ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 56-62.

УДК 517.98

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Д.К. ПОТАПОВ

Аннотация. В вещественном рефлексивном банаховом пространстве рассматривается проблема существования решений задачи со спектральным параметром для уравнений с разрывными операторами. Вариационным методом получены теоремы о числе решений для исследуемых задач. В качестве приложения рассмотрены основные краевые задачи для уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывными нелинейностями.

Ключевые слова: спектральный параметр, разрывный оператор, вариационный метод, число решений.

Mathematics Subject Classification: 47J10, 47J30, 35P30, 35J60, 35J20.

Введение. Постановка задачи

Общая постановка задач на собственные значения для нелинейных уравнений была дана в работе [1]. В работах [1], [2] нелинейные задачи со спектральным параметром изучались топологическими методами, в работах [3], [4] – в полуупорядоченных пространствах, в работах [5], [6] – вариационным методом. Во всех перечисленных работах структура множества собственных значений операторного уравнения исследовалась для непрерывных отображений. В данной работе рассматриваются нелинейные спектральные задачи в общей операторной постановке без предположения о непрерывности оператора. В дальнейшем потребуются следующие определения.

Пусть E – вещественное рефлексивное банахово пространство, E^* – сопряженное с E пространство. Через (z, x) обозначается значение функционала $z \in E^*$ на элементе $x \in E$.

Определение 1. Линейный оператор $A : E \to E^*$ называется *самосопряженным*, если $(Ax, h) = (Ah, x)$ для любых $x, h \in E$.

Определение 2. Отображение $T : E \to E^*$ называется *компактным* на E, если оно ограниченные множества из E переводит в предкомпактные в E^*.

Определение 3. Отображение $T : E \to E^*$ называется *монотонным* на E, если $(Tx - Ty, x - y) \geq 0$ для любых $x, y \in E$. Отображение $T : E \to E^*$ называется *антимонотонным*, если отображение $-T$ монотонно.

Определение 4. Отображение $T : E \to E^*$ называется *ограниченным* на E, если существует постоянная $M > 0$ такая, что $||Tx|| \leqslant M$ для любого $x \in E$.

В данной работе рассматривается уравнение вида

$$Au = \lambda Tu \tag{1}$$

D.K. Potapov, On a number of solutions in problems with spectral parameter for equations with discontinuous operators.

Поступила 04 февраля 2012 г.

с параметром $\lambda > 0$. Здесь A – линейный самосопряженный оператор из E в E^*, $T : E \to E^*$ – разрывное, компактное или антимонотонное отображение, ограниченное на E.

Работы [7], [8] были посвящены существованию луча положительных собственных значений для таких уравнений с разрывными операторами. При достаточно больших λ в этих работах доказаны теоремы о существовании ненулевых решений уравнения (1). В работах [9], [10] получены оценки величины бифуркационного параметра и норм оператора в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами вида (1). Наличие нулевого решения уравнения (1) при любом λ обеспечивается априорным предположением $T(0) = 0$. В данной работе рассмотрим вопрос о числе решений уравнения (1).

1. Общие результаты

Как и ранее [7]–[10], уравнение (1) изучается вариационным методом. Для применимости вариационного подхода к изучению уравнения (1) относительно оператора T дополнительно предполагается, что он квазипотенциальный.

Определение 5. Отображение $T : E \to E^*$ называется *квазипотенциальным*, если существует функционал $f : E \to \mathbf{R}$, для которого верно равенство $f(x+h) - f(x) = \int\limits_0^1 (T(x+th), h)\, dt$ для любых $x, h \in E$ (интеграл понимается в смысле Лебега). При этом f называют *квазипотенциалом* оператора T.

Свяжем с уравнением (1) функционал $f^\lambda(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - \lambda f(u)$, где f – квазипотенциал оператора T. В работе [11] указаны достаточные условия (ограничения на точки разрыва оператора $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$), при выполнении которых точки минимума функционала f^λ являются решениями уравнения (1). А именно, надо предполагать, что точки разрыва оператора F_λ регулярные.

Определение 6. Элемент $x \in E$ называется *точкой разрыва* оператора $T : E \to E^*$, если найдется $h \in E$, для которого либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h)$ не существует, либо $\lim\limits_{t\to 0}(T(x+th), h) \neq (Tx, h)$.

Определение 7. Элемент $x \in E$ называется *регулярной точкой* для оператора $T : E \to E^*$, если для некоторого $h \in E$ $\overline{\lim\limits_{t\to +0}}(T(x+th), h) < 0$.

Согласно результатам работ [7], [8] справедлива нижеследующая теорема.

Теорема 1. *Предположим, что*

1) A – линейный самосопряженный оператор, действующий из вещественного рефлексивного банахова пространства E в сопряженное пространство E^*, пространство E представляется в виде прямой суммы замкнутых подпространств E_1 и E_2, $E_1 = \ker A$, причем существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $(Au, u) \geq \alpha||u||^2$ для любого $u \in E_2$;

2) отображение T компактное или антимонотонное, квазипотенциальное (с квазипотенциалом f) и ограниченное на E, $f(0) = 0$ и для некоторого $u_0 \in E$ значение $f(u_0) > 0$; если $E_1 \neq \{0\}$, то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{u\in E_1, ||u||\to+\infty} f(u) = -\infty$;

3) если отображение T компактное, то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{t\to+0}(T(u+th) - Tu, h) \geq 0$ для всех $u, h \in E$;

4) если отображение T антимонотонное, то дополнительно предполагается, что любая точка разрыва оператора T при $\lambda > \lambda_0 > 0$ регулярная для $F_\lambda u = Au - \lambda Tu$ (λ_0 – величина, начиная с которой задача на собственные значения разрешима).

