha^*)/(2\pi), \beta^* + \beta_0)\,,$$

$$A(\alpha^*,\beta^*) = (1+\alpha^*)Q(\beta^*)\,;$$

здесь

$$Q(\beta^*) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi(\beta_0+\beta^*) & -\sin 2\pi(\beta_0+\beta^*) \\ \sin 2\pi(\beta_0+\beta^*) & \cos 2\pi(\beta_0+\beta^*) \end{bmatrix}.$$

Задача о локальных бифуркациях системы (54) в естественном смысле равносильна аналогичной задаче для системы (56). Так как эта система подобна системе (5), то на следующем этапе можно воспользоваться приведенной в предыдущих параграфах схемой. В частности, в соответствии с этой схемой получим, что если число β_0 является рациональным: $\beta_0 = \dfrac{p}{q}$, то при переходе двумерного параметра $\mu = (\alpha,\beta)$ через точку $\mu_0 = (0,\beta_0)$ становится возможным сценарий возникновения у системы (54) в окрестности состояния равновесия $x = 0$ субгармонических решений периода $2\pi q$.

При этом на плоскости (α,β) параметров образуется система языков Арнольда, вершины которых лежат в точках $(0,\beta_0)$ с рациональными β_0. Такие языки соответствуют областям значений параметров (α,β), при которых система (54) имеет периодические режимы периода кратными 2π, амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении точки (α,β) к $(0,\beta_0)$. Указанные языки могут быть локализованы в соответствии со схемой, изложенной в предыдущих параграфах.

7. Доказательства основных утверждений

7.1. Операторный метод. Доказательства основных утверждений настоящей работы основываются на операторном методе исследования задач о многопараметрических локальных бифуркациях, разработанном в [11] и [12]. Приведем в краткой форме основные положения этого метода. Здесь достаточно ограничиться рассмотрением двупараметрических задач для операторных уравнений на плоскости.

Рассмотрим зависящее от двумерного параметра $\mu = (\alpha, \beta) \in R^2$ операторное уравнение

$$x = B(\mu)x + b(x, \mu), \quad x \in R^2, \tag{57}$$

в котором квадратная матрица $B(\mu)$ второго порядка непрерывно дифференцируемо зависит от μ, а нелинейность $b(x, \mu)$ также гладко зависит от μ и представима в виде

$$b(x, \mu) = b_2(x, \mu) + b_3(x, \mu) + \tilde{b}_4(x, \mu),$$

где $b_2(x, \mu)$ и $b_3(x, \mu)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{b}_4(x, \mu)$ является гладкой по x, при этом $\tilde{b}_4(x, \mu) = O(\|x\|^4)$, $x \to 0$, равномерно по μ.

Уравнение (57) при всех значениях μ имеет нулевое решение $x = 0$. Говорят, что значение μ_0 является *точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (57)*, если существует последовательность $\mu_k \to \mu_0$ такая, что при $\mu = \mu_k$ уравнение (57) имеет ненулевое решение $x = x_k$, причем $\|x_k\| \to 0$ при $k \to \infty$.

Как правило, бифуркации ненулевых решений уравнения (57) имеют направленный характер; приведем соответствующее определение. Пусть $e \in R^2$ – некоторый ненулевой вектор. Значение μ_0 параметра μ назовем *правильной точкой бифуркации уравнения (57) по направлению вектора* e, если существуют $\varepsilon_0 > 0$ и определенные при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ непрерывные функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $x = x(\varepsilon)$ такие, что:

1) $\mu(0) = \mu_0$, $x(0) = 0$;
2) $\|x(\varepsilon) - \varepsilon e\| = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$;
3) для каждого $\varepsilon \geqslant 0$ вектор $x(\varepsilon)$ является решением уравнения (57) при $\mu = \mu(\varepsilon)$.

Векторы $x(\varepsilon)$ и значения $\mu(\varepsilon)$ назовем *бифурцирующими решениями* уравнения (57).

Лемма 6. *Пусть значение μ_0 параметра μ является правильной точкой бифуркации уравнения (57) по направлению вектора e. Тогда вектор e будет собственным для матрицы $B(\mu_0)$, отвечающим собственному значению 1.*

Ниже будем предполагать, что матрица $B(\mu_0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2; другими словами, пусть $B(\mu_0) = I$, где I – единичная матрица второго порядка. Обозначим $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ и $B_0 = B(\mu_0)$.

Пусть e, g и e^*, g^* – две пары линейно независимых векторов, выбранные исходя из соотношений:

$$(e, e^*) = (g, g^*) = 1, \ (e, g^*) = (g, e^*) = 0. \tag{58}$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, e^*) \\ (B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) & (B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)e, g^*) \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Здесь B'_α и B'_β – матрицы, полученные дифференцированием матрицы $B(\alpha, \beta)$ по α и β соответственно.

Теорема 10. *Пусть*

$$\det S \neq 0. \tag{60}$$

Тогда μ_0 является правильной точкой бифуркации уравнения (57) по направлению вектора e.

Ниже используются обозначения

$$b_2 = b_2(e, \alpha_0, \beta_0), \ \ b_3 = b_3(e, \alpha_0, \beta_0), \tag{61}$$

$$b'_{2x} = b'_{2x}(e, \alpha_0, \beta_0), \ \ b'_{2\alpha} = b'_{2\alpha}(e, \alpha_0, \beta_0), \ \ b'_{2\beta} = b'_{2\beta}(e, \alpha_0, \beta_0). \tag{62}$$

Положим

$$Fh = -\left[(h, e^*)B'_\alpha e + (h, g^*)B'_\beta e\right], \quad h \in R^2, \tag{63}$$

где обозначено $B'_\alpha = B'_\alpha(\alpha_0, \beta_0)$ и $B'_\beta = B'_\beta(\alpha_0, \beta_0)$. В силу условия (60) линейный оператор $F : R^2 \to R^2$ обратим. Положим

$$\Gamma_0 = F^{-1} : \, R^2 \to R^2. \tag{64}$$

Лемма 7. *Оператор $\Gamma_0 = F^{-1}$ вычисляется по формуле*

$$\Gamma_0 y = J_\alpha(y)e + J_\beta(y)g\,.$$

Здесь функционалы $J_\alpha(y)$ и $J_\beta(y)$ – это компоненты вектора

$$J(y) = \begin{bmatrix} J_\alpha(y) \\ J_\beta(y) \end{bmatrix},$$

который вычисляется по формуле $J(y) = -S^{-1}\gamma(y)$, где S – матрица (59) и

$$\gamma(y) = \begin{bmatrix} (y, e^*) \\ (y, g^*) \end{bmatrix}.$$

Положим далее

$$e_1 = \Gamma_0 b_2, \ \ \alpha_1 = J_\alpha(b_2), \ \ \beta_1 = J_\beta(b_2)\,, \tag{65}$$

$$e_2 = \Gamma_0(\varphi + b_3)\,, \quad \alpha_2 = J_\alpha(\varphi + b_3)\,, \quad \beta_2 = J_\beta(\varphi + b_3); \tag{66}$$

здесь

$$\varphi = \alpha_1 B'_\alpha \Gamma_0 b_2 + \beta_1 B'_\beta \Gamma_0 b_2 + \frac{\alpha_1^2}{2} B''_{\alpha\alpha} e + \alpha_1\beta_1 B''_{\alpha\beta} e + \tag{67}$$

$$+\frac{\beta_1^2}{2} B''_{\beta\beta} e + b'_{2x}\Gamma_0 b_2 + \alpha_1 b'_{2\alpha} + \beta_1 b'_{2\beta}.$$

Здесь Γ_0 – оператор (64), B'_α, B'_β, $B''_{\alpha\alpha}$, $B''_{\alpha\beta}$, $B''_{\beta\beta}$ – матрицы, полученные дифференцированием матрицы $B(\alpha, \beta)$ по α и (или) β нужное число раз в точке (α_0, β_0); используются также обозначения (61) и (62).

Теорема 11. *Существующие в условиях теоремы 10 бифурцирующие решения $x(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ уравнения (57) представимы в виде*

$$x(\varepsilon) = \varepsilon e + \varepsilon^2 e_1 + \varepsilon^3 e_2 + o(\varepsilon^3)\,, \tag{68}$$

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + o(\varepsilon^2)\,, \quad \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + o(\varepsilon^2)\,. \tag{69}$$

7.2. Вспомогательные утверждения. Для доказательства основных утверждений работы понадобятся вспомогательные утверждения.

Лемма 8. *Для того чтобы значение μ_0 было точкой бифуркации q-циклов системы (5), необходимо и достаточно, чтобы μ_0 было точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (8).*

Необходимость. Пусть $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации q-циклов системы (5), т.е. существует последовательность $\mu_k \to \mu_0$ такая, что при $\mu = \mu_k$ система (5) имеет q-цикл $x_0^k, x_1^k, x_2^k, ..., x_{q-1}^k$, причем $\max\limits_{0\leqslant j\leqslant q-1} \|x_j^k\| \to 0$ при $k \to \infty$. При этом $x_j^k \neq 0$ (это следует из определения q-цикла). Из леммы 1 получим, что любой из ненулевых векторов x_j^k при $\mu = \mu_k$ является решением уравнения (8). Следовательно, значение μ_0 является точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (8).

