

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ДОЗ ПО ДАННЫМ БИНАРНЫХ ОТКЛИКОВ

М.С. ТИХОВ

Аннотация. Для модели бинарного отклика мы предлагаем новый прямой способ непараметрического оценивания эффективной дозы $ED_{100\lambda}$ ($0 < \lambda < 1$). Этот метод приводит к простой и надежной монотонной оценке эффективной дозы зависимости $\lambda \rightarrow ED_{100\lambda}$ и удобен для пользователей традиционных методов сглаживания ядерных оценок. Кроме того, он эффективен в вычислительном отношении, потому что не требует численной инверсии оценки кривой квантильной функции. Мы доказываем асимптотическую нормальность этой новой оценки и сравниваем ее с DNP-оценкой.

Ключевые слова: модель бинарного отклика, эффективная доза, непараметрическая оценка.

Mathematics Subject Classification: 62G05, 62G08, 62G20, 62P10.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую модель бинарных откликов, которая носит условное название *зависимость доза-эффект* [1] и которую можно описать следующим образом.

Пусть $\{(X_i, U_i), 1 \leq i \leq n\}$ – потенциальная повторная выборка из неизвестного распределения $F(x)Q(y)$, $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$, $Q(y) = \mathbf{P}(U_i < y)$, $x, y \in \mathbf{R}$, вместо которой наблюдается выборка $\mathcal{U}^{(n)} = \{(U_i, W_i), 1 \leq i \leq n\}$, где $W_i = \chi(X_i < U_i)$ есть индикатор события $(X_i < U_i)$. Здесь U_i рассматриваются как вводимые дозы, а W_i – как эффект от воздействия дозы U_i . Пусть $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, причем $f(x) > 0$. Эту ситуацию будем называть *случайным* планом эксперимента.

Наряду со случайным планом рассматриваются *фиксированные* планы эксперимента. Именно, будем полагать вводимую дозу U неслучайной и положим $U_i = u_i, i = 0, 1, \dots, n+1$, где $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_n < u_{n+1} = 1$.

Одной из основных задач зависимости доза-эффект является оценка *эффективных доз* $ED_{100\lambda} = F^{-1}(\lambda) = x_\lambda, 0 < \lambda < 1$, по выборке $\mathcal{U}^{(n)}$. Для фиксированных планов эксперимента мы рассмотрим несколько непараметрических оценок и найдем их асимптотические (при $n \rightarrow \infty$) распределения.

Непараметрический подход к оцениванию предполагает наличие ядерных функций $K_r(x), K_d(x)$, фактически четных и финитных плотностей распределения с носителем на $[-1, 1]$, и величин h_r, h_d – сглаживающих параметров, которые неслучайны, зависят от объема выборки n и которые сходятся к нулю, когда $n \rightarrow \infty$, но $nh_r \rightarrow \infty, nh_d \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Положим также $H_d(u) = \int_{-\infty}^u K_d(x) dx$.

Для оценки функции $F(x)$ будем использовать статистику

$$F_{nh_r}(x) = \frac{1}{nh_r} \sum_{i=1}^n K_r\left(\frac{x - u_i}{h_r}\right) W_i.$$

M.S. TIKHOV, NONPARAMETRIC ESTIMATES OF THE EFFECTIVE DOSES AT QUANTAL RESPONSE.

© ТИХОВ М.С. 2013.

Поступила 16 февраля 2012 г.

В данной работе для фиксированных планов эксперимента в зависимости доза-эффект мы доказываем асимптотическую нормальность оценки

$$\begin{aligned}\hat{x}_{1,\lambda} &= \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) du = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H_d \left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d} \right)\end{aligned}\quad (1)$$

эффективной дозы x_λ , которую мы называем DNP-оценкой.

Мы также изучим асимптотическое поведение оценки для x_λ вида

$$\begin{aligned}\hat{x}_{2,\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) du}{\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{u - F_{nh_r}(i/n)}{h_d} \right) du} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} H_d \left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d} \right)}{\sum_{i=1}^n H_d \left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d} \right)},\end{aligned}\quad (2)$$

которая была предложена в работе [2]. Мы показываем, что оценка $\hat{x}_{2,\lambda}$ имеет такое же предельное распределение, что и оценка $\hat{x}_{1,\lambda}$.

Рассматривается также асимптотическое поведение оценки

$$\hat{x}_{3,\lambda} = \sqrt{\hat{S}_{2,\lambda} - b(h_r, h_d)},$$

где

$$\hat{S}_{2,\lambda} = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) du = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{2i}{n} H_d \left(\frac{\lambda - F_{nh_r}(i/n)}{h_d} \right),$$

а $b(h_r, h_d)$ – некоторые константы, зависящие от h_r, h_d (см. теорему 4.1), и показываем, что оценка $\hat{x}_{3,\lambda}$ является состоятельной оценкой x_λ , а ее предельная дисперсия меньше, чем предельная дисперсия оценок $\hat{x}_{1,\lambda}, \hat{x}_{2,\lambda}$.

Отметим, что в работе [3] для регрессионной модели

$$Y_i = m(X_i) + \sigma(X_i)\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3)$$

где $\{X_i, Y_i\}_{i=1}^n$ есть двумерная выборка независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (с.в.), причем с.в. X_i имеет плотность распределения $f(x) > 0$, а её значения расположены на отрезке $[0, 1]$, с.в. ε_i также предполагаются н.о.р. с нулевым ожиданием и имеют четвертый момент (причем $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ независимы от $\{X_i\}_{i=1}^n$), а регрессионная функция $m(x)$ предполагается строго монотонной, была предложена оценка $m_I^{-1}(\lambda)$ для функции $m^{-1}(\lambda)$ вида (1). Там же было показано, что оценка $m_I^{-1}(\lambda)$ является асимптотически нормальной. В [3] для доказательства асимптотической нормальности оценки $m_I^{-1}(\lambda)$ существенно использовалась независимость величин $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$. В зависимости доза-эффект величины W_i являются бинарными величинами, поэтому мы не можем использовать представление (3). Здесь для доказательства асимптотической нормальности требуется несколько иной подход.

