ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 63-81.

Посвящается памяти Василия Сергеевича Владимирова

УДК 517.956.226

РЕШЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ РОТОРА И СТОКСА

Р.С. САКС

Аннотация. В работе явно решаются спектральные задачи для операторов ротора, градиента дивергенции и Стокса в шаре B радиуса R. Собственные вектор-функции $\mathbf{u}_\kappa^\pm$ ротора, отвечающие ненулевым собственным значениям $\pm\lambda_\kappa$, выражаются явными формулами, также как и вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa$, соответствующие нулевому собственному значению:

$$rot\,\mathbf{u}_\kappa^\pm = \pm\lambda_\kappa\,\mathbf{u}_\kappa^\pm, \quad \psi_n(\pm\lambda_\kappa R) = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_\kappa^\pm|_S = 0; \quad rot\,\mathbf{q}_\kappa = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{q}_\kappa|_S = 0,$$

где

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad \kappa = (n,m,k),\ n \geq 0,\ m \in \mathbb{N},\ |k| \leqslant n$$

Эти же вектор-функции являются собственными для оператора градиент дивергенции с другими собственными значениями:

$$\nabla\,div\,\mathbf{u}_\kappa^\pm = 0; \quad \nabla\,div\,\mathbf{q}_\kappa = \mu_\kappa \mathbf{q}_\kappa, \quad \mu_\kappa = (\alpha_{n,m}/R)^2, \quad \psi_n'(\alpha_{n,m}) = 0.$$

Построенная система собственных вектор-функций ротора полна и ортогональна в пространстве $\mathbf{L}_2(B)$.

Собственные вектор-функции $(\mathbf{v}_\kappa,\ p_\kappa)$ оператора Стокса в шаре представляются в виде суммы двух собственных функций ротора, соответствующих противоположным собственным значениям: $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{u}_\kappa^+ + \mathbf{u}_\kappa^-$, $p_\kappa = \text{const}$.

Ключевые слова: операторы ротора, градиента дивергенции, Стокса, собственные значения, собственные функции, ряды Фурье.

Mathematics Subject Classification: 35P05, 35P10.

1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть G — ограниченная область в R^3 с кусочно-гладкой границей Γ, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к Γ.

В частности, G может быть шаром B, $|x| < R$, с границей S.

Задача 1. *Найти все собственные значения λ и собственные вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\mathbf{L}_2(G)$ оператора ротор такие, что*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \quad \text{в} \quad G, \tag{1}$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{n}$.

R.S. Saks, Solution of spectral problems for curl and Stokes operators.

Поступила 12 января 2012 г.

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ оператора $\mathcal{R}$ задачи 1 отнесем все вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$, удовлетворяющие граничному условию (2) и условию $\operatorname{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{L}_2(G)$.

Пространство основных вектор-функций $\mathbf{D}(G)$ содержится в $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ и плотно в $\mathbf{L}_2(G)$ [3].

Итак, задача состоит в нахождении тех значений λ, при которых уравнение (1) имеет ненулевые решения $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ из области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$, то есть в определении пары $(\lambda, \mathbf{u})$ — собственного значения λ и собственной функции $\mathbf{u} \neq 0$.

1.2. О приложениях. Собственные функции задачи 1 имеют приложения в гидродинамике, где они называются полями Бельтрами [9], в небесной механике и в физике плазмы они называются бессиловыми полями (см. С. Чандрасекхар [11] и Д. Тэйлор [12]).

По теории Д. Тэйлора, последнее перед распадом устойчивое равновесие в токамаках плазма принимает на бессиловых полях $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, для которых $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ и $\lambda = const$.

Согласно С. Чандрасекхару, магнитное поле $\mathbf{H}$ вне фотосферы звезды такого, что сила Лоренца L, пропорциональная векторному произведению $[\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}]$, исчезает.

По теореме В.И. Арнольда [13] 1965, почти все линии тока течений идеальной жидкости наматываются либо на цилиндры, либо на торы. При этом, стационарные течения со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, удовлетворяющей условию $[\operatorname{rot} \mathbf{v}, \mathbf{v}] = 0$, исключается из рассмотрения. Течения со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, удовлетворяющей уравнению (1), очевидно, удовлетворяют этому условию. Ссылаясь на вычисления М. Энона [14], В. Арнольд пишет, что такие течения "могут иметь линии тока с весьма сложной топологией, характерной для задач небесной механики".

В 1970 автор изучал краевые задачи для *не эллиптической* системы

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{3}$$

в ограниченной области G с гладкой границей и доказал, что при любых $\lambda \neq 0$ система имеет краевые задачи, разрешимые по Фредгольму с ненулевым индексом [17], [18]. Таковой является задача с краевым условием

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{\Gamma} = g. \tag{4}$$

В шаре B был найден способ явного решения задачи (3),(4) (см. [19]), выписаны формулы собственных функций ротора при $\lambda \neq 0$, как решения однородной задачи.

Особенность этой задачи состоит в том, что младший член $\lambda \mathbf{u}$ в системе (3) существенно улучшает ее разрешимость (см. §7).

Я опубликовал этот результат (формулы (36),(37)) в 2000 году [21], когда узнал о приложениях и о работе С. Чандрасекхара и П. Кендала [22] 1957, предложивших другой подход к решению спектральной задачи 1 в шаре и в цилиндре.

В шаре их метод *не проходит,* а в цилиндре он был реализован в работе Д. Монтгомери, Л. Тернера и Г. Вахалы [23] 1978 , которые предлагали использовать собственные функции ротора при изучении *турбулентности* в плазме.

Самосопряженные расширения оператора задачи 1 изучали П.Е. Берхин [24] 1975, И. Гига с З. Иошидой [25] 1990 и Р. Пикар [26] 1996.

Другие аспекты теории см. в книге В.В. Козлова [4] и в обзорах В.В. Пухначева [9] и А. Махалова и В. Николаенко [28].

В 2003 году О.А. Ладыженская решала задачу "О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей" [1] и интересовалась возможностью вычисления собственных функций оператора Стокса в областях простейших форм в явном виде.

Оказалось [16], что в периодическом случае собственные вектор-функции $(\mathbf{v}_k, p_k)$ оператора Стокса таковы, что $\nabla p_k = 0$, а вектор-функции $\mathbf{v}_k$ совпадают с соленоидальными собственными функциями ротора $\mathbf{u}_k^{\pm}$ при $k \neq 0$ и $\mathbf{u}_0^j$ при $k = 0$.

На их основе были построены глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве [29] и найдены уравнения, которые описывают взаимодействие базисных *вихревых* потоков [30].

Позднее [15] удалось вычислить *собственные функции* $(\mathbf{v}_n, p_n)$ *оператора Стокса в шаре с условием* $\mathbf{v}_n|_S = 0$. В этом случае каждая собственная вектор-функция $\mathbf{v}_n$ оператора Стокса есть сумма, $\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n^+ + \mathbf{u}_n^-$, собственных вектор-функций ротора $\mathbf{u}_n^\pm$ с противоположеными собственными значениями, а $p_n = \text{const.}$ (см. §6).

1.3. Структура работы и основные результаты. Решение задачи 1 в шаре при $\lambda \neq 0$ в § 1 сводится к решению спектральной задачи Дирихле для скалярного оператора Лапласа с условием $v(0) = 0$ в центре шара, которая решается явно в § 2. Ее собственные значения определяются нулями функций Бесселя полуцелого порядка, а собственные функции являются произведениями функций Бесселя и сферических функций.

В § 3 приводятся явные формулы для ненулевых собственных значений $\pm\lambda_{n,m}$ и собственных функций $\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}(\mathbf{x})$ ротора в шаре. Формулы (36),(37) были опубликованы в [21], а формулы (43) публикуются впервые. Они дают возможность вычислить распределение скоростей потока жидкости $\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}(\mathbf{x})$ внутри шара и представить себе движение такого потока.

Спектральная задача для оператора градиент дивергенции в § 4 сводится к решению спектральной задачи Неймана для скалярного оператора Лапласа, решения которой известны. Приводятся формулы (53) собственных функций $\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x})$ ротора в шаре с нулевым собственным значением. Эти формулы публикуются впервые.

В § 5 мы доказываем, что построенное семейство собственных вектор-функций ротора

$$\{\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}),\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}),\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})\} \quad n \geq 0,\ m \in \mathbb{N},\ |k| \leqslant n,$$

ортогонально и полно в пространстве $\mathbf{L}_2(B)$ вектор-функций $\mathbf{f}$ с интегрируемым квадратом модуля. Оно образует ортонормированный базис $\mathbf{L}_2(B)$.

Приводится аналог разложения Г. Вейля [10] векторного поля $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(B)$ (с нулевой компонентой $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\,\big|_S = 0$) на безвихревое поле $\mathbf{a}$ и соленоидальное поле $\mathbf{b}$: $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})$.

В § 6 определяется связь между решениями спектральных задач для операторов ротора и Стокса и указан явный вид решений спектральной задачи для оператора Стокса в шаре. Формулы (93) собственных вектор-функций оператора Стокса публикуются впервые.

В § 7 в качестве примера мы приводим решение краевой задачи (2),(3) методом Фурье в двух случаях: при $\lambda \neq 0, \pm\lambda_{n,m}$ и при $\lambda = 0$. Отметим, что при $\lambda = 0$ разрешимость задачи существенно ухудшается, и ее ядро становится бесконечномерным.

1.4. Исследование оператора задачи. Указанная система (3), а также система

$$\nabla\, \mathrm{div}\mathbf{u} + \lambda\, \mathbf{u} = \mathbf{f} \tag{5}$$

при $\lambda \neq 0$ принадлежат классу систем эллиптических по Вайнбергу и Грушину [6]. Так оператор rot $+\lambda$I первого порядка не является эллиптическим, так как ранг его символической матрицы $\sigma_1(\mathrm{rot})(\xi)$ равен двум при всех $\xi \in \mathcal{R}^3 \backslash 0$ и меньше трех [20].

Из соотношения div rot $\mathbf{u} \equiv 0$ для любой гладкой вектор-функции $\mathbf{u}$ и системы уравнений (1) при $\lambda \neq 0$ вытекает, что div$\mathbf{u} = 0$. Значит, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ является решением эллиптической системы:

$$rot\,\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} = 0, \quad div\,\mathbf{u} = 0. \tag{6}$$

Такой оператор $rot + \lambda I$ называется *приводимым к эллиптическому* оператором [6].