Достаточность. Пусть $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (8), т.е. существует последовательность $\mu_k \to \mu_0$ такая, что при $\mu = \mu_k$ уравнение (8) имеет ненулевое решение $x = x_k$, причем $\|x_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Покажем, что тогда система (5) при $\mu = \mu_k$ имеет q-цикл, одной из точек которого является вектор x_k; это и будет означать, что $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации q-циклов системы (5).

Действительно, из леммы 1 следует, что либо $x = x_k$ является неподвижной точкой системы (5) при $\mu = \mu_k$, либо является одной из точек цикла некоторого периода r этой системы при $\mu = \mu_k$, где r – делитель числа q. Вектор x_k не может быть ни неподвижной точкой системы (5), ни точкой r-цикла этой системы, если $r \neq q$. Ограничимся доказательством первого факта. В предположении противного получим равенства

$$x_k = A(\mu_k)x_k + a(x_k, \mu_k)\,.$$

Разделив обе части этого равенства на ненулевое число $\|x_k\|$ и положив $y_k = x_k/\|x_k\|$, получим

$$y_k = A(\mu_k)y_k + \frac{a(x_k, \mu_k)}{\|x_k\|}\,. \tag{70}$$

Так как $\|y_k\| = 1$, то можно считать, что последовательность y_k сходится: $y_k \to y^*$, где $\|y^*\| = 1$. Переходя теперь в (70) к пределу при $k \to \infty$, получим равенство $y^* = A(\mu_0)y^*$, т.е. матрица $A(\mu_0)$ имеет собственное значение 1. Этот факт находится в противоречии с формулами (2) и (3), определяющими матрицу $A(\mu_0) = A(0,0)$. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 9. *Для того чтобы значение μ_0 было правильной точкой бифуркации q-циклов системы (5) по направлению вектора e, необходимо и достаточно, чтобы μ_0 было правильной точкой бифуркации уравнения (8) по направлению вектора e.*

7.3. Доказательство теоремы 1. Уравнение (8) является уравнением вида (57). Поэтому если установить, что для уравнения (8) при некотором выборе векторов e, e^*, g и g^* (удовлетворяющих условиям (58)) будет выполнено соотношение (60), то в силу теоремы 10 это будет означать, что μ_0 будет точкой бифуркации ненулевых решений уравнения (8). Тогда из леммы 10 будет следовать, что μ_0 является точкой бифуркации q-циклов системы (5), т.е. справедливость теоремы 1.

Матрица $B(\alpha,\beta)$ в уравнении (8) определяется равенством (9):

$$B(\alpha,\beta) = (1+\alpha)^q Q^q(\beta)\,; \tag{71}$$

здесь $Q(\beta)$ – матрица (3). Имеем

$$Q^q(\beta) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi q(\theta_0+\beta) & -\sin 2\pi q(\theta_0+\beta) \\ \sin 2\pi q(\theta_0+\beta) & \cos 2\pi q(\theta_0+\beta) \end{bmatrix}. \tag{72}$$

Так как $\theta_0 = \dfrac{p}{q}$, то $B(0,0) = I$; поэтому матрица $B(0,0)$ имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2.

Положим

$$e(t) = e^*(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad g(t) = g^*(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix}. \tag{73}$$

При любом $t \in [0, 2\pi]$ эти векторы удовлетворяют условиям (58). Зафиксируем $t \in [0, 2\pi]$ и вычислим определенную равенством (59) матрицу S. Из (71) и (72) получим

$$B'_\alpha(0,0) = qI\,, \quad B'_\beta(0,0) = 2\pi q \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{74}$$

Отсюда, из (59) и (73) после несложных вычислений получим равенство

$$S = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 2\pi q \end{bmatrix} . \tag{75}$$

Следовательно, $\det S = 2\pi q^2 \neq 0$, т.е. соотношение (60) выполнено. Теорема доказана.

Замечание 1. *При доказательстве теоремы 1 было показано, что определенная равенством (75) матрица S не зависит от t, т.е. является одной и той же для любого набора векторов (73).*

7.4. Доказательство теоремы 2. В силу леммы 9 теорема 2 будет доказана, если показать, значение $\mu_0 = (0,0)$ параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ является правильной точкой бифуркации уравнения (8) по направлению любого ненулевого вектора e. Это фактически было установлено выше при доказательстве теоремы 1. Действительно, в качестве произвольного ненулевого вектора e можно выбрать вектор $e(t)$, определенный первым из равенств (73). Для любого такого вектора выполнено условие (60) теоремы 10, так как соответствующая матрица (75) является невырожденной.

7.5. Доказательство теоремы 3. Из леммы 9 и теоремы 2 следует, что для уравнения (8) справедливо (с естественными модификациями) утверждение теоремы 11. Поэтому теоремы 3 и 4 будут доказаны, если показать, что формулы (68) и (69), вычисленные применительно к уравнению (8), приводят к формулам, указанным в этих теоремах. Для этого, в свою очередь, требуется показать, что определенные равенствами (65)–(66) числа и векторы приводят к соответствующим числам и векторам из (16)–(20).

Рассмотрим сначала числа α_1 и β_1, определенные равенствами (65). Имеем

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_\alpha(b_2) \\ J_\beta(b_2) \end{bmatrix} = J(b_2) = -S^{-1}\gamma(b_2) = -S^{-1} \begin{bmatrix} (b_2, e^*) \\ (b_2, g^*) \end{bmatrix} .$$

Преобразуем эти равенства применительно к уравнению (8). Для этого в качестве e, e^*, g и g^* будем рассматривать векторы (73) при фиксированном $t \in [0, 2\pi]$ (они при любом t являются векторами вида (13)), в качестве b_2 – вектор (15), а в качестве S – матрицу (75). Так как

$$S^{-1} = \frac{1}{2\pi q} \begin{bmatrix} 2\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

то

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\pi q} \begin{bmatrix} 2\pi (b_2, e) \\ (b_2, g) \end{bmatrix} ;$$

здесь учтено, что в нашем случае выполнены равенства $e = e^*$ и $g = g^*$. Таким образом, определенные равенствами (65) числа α_1 и β_1, вычисленные применительно к уравнению (8), приводят к соответствующим числам (16).

Рассмотрим теперь вектор e_1, определенный первым из равенств (65). В силу леммы 7 имеем

$$e_1 = \Gamma_0 b_2 = J_\alpha(b_2) e + J_\beta(b_2) g = \alpha_1 e + \beta_1 g ,$$

т.е. получили формулу (17).

Для завершения доказательства теоремы 3 остается провести аналогичные рассуждения, показывающие, что определенные равенствами (66) числа α_2 и β_2 и вектор e_2, вычисленные применительно к уравнению (8), приводят к соответствующим числам (19) и вектору (20). Эти рассуждения проводятся по той же схеме, что и доказательство формул (16) и (17).

При этом дополнительно следует показать, что вектор (67), вычисленный применительно к уравнению (8), приводит к вектору (18). Другими словами, следует также показать, что применительно к уравнению (8) выполнено равенство $\varphi = \chi$, где φ и χ – это соответственно векторы (67) и (18). Для доказательства этого факта наряду с формулами (74) используются также равенства:

$$B''_{\alpha\alpha}(0,0) = q(q-1)I\,, \;\; B''_{\beta\beta}(0,0) = -(2\pi q)^2 I\,, \;\; B''_{\alpha\beta}(0,0) = 2\pi q^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\,,$$

$$\Gamma_0 b_2 = \alpha_1 e + \beta_1 g\,.$$

Подстановка этих формул в (67) и приводит к нужному равенству $\varphi = \chi$.

Замечание 2. *При доказательстве теоремы 3 свойство нечетности q не использовалось. Другими словами, эта теорема верна для любого q. Однако, для четных q формулы (21) из теоремы 3 обладают специфическими свойствами, что приводит к качественному различию свойств бифуркации q-циклов системы (5) для четных и нечетных q.*

7.6. Доказательство леммы 3. Из (3) имеем

$$Q = Q(0) = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta_0 & -\sin 2\pi\theta_0 \\ \sin 2\pi\theta_0 & \cos 2\pi\theta_0 \end{bmatrix}\,, \tag{76}$$

где $\theta_0 = p/q$ – несократимая дробь. Пусть q – четно. Тогда p – нечетно и, следовательно, $Q^{q/2} = -I$; поэтому верны равенства

$$Q^j = -Q^{j+q/2}\,, \;\; j = 0, 1, 2, \ldots \tag{77}$$

Определенный равенством (15) вектор b_2 в случае четного q содержит четное число слагаемых, при этом для них в силу (77) верны равенства

$$Q^j a_2(Q^{q-1-j}e, \mu_0) = -Q^{j+q/2} a_2(Q^{q/2-1-j}e, \mu_0)\,;$$

здесь учтено, что нелинейность $a_2(x, \mu)$ содержит только квадратичные по x слагаемые. Поэтому $b_2 = 0$. Лемма доказана.

7.7. Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы 4 сводится к подстановке равенств (24) в формулы (21) и (22).

7.8. Доказательство леммы 4. Отметим, что утверждение этой леммы для любых четных q может быть доказано по той же схеме, что и лемма 3. Для доказательства леммы при произвольном $q \geqslant 5$ понадобятся вспомогательные построения.