2. ОСНОВНЫЕ УСЛОВИЯ

Пусть $\{X_i, i = 1, \dots, n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных с X на отрезке $[0, 1]$ случайных величин с функцией распределения $F(x)$; $P = \{u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ – упорядоченное разбиение отрезка $[0, 1]$, $u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_n < 1 = u_{n+1}$.

Сформулируем условия на параметры h_r и h_d .

Условия (Н).

$$(H_1) \quad h_r = h_r(n), h_d = h_d(n), \text{ причем } h_r \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, h_d \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \\ \text{но } nh_r \rightarrow \infty, nh_d \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

$$(H_2) \quad h_d/h_r \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

$$(H_3) \quad nh_r^5 = O(1) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

$$(H_4) \quad nh_r h_d^{8/3} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty.$$

В качестве примера рассмотрим $h_r = n^{-1/5}$, $h_d = n^{-1/4}$. Очевидно, что для этих последовательностей условия (Н) будут выполнены.

Положим $\|K\|^2 = \int_{-1}^1 K^2(x) dx$.

Условия на ядерные функции $K_r(x)$ и $K_d(x)$.

Условия (К).

$$(K_1) \quad K_{r(d)}(x) \geq 0, \text{ причем } K_{r(d)}(x) = 0, x \notin [-1, 1].$$

$$(K_2) \quad \int_{-1}^1 K_r(x) dx = 1, \quad \int_{-1}^1 K_d(x) dx = 1.$$

$$(K_3) \quad K_{r(d)}(x) = K_{r(d)}(-x), x \in \mathbf{R}.$$

$$(K_4) \quad \text{Существуют непрерывные ограниченные производные функций } K_r(x), \\ K_d(x) \text{ до третьего порядка включительно на отрезке } [-1, 1].$$

$$(K_5) \quad \|K_j\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |K_j(x)| = k_j < \infty \text{ для } j = r, d.$$

Замечание 2.1. При условиях (К) существуют четверные моменты у распределений с плотностями $K_r(x)$, $K_d(x)$, причем

$$\nu_r^2 = \int x^2 K_r(x) dx, \quad \nu_d^2 = \int x^2 K_d(x) dx, \\ \mu_r^4 = \int x^4 K_r(x) dx, \quad \mu_d^4 = \int x^4 K_d(x) dx.$$

Определим вариацию функции K (см. [4], с. 234).

Пусть $K : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. *Вариацией* функции $K = K(u)$ на отрезке $[a, b]$ называется следующая величина: $V(K) = V_a^b(K) = \sup_P \sum_{k=0}^m |K(u_{k+1}) - K(u_k)|$, т.е. точная верхняя грань по всем упорядоченным разбиениям P отрезка $[a, b]$. Всюду в работе мы рассматриваем вариации функций на отрезке $[0, 1]$.

Замечание 2.2. Из условия ограниченности производных функций $K_r(x)$, $K_d(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ (условие K_4) следует, что их вариации ограничены (см. [4], с. 235), т.е. $V(K_{d(r)}) < \infty$.

Условие (F).

(F₁) Существует третья непрерывная ограниченная производная плотности распределения $f(x) = F'(x)$, причем $f(x) \geq C_0 > 0$ для $0 \leq x \leq 1$, т.е. плотность $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ отделима от нуля.

Условие (P).

(P₁) При $n \rightarrow \infty$

$$\max_{k=0,1,\dots,n} \max \left\{ \left| u_k - \frac{k}{n} \right|, \left| u_{k+1} - \frac{k}{n} \right| \right\} = O \left(\frac{1}{n} \right).$$

Из условия (P) следует, что $u_k = \frac{k}{n} + O \left(\frac{1}{n} \right)$, причем последовательность $n \left(u_k - \frac{k}{n} \right)$ равномерно по $0 \leq k \leq n$ ограничена константой C .

Всюду в работе будем предполагать, что выполнены (основные) условия (H), (K), (F), (P).

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе представлены вспомогательные результаты, необходимые для изучения асимптотики введенных выше оценок $\hat{x}_{1,\lambda}, \hat{x}_{2,\lambda}, \hat{x}_{3,\lambda}$.

Приведем сначала неравенство Коксма-Нлаўка (см. [5], с.18), которое позволяет оценить скорость сходимости интегральных сумм к соответствующему интегралу.

Пусть \mathcal{B} – лебегова σ -алгебра на $I = [0, 1]$ и ρ – лебегова мера на \mathcal{B} . Для $P = \{u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$ с $u_0 = 0 < u_1 < \dots < u_n < 1 = u_{n+1}$ и $B \in \mathcal{B}$ определим

$$A(B; P) = \sum_{i=1}^n \chi_B(u_i), \quad D_n(\mathcal{B}; P) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \frac{A(B; P)}{n} - \rho(B) \right|,$$

где $\chi_B(x)$ – индикатор множества B . Положим $D_n^*(P) = D_n(J_c^*, P)$, где J_c^* есть подмножества на I вида $[0, u_i]$.

Для любой ограниченной функции $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ положим $\|\psi\|_I = \sup_{x \in I} |\psi(x)|$.

Теорема 3.1 [5] (Неравенство Коксма-Нлаўка). *Если функция $f(u)$ ($0 \leq u \leq 1$) имеет ограниченную вариацию $V(f)$ на $[0, 1]$, то для любых $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1$ мы имеем*

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u_i) - \int_0^1 f(u) du \right| \leq V(f) D_n^*(u_1, \dots, u_n).$$

Приведем также еще две леммы из [5].