Легко проверить, что система (6) и краевое условие (2) составляют переопределенную эллиптическую краевую задачу в смысле теории В.А. Солонникова [7]. Из соотношения

$$(rot + \lambda\, I)(rot - \lambda\, I)\mathbf{u} = -\Delta\, \mathbf{u} + \nabla\, div\, \mathbf{u} - \lambda^2\, \mathbf{u} \tag{7}$$

видно, что решение $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(B)$ уравнения (1) при $\lambda \neq 0$ является также решением эллиптической системы 2-го порядка:

$$-\Delta \mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{u}, \quad div\, \mathbf{u} = 0. \tag{8}$$

Кроме того, любому решению $\mathbf{u}$ задачи (3),(4) соответствует решение $(\mathbf{u}, q)$ эллиптической краевой задачи

$$rot\, \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} + \nabla q = \mathbf{f}, \quad \lambda div\, \mathbf{u} = div\, \mathbf{f}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_\Gamma = g, \quad q|_\Gamma = 0. \tag{9}$$

с компонентой $q = 0$ в G и обратно.

Согласно теории эллиптической краевой задачи, в применении к задаче (9) в ограниченной области G с гладкой границей Γ, имеет место следующая оценка нормы $\|\mathbf{u}\|_{s+1}$ вектор-функции $\mathbf{u}$ в пространстве Соболева $\mathbf{H}^{s+1}(G) \equiv \mathbf{W}_2^{s+1}(G)$:

$$C_s \|\mathbf{u}\|_{s+1} \leqslant \|\mathrm{rot}\mathbf{u}\|_s + \|\mathrm{div}\mathbf{u}\|_s + |\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{s+1/2} + \|\mathbf{u}\|_s, \tag{10}$$

где C_s — положительная постоянная, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ — след на Γ нормальной компоненты $\mathbf{u}$, а $|\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{s+1/2}$ — его норма в $H^{s+1/2}(\Gamma)$, $s \geq 0$ (см. [7], [8], [20], [25]).

Из этой теории следует, что при $\lambda \neq 0$

a)*число линейно независимых решений задачи 1 конечно,*

b)*любое (обобщенное) решение задачи бесконечно дифференцируемо вплоть до границы, если граница области бесконечно дифференцируема.*

1.5. Сведение задачи 1 в шаре к спектральной задаче Дирихле. При построении собственных функций для ненулевых собственных значений ротора в шаре B мы приходим к следующей задаче Дирихле для оператора Лапласа.

Задача 2. *Найти собственные значения μ и собственные функции $v(x)$ скалярного оператора Лапласа $-\Delta$ такие, что*

$$-\Delta v = \mu\, v \quad \text{в} \quad B, \quad v|_S = 0, \quad v(0) = 0. \tag{11}$$

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{L}_1}$ оператора $\mathcal{L}_1$ задачи 2 отнесем все функции $v(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$, удовлетворяющие условиям $v|_S = 0$, $v(0) = 0$ и $\Delta v \in L_2(B)$.

Обозначим $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = r\, u_r$ скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$. Имеет место

Лемма 1. *Любому решению $(\lambda, \mathbf{u})$ задачи 1 в шаре B при $\lambda \neq 0$ соответствует решение $(\lambda^2, \mathbf{x} \cdot \mathbf{u})$ задачи 2.*

Действительно, в силу (8), (2) и ограниченности $\mathbf{u}$ в окрестности нуля имеем

$$-\Delta\, v = -\mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{u} - 2\mathrm{div}\mathbf{u} = \lambda^2\, v, \quad v|_S = R\, u_r|_{r=R} = 0, \quad v(0) = r\, u_r|_{r=0} = 0.$$

2. Решение спектральной задачи 2.

2.1. Нули функций $\psi_n(z)$. Пусть $\rho_{m,n} > 0$ суть нули функций Бесселя полуцелого порядка, т.е. $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho_{m,n}) = 0$, где $n \geq 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Они же являются нулями функций

$$\psi_n(z) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\Gamma\big(n+1+p+\frac{1}{2}\big)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2p+\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

Как показал Л. Эйлер (см. [3], §23 с. 356), цилиндрические функции $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ полуцелого порядка выражаются через элементарные, а именно,

$$\psi_n(z) = (-z)^n \left(\frac{d}{zdz}\right)^n \left(\frac{\sin z}{z}\right). \tag{13}$$

Откуда видно, что

$$\psi_n(-z) = (-1)^n \psi_n(z), \tag{14}$$

и что нули функций $\psi_n(z)$ лежат на действительной оси и располагаются на ней симметрично относительно точки $z=0$.

2.2. Спектральная задача Дирихле. Она решается методом разделения переменных в сферической системе координат (r,θ,φ). Обозначим через $\mathcal{L}$ оператор задачи. В учебнике В.С. Владимирова [3] в §26 доказано, что

собственные значения оператора $\mathcal{L}$ в шаре B равны $\lambda_{n,m}^2$, где $\lambda_{n,m}=\rho_{n,m}R^{-1}$, $n\geq 0$, $m\in N$, а числа $\rho_{n,m}>0$ суть нули функций $\psi_n(z)$,

соответствующие $\lambda_{n,m}^2$ действительные собственные функции v_κ имеют вид:

$$v_\kappa(r,\theta,\varphi)=c_\kappa\psi_n(\lambda_{n,m}r)Y_n^k(\theta,\varphi), \tag{15}$$

где $\kappa=(n,m,k)$ — мультииндекс, $n\geq 0$, $|k|\leq n$, $m\in\mathbb{N}$, c_κ — произвольные действительные постоянные, $P_n^k(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра, $0<r\leq R$, $0\leq\theta\leq\pi$, $Y_n^k(\theta,\varphi)$ — действительные сферические функции, $0\leq\varphi\leq 2\pi$. Они равны

$$Y_n^k(\theta,\varphi)=\begin{cases} P_n^k(\cos\theta)\cos(k\varphi), & \text{если}\quad k=0,1,...,n;\\ P_n^{|k|}(\cos\theta)\sin(|k|\varphi), & \text{если}\quad k=-1,...,-n.\end{cases} \tag{16}$$

Функции $Y_n(\theta,\varphi)=\sum_{k=-n}^{n}a_{kn}Y_n^k(\theta,\varphi)$ при $n=0,1,2$ имеют вид:

$$Y_0=a_{00},\ Y_1=a_{01}\cos\theta+(a_{11}\cos\varphi+a_{-1,1}\sin\varphi)\sin\theta, \tag{17}$$

$$Y_2=a_{02}(3\cos^2\theta-1)+(a_{12}\cos\varphi+a_{-1,2}\sin\varphi)\sin\theta\cos\theta+(a_{22}\cos 2\varphi+a_{-2,2}\sin 2\varphi)\sin^2\theta.$$

По определению сферических функций, произведение $r^nY_n^k(\theta,\varphi)$ является однородным гармоническим полиномом от x_1,x_2,x_3 степени n. Из формул (15),(13) видно, что функции $v_\kappa(x)$ принадлежат классу $C^\infty(B)$ в шаре B любого радиуса $R>0$.

Из ортогональности и полноты функций Бесселя в $L_2[(0,R);r]$ и сферических функций в $L_2(S_1)$ вытекает, что функции v_κ при различных $\kappa=(n,m,k)$ ортогональны в $L_2(B)$.

Система функций $\{v_\kappa\}$ полна в $L_2(B)$ [3]. Нормированная условием

$$\begin{gathered}\int\limits_B v_{\kappa'}v_\kappa\,d\mathbf{x}=\\ =a_{\kappa'}\,a_\kappa\int\limits_0^R\psi_{n'}(\rho_{n',m'}r/R)\,\psi_n(\rho_{n,m}r/R)r^2\,dr\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)\,Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta\,d\varphi=\delta_{\kappa',\kappa}\end{gathered} \tag{18}$$

она образует в $L_2(B)$ ортонормированный базис. Нормирующие множители a_κ таковы, что

$$(a_{n,m,k})^{-1}=R|J'_{n+1/2}(\rho_{n,m})|\sqrt{\pi\frac{1+\delta_{0k}}{2n+1}\frac{(n+|k|)!}{(n-|k|)!}}. \tag{19}$$

2.3. Эквивалентное интегральное уравнение. В §29 книги [3] доказано, что если $f\in C^1(B)\cap C(\overline{B})$, то краевая задача

$$-\Delta v=\mu\,v+f(x),\quad v|_S=0,\quad v\in C^2(B)\cap C(\overline{B}), \tag{20}$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$v(x)=\int\limits_B G(x,y)[\mu\,v(y)+f(y)]\,dy,\quad v\in C(\overline{B}), \tag{21}$$

с симметричным слабо полярным ядром

$$G(x,y)=\frac{1}{4\pi|x-y|}-\frac{R|y|}{4\pi|x|y|^2-yR^2|}. \tag{22}$$

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ оператора $\mathcal{L}$ задачи (20) относят [3] все функции v класса $\mathcal{C}^2(B)\cap\mathcal{C}(\overline{B})$, удовлетворяющие граничному условию $v|_S=0$ и условию $\Delta v\in L_2(B)$.

Собственные значения и собственные функции оператора $\mathcal{L}$ совпадают с характеристическими числами и соответствующими собственными функциями ядра $G(x,y)$.

Согласно теории интегральных уравнений *множество собственных значений оператора $\mathcal{L}$ не имеет конечных предельных точек; каждое собственное значение имеет конечную кратность. Всякая функция из $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ разлагается в регулярно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям оператора $\mathcal{L}$.*

Следовательно, все собственные значения $\lambda_{n,m}^2=\rho_{n,m}^2 R^{-2}$оператора $\mathcal{L}$ можно перенумеровать в порядке возрастания их величин

$$0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant ...,\quad \mu_l\to\infty,\quad l\to\infty, \tag{23}$$

повторяя в этом ряде μ_l столько раз, какова его кратность (число $\lambda_{n,m}^2$ повторяется $2n+1$ раз). Соответствующие собственные функции обозначим через $V_1, V_2, ...$, так что в ряде чисел (23) каждому собственному значению μ_l соответствует собственная функция $V_l(x)$,

$$\mathcal{L}V_l=\mu_l\,V_l,\quad l=1,2,...,\quad V_l\in\mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \tag{24}$$

причем собственные функции $V_l(x)$ выбираем вещественными и ортонормальными:

$$(\mathcal{L}V_l,V_m)=\mu_l\,(V_l,V_m)=\mu_l\,\delta_{lm} \tag{25}$$

Всякая функция $f(x)$ из $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ разлагается в ряд Фурье по ортонормальной системе $\{V_l(x)\}$,

$$f(x)=\sum_{l=1}^{\infty}(f,V_l)\,V_l(x). \tag{26}$$

Этот ряд сходится в $L_2(B)$, и в силу теоремы Гильберта-Шмидта ряд сходится регулярно на $\overline{B}$ (см.[3] §20.1). Но множество $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ плотно в $L_2(B)$.