7.8.1. Вспомогательные построения. Пусть $f(t)$ – непрерывная 2π-периодическая функция. Для натурального числа n положим $h = \dfrac{2\pi}{n}$ и определим функцию

$$G_f^{(n)}(t) = [f(t) + f(t+h) + f(t+2h) + \cdots + f(t+(n-1)h)]h\,. \tag{78}$$

Эта функция является 2π-периодической и при фиксированном t представляет собой приближенную формулу прямоугольников для вычисления интеграла от функции $f(s)$, а именно, для каждого фиксированного t имеет место приближенное равенство

$$\int_0^{2\pi} f(s)\,ds \approx G_f^{(n)}(t)\,; \tag{79}$$

в этой приближенной формуле значение t определяет выбор n точек $t\,,\ t+h\,,\ t+2h\,,\ \ldots\,,$ $t+(n-1)h$ на отрезке длины 2π, в которых вычисляются значение функции $f(s)$.

Обозначим через P_n множество непрерывных 2π-периодических функций $f(s)$ таких, что выполнено тождество:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(s)\,ds \equiv G_f^{(n)}(t)\,. \tag{80}$$

Другими словами, множество P_n состоит из тех функций, для которых приближенная формула (79) является точной при любом t.

Лемма 10. *Пусть натуральные числа n и m таковы, что*

$$\frac{2m}{n} \neq k\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{81}$$

Тогда $\sin mt \in P_n$ *и* $\cos mt \in P_n$.

Другими словами, при выполнении условия (81) для функций $f(t) = \sin mt$ и $f(t) = \cos mt$ выполнено тождество $G_f^{(n)}(t) \equiv 0$.

Докажем эту лемму. Ограничимся рассмотрением функции $f(t) = \cos mt$. По (78) определим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(t) + f(t+h) + f(t+2h) + \cdots + f(t+(n-1)h) = \tag{82}$$

$$= \cos mt + \cos m(t+h) + \cos m(t+2h) + \cdots + \cos m(t+(n-1)h) =$$

$$= \cos\tau + \cos(\tau+\nu) + \cos(\tau+2\nu) + \cdots + \cos(\tau+(n-1)\nu)\,,$$

где обозначено $\tau = mt$ и $\nu = mh$. Лемма 10 будет доказана, если установить тождество $F(t) \equiv 0$.

В силу (81) имеем

$$\nu = mh = m\frac{2\pi}{n} \neq \pi k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

Следовательно, $\sin\nu \neq 0$. Поэтому функция (82) может быть представлена в виде

$$F(t) = \cos\tau + \frac{\cos(\tau+\nu) + \cos(\tau+2\nu) + \cdots + \cos(\tau+(n-1)\nu)}{\sin\nu}\cdot\sin\nu\,.$$

Отсюда, используя формулу $\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$, после несложных преобразований придем к тождеству $F(t) \equiv 0$. Лемма 10 доказана.

Ниже утверждение леммы 10 нас будет интересовать только для чисел $m = 1, 2, 3, 4$. Для этих чисел лемма 10 может быть усилена.

Пусть, например, $m = 1$; из леммы 10 следует, что если $n \neq 1$ и $n \neq 2$, то $\sin mt \in P_n$ и $\cos mt \in P_n$. Непосредственная проверка показывает, что в действительности эти включения будут выполнены и при $n = 2$, а при $n = 1$ они не выполняются. Аналогичные рассуждения для чисел $m = 2$, $m = 3$ и $m = 4$ приводят к следующему вспомогательному утверждению.

Лемма 11. *Пусть $f(t) = \sin mt$ или $f(t) = \cos mt$. Тогда:*

- *если $m = 1$, то $f(t) \in P_n \iff n \neq 1$;*
- *если $m = 2$, то $f(t) \in P_n \iff n \neq 1$ и $n \neq 2$;*
- *если $m = 3$, то $f(t) \in P_n \iff n \neq 1$ и $n \neq 3$;*
- *если $m = 4$, то $f(t) \in P_n \iff n \neq 1$, $n \neq 2$ и $n \neq 4$.*

Определим теперь функции

$$f_2(t) = (a_2(e(t), \mu_0), Qe(t))\,, \quad g_2(t) = (a_2(e(t), \mu_0), Qg(t))\,, \tag{83}$$

и покажем, что справедлива

Лемма 12. *Функции (34) и (83) связаны равенствами:*

$$G_{f_2}^{(q)}(t) = -2\pi\alpha_1(t)\,, \quad G_{g_2}^{(q)}(t) = -\beta_1(t)\,. \tag{84}$$

При доказательстве этой леммы для упрощения нелинейность $a_2(x,\mu_0)$ будет обозначаться как $a_2(x)$, т.е. обозначение μ_0 будет опускаться. Из (78) имеем

$$G_{f_2}^{(q)}(t) = [f_2(t) + f_2(t+h) + \cdots + f_2(t+(q-1)h)]h = \tag{85}$$

$$= [(a_2(e(t)), Qe(t)) + (a_2(e(t+h)), Qe(t+h)) +$$

$$+ \cdots + (a_2(e(t+(q-1)h)), Qe(t+(q-1)h))]h\,;$$

здесь $h = 2\pi/q$. С другой стороны, из (33) и (34) получим

$$\alpha_1(t) = -\frac{1}{q}(b_2(t), e(t)) = -\frac{1}{q}\left(Q^{q-1}a_2(e(t)) + Q^{q-2}a_2(Qe(t)) + \cdots + \right.$$

$$\left. + a_2(Q^{q-1}e(t)), e(t)\right) = -\frac{1}{q}\left[(a_2(e(t)), (Q^*)^{q-1}e(t)) + \right.$$

$$\left. + (a_2(Qe(t)), (Q^*)^{q-2}e(t)) + \cdots + (a_2(Q^{q-1}e(t)), e(t))\right]\,,$$

где Q^* – транспонированная матрица. Матрица (76) удовлетворяет равенствам

$$(Q^*)^k = Q^{q-k}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Поэтому

$$\alpha_1(t) = -\frac{1}{q}\left[(a_2(e(t)), Qe(t)) + (a_2(Qe(t)), Q^2e(t)) + \right. \tag{86}$$

$$\left. + \cdots + (a_2(Q^{q-1}e(t)), e(t))\right]\,,$$

Сравним равенства (85) и (86). Пусть сначала $p = 1$, т.е. пусть $\theta_0 = 1/q$. В этом случае верны равенства

$$e(t+h) = Qe(t)\,, \;\; e(t+2h) = Q^2e(t)\,, \;\ldots,$$

из которых следует, что соответствующие слагаемые в скобках правых частей формул (85) и (86) совпадают. В случае же, когда $p > 1$, слагаемые в скобках правых частей формул (85) и (86) также совпадают, но после соответствующих перестановок. Это и означает справедливость первого из равенств (84). Второе из этих равенств доказывается аналогично.

Лемма 12 доказана.

7.8.2. Завершение доказательства леммы 4. Заметим сначала, что так как нелинейность $a_2(x,\mu)$ является квадратичной, то разложения определенных равенствами (83) 2π-периодических функций $f_2(t)$ и $g_2(t)$ в тригонометрический ряд Фурье содержат только функции $\sin mt$ и $\cos mt$ при $m = 1$ и $m = 3$. Так как $q \geqslant 5$, то из леммы 11 получим, что $f_2(t) \in P_q$ и $g_2(t) \in P_q$. Другими словами, для функций $f_2(t)$ и $g_2(t)$ имеют место тождества

$$\int_0^{2\pi} f_2(s)\,ds \equiv G_{f_2}^{(q)}(t)\,, \quad \int_0^{2\pi} g_2(s)\,ds \equiv G_{g_2}^{(q)}(t)\,.$$

В силу вышеуказанного свойства разложения функций $f_2(t)$ и $g_2(t)$ в ряд Фурье, интегралы в полученных тождествах равны нулю. Отсюда и из леммы 12 получим тождества $\alpha_1(t) \equiv 0$ и $\beta_1(t) \equiv 0$. Лемма 4 доказана.

7.9. Доказательство леммы 5. В силу отмеченного в п. 5.3 следствия 4 функции (36) и (42) совпадают, а именно, они имеют вид:

$$\alpha_2(t) = -\frac{1}{q}(b_3(t), e(t))\,, \quad \beta_2(t) = -\frac{1}{2\pi q}(b_3(t), g(t))\,.$$

Дальнейшее доказательство леммы 5 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 4. На первом этапе определяются аналоги функций (83):

$$f_3(t) = (a_3(e(t), \mu_0), Qe(t))\,, \quad g_3(t) = (a_3(e(t), \mu_0), Qg(t))\,. \tag{87}$$

и показывается, что справедливы аналоги равенств (84):

$$G_{f_3}^{(q)}(t) = -2\pi\alpha_2(t)\,, \quad G_{g_3}^{(q)}(t) = -\beta_2(t)\,.$$

На втором этапе отмечается, что так как нелинейность $a_3(x,\mu)$ является кубической, то разложения определенных равенствами (87) 2π-периодических функций $f_3(t)$ и $g_3(t)$ в тригонометрический ряд Фурье содержат только функции $\sin mt$ и $\cos mt$ при $m = 0$, $m = 2$ и $m = 4$. Отсюда и из леммы 12 следует утверждение леммы 5.