Лемма 3.2. *Если $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in [0, 1]$ удовлетворяют неравенствам $|x_i - y_i| \leq \varepsilon$ для $1 \leq i \leq n$, то*

$$|D_n^*(x_1, \dots, x_n) - D_n^*(y_1, \dots, y_n)| \leq \varepsilon.$$

Замечание 3.1. Из леммы 3.2 следует, что $D_n^*(x_1, \dots, x_n)$ есть непрерывная функция переменных (x_1, \dots, x_n) .

Лемма 3.3. *Если $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < 1$, то*

$$D_n^*(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{2n} + \max_{1 \leq i \leq n} \left| u_i - \frac{2i-1}{2n} \right|.$$

Замечание 3.2. Если $u_i = \frac{i}{n}$, то $\frac{i}{n} - \frac{2i-1}{2n} = \frac{1}{2n}$ и $D_n^*(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n}$.

Теорема 3.2 ([6], с.337; [7], с. 299). Если $\varphi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, и

$$\varphi(n)(T_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \tau^2)$$

то

$$\varphi(n)(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, \tau^2(g'(\theta))^2).$$

при условии, что существует непрерывная не равная нулю производная $g'(\theta)$ функции $g(\theta)$.

Для дальнейшего нам понадобится также следующий вспомогательный результат. Рассмотрим функцию

$$\tilde{f} = \tilde{f}(u) = \frac{1}{h_d} K_d \left(\frac{F(u) - \lambda}{h_d} \right)$$

и оценим ее вариацию на отрезке $[0, 1]$.

Лемма 3.4. Если выполнены основные условия, то

$$\bigvee(\tilde{f}) = \sup \sum_{j=1}^l |\tilde{f}(u_j) - \tilde{f}(u_{j-1})| = O\left(\frac{1}{h_d}\right),$$

где супремум берется по всем возможным упорядоченным разбиениям $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_l < 1$ отрезка $[0, 1]$.

Доказательство. Пусть $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_l < 1$ есть произвольное упорядоченное разбиение отрезка $[0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^l |\tilde{f}(u_j) - \tilde{f}(u_{j-1})| &= \frac{1}{h_d} \sum_{j=1}^l \left| K_d \left(\frac{F(u_j) - \lambda}{h_d} \right) - K_d \left(\frac{F(u_{j-1}) - \lambda}{h_d} \right) \right| = \\ &= \frac{1}{h_d} \left\{ \sum_{j=1}^{l_1} + \sum_{j=l_2+2}^l + \sum_{j=l_1+2}^{l_2} \right\} \left| K_d \left(\frac{F(u_j) - \lambda}{h_d} \right) - K_d \left(\frac{F(u_{j-1}) - \lambda}{h_d} \right) \right| + \\ &\quad + \frac{1}{h_d} \left| K_d \left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d} \right) - K_d \left(\frac{F(u_{l_1}) - \lambda}{h_d} \right) \right| + \\ &\quad + \frac{1}{h_d} \left| K_d \left(\frac{F(u_{l_2+1}) - \lambda}{h_d} \right) - K_d \left(\frac{F(u_{l_2+2}) - \lambda}{h_d} \right) \right|, \end{aligned}$$

где l_1 и l_2 таковы, что

$$F(u_{l_1}) \leq \lambda - h_d, \quad F(u_{l_1+1}) > \lambda - h_d,$$

$$F(u_{l_2+1}) < \lambda + h_d, \quad F(u_{l_2+2}) \geq \lambda + h_d.$$

Поскольку $K_d(x) = 0$ для $|x| \geq 1$, то сумма $\sum_{j=1}^{l_1} + \sum_{j=l_2+2}^l$ будет равна нулю, а

$$K_d \left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d} \right) = K_d(-1) + K'_d(\xi) \left(\frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d} + 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

где $-1 \leq \xi \leq \frac{F(u_{l_1+1}) - \lambda}{h_d}$.

Аналогично можно показать, что $K_d \left(\frac{F(u_{l_2}) - \lambda}{h_d} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

В оставшейся сумме все точки $\frac{F(u_j) - \lambda}{h_d}$ принадлежат отрезку $[-1, 1]$, и поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_d} \sum_{j=l_1+2}^{l_2} \left| K_d \left(\frac{F(u_j) - \lambda}{h_d} \right) - K_d \left(\frac{F(u_{j-1}) - \lambda}{h_d} \right) \right| = \\ & = \frac{1}{h_d} \sum_{j=l_1+2}^{l_2} |K'_d(\xi_j)| \frac{F(u_j) - F(u_{j-1})}{h_d} \leq \frac{M}{h_d^2} (F(u_{l_2}) - F(u_{l_1+2})) \leq \\ & \leq \frac{2Mh_d}{h_d^2} = \frac{2M}{h_d}, \end{aligned}$$

где $\xi_j \in [-1, 1]$, $|K'_d(\xi_j)| \leq M$ и M не зависит от n . Отсюда следует результат леммы.

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Асимптотика оценки $\hat{x}_{1,\lambda}$. Представим статистику $\hat{x}_{1,\lambda}$ в следующем виде:

$$\hat{x}_{1,\lambda} = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) du = x_{\lambda,n} + \Delta,$$

где

$$\begin{aligned} x_{\lambda,n} &= \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F(i/n) - u}{h_d} \right) du, \\ \Delta &= \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\lambda} \left\{ K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) - K_d \left(\frac{F(i/n) - u}{h_d} \right) \right\} du = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(H_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) - H_d \left(\frac{F(i/n) - u}{h_d} \right) \right). \end{aligned}$$

Асимптотическое поведение $x_{\lambda,n}$ представлено в следующей лемме.