Откуда получаем доказательство полноты системы $\{V_l(x)\}$ в $L_2(B)$. Отметим, что $\{V_l(x)\}$ — это система $\{v_\kappa(x)\}$ с выше определенным порядком нумерации элементов.

Ряд (26) (и другие аналогичные ряды) будем записывать в виде

$$f(\mathbf{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(f,v_{n,m,k})\,v_{n,m,k}(\mathbf{x})\equiv\sum_{\kappa}(f,v_\kappa)\,v_\kappa(\mathbf{x}), \tag{27}$$

предполагая, что суммирование ряда (27) идет по n,m, для которых $0<\rho_{n,m}<N$, а затем $N\to\infty$.

2.4. Сходимость ряда в норме пространства Соболева $H^s(B)$. Согласно теоремам 8 и 9 гл. 4 в [5] для шара имеем.

Для того, чтобы f разлагалась в ряд Фурье (27) *по системе собственных функций задачи Дирихле для оператора Лапласа в шаре, сходящийся в норме пространства Соболева $H^s(B)$, необходимо и достаточно, чтобы f принадлежала*

$$H^s_{\mathcal{D}}(B)=\{f\in H^s(B): f|_S=0,...,\triangle^\sigma f|_S=0\},\quad \text{где}\quad \sigma=[(s-1)/2],\quad s\geq 1. \tag{28}$$

Если $f\in H^s_{\mathcal{D}}(B)$, то сходится ряд

$$\sum_{\kappa}(f,v_\kappa)^2\,\lambda_\kappa^{2s}, \tag{29}$$

и существует такая положительная постоянная $C>0$, не зависящая от f, что

$$\sum_{\kappa}(f,v_\kappa)^2\,\lambda_\kappa^{2s}\leqslant C\|f\|^2_{H^s(B)}. \tag{30}$$

Если $s\geq 2$, то любая функция f из $H^s_{\mathcal{D}}(B)$ разлагается в в ряд Фурье (27), *сходящийся в пространстве $\mathcal{C}^{s-2}(B)$.*

2.5. Решение задачи 2. Так как $\psi_0(0) = 1$, то функции $\{v_\kappa\}$ при $\kappa = (0, m, 0)$ удовлетворяют последнему условию $v_\kappa(0) = 0$ задачи 2 тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты $c_{(0,m,0)} = 0$. Откуда следует

Теорема 1. *Собственные значения $\mu_{n,m}$ задачи 2 равны $\lambda^2_{n,m}$, где $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m}R^{-1}$, а числа $\rho_{n,m}$ – нули функций $\psi_n(z)$, m, $n \in \mathbb{N}$.*
Собственные функции v_κ задачи, соответствующие значениям $\lambda^2_{n,m}$, имеют вид

$$v_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\lambda_{n,m} r) Y_n^k(\theta, \varphi), \tag{31}$$

где $m, n \in \mathbb{N}$ и $|k| \le n$, $\kappa = (n, m, k)$. Кратность значения $\mu_{n,m}$ равна $2n + 1$.

Итак, спектр задачи 2 дискретен и не имеет конечных точек накопления, а собственные функции v_κ задачи выражаются через цилиндрические и сферические функции.

3. Решение спектральной задачи 1 в шаре

3.1. Построение решений задачи 1. Попутно мы доказываем, что ее собственные значения $\pm\lambda_{n,m}$ суть корни квадратные из собственных чисел задачи 2.

Лемма 2. *В шаре B любому решению (μ, v) задачи 2 при $\mu > 0$ соответствуют два и только два решения $(\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^+)$ и $(-\sqrt{\mu}, \mathbf{u}^-)$ задачи 1 такие, что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^+ = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^- = v$.*

Доказательство леммы 2 базируются на представлении системы $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$ из четырех действительных уравнений, записанных в сферических координатах, как системы двух комплексных уравнений

$$(\partial_r - i\lambda)\, rw = r^{-1} Hv, \quad \mathrm{K}w = \lambda v - ir^{-1}\partial_r(rv), \tag{32}$$

относительно комплексной функции $w = u_\varphi + iu_\theta$ и действительной функции $v = ru_r$. Операторы H и K имеют вид:

$$\mathrm{H}v = \left(\sin^{-1}\theta\partial_\varphi + i\partial_\theta\right) v \quad \mathrm{K}w = \sin^{-1}\theta\,(\partial_\theta \sin\theta + i\partial_\varphi)w. \tag{33}$$

Нетрудно убедиться, что $-\Delta v = \lambda^2 v$ есть условие согласованности уравнений (32).

Пусть (μ, v) — фиксированное решение задачи 2. Ненулевые решения задачи 1 находим так. Функция u_r определяется как дробь v/r. Положим $\underline{\lambda} = \sqrt{\mu}$ или $\underline{\lambda} = -\sqrt{\mu}$, и подставим $\underline{\lambda}$ и $\underline{v} = v$ в уравнения (32). Теперь их правые части заданы и уравнения совместны. Функции u_θ и u_φ определим, решая эту систему. Общее решение первого уравнения в (32) имеет вид

$$\underline{w} = dr^{-1}e^{i\underline{\lambda} r} + r^{-1}\int_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)} H\underline{v}(t,\theta,\varphi)t^{-1}dt, \tag{34}$$

где d есть функция от переменных φ и θ, которая равна нулю, если решение ищем в классе Соболева $W_2^1(B)$ или в классе ограниченных функций. Остается проверить, что функция $\underline{w}$ удовлетворяет второму уравнению в (32). Получаем

$$K\underline{w} = r^{-1}\int_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)} KH\underline{v}(t, \theta, \varphi)t^{-1}dt = r^{-1}\int_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)} \left[\sin^{-1}\theta\,(\partial_\theta\partial_\varphi - \partial_\varphi\partial_\theta)\underline{v} + i\Delta_{\theta,\varphi}\underline{v}\right] t^{-1}dt,$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ — оператор Лапласа-Бельтрами. Уравнение Гельмгольца в сферических координатах запишем так:

$$\frac{1}{r sin\theta}\left[\partial_\theta\left(sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{sin\theta}(\partial_\varphi)^2\right] v = -\lambda^2 rv - \frac{1}{r}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) v. \tag{35}$$

Функция $\underline{v}$ является его решением при $\lambda^2 = \underline{\lambda}^2 = \mu$. Подставляя правую часть этого равенства под интеграл, вместо выражения $r^{-1}\Delta_{\theta,\varphi}\underline{v}$ при $\lambda^2 = \underline{\lambda}^2$, $v = \underline{v}$, $r = t$, получаем

$$K\underline{w} = -ir^{-1}\int\limits_0^r e^{i\underline{\lambda}(r-t)}\left(\underline{\lambda}^2 t\underline{v} + \frac{1}{t}\partial_t\left(t^2\partial_t\underline{v}\right)\right)dt.$$

Интегрируя по частям и учитывая соотношение $v(0) = 0$, получим правую часть второго равенства в (32). Лемма 2 доказана.

3.2. Формулы решений. Подставляя конкретные выражения $\lambda^{\pm}_{\kappa} = \pm\lambda_{n,m}$ и v_κ из (31) в дробь v/r и в интеграл (34) (вместо $\underline{\lambda}$ и $\underline{v}$), а также d=0, получим явные формулы собственных функций задачи. Имеет место

Теорема 2. *Ненулевые собственные значения* $\lambda^{\pm}_{n,m}$ *задачи 1 равны* $\pm\lambda_{n,m}$, *где* $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m}R^{-1}$, *R–радиус шара, а числа* $\rho_{n,m}$ *– нули функций* $\psi_n(z)$, m, $n \in \mathbb{N}$.
Компоненты u_r *и* $w = u_\varphi + iu_\theta$ *собственных функций* $u^{\pm}_{\kappa}$ *задачи 1 в сферических координатах вычисляются по формулам:*

$$(u_r)^{\pm}_{\kappa} = c^{\pm}_{\kappa}(\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}\psi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)Y^k_n(\theta,\varphi), \tag{36}$$

$$(u_\varphi + iu_\theta)^{\pm}_{\kappa} = c^{\pm}_{\kappa}\ (\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)HY^k_n(\theta,\varphi), \tag{37}$$

где i *— мнимая единица,* $c^{\pm}_{\kappa} \in \mathbb{R}$, m,$n \in \mathbb{N}$, $|k| \le n$,$\kappa = (n,m,k)$,

$$\Phi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r) = \int\limits_0^r e^{i\lambda^{\pm}_{n,m}(r-t)}\psi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}t)t^{-1}dt, \tag{38}$$

$$HY^k_n(\theta,\varphi) = \left(\sin^{-1}\theta\,\partial_\varphi + i\partial_\theta\right)Y^k_n(\theta,\varphi). \tag{39}$$

Функции u_r, u_θ, u_φ *принадлежат классу* C^∞ *всюду в* $\overline{B}$, *кроме оси* x_3, *на которой* $r sin\theta = 0$, *и ограничены в* $\overline{B}$. *В исходных координатах* x_1,x_2,x_3 *компоненты* u_j *собственных функций задачи 1 принадлежат классу* $C^\infty(\overline{B})$.

Через функции u_r и $w = u_\varphi + iu_\theta$ они выражаются так:

$$u_1 = u_rY^1_1 + \mathrm{Re}(w\,\overline{\mathrm{H}}Y^1_1), \quad u_2 = u_rY^{-1}_1 + \mathrm{Re}(w\,\overline{\mathrm{H}}Y^{-1}_1), \quad u_3 = u_rY^0_1 + \mathrm{Re}(w\,\overline{\mathrm{H}}Y^0_1), \tag{40}$$

где согласно учебнику Владимирова [3]

$$x_1/r = Y^1_1(\theta,\varphi) = \sin\theta\cos\varphi, \quad x_2/r = Y^{-1}_1(\theta,\varphi) = \sin\theta\sin\varphi, \quad x_3/r = Y^0_1(\theta) = \cos\theta, \tag{41}$$

$$HY^1_1 = -\sin\varphi + i\cos\theta\cos\varphi, \quad HY^{-1}_1 = \cos\varphi + i\cos\theta\sin\varphi, \quad HY^0_1 = -i\sin\theta. \tag{42}$$

Гладкость вектор-функций $u^{\pm}_{\kappa}(x)$ в $\overline{B}$ вытекает из общей теории (см. утверждение b) в п. 1.4), и можно проверить непосредственно. Теорема доказана.