7.10. Доказательство теорем 7-9. Справедливость теоремы 7 следует из теорем 5 и 6, а также леммы 5. Справедливость теоремы 8 следует из теоремы 6, а теоремы 9 – из теоремы 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. *Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
2. Каток А.Б., Хасселблат Б. *Введение в теорию динамических систем.* М.: МЦНМО, 2005.
3. Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory.* N.Y.: Springer, 1998.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.* Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
5. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. *Структуры и хаос в нелинейных средах.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
6. Кузнецов С.П. *Динамический хаос.* М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
7. Козякин В.С., Красносельский А.М., Рачинский Д.И. *О языках Арнольда в задаче о периодических траекториях больших амплитуд* // Доклады АН. 2006. Т. 411, № 3. С. 1-7.
8. Noris J. *The closing of Arnold tongues for periodically forced limit cycle* // Nonlinearity, 1993. Vol. 6. P. 1093.
9. Козякин В.С. *Субфуркация периодических колебаний* // ДАН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 25-27.
10. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир, 1975.
11. Юмагулов М.Г. *Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах* // Доклады АН. 2009. Т. 424, № 2. С. 177-180.
12. Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А., Юмагулов М.Г. *Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах* // Уфимский математический журнал, 2010. Т.2. № 4. С. 3-26.

Марат Гаязович Юмагулов,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: yum_mg@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 132-141.

УДК 517.5

COMPLETENESS AND MINIMALITY OF SYSTEMS OF BESSEL FUNCTIONS

B.V. VYNNYTS'KYI, R.V. KHATS'

Abstract. We find the necessary and sufficient conditions for the completeness and minimality in the space $L^2(0;1)$ of system $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ generated by Bessel function of the first kind of index $\nu \geq -1/2$. Moreover, we establish a criterion for the completeness and minimality of system $(x^{-2}\sqrt{x\rho_k}J_{3/2}(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ in the space $L^2((0;1);x^2dx)$.

Keywords: Paley-Wiener theorem, Bessel function, entire function, complete system, minimal system, biorthogonal system, basis.

Mathematics Subject Classification: 33C10, 30B60, 42A65, 42A38, 30D20, 42B10, 44A15, 30E15.

1. Introduction and preliminaries

Let $p \in [0;+\infty)$, $L^2((0;1);x^pdx)$ be the space of functions $f : (0;1) \to \mathbb{C}$ such that $t^{p/2}f(t) \in L^2(0;1)$ with the inner product $\langle f_1; f_2\rangle = \int_0^1 t^p f_1(t)\overline{f_2(t)}\,dt$ and the norm $\|f\|^2 := \int_0^1 t^p|f(t)|^2\,dt$. Let $J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(x/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$ be Bessel's function of the first kind of index ν. It is known (see [3], [25, p. 345], [32]) that the function J_ν is a solution of the equation $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$, i.e. the equation $y''+y'/x+(1-\nu^2/x^2)y=0$, the function $y(x) = J_\nu(x\rho)$ is a solution of the equation $y''+y'/x-y\nu^2/x^2 = -\rho^2y$, and the function $y(x) = \sqrt{x\rho}J_\nu(x\rho)$ satisfies the equation

$$-y'' + \frac{\nu^2-1/4}{x^2}y = \rho^2 y.$$

The function J_ν for $\nu > -1$ has (see [3], [25, p. 350], [32]) an infinite set of zeros, among them positive zeros ρ_k, $k \in \mathbb{N}$, and negative zeros $\rho_{-k} := -\rho_k$, $k \in \mathbb{N}$. All zeros are simple, except perhaps, $\rho_0 = 0$.

Theorem A. *(see [3], [25, p. 357], [32]) Let $\nu > -1$ and $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ be a sequence of positive zeros of the function J_ν. Then the system $(\sqrt{x}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ is an orthogonal basis in the space $L^2(0;1)$.*

The system $(\sqrt{x}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ is also complete in $L^2(0;1)$ if $\rho_kJ_\nu'(\rho_k) + \alpha J_\nu(\rho_k) = 0$, $\alpha + \nu > 0$ (see [16, p. 124], [25, pp. 356–357]). From [8] it follows that if $\nu > -1/2$ and $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ is a sequence of distinct positive numbers such that $\rho_k \leq \pi(k+\nu/2)$ for all sufficiently large $k \in \mathbb{N}$, then the system $(\sqrt{x}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ is complete in the space $L^2(0;1)$.

We say that an entire function G is of formal exponential type $\sigma \in (0;+\infty)$ if

$$|G(z)| \leq c(\varepsilon)\exp((\sigma+\varepsilon)|z|), \quad z \in \mathbb{C},$$

for each $\varepsilon > 0$ and some constant $c(\varepsilon)$.

Submitted on 30 january 2012.

Theorem 1. *Let $\nu \geq -1/2$ and $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ be an arbitrary sequence of distinct nonzero complex numbers. For a system $(\sqrt{t\rho_k}J_\nu(t\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ to be incomplete in the space $L^2(0;1)$ it is necessary and sufficient that a sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ is a subsequence of zeros of some even entire function G of formal exponential type $\sigma \leq 1$ such that the function $f(z) = z^{\nu+1/2}G(z)$ belongs to the space $L^2(\mathbb{R})$.*

The proof by standard methods (see [20, pp. 131–132], [21]) follows immediately from the following lemmas.

Lemma B. *(see* [2], [13]*) Let $\nu \geq -1/2$. A function f has the representation*

$$f(z) = \int\limits_0^1 \sqrt{zt}J_\nu(zt)\gamma(t)\,dt, \quad \gamma \in L^2(0;1),$$

if and only if $f \in L^2(0;+\infty)$ and $f(z) = z^{\nu+1/2}G(z)$, where G is an even entire function of formal exponential type $\sigma \leq 1$. Moreover, if $f \not\equiv 0$ then G is a transcendental entire function.

Lemma C. *(see* [11, p. 67], [24]*) Let $\nu > -1$. Then every function $f \in L^2(0;+\infty)$ can be represented in the form*

$$f(z) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{zt}J_\nu(zt)h(t)\,dt$$

with some function $h \in L^2(0;+\infty)$. Moreover, $\|f\| = \|h\|$ and

$$h(t) = \int\limits_0^{+\infty} \sqrt{zt}J_\nu(zt)f(z)\,dz.$$

A system $(e_k : k \in \mathbb{N}_0)$ of the Hilbert space is said to be *minimal* (see [20, p. 131], [21, p. 4258], [22]) if for each $n \in \mathbb{N}_0$ the element e_n does not belong to the closure of the linear span of the system $(e_k : k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{n\})$. A system is minimal if and only if it has a biorthogonal system. A complete system has, at most, one biorthogonal system (see [21], [22]).

Similarly to [20, Lecture 18], [21], from Lemmas B, C and Theorem 1, we obtain the following result.

Theorem 2. *Let $\nu \geq -1/2$ and $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ be an arbitrary sequence of distinct nonzero complex numbers such that $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$ if $k \neq m$. The system $(\sqrt{t\rho_k}J_\nu(t\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ is complete and minimal in the space $L^2(0;1)$ if and only if the sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, is a sequence of zeros of some even entire function G of formal exponential type $\sigma \leq 1$ such that the function $z^{\nu+1/2}G(z)$ does not belongs to the space $L^2(0;+\infty)$ and the function $(z^2-\rho_1^2)^{-1}z^{\nu+1/2}G(z)$ belongs to $L^2(0;+\infty)$. Moreover, the biorthogonal system $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$ is formed, in particular, by the functions γ_k, defined by the equality*

$$\overline{\gamma_k(t)} = \frac{2}{\rho_k^{\nu-1/2}G'(\rho_k)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{zt}J_\nu(zt)z^{\nu+1/2}G(z)}{z^2-\rho_k^2}\,dz.$$

Using methods of [18], [20] and [21], we can obtain a number of other various necessary and sufficient conditions for the completeness and minimality of system $(\sqrt{t\rho_k}J_\nu(t\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ in the space $L^2(0;1)$. In particular, following the arguments of [20, Lecture 18], [21, §§1.7, 3.3], Theorem 1 yields the next statement.

Theorem 3. *Let $\nu \geq -1/2$ and $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ be an arbitrary sequence of distinct nonzero complex numbers such that $|\Im\rho_k| \geq \delta|\rho_k|$ for all $k \in \mathbb{N}$ and some $\delta > 0$. The system*

$(\sqrt{t\rho_k}J_\nu(t\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ *is complete in the space* $L^2(0;1)$ *if and only if*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\rho_k|} = +\infty.$$

At studying of some non-classical boundary-value problems (see [26]–[31]) and generalized eigenvectors of some linear operators [28], [29] we needed to obtain the analogues of Theorems 1-3 for weighted spaces and establish an approximation properties of the special finite linear combinations of Bessel functions. We don't understand to the end the nature of expected results for an arbitrary $\nu \in \mathbb{R}$. For advance in the given direction it is important to investigate in details the simplest model cases $\nu = -3/2$ and $\nu = 3/2$. The case $\nu = -3/2$ was considered in [27], [30] (see also [26], [28], [31]). Here we consider the case $\nu = 3/2$ more detail. But even in this case we cannot obtain the all necessary facts. In particular, remains an open one for us the problem formulated at the end of this paper. In our view, its solution is very important for the construction of some spectral theory that is based on the notion of a generalized eigenvector (see [28], [29]).