Лемма 4.1. При $n \rightarrow \infty$

$$x_{\lambda,n} = x_{\lambda} + a_{2,d}h_d^2 + o(h_d^2),$$

где

$$x_{\lambda} = F^{-1}(\lambda), \quad a_{2,d} = \frac{1}{2}(F^{-1})''(\lambda)\nu_d^2 = -\frac{\nu_d^2 f'(x_{\lambda})}{2f^3(x_{\lambda})}.$$

Доказательство. Используя неравенство Кокса-Нлаука, лемму 3.4 и замечание 3.2, получаем:

$$\begin{aligned} x_{\lambda,n} &= \frac{1}{h_d} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F(x) - u}{h_d} \right) dudx + O \left(\frac{1}{nh_d} \right) = \\ &= \int_0^1 dx \int_{\frac{F(x)-\lambda}{h_d}}^1 K_d(z) dz + O \left(\frac{1}{nh_d} \right). \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{F(x)-\lambda}{h_d} \leq -1$ при $x \leq F^{-1}(\lambda - h_d) \leq 1$, то

$$x_{\lambda,n} = \int_0^{F^{-1}(\lambda-h_d)} dx \int_{-1}^1 K_d(z) dz + \int_{F^{-1}(\lambda-h_d)}^1 dx \int_{\frac{F(x)-\lambda}{h_d}}^1 K_d(z) dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Первый интеграл равен $F^{-1}(\lambda - h_d)$, а во втором сделаем замену $y = \frac{F(x)-\lambda}{h_d}$ и замечая, что $\lambda < F(1) = 1$, а $F \in C^2$, $f(x) \geq C_0 > 0$, получим

$$\begin{aligned} x_{\lambda,n} &= F^{-1}(\lambda - h_d) + h_d \int_{-1}^{\frac{F(1)-\lambda}{h_d}} dy \int_y^1 K_d(z) (F^{-1})'(\lambda + h_d y) dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) = \\ &= F^{-1}(\lambda - h_d) + h_d \int_{-1}^1 dy \int_y^1 K_d(z) \{(F^{-1})'(\lambda) + (F^{-1})''(\lambda) y h_d + O(h_d^2)\} dz + O\left(\frac{1}{nh_d}\right). \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{-1}^1 dy \int_y^1 K_d(z) dz = 1, \quad \int_{-1}^1 y dy \int_y^1 K_d(z) dz = \frac{1}{2} \nu_d^2 - \frac{1}{2},$$

$$\sup_{t,x \in [0,1]} |(F^{-1})'(t) - (F^{-1})'(x) - (t-x)(F^{-1})''(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x \in [0,1]} |(F^{-1})'''(x)|,$$

а

$$(F^{-1})'''(x) = \frac{3(f'(F^{-1}(x)))^2}{(f(F^{-1}(x)))^5} - \frac{f''(F^{-1}(x))}{(f(F^{-1}(x)))^4},$$

то в силу отделимости плотности от нуля и ограниченности производных функции распределения получаем, что

$$\sup_{t,x \in [0,1]} |(F^{-1})'(t) - (F^{-1})'(x) - (t-x)(F^{-1})''(x)| \leq C.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} x_{\lambda,n} &= F^{-1}(\lambda - h_d) + \\ &+ h_d \left((F^{-1})'(\lambda) + (F^{-1})''(\lambda) h_d \int_{-1}^1 y dy \int_y^1 K_d(z) dz + O(h_d^2) \right) + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) = \\ &= F^{-1}(\lambda) + \frac{1}{2} h_d^2 (F^{-1})''(\lambda) \nu_d^2 + O\left(h_d^3 + \frac{1}{nh_d}\right), \end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы 4.1.

Рассмотрим величину Δ и представим ее в следующем виде:

$$\Delta = \Delta_1 + \frac{1}{2} \Delta_2 + \frac{1}{6} \Delta_3.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right) (F_{nh_r}(i/n) - F(i/n)), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{nh_d^2} \sum_{i=1}^n K_d'\left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d}\right) (F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^2, \end{aligned}$$

$$\Delta_3 = -\frac{1}{nh_d^3} \sum_{i=1}^n K_d'' \left(\frac{\lambda - \xi_i}{h_d} \right) (F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^3,$$

где $|\xi_i - F(i/n)| \leq |F(i/n) - F_{nh_r}(i/n)|$.

Лемма 4.2. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\Delta_1 - a_{2,r}h_d^2) \xrightarrow{d} N(0, g_2^2),$$

где

$$a_{2,r} = -\frac{\nu_r^2}{2} F''(F^{-1}(\lambda))(F^{-1})'(\lambda) = -\frac{\nu_r^2 f'(x_\lambda)}{2f(x_\lambda)},$$

$$g_2^2 = \lambda(1-\lambda) \|K_r\|^2 [(F^{-1})'(\lambda)]^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{f^2(x_\lambda)} \|K_r\|^2.$$

Доказательство. Определим величины

$$\Delta_{1,1} = -\frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) (F_{nh_r}(i/n) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))),$$

$$\Delta_{1,2} = -\frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) (\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n)) - F(i/n)).$$

Тогда $\Delta_1 = \Delta_{1,1} + \Delta_{1,2}$, причем величина $\Delta_{1,2}$ неслучайна.

Из [8], с. 68, следует, что

$$\sup_x |\mathbf{E}(F_{nh_r}(x) - F(x))| \leq \frac{1}{2} h_r^2 \nu_r^2 \sup_x |f'(x)| \leq \frac{M_1 h_r^2 \nu_r^2}{2}.$$

Используя это замечание, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\Delta_1) &= \mathbf{E}(\Delta_{1,2}) = -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2nh_d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) F''(i/n)(1 + o(1)) = \\ &= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2h_d} \int_0^1 K_d \left(\frac{F(x) - \lambda}{h_d} \right) F''(x) dx (1 + o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) = \\ &= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} \int_{-1}^1 K_d(z)(F^{-1})'(\lambda + zh_d) F''(F^{-1}(\lambda + zh_d)) dz (1 + o(1)) + O\left(\frac{h_r^2}{nh_d}\right) = \\ &= -\frac{\nu_r^2}{2} h_r^2 (F^{-1})'(\lambda) F''(F^{-1}(\lambda)) + o(h_r^2). \end{aligned}$$