Вектор-функции $u^{\pm}_{\kappa}$ представим в виде суммы трех вещественных взаимно ортогональных векторов. Используя репер $\mathbf{i}_r$, $\mathbf{i}_\theta$, $\mathbf{i}_\varphi$ и разделяя действительные и мнимые части в (37), (38), (39), имеем

$$\begin{gathered} u^{\pm}_{\kappa} = c^{\pm}_{\kappa}(\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}\psi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)Y^k_n(\theta,\varphi)\,\mathbf{i}_r + \\ c^{\pm}_{\kappa}(\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}Re[\Phi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)](ReHY^k_n\,\mathbf{i}_\varphi + ImHY^k_n\,\mathbf{i}_\theta) + \\ c^{\pm}_{\kappa}(\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}Im[\Phi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)](-ImHY^k_n\,\mathbf{i}_\varphi + ReHY^k_n\,\mathbf{i}_\theta). \end{gathered} \tag{43}$$

Эти формулы позволяют представить движение вихревого потока жидкости в шаре, скорость которого есть $u^{\pm}_{\kappa}(x)$, при $n = 1,2,....$ Завихренность этих потоков $\mathrm{rot}\,u^{\pm}_{\kappa}$, равная $\lambda^{\pm}_{n,m}u^{\pm}_{\kappa}$, отлична от нуля в каждой точке шара.

3.3. Свойство функций $\Phi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)$. Функции $\psi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)$, $Y^k_n(\theta,\varphi)$ и числа $\lambda^{\pm}_{n,m}=\pm\rho_{n,m}/R$ вещественные. Согласно (14) $\psi_n(\lambda^{-}_{n,m}r)=(-1)^n\,\psi_n(\lambda_{n,m}r)$. Поэтому

$$\begin{gathered}\Phi_n(\lambda^{-}_{n,m}r)=\int\limits_0^r e^{-i\lambda_{n,m}(r-t)}\psi_n(-\lambda_{n,m}t)t^{-1}d\,t=\\ =(-1)^n\int\limits_0^r e^{-i\lambda_{n,m}(r-t)}\psi_n(\lambda_{n,m}t)t^{-1}d\,t=(-1)^n\overline{\Phi_n(\lambda_{n,m}r)}.\end{gathered}\tag{44}$$

Докажем, что число $\Phi_n(\lambda_{n,m}R)$ действительное и, значит,

$$\Phi_n(\rho_{n,m})=\int\limits_0^R \cos\lambda_{n,m}(R-t)\psi_n(\lambda_{n,m}t)t^{-1}dt.\tag{45}$$

По построению, вектор-функции $u^{\pm}_{\kappa}(x)$ удовлетворяют уравнению (1) при $\lambda=\pm\lambda_{n,m}$, а комплексные функции

$$w^{\pm}_{\kappa}=(u_{\varphi}+iu_{\theta})^{\pm}_{\kappa}=a^{\pm}_{\kappa}\ (\lambda^{\pm}_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)\mathrm{H}Y^k_n(\theta,\varphi),\quad a^{\pm}_{\kappa}\in\mathbb{R},\tag{46}$$

удовлетворяют системе уравнений (32) при $\lambda=\pm\lambda_{n,m}$, $v=v_{\kappa}(x)$, причем $v_{\kappa}|_{r=R}=0$.

Из второго уравнения в (32) видим, что при $r\to R$

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{K}w^{\pm}_{\kappa}|_{r\to R}=\pm\lambda_{n,m}\,v_{\kappa}|_{r=R}=0.\tag{47}$$

Композиция KH операторов K и H на действительных функциях $Y^k_n(\theta,\varphi)$ равна

$$\begin{gathered}\mathrm{KH}Y^k_n=\sin^{-1}\theta(\partial_\theta\sin\theta+i\partial_\varphi)\left(\sin^{-1}\theta\partial_\varphi+i\partial_\theta\right)Y^k_n=\\ \sin^{-1}(\partial_\theta\partial_\varphi-\partial_\varphi\partial_\theta)Y^k_n+i\Delta_{\theta,\varphi}Y^k_n=in(n+1)Y^k_n.\end{gathered}\tag{48}$$

Значит,

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{K}w^{\pm}_{\kappa}|_{r=R}=-n(n+1)a^{\pm}_{\kappa}(\rho^{\pm}_{n,m})^{-1}\mathrm{Im}\ \Phi_n(\rho^{\pm}_{n,m})Y^k_n(\theta,\varphi)=0\tag{49}$$

при любых θ и φ. Следовательно, $\mathrm{Im}\Phi_n(\rho_{n,m})=0$, и число $\Phi_n(\rho_{n,m})$ действительно.

4. Решение спектральной задачи 1 при $\lambda=0$

4.1. Сведение задачи 1 при $\lambda=0$ к спектральной задаче Неймана. Собственные вектор-функции оператора ротор, отвечающие нулевому собственному значению, будем искать среди решений следующей спектральной задачи.

Задача 3. *Найти ненулевые собственные значения μ и собственные вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\mathbf{L}_2(G)$ оператора градиент дивергенции такие, что*

$$-\nabla\ div\,\mathbf{u}=\mu\mathbf{u}\quad в\quad G,\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_{\Gamma}=0,\tag{50}$$

где $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}$ — проекция вектора $\mathbf{u}$ на нормальный вектор $\mathbf{n}$.

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{GD}}$ оператора $\mathcal{GD}$ задачи 4 отнесем все вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(G)\cap\mathcal{C}^1(\overline{G})$, которые удовлетворяют граничному условию $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_{\Gamma}=0$ и условию ∇ div $\mathbf{u}\in\mathbf{L}_2(G)$.

Эта задача связана со спектральной задачей Неймана для скалярного оператора Лапласа.

Задача 4. *Найти все собственные значения ν и собственные функции $g(\mathbf{x})$ оператора Лапласа $-\Delta$ такие, что*

$$-\Delta g=\nu g\quad в\ G,\quad \mathbf{n}\cdot\nabla\,g|_{\Gamma}=0.\tag{51}$$

К области определения $\mathcal{M}_{\mathcal{N}}$ оператора $\mathcal{N}$ задачи 4 относят все функции $g(\mathbf{x})$ класса $\mathcal{C}^2(G)\cap\mathcal{C}^1(\overline{G})$, удовлетворяющие условиям $\mathbf{n}\cdot\nabla\,g|_{\Gamma}=0$, $\Delta\,g\in L_2(G)$.

Легко убедиться, что имеет место

Лемма 3. *Любому решению $(\mu, \mathbf{u})$ задачи 3 в области G соответствует решение $(\nu, g) = (\mu, div\, \mathbf{u})$ задачи 4. Обратно, любому решению (ν, g) задачи 4 соответствует решение $(\mu, \mathbf{u}) = (\nu, \nabla g)$ задачи 3.*

4.2. Решение спектральной задачи 4 в шаре. Решение этой задачи известно. Согласно книге В.С. Владимирова [3]

собственные значения оператора $-\Delta$ в шаре B с условием Неймана равны $\nu^2_{n,m}$, где $\nu_{n,m} = \alpha_{n,m}R^{-1}$, $n \geq 0$, $m \in N$, а числа $\alpha_{n,m} > 0$ суть нули функций $\psi'_n(z)$, производных $\psi_n(z)$, т.е. ${\psi_n}'(\alpha_{n,m}) = 0$. Соответствующие $\nu^2_{n,m}$ собственные функции g_κ имеют вид:

$$g_\kappa(r, \theta, \varphi) = c_\kappa \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) Y^k_n(\theta, \varphi), \tag{52}$$

где $\kappa = (n, m, k)$ — мультииндекс, c_κ — произвольные действительные постоянные, $Y^k_n(\theta, \varphi)$ — действительные сферические функции, $n \geq 0$, $|k| \leq n$, $m \in N$.

Функции $g_\kappa(x)$ принадлежат классу $C^\infty(\overline{B})$ и при различных κ ортогональны в $L_2(B)$. Система функций $\{g_\kappa\}$ полна в $L_2(B)$ [5]. Нормируя их, получим ортонормированный в $L_2(B)$ базис.

4.3. Решение спектральной задачи 3 в шаре. Согласно лемме 3 вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla g_\kappa(x)$ являются решениями задачи 3 при $\mu_{n,m} = \alpha^2_{n,m}R^{-2}$ в $\mathbf{L}_2(B)$. Их компоненты $(q_r, q_\theta, q_\varphi)$ имеют вид

$$\begin{gathered} q_{r,\kappa}(r, \theta, \varphi) = c_\kappa(\alpha_{n,m}/R)\psi'_n(\alpha_{n,m} r/R) Y^k_n(\theta, \varphi), \\ (q_\varphi + i q_\theta)_\kappa = c_\kappa (1/r) \psi_n(\alpha_{n,m} r/R) \mathrm{H} Y^k_n(\theta, \varphi). \end{gathered} \tag{53}$$

При $\kappa = (0, m, 0)$ функция $Y^0_0(\theta, \varphi) = 1$, $\mathrm{H}Y^0_0 = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} &q_{r,(0,m,0)}(r) = c_{(0,m,0)}(\alpha_{0,m}/R)\psi'_0(\alpha_{0,m} r/R), \\ &(q_\varphi + i q_\theta)_{(0,m,0)} = 0. \end{aligned} \tag{54}$$

Из этих формул легко выписать величины нормирующих множителей c_κ, при которых $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = 1$.

4.4. Решение спектральной задачи 1 при $\lambda = 0$ в шаре. Числа $\mu_{n,m} = \alpha^2_{n,m}R^{-2} > 0$ при любых $n \geq 0$, $m \in N$. Поэтому вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa$ являются также решениями задачи 1 при $\lambda = 0$. Причем, $\mathbf{q}_\kappa$ и $\mathbf{q}_{\kappa'}$ ортогональны при $\kappa' \neq \kappa$.