It is well known (see [3], [25, p. 350], [32]) that $\sqrt{z}J_{3/2}(z) = -\sqrt{2/\pi}z^{-1}(z\cos z - \sin z)$. The function $\dfrac{\sqrt{x\rho}J_{3/2}(x\rho)}{x^2\rho^2}$ belongs to the space $L^2((0;1);x^2dx)$ for each $\rho \neq 0$. From Theorem A it follows that if $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ is a sequence of positive zeros of the function $J_{3/2}$ then the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$, $\Theta_k(x) := \dfrac{\sqrt{x\rho_k}J_{3/2}(x\rho_k)}{x^2\rho_k^2}$, is complete in the space $L^2((0;1);x^4dx)$. But from this statement it does not follows that the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is complete in the space $L^2((0;1);x^2dx)$. We investigate some approximation properties of the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ in $L^2((0;1);x^2dx)$ with an arbitrary sequence of nonzero complex numbers $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$. The main result of the paper is contained in Theorem 9 where is found a criterion for the completeness and minimality of system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ in the space $L^2((0;1);x^2dx)$.

2. Main results

Denote by PW_σ^2 the set of all entire functions of formal exponential type $\sigma \in (0;+\infty)$ belonging to the space $L^2(\mathbb{R})$ on the real axis $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$, and by $PW_{\sigma,-}^2$ we denote the class of odd entire functions from PW_σ^2. According to the Paley-Wiener theorem (see [12], [19]–[21]), the class PW_σ^2 coincides with the class of functions G admitting the representation

$$G(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz}g(t)\,dt, \quad g \in L^2(-\sigma;\sigma),$$

and the class $PW_{\sigma,-}^2$ consists of the functions G of the form

$$G(z) = \int_{0}^{\sigma} \sin(tz)g(t)\,dt, \quad g \in L^2(0;\sigma).$$

Moreover, $\|g\|_{L^2(0;\sigma)} = \sqrt{2/\pi}\|G\|_{L^2(0;+\infty)}$ and

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \sin(tz)G(z)\,dz.$$

Theorem 4. *An entire function* Ω *can be represented in the form*

$$\Omega(z) = \int_{0}^{1} z\sqrt{tz}J_{3/2}(tz)h(t)\,dt, \quad h \in L^2((0;1);x^2dx), \tag{1}$$

if and only if Ω is an odd entire function, $\Omega(0)=\Omega'(0)=\Omega''(0)=0$ and the function $\Omega'(z)/z$ belongs to the space $PW^2_{1,-}$. If these conditions hold then

$$h(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\Omega'(z)}{tz}\sin(tz)\,dz.$$

Proof. Let the function Ω is representable in the form (1). Since

$$z\sqrt{tz}J_{3/2}(tz)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{tz\cos(tz)-\sin(tz)}{t},$$

we have

$$\Omega(z)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^1\frac{tz\cos(tz)-\sin(tz)}{t}h(t)\,dt.$$

Therefore,

$$\Omega'(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^1 tz\sin(tz)h(t)\,dt,\qquad \frac{\Omega'(z)}{z}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^1\sin(tz)q(t)\,dt,$$

where $q(t)=th(t)$. Since $h\in L^2((0;1);x^2dx)$, we have $q\in L^2(0;1)$ and, hence, according to Paley-Wiener theorem, the function $\Omega'(z)/z$ belongs to the space $PW^2_{1,-}$. Conversely, if all the conditions of the theorem hold then the function $q(t)=\sqrt{2/\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\Omega'(z)}{z}\sin(tz)\,dz$ belongs to the space $L^2(0;1)$ and $\Omega'(z)=\sqrt{2/\pi}\int_0^1 z\sin(tz)q(t)\,dt$. Using Fubini's theorem, we get

$$\Omega(z)=\Omega(z)-\Omega(0)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^1 q(t)\,dt\int\limits_0^z w\sin(tw)\,dw$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^1\frac{\sin(tz)-tz\cos(tz)}{t}\frac{q(t)}{t}\,dt=\int\limits_0^1 z\sqrt{tz}J_{3/2}(tz)h(t)\,dt,$$

where $h(t)=q(t)/t$. Since $q\in L^2(0;1)$, one has that $h\in L^2((0;1);x^2dx)$, and the proof of the theorem is completed. □

Let $\widetilde{E}_{2,-}$ be the class of the entire functions Ω that can be represented in the form (1), and let $E_{2,-}$ be the class of nonzero odd entire functions Ω such that $\Omega(0)=\Omega'(0)=\Omega''(0)=0$ and the function $\Omega'(z)/z$ belongs to the space $PW^2_{1,-}$.

Corollary 1. $\widetilde{E}_{2,-}=E_{2,-}$.

Corollary 2. *The class $E_{2,-}$ coincides with the set of the entire functions Ω that can be represented in the form*

$$\Omega(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^1\frac{\sin(tz)-tz\cos(tz)}{t^2}q(t)\,dt,\quad q\in L^2(0;1).\tag{2}$$

Theorem 5. *Let $(\rho_k:k\in\mathbb{N})$ be an arbitrary sequence of distinct nonzero complex numbers such that $\rho_k^2\neq\rho_n^2$ if $k\neq n$. For a system $(\Theta_k:k\in\mathbb{N})$ to be incomplete in the space $L^2((0;1);x^2dx)$ it is necessary and sufficient that a sequence $(\rho_k:k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$, $\rho_{-k}:=-\rho_k$, is a subsequence of zeros of some nonzero even entire function G such that the function $\Omega(z)=z^3G(z)$ belongs to the space $E_{2,-}$.*

Proof. Incompleteness of a system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is equivalent to the incompleteness of the system $(\rho_k^3\Theta_k : k \in \mathbb{N})$. According to the well-known completeness criterion, the last system is incomplete in the space $L^2((0;1);x^2dx)$ if and only if there exists a nonzero function $h \in L^2((0;1);x^2dx)$ such that

$$\int\limits_0^1 \rho_k\sqrt{x\rho_k}J_{3/2}(x\rho_k)h(x)\,dx = 0 \tag{3}$$

for all $k \in \mathbb{N}$. If the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is incomplete, then the function (1) has zeros at points ρ_k, belongs to the space $E_{2,-}$ and $\Omega(z) \not\equiv 0$. Hence, the function $G(z) = z^{-3}\Omega(z)$ is required. Conversely, if the sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, is a subsequence of zeros of some even nonzero entire function G such that the function $\Omega(z) = z^3G(z)$ belongs to $E_{2,-}$ then, using (1), we obtain (3). The theorem is proved. □

Lemma 1. *Let an entire function $\Omega \in E_{2,-}$ be defined by the formula (2). Then (here and so on by C_1, C_2, ... we denote arbitrary positive constants) for all $z \in \mathbb{C}$, we have*

$$|\Omega(z)| \le C_1(1+|z|)\frac{e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}} + C_2|z|\left(|\Re z| + \frac{e^{|\Im z|}}{1+|\Im z|}\right)^{1/2}.$$

Proof. Indeed, let

$$I_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{1/2}\frac{\sin(tz)-tz\cos(tz)}{t^2}q(t)\,dt,$$

$$I_2(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{1/2}^{1}\frac{q(t)}{t}\cos(tz)\,dt, \quad I_3(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{1/2}^{1}\frac{q(t)}{t^2}\sin(tz)\,dt.$$

Then $\Omega(z) = I_1(z)+zI_2(z)+I_3(z)$. According to the Paley-Wiener theorem, the functions $I_2(z)$ and $I_3(z)$ belong to the space PW_1^2,

$$I_2(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{1/2}^{1}e^{itz}\frac{q(t)}{2t}\,dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{-1}^{-1/2}e^{itz}\frac{q(-t)}{2t}\,dt,$$

and applying Schwartz's inequality, we get

$$|I_2(z)| \le C_3\frac{e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Similarly,

$$|I_3(z)| \le C_4\frac{e^{|\Im z|}}{\sqrt{1+|\Im z|}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Finally, since $|\sin(tz) - tz\cos(tz)|^2 = (\sin(tx) - tx\cos(tx))^2 + (\sinh(ty) - ty\cosh(ty))^2 + t^2(x^2\sinh^2(ty) - y^2\sin^2(tx))$ for any $t \in \mathbb{R}$ and $z = x+iy \in \mathbb{C}$, we obtain

$$\int\limits_0^{1/2}\frac{|\sin(tz)-tz\cos(tz)|^2}{t^4}\,dt = \int\limits_0^{1/2}\frac{(\sin(tx)-tx\cos(tx))^2}{t^4}\,dt$$

$$+\int\limits_0^{1/2}\frac{(\sinh(ty)-ty\cosh(ty))^2}{t^4}\,dt + \int\limits_0^{1/2}\frac{x^2\sinh^2(ty)-y^2\sin^2(tx)}{t^2}\,dt$$

$$= x^3 \int\limits_0^{x/2} \frac{(\sin t - t\cos t)^2}{t^4}\,dt + y^3 \int\limits_0^{y/2} \frac{(\sinh t - t\cosh t)^2}{t^4}\,dt$$

$$+x^2 y \int\limits_0^{y/2} \frac{\sinh^2 t}{t^2}\,dt - y^2 x \int\limits_0^{x/2} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$$

Therefore, for $z \in \mathbb{C}$

$$|I_1(z)| \le C_5 \left(|x|^3 + |z|^2 \frac{e^{|y|}}{1+|y|} + y^2|x| \right)^{1/2} = C_5|z| \left(|\Re z| + \frac{e^{|\Im z|}}{1+|\Im z|} \right)^{1/2}.$$

This completes the proof of the lemma. □

Theorem 6. *Let $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ be a sequence of distinct nonzero complex numbers such that $\rho_k^2 \ne \rho_m^2$ if $k \ne m$, and let a sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, be a sequence of zeros of the some even entire function G of finite formal exponential type, for which on the rays $\{z : \arg z = \varphi_j\}$, $j \in \{1; 2; 3; 4\}$, $\varphi_1 \in [0; \pi/2)$, $\varphi_2 \in [\pi/2; \pi)$, $\varphi_3 \in (\pi; 3\pi/2]$, $\varphi_4 \in (3\pi/2; 2\pi)$, we have*

$$|G(z)| \ge C_6(1+|z|)^{-2} \exp(|\Im z|).$$

Then the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is complete in the space $L^2((0;1);x^2dx)$.