Далее, подсчитаем дисперсию величины Δ_1 . Имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\Delta_1) &= \mathbf{D}(\Delta_{1,1}) = \\ &= \frac{1}{n^4 h_d^2 h_r^2} \sum_{j=1}^n F(u_j)(1 - F(u_j)) \left\{ \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) K_r \left(\frac{i/n - u_j}{h_r} \right) \right\}^2 = \\ &= \frac{1}{n^2 h_d^2 h_r^2} \sum_{j=1}^n F(u_j)(1 - F(u_j)) \left\{ \int_0^1 K_d \left(\frac{F(x) - \lambda}{h_d} \right) K_r \left(\frac{x - u_j}{h_r} \right) dx + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^2. \end{aligned}$$

Сделаем замену $z = \frac{F(x) - \lambda}{h_d}$ и применим неравенство Коксма-Шлавка. Тогда

$$\mathbf{D}(\Delta_1) = \frac{1}{nh_d^2 h_r^2} \int_0^1 F(y)(1 - F(y)) \times \\ \times \left\{ \int_0^1 K_d \left(\frac{F(x) - \lambda}{h_d} \right) K_r \left(\frac{x - y}{h_r} \right) dx + O \left(\frac{1}{n} \right) \right\}^2 dy + O \left(\frac{1}{n^2 h_r^2} \right).$$

Кроме того, при $n \rightarrow \infty$

$$K_r \left(\frac{F^{-1}(\lambda + h_d z) - y}{h_r} \right) = K_r \left(\frac{F^{-1}(\lambda) - y}{h_r} \right) + o(1).$$

Учитывая последнее и делая замену $t = \frac{F^{-1}(\lambda) - y}{h_r}$, получаем окончательно

$$\mathbf{D}(\Delta_1) = \frac{\lambda(1 - \lambda) \|K_r\|^2}{f^2(x_\lambda) n h_r} + o \left(\frac{1}{n h_r} \right).$$

Теперь, чтобы доказать асимптотическую нормальность величины Δ_1 , достаточно доказать асимптотическую нормальность $\Delta_{1,1}$. Для этого представим $\Delta_{1,1}$ в виде суммы $\Delta_{1,1} = \sum_{j=1}^n \xi_j$, где

$$\xi_j = -\frac{1}{n^2 h_d h_r} (\chi(X_j < u_j) - F(u_j)) \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) K_r \left(\frac{i/n - u_j}{h_r} \right).$$

Пусть $G(u) = F(u) - 4F^2(u) + 6F^3(u) - 3F^4(u)$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j - \mathbf{E}(\xi_j))^4 &= \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j)^4 = \frac{1}{n^8 h_d^4 h_r^4} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\chi(X_j < u_j) - F(u_j))^4 \times \\ &\times \left\{ \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) K_r \left(\frac{i/n - u_j}{h_r} \right) \right\}^4 = \\ &= \frac{1}{n^8 h_d^4 h_r^4} \sum_{j=1}^n G(u_j) \left\{ \int_0^1 K_d \left(\frac{F(x) - \lambda}{h_d} \right) K_r \left(\frac{x - u_j}{h_r} \right) dx + O \left(\frac{1}{n} \right) \right\}^4 = \\ &= \frac{1}{n^4 h_r^4} \sum_{j=1}^n G(u_j) \left\{ \int_0^1 K_d(y) K_r \left(\frac{x - u_j}{h_r} \right) x'_y dy + O \left(\frac{1}{n h_d} \right) \right\}^4 = \\ &= \frac{1}{n^3 h_r^3} \int_{-1}^1 G(x - z h_r) \left\{ \int_{-1}^1 K_d(y) K_r(z) (F^{-1})'(\lambda + h_d y) dy \right\}^4 dz + O \left(\frac{1}{n^4 h_d^4} \right) = O \left(\frac{1}{n^3 h_d^3} \right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j - \mathbf{E}(\xi_j))^4}{\left(\mathbf{D} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j \right) \right)^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(\xi_j - \mathbf{E}(\xi_j))^4}{\left(\mathbf{D}(\Delta_1) \right)^2} = O \left(\frac{1}{n h_r} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то для последовательности $\sum_{j=1}^n \xi_j$ выполнены условия центральной предельной теоремы Ляпунова. Отсюда получаем утверждение леммы 4.2.

Лемма 4.3. При $n \rightarrow \infty$

$$\Delta_2 + \Delta_3 = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала Δ_2 . Имеем:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\Delta_2)| &\leq \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{h_d} K_d' \left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d} \right) \right| \mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^2 \leq \\ &\leq \frac{C_1 h_r^4}{nh_d} \sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{h_d} K_d' \left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d} \right) \right| = \\ &= \frac{C_1 h_r^4}{h_d} \int_{-1}^1 |K_d'(t)| dt + O\left(\frac{h_r^4}{nh_d^2}\right) = \\ &= O\left(\frac{h_r^4}{h_d}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right). \end{aligned}$$

Далее,

$$-\mathbf{E}(\Delta_3) = \frac{1}{nh_d^3} \sum_{i=1}^n K_d'' \left(\frac{\lambda - \xi_i}{h_d} \right) \mathbf{E}((F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^3).$$

Пусть $A(x) = \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - F(x))^3)$. Тогда

$$\begin{aligned} A(x) &= \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) + \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x))^3) = \\ &= \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) + (\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x))^3 + 3\mathbf{D}(F_{nh_r}) \cdot (\mathbf{E}(F_{nh_r}(x)) - F(x)) = \\ &= \mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) + O\left(h_r^6 + \frac{h_r}{n}\right), \end{aligned}$$

причем оценки равномерны по x и, значит,

$$|\mathbf{E}(\Delta_3)| \leq \frac{M_2}{h_d^3} \int_{-1}^1 A(x) dx.$$

Рассмотрим теперь

$$\mathbf{E}((F_{nh_r}(x) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(x)))^3) = \mathbf{E}\left((n^{-1} \sum_{j=1}^n \eta_j(x))^3\right),$$