Действительно, согласно формуле Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_B \nabla g_{\kappa'} \cdot \nabla g_\kappa dx = -\int\limits_B g_{\kappa'} \Delta g_\kappa dx + \int\limits_S g_{\kappa'} (n \cdot \nabla) g_\kappa dS. \tag{55}$$

Функции $g_\kappa(x)$ являются решениями задачи 4 , они удовлетворяет уравнению Гельмгольтца (51) при $\nu = \alpha^2_{n,m}/R^2 > 0$ с краевым условием Неймана. Следовательно, граничный интеграл пропадает, а

$$\int\limits_B \mathbf{q}_{\kappa'} \cdot \mathbf{q}_\kappa dx = \frac{\alpha^2_{n,m}}{R^2} \int\limits_B g_{\kappa'} g_\kappa dx. \tag{56}$$

Но функции $g_\kappa(x)$ и $g_{\kappa'}(x)$, согласно (52), взаимно ортогональны в $\mathrm{L}_2(B)$ при $\kappa' \neq \kappa$. Значит, последний интеграл в (56) равен нулю и вектор-функции $\mathbf{q}_\kappa$ и $\mathbf{q}_{\kappa'}$ взаимно ортогональны в $\mathbf{L}_2(B)$.

Заметим, что $\|\mathbf{q}_\kappa(x)\| = (\alpha_{n,m}/R)\, \|g_\kappa(x)\|$.

5. Пространство $\mathbf{L}_2(B)$ и собственные функции ротора

5.1. Подпространство $\mathcal{A} = \nabla H^1(B)$. Линейное подпространство в $\mathbf{L}_2(B)$, образованное ортонормированной системой вектор-функций $\{\mathbf{q}_\kappa(x)\}$, обозначим через $\mathcal{A}$. Фактически,

$$\mathcal{A} = \{\nabla h : \quad h \in H^1(B)\}. \tag{57}$$

Действительно, каждый элемент $\mathbf{q}_\kappa(x) = \nabla g_\kappa$, где $g_\kappa \in H^1(B)$. С другой стороны, функция h из $H^1(B)$ разлагается в сходящийся ряд

$$h = \sum_\kappa (h, \widehat{g}_\kappa)\widehat{g}_\kappa, \quad \widehat{g}_\kappa = (\alpha_{n,m}/R)g_\kappa, \quad (\widehat{g}_\kappa, \widehat{g}_{\kappa'}) = \delta_{\kappa,\kappa'}. \tag{58}$$

5.2. Подпространство $\mathcal{B} = \mathbf{V}^0(B)$. Обозначим через $\mathbf{q}^\pm_\kappa(x)$ решения задачи 1, которые, согласно Теореме 2 соответствуют собственным значениям $\lambda^\pm_{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, и нормированы в $\mathbf{L}_2(B)$), то есть $\|\mathbf{q}^\pm_\kappa(x)\| = 1$. Они принадлежат подпространству

$$\mathbf{V}^0(B) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(B) : div\, \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S = 0, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{V}^0(B)} = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(B)}\}, \tag{59}$$

где $div\, \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}|_S = 0$ понимаются в смысле теории распределений:

$$\mathbf{V}^0(B) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(B) : \int_B \mathbf{u}\cdot\nabla h\, d\, x = 0, \quad \text{для любой} \quad h \in H^1(B)\}. \tag{60}$$

Очевидно, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B} \equiv \mathbf{V}^0(B)$ ортогональные подпротранства в $\mathbf{L}_2(B)$. Через $\mathcal{B}^\pm$ обозначим подпространства в $\mathcal{B}$, образованные системами вектор-функций $\{\mathbf{q}^\pm_\kappa(x)\}$. Имеет место

Лемма 4. *Вектор-функции $\mathbf{q}^+_\kappa(x)$ (соотв., $\mathbf{q}^-_\kappa(x)$) взаимно ортогональны при различных κ. Вектор-функции $\mathbf{q}^+_\kappa(x)$ и $\mathbf{q}^-_\kappa(x)$ взаимно ортогональны при любых κ.*

Доказательство. Воспользуемся формулой Грина оператора ротор

$$\int_B \mathrm{rot}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\, d\mathbf{x} - \int_B \mathbf{u}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{v}\, d\mathbf{x} = \int_S [\mathbf{u},\mathbf{v}]\cdot\mathbf{n}\, dS. \tag{61}$$

Смешанное произведение $[\mathbf{u},\mathbf{v}]\cdot\mathbf{n}$ на сфере S совпадает с определителем

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_r & u_\theta & u_\varphi \\ v_r & v_\theta & v_\varphi \end{vmatrix} \tag{62}$$

и равно $u_\theta v_\varphi - u_\varphi v_\theta$ или $\mathrm{Im}(W\,\overline{V})$ в комплексных обозначениях $W = (u_\varphi + iu_\theta)$ и $\overline{V} = (v_\varphi - iv_\theta)$.

Докажем ортогональность вектор-функций $\mathbf{q}^+_{\kappa'}(x)$ и $\mathbf{q}^+_\kappa(x)$, при $\kappa' \neq \kappa$. Они являются решениями задачи 1 и вычисляются по формулам (36), (37), где числа $\lambda^+_{n,m} = \rho_{n,m}/R$ и c^+_κ — действительные постоянные.

В начале рассмотрим случай, когда $(n', m') \neq (n, m)$, а значит, $\lambda^+_{n',m'} \neq \lambda^+_{n,m}$. Подставляя эти функции в формулу (61), получим равенство:

$$(\lambda_{n',m'} - \lambda_{n,m}) \int_B \mathbf{q}^+_{\kappa'}\cdot\mathbf{q}^+_\kappa\, dx = \mathrm{Im} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} W^+_{k'}\,\overline{W}^+_k \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{63}$$

Ортогональность будет доказана, если последний интеграл I обращается в нуль. Согласно формулам (37) он равен:

$$I = A\,\mathrm{Im}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{H}Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)\,\overline{\mathrm{H}}Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi, \tag{64}$$

где $A = c_{\kappa'}^{+}(\rho_{n',m'})^{-1}c_{\kappa}^{+}(\rho_{n,m})^{-1}\,\Phi_{n'}(\rho_{n',m'})\overline{\Phi}_n(\rho_{n,m})$ — действительная постоянная согласно п. 3.3.

Оператор H в этом интеграле перебросим, интегрируя по частям. Имеем:

$$\mathrm{Im}[A\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)[-\sin^{-1}\theta\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta)-\sin^{-2}\theta\partial_\varphi^2]\,Y_n^k(\theta,\varphi)\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi]+$$
$$\mathrm{Im}[iA\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)[\sin^{-1}\theta(\partial_\varphi\partial_\theta-\partial_\theta\partial_\varphi)]\,Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi].$$

Последний интеграл равен нулю, так как сферические функции непрерывны вместе с производными любого порядка по φ и θ. В первом интеграле, оператор, взятый в квадратные скобки, есть оператор Лапласа-Бельтрами: $-\Delta_{\theta\varphi}$. Согласно свойству сферических функций, $-\Delta_{\theta\varphi}Y_n^k(\theta,\varphi) = n(n+1)Y_n^k(\theta,k)$, подставляя это выражение под знак интеграла, получим:

$$(\lambda_{n',m'}-\lambda_{n,m})\int_B q_{\kappa'}^{+}\cdot q_{\kappa}^{+}\,dx = \mathrm{Im}[n(n+1)A\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}\,Y_n^k\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi]. \tag{65}$$

Так как сферические функции взаимно ортогональны при $(n',k')\neq(n,k)$, то этот интеграл равен нулю. Итак, *вектор-функции* $\mathbf{q}_{\kappa'}^{+}(x)$ *и* $\mathbf{q}_{\kappa}^{+}(x)$ *ортогональны при* $(n',m')\neq(n,m)$ *и* $(n',k')\neq(n,k)$. .

Если же $(n',k')=(n,k)$, $m'\neq m$, то интеграл справа в (65) есть действительное число. Числа c_κ, $\Phi_n(\rho_{n,m})$ и A также действительны, поэтому $\mathbf{q}_{k,m',n}^{+}(x)$ и $\mathbf{q}_{k,m,n}^{+}(x)$ — ортогональны.

В случае $(n',m')=(n,m)$ и $k'\neq k$ формула (65) не годится, так как ее левая и правая части обращаются в нуль. Согласно формулам (36), (37), имеем

$$\int_B \mathbf{q}_{k',m,n}^{+}\cdot\mathbf{q}_{k,m,n}^{+}\,dx = c_{k',m,n}^{+}c_{k',m,n}^{+}\lambda_{m,n}^{-2}[\int_0^R \psi_n^2(\lambda_{n,m}r)\,dr\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n^{k'}(\theta,\varphi)Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi+$$
$$+\int_0^R \Phi_n(\lambda_{n,m}r)\overline{\Phi}_n(\lambda_{n,m}r)\,dr\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{H}Y_n^{k'}(\theta,\varphi)\overline{\mathrm{H}}Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta]. \tag{66}$$

Ввиду ортогональности функций $Y_n^{k'}$ и Y_n^k в $L_2(S_1)$ оба интеграла исчезают и, значит, векторы $\mathbf{q}_{k',m,n}^{+}$ и $\mathbf{q}_{k,m,n}^{+}$ — ортогональны.

Ортогональность вектор-функций $\mathbf{q}_{\kappa'}^{-}(x)$ и $\mathbf{q}_{\kappa}^{-}(x)$, при $\kappa'\neq\kappa$ доказывается аналогично.

Рассмотрим собственные функции $\mathbf{q}_{\kappa'}^{+}(x)$ и $\mathbf{q}_{\kappa}^{-}(x)$, соответствующие значениям $\lambda_{n,m}$ и $-\lambda_{n,m}$ различных знаков, при любых κ' и κ. Повторяя предыдущие вычисления, имеем

$$\begin{aligned}(\lambda_{n',m'}+\lambda_{n,m})\int_B \mathbf{q}_{\kappa'}^{+}\cdot\mathbf{q}_{\kappa}^{-}\,dx &= \mathrm{Im}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} W_{k'}^{+}\,\overline{W_k^{-}}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi=\\ &= \mathrm{Im}[n(n+1)B\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_{n'}^{k'}(\theta,\varphi)Y_n^k(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi],\end{aligned} \tag{67}$$

где постоянная $B=(-1)^{(n+1)}\,c_{\kappa'}^{+}(\rho_{n',m'})^{-1}c_{\kappa}^{-}(\rho_{n,m})^{-1}\,\Phi_{n'}(\rho_{n',m'})\Phi_n(\rho_{n,m})$ действительна.

Правая часть (67) исчезает при любых κ' и κ. Следовательно, вектор-функции $\mathbf{q}_{\kappa'}^{+}(x)$ и $\mathbf{q}_{\kappa}^{-}(x)$ ортогональны. Лемма доказана.