Proof. Assume the converse. Then, according to Theorem 5, there exists an entire function $\Omega \in E_{2,-}$ for which the sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ is a subsequence of zeros. Let $V(z) = \Omega(z)/(z^3 G(z))$. Then V is an even entire function of finite exponential type, for which (see Lemma 1)

$$|V(z)| \le C_7 \frac{1}{\sqrt{1+|\Im z|}}, \quad \arg z = \varphi_j, \quad j \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Hence, according to the Phragmén-Lindelöf theorem (see [20], [21]), $V(z) \equiv 0$. Therefore, $\Omega(z) \equiv 0$. This contradiction proves the theorem. □

Corollary 3. *Let $(\rho_k : k \in \mathbb{Z})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, be a sequence of zeros of the function $J_{3/2}$. Then the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is complete in the space $L^2((0;1);x^2dx)$.*

Proof. Indeed, the sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ is a sequence of zeros of the entire function $G(z) = z^{-3}(z\cos z - \sin z)$, and this function satisfies the conditions of Theorem 6. Therefore, the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is complete in the space $L^2((0;1);x^2dx)$. □

Theorem 7. *Let $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ be a sequence of distinct nonzero complex numbers such that $\rho_k^2 \ne \rho_m^2$ if $k \ne m$, and let a sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, be a sequence of zeros of the some even entire function G of finite formal exponential type such that the function $z^3G(z)$ does not belongs to the space $E_{2,-}$ and for which on the rays $\{z : \arg z = \varphi_j\}$, $j \in \{1; 2; 3; 4\}$, $\varphi_1 \in [0; \pi/2)$, $\varphi_2 \in [\pi/2; \pi)$, $\varphi_3 \in (\pi; 3\pi/2]$, $\varphi_4 \in (3\pi/2; 2\pi)$, the inequality*

$$|G(z)| \ge C_8(1+|z|)^{-2-\alpha} \exp(|\Im z|)$$

holds, where $\alpha < 5/2$ is a some constant. Then the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is complete in the space $L^2((0;1);x^2dx)$.

Proof. Assume the converse. Then, according to Theorem 5, there exists an entire function $\Omega \in E_{2,-}$ for which the sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ is a subsequence of zeros. Let $V(z) = \Omega(z)/(z^3 G(z))$. Then V is an even entire function of finite formal exponential type, for which (see Lemma 1)

$$|V(z)| \le C_9(1+|z|)^{\alpha-1/2}, \quad \arg z = \varphi_j, \quad j \in \{1; 2; 3; 4\}.$$

Since $\alpha - 1/2 < 2$ and V is an even entire function, then, according to the Phragmén-Lindelöf theorem, the function V is a constant. Hence, $\Omega(z) = C_{10}z^3G(z)$. Therefore, $\Omega \notin E_{2,-}$. Thus, we have a contradiction and the proof of the theorem is completed. □

Lemma 2. *If an odd entire function L belongs to the space $E_{2,-}$ and has a root at a point $\rho \neq 0$, then the function $\widetilde{L}(z) = L(z)/(z^2 - \rho^2)$ also belongs to $E_{2,-}$.*

Proof. Indeed, the function $\widetilde{L}$ is an odd entire function of formal exponential type $\sigma \leq 1$,

$$\widetilde{L}'(z) = \frac{L'(z)(z^2 - \rho^2) - 2zL(z)}{(z^2 - \rho^2)^2},$$

and $\widetilde{L}(0) = \widetilde{L}'(0) = \widetilde{L}''(0) = 0$. Besides,

$$\frac{\widetilde{L}'(z)}{z} = \frac{L'(z)}{z(z^2 - \rho^2)} - \frac{2L(z)}{(z^2 - \rho^2)^2},$$

$$\int\limits_{1+\Re\rho}^{+\infty} \left|\frac{L'(x)}{x(x^2 - \rho^2)}\right|^2 dx \leq C_{11} \int\limits_{1+\Re\rho}^{+\infty} \left|\frac{L'(x)}{x}\right|^2 dx < +\infty,$$

and according to Lemma 1

$$\int\limits_{1+\Re\rho}^{+\infty} \left|\frac{L(x)}{(x^2 - \rho^2)^2}\right|^2 dx \leq C_{12} \int\limits_{1+\Re\rho}^{+\infty} \left|\frac{(1 + |x|)^3}{(x^2 - \rho^2)^4}\right| dx < +\infty.$$

Hence, the function $\widetilde{L}'(z)/z$ belongs to $L^2(\mathbb{R})$. This concludes the proof of the lemma. □

Lemma 3. *If an odd entire function L has zeros at points $\rho_k \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$, and the function $L(z)/(z^2 - \rho_1^2)$ belongs to the space $E_{2,-}$, then the functions $L_k(z) = L(z)/(z^2 - \rho_k^2)$ also belong to $E_{2,-}$ for every $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.*

Proof. In fact, let $Q_k(z) = (\rho_k^2 - \rho_1^2)\dfrac{L(z)}{(z^2 - \rho_k^2)(z^2 - \rho_1^2)}$. Then $Q_k(z) = (\rho_k^2 - \rho_1^2)\dfrac{L_1(z)}{z^2 - \rho_k^2}$ and $L_k = Q_k + L_1$. Therefore, taking into account the previous lemma, we obtain the required proposition. □

Theorem 8. *Let $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ be an arbitrary sequence of distinct complex numbers such that $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$ if $k \neq m$. If the sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ is a subsequence of zeros of some even entire function G which has simple roots at all points ρ_k and the function $z^3(z^2 - \rho_1^2)^{-1}G(z)$ belongs to $E_{2,-}$, then the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ has a biorthogonal system $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$ in the space $L^2((0;1); x^2dx)$. The biorthogonal system $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$ is formed, in particular, by the functions γ_k, defined by the equality*

$$\overline{\gamma_k(t)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{V_k'(z)}{tz} \sin(tz)\, dz, \quad V_k(z) := \frac{2\rho_k z^3 G(z)}{G'(\rho_k)(z^2 - \rho_k^2)}. \tag{4}$$

Proof. In fact, according to Lemma 3, the functions V_k belong to the space $E_{2,-}$. Therefore, there exist nonzero elements γ_k of the space $L^2((0;1); x^2dx)$ such that

$$V_k(z) = \int\limits_0^1 z\sqrt{tz} J_{3/2}(tz)\gamma_k(t)\, dt,$$

and by Theorem 4 the functions γ_k can be found by (4). Moreover,

$$\frac{V_k(\rho_n)}{\rho_n^3} = \begin{cases} 1, & n = k, \\ 0, & n \neq k, \end{cases}$$

and we obtain the required proposition. □

Theorem 9. *Let $(\rho_k : k \in \mathbb{N})$ be an arbitrary sequence of nonzero complex numbers such that $\rho_k^2 \neq \rho_m^2$ as $k \neq m$. The system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is complete and minimal in the space $L^2((0;1);x^2dx)$ if and only if the sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, is a sequence of zeros of some even entire function G such that the function $z^3(z^2-\rho_1^2)^{-1}G(z)$ belongs to the space $E_{2,-}$ and the function $z^3G(z)$ does not belongs to this space.*

Proof. If the considered system is minimal then there exists a nonzero function $\gamma_1 \in L^2((0;1);x^2dx)$ such that

$$\int_0^1 \rho_k\sqrt{t\rho_k}J_{3/2}(t\rho_k)\gamma_1(t)\,dt = \begin{cases} 1, & k=1,\\ 0, & k\neq 1.\end{cases}$$

Let $T(z) = \int_0^1 z\sqrt{tz}J_{3/2}(tz)\gamma_1(t)\,dt$. The function $G(z) = z^{-3}(z^2-\rho_1^2)T(z)$ is the required, because the function $T(z) = z^3(z^2-\rho_1^2)^{-1}G(z)$ belongs to the space $E_{2,-}$ and has zeros at all points ρ_k, all its zeros are simple and it has no other zeros. Indeed, if ρ is another root of the function G, then the function $V(z) = G(z)/(z^2-\rho^2)$ which has roots at all points ρ_k, would belongs to the space $E_{2,-}$ that, according to Theorem 5, contradicts the completeness of the considered system. Besides, the function $z^3G(z)$ does not belongs to $E_{2,-}$, because otherwise the system would be incomplete. Conversely, if all the conditions of the theorem hold then, basing on Theorem 8, we obtain the required proposition. The proof of theorem is thus completed. □