где

$$\eta_j(x) = \frac{1}{h_r} (\chi(X_j < x) - F(x)) K_r \left(\frac{x - u}{h_r} \right).$$

Тогда (см. [9], с. 379)

$$\mathbf{E}\left((n^{-1} \sum_{j=1}^n \eta_j(x))^3\right) = n^{-2} \mathbf{E}(\eta_1^3(x)) = \frac{F(x) - 3F^2(x) + 2F^3(x)}{n^2 h_d^3} K_r^3 \left(\frac{x - u}{h_r} \right).$$

Воспользовавшись ограниченностью $K_d''(t)$ и тем, что

$$\frac{1}{h_r} \int_{-1}^1 K_r^3 \left(\frac{x - u}{h_r} \right) dx \leq M_3 < \infty,$$

получим

$$|\mathbf{E}(\Delta_3)| = O\left(\frac{1}{n^2 h_d^3 h_r^2}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}}\right).$$

Аналогично можно показать, что $\mathbf{E}(\Delta_2^2)$, $\mathbf{E}(\Delta_3^2)$ сходятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Значит, из неравенства Чебышева получаем результат леммы 4.3

Из лемм 4.1 – 4.3 имеем следующую теорему.

Теорема 4.1. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{1,\lambda} - x_\lambda - b_2(h_r, h_d)) \xrightarrow{d} N(0, g_2^2),$$

где

$$b_2(h_r, h_d) = a_{2,d}h_d^2 + a_{2,r}h_r^2, \quad a_{2,r} = -\frac{\nu_r^2 f'(x_\lambda)}{2f(x_\lambda)}, \quad a_{2,d} = -\frac{\nu_d^2 f'(x_\lambda)}{2f^3(x_\lambda)},$$

$$g_2^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)\|K_r\|^2}{f^2(x_\lambda)}.$$

4.2. Асимптотика оценок $\hat{x}_{2,\lambda}$ и $\hat{x}_{3,\lambda}$. Для изучения асимптотики оценки $\hat{x}_{2,\lambda}$ представим ее в следующем виде:

$$\hat{x}_{2,\lambda} = \frac{\hat{S}_{2,\lambda}}{\hat{x}_{1,\lambda}},$$

где

$$\hat{S}_{2,\lambda} = x_{2,\lambda} + 2\Lambda, \quad x_{2,\lambda} = \frac{2}{nh_d} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F(i/n) - u}{h_d} \right) du,$$

$$\Lambda = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \int_{-\infty}^{\lambda} \left\{ K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) - K_d \left(\frac{F(i/n) - u}{h_d} \right) \right\} du.$$

Лемма 4.4. При $n \rightarrow \infty$

$$x_{2,\lambda} = x_\lambda^2 + h_d^2 \nu_d^2 x_\lambda \left(-\frac{f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)} \right) + o(h_d^2).$$

Доказательство. Применяя неравенство Кохсма-Шлавка, получаем

$$x_{2,\lambda} = \frac{2}{h_d} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\lambda} x K_d \left(\frac{F(x) - u}{h_d} \right) dudx + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= 2 \int_0^1 x dx \int_{(F(x)-\lambda)/h_d}^1 K_d(y) dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= 2 \int_0^{F^{-1}(\lambda-h_d)} x dx \int_{-1}^1 K_d(y) dy + 2 \int_{F^{-1}(\lambda-h_d)}^1 x dx \int_{(F(x)-\lambda)/h_d}^1 K_d(y) dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right).$$

Первый интеграл вычисляется непосредственно, а во втором сделаем замену $t = \frac{F(x) - \lambda}{h_d}$. Тогда получаем

$$x_{2,\lambda} = (F^{-1}(\lambda - h_d))^2 +$$

$$+ 2h_d \int_{-1}^{(F(1)-\lambda)/h_d} (F^{-1})'(\lambda + th_d) F^{-1}(\lambda + th_d) dt \int_t^1 K_d(y) dy + O\left(\frac{1}{nh_d}\right) =$$

$$= \left\{ F^{-1}(\lambda) - (F^{-1})'(\lambda)h_d + (F^{-1})''(\lambda)\frac{h_d^2}{2} + o(h_d^2) \right\}^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +2h_d(F^{-1})'(\lambda)F^{-1}(\lambda) \int_{-1}^1 dt \int_t^1 K_d(y) dy + \\
& +2h_d^2 \int_{-1}^1 t dt \int_t^1 K_d(y) dy \left\{ (F^{-1})''(\lambda)F^{-1}(\lambda) + [(F^{-1})'(\lambda)]^2 \right\} + o(h_d^2).
\end{aligned}$$

Так как

$$\int_{-1}^1 dt \int_t^1 K_d(y) dy = 1, \quad 2 \int_{-1}^1 dt \int_t^1 K_d(y)t dy = \nu_d^2 - 1,$$

то

$$\begin{aligned}
x_{2,\lambda} = & \left\{ (F^{-1}(\lambda))^2 + ((F^{-1})'(\lambda))^2 h_d^2 - 2F^{-1}(\lambda)(F^{-1})'(\lambda)h_d + \right. \\
& \left. + F^{-1}(\lambda)(F^{-1})''(\lambda)h_d^2 \right\} + 2(F^{-1})'(\lambda)F^{-1}(\lambda)h_d + \\
& + h_d^2(\nu_d^2 - 1)F^{-1}(\lambda) \left\{ (F^{-1})''(\lambda) + ((F^{-1})'(\lambda))^2 \right\} + o(h_d^2).
\end{aligned}$$

Последнее завершает доказательство леммы 4.4.