5.3. Разложение Г. Вейля. Из полноты в $L_2(B)$ семейств собственных функций оператора Лапласа с условиями Дирихле и Неймана вытекает, что *система вектор-функций* $\{\mathbf{q}_\kappa(x)\}$ *полна в подпространстве* $\mathcal{A}$, *системы* $\{\mathbf{q}^+_\kappa(x)\}$ *и* $\{\mathbf{q}^-_\kappa(x)\}$ *в совокупности полны в подпространстве* $\mathcal{B}$. *Других решений задача 1 не имеет.*

Подпространства $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *взаимно ортогональны в* $\mathbf{L}_2(B)$. *В случае шара их объединение совпадает с* $\mathbf{L}_2(B)$ (см. Г. Вейль [10]). Таким образом, мы получили ортогональное разложение пространства $\mathbf{L}_2(B)$ по собственным вектор-функциям оператора ротор.

$$\mathbf{L}_2(B) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}^+ \oplus \mathcal{B}^-. \tag{68}$$

Теорема 3. *Система* $\{\mathbf{q}_\kappa(x)\}$, $\{\mathbf{q}^+_\kappa(x)\}$ *и* $\{\mathbf{q}^-_\kappa(x)\}$ *собственных вектор-функций задачи 1 в совокупности образует в пространстве* $\mathbf{L}_2(B)$ *ортонормированный базис. Любую вектор-функцию из* $\mathbf{L}_2(B)$ *можно разложить в ряд Фурье по этому базису.*

Разложение Вейля векторного поля $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(B)$ на безвихревое поле $\mathbf{a}$ и соленоидальное $\mathbf{b}$ имеет вид $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})$, где

$$\mathbf{a} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{69}$$

$$\mathbf{b} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})] \tag{70}$$

суммирование рядов (69), (70) идет по n, m, для которых $0 < \alpha_{n,m} < N$ и $0 < \rho_{n,m} < N$, а затем $N \to \infty$.

Имеет место равенство Парсеваля-Стеклова: $\|\mathbf{f}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2$, которое запишем так

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{(n,m)\in\mathbb{P}_N}\sum_{k\in[-n,n]} [(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})^2 + (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})^2], \tag{71}$$

где решетка $\mathbb{P}_N = \{(n, m) : 0 < \rho_{n,m} < N, 0 < \alpha_{n,m} < N\}$, векторы $\mathbf{q}^{\pm}_{0,m,0} = 0$.

Отметим, что разложение векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ на безвихревое поле $\nabla h(\mathbf{x})$ и соленоидальное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ связано с решением задачи Неймана

$$\triangle h = \operatorname{div}\mathbf{f} \quad \text{в} \quad B, \quad \mathbf{n}\cdot\nabla\, h|_S = \mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S, \tag{72}$$

в классической или обобщенной постановках [2].

Мы же получаем решение этой задачи в виде рядов (69), (70). Отметим их свойства.

Если $\mathbf{f} = \nabla h$, где $h(\mathbf{x})$ – финитная в B бесконечно дифференцируемая функция, то есть $h \in \mathcal{D}(B)$, то $\nabla\, div\, \mathbf{f} = \nabla\triangle h$ и для любого целого $s > 1$: $(\nabla\, div)^s\, \mathbf{f} = \nabla\triangle^s h \in \mathbf{L}_2(B)$.

Следовательно, интегрируя по частям, имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} ((\nabla\, div)^s\, \mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} (\alpha_{n,m}/R)^{2s}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}). \tag{73}$$

Ряд сходится в $\mathbf{L}_2(B)$ к $(\nabla\mathrm{div})^s\,\mathbf{f}$ и

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} (\alpha_{n,m}/R)^{4s}|(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})|^2 \ = \|(\nabla\mathrm{div})^s\,\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_2(B)}. \tag{74}$$

Если вектор-функция $\mathbf{f}$ соленоидальна, и ее компоненты принадлежат пространству $\mathcal{D}(B)$, то для любого целого $s \geq 1$: $(rot)^s\,\mathbf{f} \in \mathbf{V}^0(B)$. Значит, аналогично предыдущему

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} [((rot)^s\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + ((rot)^s\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})] = \tag{75}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(\rho_{n,m}/R)^s[(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_{n,m,k})\,\mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (-1)^s(\mathbf{f},\mathbf{q}^-_{n,m,k})\,\mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})].$$

Ряды сходится к $(rot)^s\,\mathbf{f}$ в $\mathbf{L}_2(B)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(\rho_{n,m}/R)^{2s}[|(\mathbf{f},\mathbf{q}^+_{n,m,k})|^2 + |(\mathbf{f},\mathbf{q}^-_{n,m,k})|^2] = \|(rot)^s\,\mathbf{f}\|^2_{\mathbf{L}_2(B)}. \tag{76}$$

Эти ряды сходится также в $\mathbf{H}^l(B)$, при $l = 1, 2, ...$ Действительно, обозначим через $\mathbf{S}_j$ частичную сумму ряда (75) и воспользуемся оценкой (10). Получим

$$\|\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i\|^2_{\mathbf{H}^1(B)} \leqslant C\,(\|rot(\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i)\|^2_{\mathbf{H}^0(B)} + \|\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i\|^2_{\mathbf{H}^0(B)}), \tag{77}$$

так как $div\,(\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i) = 0$ и $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{S}_j - \mathbf{S}_i)|_S = 0$. При $i, j \to \infty$ правая часть в (77) стремится к нулю согласно (76). Значит, ряд сходится в $\mathbf{H}^1(B)$. И так далее.

6. Решение спектральной задачи Стокса

6.1. Связь между решениями спектральных задач операторов Стокса и ротора. Перейдем к изучению спектральной задачи для оператора Стокса в ограниченной области G с параметром вязкости $\nu > 0$.

Задача 5. *Найти все собственные вектор-функции* $(\mathbf{v}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$ *и собственные значения* μ *оператора Стокса такие, что*

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \mu\mathbf{v}, \quad div\,\mathbf{v} = 0 \quad \text{в} \quad G, \tag{78}$$

$$\mathbf{v}|_\Gamma = 0. \tag{79}$$

Отметим, что собственной функцией этого оператора обычно считается только вектор-функция $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, так как ∇p определяется через v и μ. В монографии О.А. Ладыженской [2] доказано, что в ограниченной области G с гладкой границей Γ эта задача имеет дискретный спектр $\{\mu_k\}$, где $k = 1, 2, \ldots$; причем, каждое $\mu_k > 0$ и имеет конечную кратность. В случае шара мы уточним этот результат.

Имеются полезные соотношения между решениями задач 1 и 5.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^-$ *удовлетворяют в области* G *уравнениям* $rot\,\mathbf{u}^\pm = \pm\lambda\mathbf{u}^\pm$, $\lambda > 0$, *а* $p(\mathbf{x})$ *— гармоническая в* G *функция.*
Тогда пара $(\mathbf{v}, p)$, *где*

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^- + \nu^{-1}\lambda^{-2}\nabla p \tag{80}$$

есть решение уравнений Стокса (78) *с* $\mu = \nu\lambda^2$.

Если функции $\mathbf{u}^+$, $\mathbf{u}^-$ *и* $p(\mathbf{x})$ *удовлетворяют также краевым условиям*

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}^\pm|_\Gamma = 0, \quad (\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)|_\Gamma = 0, \tag{81}$$

$$(\mathbf{n}\cdot\nabla)p|_\Gamma = 0. \tag{82}$$

Тогда решение $(\mathbf{v}, p)$ *задачи 5 с* $\mu = \nu\lambda^2$ *имеет вид*

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-, \quad p = Const. \tag{83}$$

Доказательство первого утверждения проводится непосредственной проверкой, учитывая, что функции $\mathbf{u}^+$ и $\mathbf{u}^-$ являются решениями уравнений (6),(8). Действительно,

$$-\nu\Delta\mathbf{v} + \nabla p = \nu\lambda^2(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-) + \nabla p = \nu\lambda^2\,\mathbf{v}.$$

Далее, если p удовлетворяет условию Неймана (82), то $p = Const$. Однородная задача Неймана (82) для гармонической функции $p(\mathbf{x})$ в ограниченной области G с гладкой границей Γ имеет решение $p = Const$, так как из формулы Гаусса-Остроградского вытекает, что

$$\int_{\mathbf{G}} |\nabla p|^2 dx = 0. \tag{84}$$

Следовательно, разложение (80) вектора $\mathbf{v}$ упрощается и принимает вид $\mathbf{v} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-$, а краевое условие $\mathbf{v}|_\Gamma = 0$ вытекает из соотношения $(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)|_\Gamma = 0$.

С другой стороны имеет место

Теорема 5. *a) Пусть вектор-функция* $(\mathbf{v}(\mathbf{x}), p(\mathbf{x}))$ *есть решение уравнений Стокса* (78) *с* $\mu > 0$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq 0$, $p(\mathbf{x})$ *— гармоническая в* G *функция, и пусть* $\lambda = \sqrt{\mu\nu^{-1}}$. *Тогда вектор-функция* $\mathbf{v}$ *представляется в виде суммы:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mu^{-1}\nabla p, \tag{85}$$

где $\mathbf{w}$ *удовлетворяет уравнениям*

$$(rot\ + \lambda\, I)(rot - \lambda\ \ I)\mathbf{w} = 0, \quad div\,\mathbf{w} = 0. \tag{86}$$

b) Если $p(\mathbf{x})$ *удовлетворяет краевому условию* (82), *тогда* $\nabla p(\mathbf{x}) = 0$ *и* $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

В случае $G = B$ *существуют вектор-функции* $\mathbf{u}^\pm$, *решения уравнений* $rot\mathbf{u}^\pm = \pm\lambda\mathbf{u}^\pm$ *с краевыми условиями* (81) *такие, что вектор-функция* $\mathbf{v}$ *представляется в виде суммы:*

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-. \tag{87}$$

Доказательство. Вектор-функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ и $\nabla p(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнениям (78).

Первые три из них запишем так:

$$(\mathrm{rot}\ + \lambda\,\mathrm{I})(\mathrm{rot} - \lambda\ \ \mathrm{I})\mathbf{v} = -\nu^{-1}\nabla p. \tag{88}$$

Зафиксировав p, рассмотрим соотношение (88) как матричное дифференциальное уравнение относительно вектора $\mathbf{v}$. Так как rot $\nabla p \equiv 0$ и $\mu = \nu\lambda^2$, то $\mu^{-1}\nabla p$ есть его частное решение, а выражение $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mu^{-1}\nabla p$ — решение однородного уравнения, то есть первого уравнения в (86). Второе уравнение $div\,\mathbf{w} = 0$ следует из уравнения $div\,\mathbf{v} = 0$.