Corollary 4. *Let $(\rho_k : k \in \mathbb{Z})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, be a sequence of zeros of the function $J_{3/2}$. Then the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ has in the space $L^2((0;1);x^2dx)$ a biorthogonal system $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$ which formed by the functions γ_k, defined by the formula*

$$\overline{\gamma_k(t)} = \pi(1+\rho_k^2)\sqrt{t\rho_k}J_{3/2}(t\rho_k).$$

This corollary can be proved by standard methods of the theory of Bessel functions (see [3], [25, p. 347], [32]). However, it can be proved by Theorem 8. In fact, the sequence $(\rho_k : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, is a sequence of zeros of even entire function $G(z) = z^{-3}(z\cos z - \sin z)$. Further, the function $z^3G(z)$ dose not belongs to the space $E_{2,-}$ and the function $z^3(z^2-\rho_1^2)^{-1}G(z)$ belongs to this space. Furthermore, according to Theorem 8, the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ has in the space $L^2((0;1);x^2dx)$ a biorthogonal system $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$ which formed by the functions γ_k, defined by the equality (4), where

$$V_k(z) := \frac{2\rho_k(z\cos z - \sin z)}{G'(\rho_k)(z^2-\rho_k^2)}, \quad G'(\rho_k) = -\frac{\sin\rho_k}{\rho_k^2}.$$

Therefore,

$$\overline{\gamma_k(t)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} V_k(z)\frac{tz\cos(tz)-\sin(tz)}{tz^2}\,dz$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2\rho_k}{tG'(\rho_k)}\int_0^{+\infty}\frac{(z\cos z-\sin z)(tz\cos(tz)-\sin(tz))}{z^2(z^2-\rho_k^2)}\,dz.$$

Let $\eta(z;t) = tz^2e^{i(1+t)z}+tz^2e^{i(1-t)z}+ize^{i(1+t)z}-ize^{i(1-t)z}+itze^{i(1+t)z}+itze^{i(1-t)z}-e^{i(1+t)z}+e^{i(1-t)z}$. Then $(z\cos z-\sin z)(tz\cos(tz)-\sin(tz)) = \frac{1}{4}(\eta(z;t)+\eta(-z;t))$. Hence,

$$\overline{\gamma_k(t)} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\rho_k}{tG'(\rho_k)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta(z;t)}{z^2(z^2-\rho_k^2)}\,dz$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi}}{t\sin\rho_k}(t\rho_k\cos(t\rho_k)-\sin(t\rho_k))(\rho_k\sin\rho_k+\cos\rho_k) = \pi(1+\rho_k^2)\sqrt{t\rho_k}J_{3/2}(t\rho_k).$$

Problem. Let $(\rho_k : k \in \mathbb{Z})$, $\rho_{-k} := -\rho_k$, be a sequence of zeros of the function $J_{3/2}$. Since (see [32], [25, p. 352]) $\rho_k \sim \pi k$ as $k \to \infty$ and

$$\|\Theta_k\|^2\|\gamma_k\|^2 = \frac{\pi^2(1+\rho_k^2)^2}{\rho_k^6}\int\limits_0^{\rho_k}|t\sqrt{t}J_{3/2}(t)|^2\,dt\int\limits_0^{\rho_k}\frac{|\sqrt{t}J_{3/2}(t)|^2}{t^2}\,dt$$

$$= \frac{\pi(1+\rho_k^2)^2}{3\rho_k^3}(1+o(1))\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{|\sqrt{t}J_{3/2}(t)|^2}{t^2}\,dt+o(1)\right) \longrightarrow +\infty, \quad k\to\infty,$$

then the system $(\Theta_k : k \in \mathbb{N})$ is not uniformly minimal (see [21, p. 4258], [22, p. 62]) in the space $L^2((0;1);x^2dx)$ and therefore is not a basis in this space (see [21, p. 4258], [22, p. 62]). However, it is easy to show that the biorthogonal system $(\gamma_k : k \in \mathbb{N})$ is complete in $L^2((0;1);x^2dx)$. Therefore, the numbers $d_k = \int_0^1 t^2 f(t)\overline{\gamma_k(t)}\,dt$ determine the function $f \in L^2((0;1);x^2dx)$ uniquely. But the series $\sum_{k=1}^{\infty} d_k\Theta_k(x)$ not for each function $f \in L^2((0;1);x^2dx)$ converges in $L^2((0;1);x^2dx)$ to the function f. We do not know the methods of restoration of the function $f \in L^2((0;1);x^2dx)$ by numbers d_k and, in particular, whether the given series converges in $L^2((0;1);x^2dx)$ to f in the sense of Cesàro.

Similar problems are studied in [1], [4]–[7], [9], [10], [14], [15], [23], [32, Ch. XVIII], [33] and for exponential systems in [17], [18], [21], but we cannot use these results.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V.A. Abilov, F.V. Abilova. *Approximation of functions by Fourier-Bessel sums*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 471(8) (2001) 3–9 (in Russian); English transl. in: Russian Mathematics (Izvestiya Vuzov. Matematika) **45**(8) (2001) 1–7.
2. N.I. Akhiezer. *To the theory of coupled integral equations*, Kharkov State University Press **25** (1957) 5–31. (in Russian)
3. H. Bateman, A. Erdélyi. *Higher transcendental functions*, vol. 2, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1953.
4. A. Benedek, R. Panzone. *Mean convergence of series of Bessel functions*, Rev. Un. Mat. Argentina **26** (1972) 42–61.
5. A. Benedek, R. Panzone. *On mean convergence of Fourier-Bessel series of negative order*, Stud. Appl. Math. **50** (1971) 281–292.
6. A. Benedek, R. Panzone. *Pointwise convergence of series of Bessel functions*, Rev. Un. Mat. Argentina **26** (1972) 167–186.
7. J.J. Betancor, K. Stempak. *Relating multipliers and transplantation for Fourier-Bessel expansions and Hankel transform*, Tohoku Math. J. **53** (2001) 109–129.
8. R.P. Boas, H. Pollard. *Complete sets of Bessel and Legendre functions*, Ann. of Math. **48**(2) (1947) 366–384.
9. Ó. Ciaurri, K. Stempak, J.L. Varona. *Mean Cesàro-type summability of Fourier-Neumann series*, Studia Sci. Math. Hungar. **42** (2005) 413–430.
10. L. Colzani, A. Crespi, G. Travaglini, M. Vignati. *Equiconvergence theorems for Fourier-Bessel expansions with applications to the harmonic analysis of radial functions in euclidean and non euclidean spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993) 43–55.
11. M.M. Dzhrbashyan. *Integral transforms and representations of functions in the complex domain*, Nauka, Moscow, 1966. (in Russian)
12. John B. Garnett. *Bounded analytic functions*, Academic Press, New York, 1981.
13. J.L. Griffith. *Hankel transforms of functions zero outside a finite interval*, J. Proc. Roy. Soc. New South Wales **89** (1955) 109–115.
14. J.J. Guadalupe, M. Pérez, F.J. Ruiz. *Mean and weak convergence of Fourier-Bessel series*, J. Math. Anal. Appl. **173** (1993) 370–389.

15. J.J. Guadalupe, M. Pérez, F.J. Ruiz, J.L. Varona. *Two notes on convergence and divergence a.e. of Fourier series with respect to some orthogonal systems*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992) 457–464.
16. J.R. Higgins. *Completeness and basis properties of sets of special functions*, London-New York-Melbourne, Cambridge University Press, Cambridge, 1977.
17. K.P. Isaev, R.S. Yulmukhametov. *Unconditional exponential bases in Hilbert spaces*, Ufa Math. J. **3**(1) (2011) 3–15.
18. B.N. Khabibullin. *Completeness of exponential systems and uniqueness sets*, Bashkir State University Press, Ufa, 2008. (in Russian)
19. P. Koosis. Introduction to H_p spaces, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
20. B.Ya. Levin. *Lectures on entire functions. Transl. Math. Monogr.*, vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
21. A.M. Sedletskii. *Analytic Fourier transforms and exponential approximations. I, II*, J. Math. Sci. **129**(6) (2005) 4251–4408; **130**(6) (2005) 5083–5255.
22. I. Singer. *Bases in Banach Spaces*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
23. K. Stempak. *On convergence and divergence of Fourier-Bessel series*, Electron. Trans. Numer. Anal. **14** (2002) 223–235.
24. E.C. Titchmarsh. *Introduction to the theory of Fourier integrals, Second edition*, At the Clarendon Press, Oxford, 1948.
25. V.S. Vladimirov. *Equations of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1981 (in Russian); English transl. in: Marcel Dekker, Inc., New York, 1971.
26. B.V. Vynnyts'kyi, V.M. Dilnyi. *On some analogues of Paley-Wiener theorem and one boundary value problem for Bessel operator*, in: Proc. of Int. Conf. on complex analysis in memory of A.A. Gol'dberg, Lviv, Ukraine, May 31 – June 5, 2010, pp. 63–64.
27. B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats'. *Some approximation properties of the systems of Bessel functions of index* $-3/2$, Mat. Stud. **34**(2) (2010) 152–159.
28. B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats'. *Approximation properties of Bessel functions and a generalization of the notion of eigenvector*, in: Proc. of Int. Conf. on complex analysis in memory of A.A. Gol'dberg, Lviv, Ukraine, May 31 – June 5, 2010, pp. 64–65.
29. B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats'. *A generalization of the notion of eigenvector*, in: Proc. of Int. Conf. "Modern problems of analysis Chernivtsi, Ukraine, September 30 – October 3, 2010, pp. 51–52. (in Ukrainian)
30. B.V. Vynnyts'kyi, O.V. Shavala. *Boundedness of solutions of a second-order linear differential equation and a boundary value problem for Bessel's equation*, Mat. Stud. **30**(1) (2008) 31–41. (in Ukrainian)
31. B.V. Vynnyts'kyi, O.V. Shavala. *On completeness of the system* $(\cos(\rho_n x) + \rho_n x \sin(\rho_n x))$ *and a boundary value problem for Bessel operator*, in: Proc. of Int. Conf. "Analysis and topology Lviv, Ukraine, May 26 – June 7, 2008, pp. 54–55.
32. G.N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1944.
33. G.M. Wing. *The mean convergence of orthogonal series*, Amer. J. Math. **72** (1950) 792–808.