Представим теперь величину Λ в виде суммы $\Lambda = \Lambda_1 + \frac{1}{2}\Lambda_2 + \frac{1}{6}\Lambda_3$, где

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= -\frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{\lambda - F(i/n)}{h_d} \right) \frac{i}{n} (F_{nh_r}(i/n) - F(i/n)), \\
\Lambda_2 &= \frac{1}{nh_d^2} \sum_{i=1}^n K_d' \left(\frac{F(i/n) - u}{h_d} \right) \frac{i}{n} (F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^2, \\
\Lambda_3 &= -\frac{1}{nh_d^3} \sum_{i=1}^n K_d'' \left(\frac{\xi_i - u}{h_d} \right) \frac{i}{n} (F_{nh_r}(i/n) - F(i/n))^3, \\
|\xi_i - F(i/n)| &\leq |F(i/n) - F_{nh_r}(i/n)|.
\end{aligned}$$

Лемма 4.5 При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\Lambda_1 - a_{1,r}h_r^2) \xrightarrow{d} N(0, g_1^2),$$

где

$$a_{1,r} = -\frac{\nu_r^2 x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^4(x_\lambda)}, \quad g_1^2 = \frac{4\lambda(1-\lambda)x_\lambda^2}{f^2(x_\lambda)} \|K_r\|^2.$$

Доказательство. Пусть

$$\begin{aligned}
\Lambda_{1,1} &= -\frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) \frac{i}{n} (F_{nh_r}(i/n) - \mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n))), \\
\Lambda_{1,2} &= -\frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) \frac{i}{n} (\mathbf{E}(F_{nh_r}(i/n)) - F(i/n)).
\end{aligned}$$

Тогда $\Lambda_1 = \Lambda_{1,1} + \Lambda_{1,2}$.

Учитывая, что $\mathbf{E}(F_{nh_r}(x) - F(x)) = \frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} f'(x) + o(h_r^2)$, получим

$$\mathbf{E}(\Lambda_1) = \mathbf{E}(\Lambda_{1,2}) = -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2nh_d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) \frac{i}{n} F''(i/n)(1 + o(1)) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2h_d} \int_0^1 K_d \left(\frac{F(x) - \lambda}{h_d} \right) x F''(x) dx (1 + o(1)) + O \left(\frac{h_r^2}{nh_d} \right) = \\
&= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} \int_{-1}^1 K_d(z) F^{-1}(\lambda + zh_d) (F^{-1})'(\lambda + zh_d) F''(F^{-1}(\lambda + zh_d)) dz (1 + o(1)) + O \left(\frac{h_r^2}{nh_d} \right) = \\
&= -\frac{\nu_r^2 h_r^2}{2} F^{-1}(\lambda) (F^{-1})'(\lambda) F''(F^{-1}(\lambda)) + o(h_d^2).
\end{aligned}$$

Вычислим теперь дисперсию величины Λ_1 . Имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\Lambda_1) &= \mathbf{D}(\Lambda_{1,1}) = \\
&= \frac{1}{n^4 h_d^2 h_r^2} \sum_{j=1}^n F(u_j) (1 - F(u_j)) \left\{ \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F(i/n) - \lambda}{h_d} \right) K_r \left(\frac{i/n - u_j}{h_r} \right) \frac{i}{n} \right\}^2 = \\
&= \frac{1}{n^2 h_d^2 h_r^2} \sum_{j=1}^n F(u_j) (1 - F(u_j)) \left\{ \int_0^1 K_d \left(\frac{F(x) - \lambda}{h_d} \right) K_r \left(\frac{x - u_j}{h_r} \right) x dx + O \left(\frac{1}{n} \right) \right\}^2.
\end{aligned}$$

Делая замену $z = \frac{F(x) - \lambda}{h_d}$ и снова применяя неравенство Кохсма-Шлаука, получим

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\Lambda_1) &= \frac{1}{nh_d^2 h_r^2} \int_0^1 F(u) (1 - F(u)) du \times \\
&\times \left\{ \int_0^1 K_d(z) K_r \left(\frac{F^{-1}(\lambda + zh_d) - u}{h_r} \right) F^{-1}(\lambda + zh_d) (F^{-1})'(\lambda + zh_d) dx + O \left(\frac{1}{n} \right) \right\}^2 + O \left(\frac{1}{n^2 h_r^2} \right).
\end{aligned}$$

Используя то, что при $n \rightarrow \infty$

$$K_r \left(\frac{F^{-1}(\lambda + h_d z) - y}{h_r} \right) = K_r \left(\frac{F^{-1}(\lambda) - y}{h_r} \right) + o(1),$$

и делая замену $\frac{F^{-1}(\lambda) - u}{h_r}$, получим окончательно

$$\mathbf{D}(\Lambda_1) = \frac{1}{nh_r} \lambda (1 - \lambda) (F^{-1}(\lambda) (F^{-1})'(\lambda))^2 \|K_r\|^2 + o \left(\frac{1}{nh_r} \right) = \frac{\lambda (1 - \lambda) x_\lambda^2 \|K_r\|^2}{nh_r f^2(x_\lambda)} + o \left(\frac{1}{nh_r} \right).$$

Учитывая множитель 2 в определении статистики $\hat{S}_{2,\lambda}$, получим результат леммы 4.5.

Лемма 4.6. При $n \rightarrow \infty$

$$\Lambda_2 + \Lambda_3 = o \left(\frac{1}{\sqrt{nh_r}} \right).$$

Доказательство. Замечая, что $0 \leq i/n \leq 1$, и повторяя доказательство леммы 4.3, получим результат леммы 4.6.

Лемма 4.7. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{nh_r} (\hat{S}_{2,\lambda} - x_\lambda^2 - a_1(h_r, h_d) h_d^2) \xrightarrow{d} N(0, g_1^2),$$

где

$$g_1^2 = \frac{\lambda (1 - \lambda) x_\lambda^2}{f^2(x_\lambda)} \|K_r\|^2,$$

$$a_{1,d} = \nu_d^2 \left(-\frac{x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)} \right).$$

Доказательство этой леммы в основных чертах повторяет доказательство леммы 4.4, поэтому опущено.