Кроме того, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}|_\Gamma = \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_\Gamma - \mu^{-1}\mathbf{n}\cdot\nabla p|_\Gamma = \mu^{-1}\mathbf{n}\cdot\nabla p|_\Gamma$, так как $\mathbf{v}|_\Gamma = 0$.

Ясно, что в случае $\mathbf{n}\cdot\nabla p|_\Gamma \neq 0$, не существует $\mathbf{w}$ такое, что $\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}|_\Gamma = 0$.

b) Если p удовлетворяет условию Неймана (82), то $\nabla p = 0$ и $\mathbf{w} = \mathbf{v}$.

В случае $G = B$ $\mathbf{v}$ есть элемент пространства $\mathcal{B}$, так как $div\,\mathbf{v} = 0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_S = 0$. Представим $\mathbf{v} \in \mathcal{B}$ в виде ряда

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}[(\mathbf{v}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\,\mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (\mathbf{v}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\,\mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})] \tag{89}$$

и подставим ряд в уравнение. Получим равенство

$$(\mathrm{rot}\ + \lambda\,\mathrm{I})(\mathrm{rot} - \lambda\ \ \mathrm{I})\mathbf{v} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(\lambda^2_{n,m} - \lambda^2)\sum_{k=-n}^{n}[(\mathbf{v}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\,\mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (\mathbf{v}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\,\mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})] = 0. \tag{90}$$

Если $\lambda^2_{n,m} - \lambda^2 \neq 0$ для любых $n, m \in \mathcal{N}$, то $(\mathbf{v}, \mathbf{q}^\pm_{n,m,k}) = 0$ для любых $n, m \in \mathcal{N}, k \in [-n, n]$, ввиду ортогональности между базисными векторами $\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}$. Из полноты системы $\{\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}\}$

в $\mathcal{B}$ вытекает, что $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$. Но это невозможно по условию. Следовательно, существует пара $n', m' \in \mathcal{N}$ такая, что $\lambda^2 = \lambda^2_{n',m'}$. Полагая

$$\mathbf{u}^{\pm}(\mathbf{x}) = \sum_{k=-n'}^{n'} (\mathbf{v}, \mathbf{q}^{\pm}_{n',m',k})\, \mathbf{q}^{\pm}_{n',m',k}(\mathbf{x}),$$

получим разложение (87). Утверждение доказано.

Итак, решение задачи 5 сводится к отысканию решений $(\lambda, \mathbf{u}^+)$ и $(-\lambda, \mathbf{u}^-)$ задачи 1 при $\lambda \neq 0$, удовлетворяющих условию $(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)|_S = 0$.

6.2. Формулы для собственных функций оператора Стокса в шаре. В формулах (37) положим $c^{\pm}_{\kappa} = c_{\kappa}\Phi_n(\lambda^{\mp}_{n,m}R)$. Получим

$$(u_\varphi + iu_\theta)^+_\kappa = c_\kappa \Phi_n(\lambda^-_{n,m}R)(\lambda^+_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\lambda^+_{n,m}r)\mathrm{H}Y^k_n(\theta,\varphi),$$

$$(u_\varphi + iu_\theta)^-_\kappa = c_\kappa \Phi_n(\lambda^+_{n,m}R)(\lambda^-_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\lambda^-_{n,m}r)\mathrm{H}Y^k_n(\theta,\varphi).$$

Откуда видим, что при $r = R$ сумма $w^+_\kappa + w^-_\kappa$ равна нулю для любых углов θ и φ и любой комплексной постоянной c_κ.

Функции $\psi_n(\lambda^{\pm}_{n,m}r)$, $Y^k_n(\theta,\varphi)$ и числа $\lambda^{\pm}_{n,m} = \pm\rho_{n,m}/R$ вещественные. Согласно (14) $\psi_n(\lambda^-_{n,m}r) = (-1)^n\,\psi_n(\lambda_{n,m}r)$. Значит, $\Phi_n(\lambda^-_{n,m}r) = (-1)^n\overline{\Phi_n(\lambda_{n,m}r)}$ (см.п. 3.3), где доказано, что число $\Phi_n(\rho_{n,m})$ — действительное.

Поэтому радиальная составляющая вектора $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{u}^+_\kappa + \mathbf{u}^-_\kappa$ исчезает,

$$\begin{aligned} c_\kappa(\lambda_{n,m}r)^{-1}[\Phi_n(\lambda^-_{n,m}R)\psi_n(\lambda^+_{n,m}r) - \Phi_n(\lambda^+_{n,m}R)\psi_n(\lambda^-_{n,m}r)]Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_r = \\ = c_\kappa(-1)^n(\lambda_{n,m}r)^{-1}[\overline{\Phi}_n(\rho_{n,m}) - \Phi_n(\rho_{n,m})]\,\psi_n(\lambda_{n,m}r)Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_r = 0, \end{aligned} \tag{91}$$

а его касательная проекция равна

$$\begin{aligned} Re\{c_\kappa(-1)^n(\lambda_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\rho_{n,m})[\Phi_n(\lambda_{n,m}r) - \overline{\Phi}_n(\lambda_{n,m}r)]\,H\,Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_\varphi\} + \\ + Im\{c_\kappa(-1)^n(\lambda_{n,m}r)^{-1}\Phi_n(\rho_{n,m})[\Phi_n(\lambda_{n,m}r) - \overline{\Phi}_n(\lambda_{n,m}]\,H\,Y^k_n(\theta,\varphi)\mathbf{i}_\theta\}. \end{aligned} \tag{92}$$

Выражение в квадратных скобках является мнимой величиной. Выбирая постоянную $c_\kappa = i\,b_\kappa$ также мнимой, $b_\kappa \in \mathcal{R}$, получаем вектор-функцию $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{u}^+_\kappa + \mathbf{u}^-_\kappa$, которая представляется в виде суммы двух взаимно ортогональных векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\kappa = b_\kappa\Phi_n(\rho_{n,m})\,(\lambda_{n,m}r)^{-1}Im\,[\Phi_n(\lambda_{n,m}r)] \\ (Re\,H\,Y^k_n(\theta,\varphi)\,\mathbf{i}_\varphi + Im\,H\,Y^k_n(\theta,\varphi)\,\mathbf{i}_\theta). \end{aligned} \tag{93}$$

Таким образом, $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{u}^+_\kappa + \mathbf{u}^-_\kappa$ является вещественной собственной вектор-функцией оператора Стокса, отвечающей собственному значению $\nu\lambda^2_{n,m}$. Нормируя вектор-функции $\mathbf{u}^{\pm}_\kappa$ в $\mathbf{L}_2(B)$, получим собственные вектор-функции оператора Стокса в виде $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{q}^+_\kappa + \mathbf{q}^-_\kappa$. Итак, доказана

Теорема 6. *Собственные значения $\mu_{n,m}$ задачи 5 в шаре B равны $\nu\lambda^2_{n,m}$, где $\lambda_{n,m} = \rho_{n,m}R^{-1}$, R — радиус шара, а числа $\rho_{n,m}$ — нули функций $\psi_n(z)$, m, $n \in \mathbb{N}$.*

При этом $p_\kappa = const$, а соответствующие собственные вектор-функции $\mathbf{v}_\kappa$ оператора Стокса являются суммой $\mathbf{q}^+_\kappa + \mathbf{q}^-_\kappa$ собственных вектор-функций ротора.

В сферических координатах они представляются в виде суммы (93) *двух векторов.*

Вектор-функции $\mathbf{v}_\kappa = \mathbf{q}^+_\kappa + \mathbf{q}^-_\kappa$ принадлежат пространству $\mathbf{J}^0(B)$ – замыканию множества финитных бесконечно дифференцируемых и соленоидальных вектор-функций $\dot{J}(B)$ в $\mathbf{L}_2(B)$ [2] и образуют в нем ортогональную систему, учитывая, что системы $\{\mathbf{q}^+_\kappa\}, \{\mathbf{q}^-_\kappa\}$ ортонормированы.

Система $\{\mathbf{v}_\kappa\}$ полна в $\mathbf{J}^0(B) \subset \mathcal{B}$, разложение вектор-функции $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{J}^0(B)$ имеет вид

$$\mathbf{g} = 1/2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n} (\mathbf{g}, \mathbf{v}_{n,m,k})\,\mathbf{v}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{94}$$

где суммирование ряда (94) идет по n, m, для которых $0 < \rho_{n,m} < N$, а затем $N \to \infty$.

7. Решение краевой задачи (2),(3)

Методом Фурье легко решается краевая

Задача 6. *Пусть задана вектор-функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$. *Найти вектор-функцию* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *в* $\mathbf{H}^1(B)$ *такую, что*

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad B, \tag{95}$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_S = 0, \tag{96}$$

где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}$ *— проекция вектора* $\mathbf{u}$ *на внешнюю нормаль* $\mathbf{n}$.

Через $\mathbf{E}^s(B)$ или $\mathbf{H}^s_{div}(B)$ обозначают [8] следующие подпространства в $\mathbf{L}_2(B)$:

$$\mathbf{E}^s(B) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^s(B) : \mathrm{div}\mathbf{v} \in H^s(B), \quad \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{E}^s} = (\|\mathbf{v}\|^2_{\mathbf{H}^s} + \|\mathrm{div}\mathbf{v}\|^2_{H^s})^{1/2}\}, \tag{97}$$

где числа $s \geq 0$ целые. Они является полными гильбертовыми пространствами и

$$\mathcal{D}(\overline{B}) \subset \mathbf{E}^s(B), \quad \mathbf{H}^{s+1}(B) \subset \mathbf{E}^s(B) \subset \mathbf{H}^s(B). \tag{98}$$

Для вектор-функция $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbf{E}^0(B)$ определено значение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}|_S$.

Приведем решение задачи в двух случаях.

7.1. Решение краевой задачи (95), (96) при $\lambda \neq Sp\,(rot)$.

Теорема 7. *Если* $\lambda \neq 0, \pm\lambda_{n,m},\ n, m \in \mathbf{N}$, *а* $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0(B)$ *и* $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}|_S = 0$, *то единственное решение* $\mathbf{u}$ *задачи 6 дается суммой рядов* $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, *где*

$$\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} (\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\, \mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{99}$$

$$\mathbf{u}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} [(\lambda + \lambda_{n,m})^{-1} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + (\lambda - \lambda_{n,m})^{-1} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})]. \tag{100}$$

Решение задачи принадлежит пространству Соболева $\mathbf{H}^1(B)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{A} = \{\nabla h : h \in H^1(B)\}$, *то оператор* $\mathbf{u} = \lambda^{-1}\mathbf{f}$ *отображает* $\mathcal{A}$ *на* $\mathcal{A}$.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}$ *в* $\mathbf{L}_2(B)$, *то* $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ *отображает* $\mathcal{B}$ *в* $\mathbf{H}^1(B)$.