Bohdan V. Vynnyts'kyi,
Institute of Physics, Mathematics and Informatics,
Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University,
3 Stryiska Str.,
82100 Drohobych, Ukraine
E-mail: vynnytskyi@ukr.net

Ruslan V. Khats',
Institute of Physics, Mathematics and Informatics,
Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University,
3 Stryiska Str.,
82100 Drohobych, Ukraine
E-mail: khats@ukr.net

ABSTRACTS

S.N. Askhabov, A.L. Dzhabrailov

Approximate solutions of nonlinear convolution type equations on segment

Abstract. For various classes of integral convolution type equations with a monotone nonlinearity we prove global solvability and uniqueness theorems as well as theorems on the ways of finding the solutions in real Lebesgue spaces. It is shown that the solutions can be found in space $L_2(0,1)$ by a Picard's type successive approximations method and we prove the estimates for the rate of convergence. The obtained results cover, in particular, linear integral convolution type equations. In the case of a power nonlinearity it is shown that the solutions can be found by the gradient method in space $L_p(0,1)$ and weighted spaces $L_p(\varrho)$.

Keywords: nonlinear integral equations, convolution type operator, potential operator, monotone operator.

S. Baizaev, D.A. Vositova

On solutions of a system of partial differential equations with two independent variables

Abstract. In paper we consider first order linear elliptic and hyperbolic systems with constant coefficients and two independent variables. For such systems we study the problems on a variety of all the solutions and of the solutions growing at infinity not faster than a power function.

Keywords: elliptic and hyperbolic system, moderately growing solutions, solutions of power growth, dimension of space of solutions.

V.E. Bobkov

On existence of nodal solution of elliptic equations with convex-concave nonlinearities

Abstract. In a bounded connected domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$ with a piecewise smooth boundary we consider the Dirichlet boundary value problem for elliptic equation with a convex-concave nonlinearity

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{\gamma-2}u, \quad x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

where $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$. As a main result, we prove the existence of a nodal solution of this equation on the nonlocal interval $\lambda \in (-\infty, \lambda_0^*)$, where λ_0^* is determined by the variational principle of nonlinear spectral analysis via fibering method.

Keywords:nodal solution, convex-concave nonlinearity, fibering method

M.F. Broyan, Kh.A. Khachatryan

On some nonlinear integral and integro-differential equations with noncompact operators on positive semi axis

Abstract. The paper is devoted to the study of certain classes of nonlinear integral and integro-differential with non-compact Hammerstein type operators. These equations have important applications in kinetic theory of gases and in wealth distribution theory of one product economics.

Keywords: integral equation, Hammerstein operator, Sobolev space, convergence, monotonicity.

R.G. Nasibullin, A.M. Tukhvatullina

Hardy type inequalities with logarithmic and power weights for a special family of non-convex domains

Abstract. In the present work we obtain variational Hardy type inequalities with power and logarithmic weights which are generalizations of corresponding inequalities given earlier in the papers by M. Hoffmann-Ostenhof, T. Hoffmann-Ostenhof, A. Laptev, and J. Tidblom. We formulate and prove inequalities for arbitrary domains, and then we substantially simplify them for the class of convex domains and a special family of non-convex domains.
Keywords: ??????????????????????????????

D.K. Potapov

On a number of solutions in problems with spectral parameter for equations with discontinuous operators

Abstract. In a real reflexive Banach space we consider a problem on existence of solutions to a problem with a spectral parameter for equations with discontinuous operators. By the variational approach we obtain theorems on the number of the solutions to the considered problems. As an application, we consider main boundary value problems for elliptic equations with a spectral parameter and discontinuous nonlinearities.

Keywords: spectral parameter, discontinuous operator, variational method, number of solutions.

R.S. Saks

Solution of spectral problems for curl and Stokes operators

Abstract. In the work we explicitly solve the spectral problems for curl, gradient of divergence, and Stokes operators in a ball B of radius R. The eigenfunctions $\mathbf{u}_\kappa^\pm$ of the curl associated with non-zero eigenvalues $\pm\lambda_\kappa$ are expressed by explicit formulas, as well as the vector-functions $\mathbf{q}_\kappa$ associated with the zero eigenvalue,

$$rot\,\mathbf{u}_\kappa^\pm = \pm\lambda_\kappa\,\mathbf{u}_\kappa^\pm, \quad \psi_n(\pm\lambda_\kappa R)=0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_\kappa^\pm|_S=0; \quad rot\,\mathbf{q}_\kappa=0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_\kappa|_S=0,$$

где

$$\psi_n(z) = (-z)^n\left(\frac{d}{zdz}\right)^n\frac{\sin z}{z}, \quad \kappa=(n,m,k),\ n\geqslant 0,\ m\in\mathbb{N},\ |k|\leqslant n$$

The same vector-functions are the eigenfunctions for the gradient of divergence operator with other eigenvalues,

$$\nabla\, div\, \mathbf{u}_\kappa^\pm = 0; \quad \nabla\, div\, \mathbf{q}_\kappa = \mu_\kappa \mathbf{q}_\kappa, \quad \mu_\kappa = (\alpha_{n,m}/R)^2, \quad \psi_n'(\alpha_{n,m}) = 0.$$

The constructed system of eigen-vector-functions is complete and orthogonal in space $\mathbf{L}_2(B)$.

The eigenfunctions $(\mathbf{v}_\kappa,\ p_\kappa)$ of Stokes operator in the ball is represented as a sum of two eigenfunctions of the curl associated with opposite eigenvalues: $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{u}_\kappa^+ + \mathbf{u}_\kappa^-$, $p_\kappa = \text{const}$.

Keywords: curl, gradient of divergence, and Stokes operators, eigenvalues, eigenfunctions, Fourier series.

R.B. Salimov, P.L. Shabalin

On solvability of homogeneous Riemann-Hilbert problem with a countable set of coefficient discontinuities and two-side curling at infinity of order less than 1/2

Abstract.

In the present paper we consider the homogeneous Riemann–Hilbert problem in the complex upper half-plane with a countable set of coefficient discontinuities and two-side curling at infinity. In the case the problem index has a power singularity of order less than 1/2, in a special functional class, we obtain general solution and completely investigate the solvability of the problem.

Keywords: Riemann-Hilbert problem, curling at infinity, infinite index, entire functions

M.S. Tikhov

Nonparametric estimates of the effective doses at quantal response

Abstract. For the quantal response model we propose a new direct method for nonparametric estimation of the effective dose level $ED_{100\lambda}$ $(0 < \lambda < 1)$. This method yields a simple and reliable monotone estimate of the effective dose level curve $\lambda \to ED_{100\lambda}$ and is appealing to users of conventional smoothing methods of kernel estimates. Moreover, it is computationally very efficient, because it does not require a numerical inversion of the estimate of the quantile dose response curve. We prove asymptotic normality of this new estimate and compare it with the DNP-estimate.

Keywords: binary response model, effective dose level, nonparametric estimate.

2010 Mathematics Subject Classification: 62G05, 62G08, 62G20, 62P10.

M.G. Yumagulov

Localization of Arnold tongues of discrete dynamical systems

Abstract. The work is devoted to the exposition of the method of localizing Arnold tongues for finite-dimensional dynamical systems with discrete time which are the sets corresponding to rationally synchronized relations between the system's parameters. Such sets correspond to regions of parameter values, for which the system has cycles of certain periods. The method allows us to obtain an approximate representation of Arnold tongues, to study their properties in the major and minor resonances.

Keywords: bifurcation, dynamical systems, Arnold tongues, operator equations, functionalization of parameter.

B.V. Vynnyts'kyi, R.V. Khats'

Completeness and minimality of systems of Bessel functions

Abstract. We find the necessary and sufficient conditions for the completeness and minimality in the space $L^2(0;1)$ of system $(\sqrt{x\rho_k}J_\nu(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ generated by Bessel function of the first kind of index $\nu \geqslant -1/2$. Moreover, we establish a criterion for the completeness and minimality of system $(x^{-2}\sqrt{x\rho_k}J_{3/2}(x\rho_k) : k \in \mathbb{N})$ in the space $L^2((0;1); x^2dx)$.

Keywords: Paley-Wiener theorem, Bessel function, entire function, complete system, minimal system, biorthogonal system, basis.

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 146-147.

CONTENTS