Представим оценку $\hat{x}_{2,\lambda}$ в виде отношения $\frac{\beta}{\alpha}$, где

$$\beta = x_{2,\lambda} + \Lambda_1, \quad \alpha = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\lambda} K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - u}{h_d} \right) du.$$

Положим

$$\mu_1 = x_\lambda^2 \quad \mu_2 = x_\lambda.$$

Из представления

$$\begin{aligned} \hat{x}_{2,\lambda} - \frac{\mu_1}{\mu_2} &= \frac{\beta - \mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2^2}(\alpha - \mu_2) + \\ &+ O_p((\beta - \mu_1)(\alpha - \mu_2)) + O_p((\alpha - \mu_2)) \end{aligned}$$

(см. [10], р.327) и учитывая, что при $n \rightarrow \infty$

$$\tilde{g}^2 = \frac{g_1^2}{\mu_2^2} + \frac{g_2^2 \mu_1^2}{\mu_2^4} - 2\mathbf{cov} \left(\frac{\beta}{\mu_2}, \frac{\alpha \mu_1}{\mu_2^2} \right) \sim g^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)}{f^2(x_\lambda)} \|K_r\|^2,$$

получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{2,\lambda} - x_\lambda - b(h_r, h_d)) \xrightarrow{d} N(0, g^2),$$

где

$$\begin{aligned} b_1(h_r, h_d) &= a_{1,d}h_d^2 + a_{1,r}h_r^2, \\ a_{1,r} &= -\frac{\nu_r^2 x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^4(x_\lambda)}, \quad a_{1,d} = \nu_d^2 \left(-\frac{x_\lambda f'(x_\lambda)}{f^3(x_\lambda)} + \frac{1}{f^2(x_\lambda)} \right). \end{aligned}$$

В лемме 4.7 и в теореме 4.2 присутствуют величины $a_{1,r}$ и $a_{1,d}$, в которые входят производные от обратной функции $F^{-1}(\lambda)$, а именно, $(F^{-1})'(\lambda)$, $(F^{-1})''(\lambda)$, и которые неизвестны. Для их оценки мы предлагаем следующие статистики:

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{nh_d} \sum_{i=1}^n K_d \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - \lambda}{h_d} \right) \quad \text{и} \quad \hat{c}_2 = -\frac{1}{nh_d^2} \sum_{i=1}^n K_d' \left(\frac{F_{nh_r}(i/n) - \lambda}{h_d} \right).$$

Рассуждая аналогично предыдущему можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ они сходятся по вероятности к $(F^{-1})'(\lambda)$ и $(F^{-1})''(\lambda)$ соответственно. Тогда состоятельной оценкой для $\hat{b}_1(h_r, h_d)$ будет $\nu_r^2 h_r^2 \hat{c}_1 \hat{c}_2 + \nu_d^2 h_d^2 (\hat{c}_2 + \hat{c}_1^2)$.

Из теоремы 4.2 следует, что дисперсия предельного распределения оценки $\hat{x}_{2,\lambda}$ такая же, как и у оценки $\hat{x}_{1,\lambda}$, поэтому рассмотрим оценку

$$\hat{x}_{3,\lambda} = \sqrt{\hat{S}_{2,\lambda} - \hat{b}_1(h_r, h_d)}.$$

Воспользовавшись теоремой 3.1, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 4.3. При $n \rightarrow \infty$

$$\sqrt{nh_r}(\hat{x}_{3,\lambda} - x_\lambda) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, g_3^2),$$

где

$$g_3^2 = \frac{\lambda(1-\lambda)x_\lambda}{f^2(x_\lambda)} \|K_r\|^2.$$

Так как $0 < x_\lambda < 1$, то из теоремы 4.3 заключаем, что предельная дисперсия оценки $\hat{x}_{3,\lambda}$ меньше, чем предельная дисперсия оценок $\hat{x}_{1,\lambda}$ и $\hat{x}_{2,\lambda}$.

Построенная оценка $\hat{x}_{3,\lambda}$ использовалась для нахождения эффективных доз для примеров, взятых из книги [1], а также для примера Finney (см. [11], с.98).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Криштопенко С.В., Тихов М.С., Попова Е.Б. *Доза-эффект* М.: Медицина. 2008. 288 с.
2. Кочеганов В.М., Тихов М.С. *Оценивание эффективных доз в зависимости доза-эффект* // Обозрение Прикладной и Промышленной Математики. Т. 18, В. 1. 2011. С. 85–86.
3. H. Dette, N. Neumeier, K.F. Pilz *A note on nonparametric estimation of the effective dose in quantal bioassay* // Journal of the American Statistical Association. V. 100. 2005. P. 503–510.
4. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной* Лань. М. 2008. 560 с.
5. H. Niederreiter *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods* Society for industrial and applied mathematics. Philadelphia. Pensilvania. 1992. 241 p.
6. E.L. Lehmann *Theory of Point Estimation*. John Wiley & Sons. NY. 1983. 506 p.
7. Леман Э. *Теория точечного оценивания*. М.: Наука. 1991. 448 с.
8. Тихов М.С., Криштопенко Д.С., Ярошук М.В. *Оценивание распределений в зависимости доза-эффект при фиксированном плане эксперимента* // Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр. Перм. ун-т. Пермь. 2006. С. 66–77.
9. Крамер Г. *Математические методы статистики*. М.: Мир. 1976. 648 с.
10. M.S. Tikhov *Statistical Estimation on the Basis of Interval-Censored Data* // Journal Math. Sciences. V. 119, No. 3. 1974. P. 321–335.
11. D.J. Finney *Probit Analysis*. Cambridge University Press, NY. 1971. 333 p.

Михаил Семенович Тихов,
 Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,
 пр. Гагарина, 23,
 603950, г. Нижний Новгород, Россия
 E-mail: tikhovm@mail.ru