Если же $\mathbf{f} \in C_0^\infty(B)$, *то* $\mathbf{u}$ *есть классическое решение задачи класса* $C^\infty(\overline{B})$.

Доказательство. Формулы (99) получают различными способами. Например, предположив, что $\mathbf{u}$ и $\mathbf{f}$ в уравнении (95) принадлежат основному пространству $\mathcal{D}(B)$, умножим его левую и правую части на $\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x})$ (соотв. на $\mathbf{q}^\pm_{n,m,k}(\mathbf{x})$) и проинтегрируем по частям. Единственность решения задачи вытекает из полноты семейства собственных функций ротора в $\mathbf{L}_2(B)$.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(B)$, то согласно п.5.3 ряды (99), (100) сходятся в любом из пространств $\mathbf{H}^s(B),\ s = 1, 2, ...$ и представляют в сумме классическое решение задачи.

Если $\mathbf{f} \in \mathcal{A} \subset \mathbf{L}_2(B)$, то согласно п. 5.3 ряд $\mathbf{b} = 0$ и, значит, $\mathbf{u}_2 = 0$, а $\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1}\mathbf{f}$. В этом случае *решение задачи сводится к умножению* $\mathbf{f}$ *на* λ^{-1}.

Если же $\mathbf{f} \in \mathcal{B} \perp \mathcal{A}$ в $\mathbf{L}_2(B)$, то согласно п. 5.3 ряд $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{b} = \mathbf{f}$ и, значит, ряд $\mathbf{u}_1$ пропадает, а $\mathbf{u}_2$ задается рядом (100). Этот ряд сходится в $\mathbf{L}_2(B)$, так как числа $|\lambda \pm \lambda_{n,m}|^{-1}$ стремятся к нулю, при $\lambda_{n,m} \to \infty$. Пространство $\mathbf{L}_2(B)$ вложено в пространство распределений $\mathcal{D}'(B)$, в котором ряд (100) можно дифференцировать почленно. Применив к нему оператор $\mathbf{rot}$ поэлементно, получим ряд

$$\mathbf{rot}\mathbf{u}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=-n}^{n} [\frac{\lambda_{n,m}}{\lambda + \lambda_{n,m}} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^+_{n,m,k})\, \mathbf{q}^+_{n,m,k}(\mathbf{x}) + \frac{\lambda_{n,m}}{\lambda - \lambda_{n,m}} (\mathbf{f}, \mathbf{q}^-_{n,m,k})\, \mathbf{q}^-_{n,m,k}(\mathbf{x})], \tag{101}$$

сходящийся в $\mathbf{L}_2(B)$. Кроме того, частичные суммы $\mathbf{S}_j u$ ряда (100) по построению удовлетворяют соотношениям $div\,\mathbf{S}_j u = 0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{S}_j u|_S = 0$. Следовательно, $\mathbf{div u}_2 = 0$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_2|_S = 0$ как распределения. Согласно п. 5.3 ряд (100) сходится в норме $\mathbf{H}^1(B)$.

Применив к нему оператор $\mathbf{rot} + \lambda\mathbf{I}$, получим разложение вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{B}$. Значит, этот ряд есть обобщенное решение задачи 6.

В общем случае, при $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0(B)$ и $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S = 0$, ряд (99) также принадлежит $\mathbf{H}^1(B)$. Так как $\operatorname{div}\mathbf{q}_{n,m,k} = \Delta\, g_{n,m,k} = -(\alpha_{n,m}/R)^2\, g_{n,m,k}$ и $\|(\alpha_{n,m}/R)\, g_{n,m,k}\| = 1$, то

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k})\,\triangle\, g_{n,m,k}(\mathbf{x}) = \tag{102}$$

$$\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}(\operatorname{div}\mathbf{f}, g_{n,m,k})\,(\alpha_{n,m}/R)^2\, g_{n,m,k}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1}\operatorname{div}\mathbf{f}.$$

Следовательно, сумма рядов (99) и (100) есть решение задачи 6. Теорема доказана.

7.2. Решение задачи 6 при $\lambda = 0$.

Теорема 8. *Если* $\lambda = 0$, $\mathbf{f} \in \mathbf{E}^0(B)$ *и* $\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}|_S = 0$, *то задача 6 разрешима в* $\mathbf{L}_2(B)$ *тогда и только тогда, когда* $div\,\mathbf{f} = 0$. *Однородная задача имеет бесконечное число линейно независимых решений:*

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\xi_{n,m,k}\,\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}), \tag{103}$$

где $\xi_{n,m,k}$ *— произвольные постоянные, такие что* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}_2(B)$.

Общее решение неоднороной задачи имеет вид $\mathbf{u}_0 + G_0^{+}\mathbf{f} + G_0^{-}\mathbf{f}$, *где*

$$G_0^{\pm}\mathbf{f} \equiv \pm\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=-n}^{n}\lambda_{n,m}^{-1}(\mathbf{f}, \mathbf{q}_{n,m,k}^{\pm})\,\mathbf{q}_{n,m,k}^{\pm}(\mathbf{x}), \quad G_0^{\pm}\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(B). \tag{104}$$

Если $\xi_{n,m,k}$ *таковы, что* $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(B)$, *то решение задачи принадлежит* $\mathbf{H}^1(B)$.

Необходимость условия $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$ очевидна, а достаточность вытекает из равенства $\operatorname{div}\mathbf{u}_1 = \lambda^{-1}\operatorname{div}\mathbf{f}$. Соотношения $G_0^{\pm}\mathbf{f} \in \mathbf{H}^1(B)$ доказаны в п.7.1. Далее, $\operatorname{rot}\mathbf{u}_0 = 0$, если $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(B)$, а $\operatorname{rot}(G_0^{+}\mathbf{f} + G_0^{-}\mathbf{f}) = \mathbf{f}$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. *О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей* // Записки Науч. семинаров ПОМИ. 2003. Т. 306. С. 71–85.
2. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970. 288 с.
3. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988. 512 с.
4. Козлов В.В. *Общая теория вихрей.* Ижевск: Изд.Дом «Удмурдский университет». 1998. 240 с.
5. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1975. 392 с.
6. Вайнберг Б.Р., Грушин В.В. *О равномерно неэллиптических задачах I* // Мат. Сб. 1967. т. 72 (114) № 4. С. 602–636.
7. Солонников В.А. *Переопределенные эллиптические задачи* // Записки Научных Сем. ЛОМИ. 1971. Т.21. № 5. С. 112–158.
8. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ.* М.: Мир. 1981. 408 с.
9. Пухначев В.В. *Симметрии в уравнениях Навье-Стокса* // Успехи механики. 2006. № 1.
10. H. Weil *The method of orthogonal projection in potetial theory* // Duke Math. V.7. 1941. P. 411–444.
11. S. Chandrasekhar *On force-free magnetic fields* Proc. Nat. Ac. Sci.. 1956. V. 42. № 1. P.1–5.

12. J.B. Taylor *Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic fields* // Phys. Rev. Letters. 1974. V. 33. P. 1139–1141.
13. Арнольд В.И. *Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. 261. P. 17–20.
14. M. Henon *Sur la topologie des lignes de courant dans un case particulier* // C. R. Acad. Sci. Paris. 1966. 262. P. 312–314.
15. Сакс Р.С. *Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса* // Доклады Акад. Наук. 2007. Т. 416, № 4, С. 446–450.
16. Сакс Р.С. *Решение спектральной задачи для оператора ротор и оператора Стокса с периодическими краевыми условиям* // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 36 (Записки научн. Семинаров ПОМИ, т. 318). 2004. С.-П. С. 246–276.
17. Сакс Р.С. *О краевых задачах для системы* $rot\ u + \lambda\ u = h$ // ДАН. 1971. Т. 199, № 5. С. 1022–1025.
18. Сакс Р.С. *О краевых задачах для системы* $rot\ u + \lambda\ u = h$ // Дифференциальные уравнения. 1972. Т. 8. № 1. С. 126-140.
19. Фурсенко А.А. *Краевая задача для одной равномерно неэллиптической системы.* Рукопись дипломной работы студента матем. фак.-та НГУ, Новосибирск 1971. 29 с.
20. Сакс Р.С. *Краевые задачи для эллиптических систем дифференциальных уравнений.* Новосибирск: НГУ, 1975. 164 с.
21. Сакс Р.С. *Спектр оператора вихря в шаре при условии непротекания и собственные значения колебаний упругого шара, закрепленного на границе* // Комплексный анализ, дифференциальные уравнения и смежные вопросы. IV. Прикладная математика. Труды международной конференции. Уфа ИМ с ВЦ УНЦ РАН. 2000. С. 61–68.
22. S. Chandrasekhar, P.S. Kendall *On force-free magnetic fields* // Astrophys. Journal.1957. V. 126. P. 457–460.
23. D. Montgomery, L. Turner, G. Vahala *Three-dimentional magnetohydrodyamic turbulence in cylindrical geometry* // Phys. Fluids. 1978. V. 21. № 5. P. 757–764.
24. Берхин П.Е. *Самосопряженная краевая задача для системы* $*d\ u + \lambda\ u = f$ // ДАН. 1975. Т. 222, № 1. С. 15–17.
25. Y. Giga, Z. Yoshida *Remark on spectra of operator rot* // Math. Z. 1990. V. 204. P. 235–245.
26. R. Picard *On selfadjoint realization of curl and some its applications* // Preprint : Technische Universitat Dresden: MATH-AN-02-96). Dresden, Marz. 1996.
27. Сакс Р.С. *О свойствах обобщенно эллиптических псевдодифференциальных операторов на замкнутых многообразиях* // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 28 (Записки научн. Семинаров ПОМИ, Т. 243). 1997. С.-П. С. 215–269.
28. Махалов А.С., Николаенко В.П. *Глобальная разрешимость трехмерных уравнений Навье-Стокса с равномерно большой начальной завихренностью* // Успехи математических наук. 2003. V. 58. № 2. С. 79–93.
29. Сакс Р.С. *Глобальные решения уравнений Навье-Стокса в равномерно вращающемся пространстве* Теоретическая и математическая физика. 2010. Т. 162, № 2. С. 196–215.
30. Сакс Р.С. *Задача Коши для уравнений Навье-Стокса, метод Фурье* // Уфимский математический журнал. 2011. Т. 3. № 1. С. 53–79.

Ромэн Семенович Сакс
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450077, г. Уфа, Россия
E-mail: romen-saks@yandex.ru