Тогда для любого $\lambda > \lambda_0$ уравнение (1) имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Отметим, что если в условиях теоремы 1 дополнительно потребовать $T(0) = 0$, то для компактного отображения T уравнение (1) будет иметь по крайней мере два решения (нулевое и ненулевое) для любого $\lambda > \lambda_0$, а если отображение T – антимонотонное, то уравнение (1) имеет только тривиальное решение, поскольку в этом случае ненулевые решения будут невозможны.

Центральным понятием современной вариационной теории является условие Palais-Smale ((PS)-условие), а ее основанием – деформационная лемма. Базируясь на понятии обобщенного градиента Кларка для локально липшицевых функций, (PS)-условие и деформационная лемма были модифицированы K.C. Chang [12].

Определение 8. Функция $f : E \to \mathbf{R}$ называется *локально липшицевой*, если для любого $x \in E$ найдутся окрестность U точки x и постоянная $L > 0$ такие, что $|f(u) - f(v)| \leqslant L||u - v||$ для любых $u, v \in U$.

Определение 9. *Обобщенной производной по направлению l* локально липшицевой функции f в точке x называется $f^\circ(x, l) = \overline{\lim\limits_{z\to x, t\to+0}} \frac{f(z+tl)-f(z)}{t}$, а *обобщенной производной f в точке x* множество $\partial f(x) = \{y \in E^* : f^\circ(x, l) \geq (y, l) \ \ \forall l \in E\}$.

Определение 10. Локально липшицева функция $f : E \to \mathbf{R}$ удовлетворяет *(PS)-условию*, если любая последовательность $(x_n) \subset E$, для которой множество значений $(f(x_n))$ ограничено и $m(x_n) = \inf\limits_{x^*\in\partial f(x_n)} ||x^*|| \to 0$ при $n \to \infty$, содержит сходящуюся подпоследовательность, где $\partial f(x)$ – обобщенный градиент Кларка для f в точке x.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть E – вещественное гильбертово пространство плотно и компактно вложенное в вещественное рефлексивное банахово пространство E_3, $A : E \to E$ – линейный самосопряженный и ограниченный оператор, нуль является изолированной точкой его спектра, причем ядро и отрицательное подпространство оператора A конечномерны и выполнены условия 2)–3) теоремы 1 для отображения $T : E_3 \to E_3^*$, $T(0) = 0$. Тогда существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ уравнение (1) имеет по крайней мере три решения.*

Доказательство теоремы 2. Известно [13], что если E – гильбертово пространство, то условие 1) теоремы 1 выполняется, если нуль – изолированная точка спектра неотрицательного оператора A. В этом случае существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $(Au, u) \geq \alpha||u||^2 \ \forall \ u \in E_2$ ($E_1 = \ker A$, $E_2 = E_1^\perp$). В силу этого и условий теоремы 2 по теореме 1 найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ уравнение (1) имеет по крайней мере одно ненулевое решение, т. е. и для некоторой константы $\lambda_* > 0$ для каждого $\lambda > \lambda_*$ найдется элемент $u_\lambda \in E$, $u_\lambda \neq 0$ такой, что $f^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v\in E} f^\lambda(v) < 0$, как это следует из утверждения теоремы 2 из работы [7]. Покажем, что при $\lambda > \lambda_*$ уравнение (1) имеет по крайней мере еще одно нетривиальное решение v_λ, которое может быть найдено с помощью теоремы о горном перевале [12], если $f^\lambda(v_\lambda) > 0$. Для выполнения условий теоремы о горном перевале [12] достаточно показать, что функция f^λ удовлетворяет (PS)-условию для любого $\lambda > 0$. Для этого достаточно доказать, что функция f^λ локально липшицева на E (все остальные условия теоремы 4.5 из [12] идентичны условиям доказываемой теоремы 2). Это действительно так, поскольку A – линейный ограниченный оператор, а функция f удовлетворяет условию Липшица на E_3, так как для произвольных $u, v \in E_3$ имеем

$$|f(u) - f(v)| = |\int\limits_0^1 (T(v + t(u - v)), u - v)dt| \leqslant$$

$$\int\limits_0^1 |(T(v + t(u - v)), u - v)|dt \leqslant M||u - v||_{E_3},$$

поскольку отображение T, ограниченное на E_3, $M > 0$ – константа из неравенства $||Tx|| \leqslant M \ \forall x \in E_3$. Поэтому, по теореме 4.5 из [12], функционал f^λ удовлетворяет (PS)-условию для каждого $\lambda > 0$. Значит, функционал f^λ удовлетворяет условиям теоремы о горном перевале [12], следовательно, он имеет критическую точку $v_\lambda \in E$ (решение уравнения (1)) такую, что $f^\lambda(v_\lambda) = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \sup\limits_{t\in[0,1]} f^\lambda(\gamma(t)) \geq \max\{f^\lambda(0), f^\lambda(u_\lambda)\} = 0$ (поскольку $f^\lambda(0) = 0, f^\lambda(u_\lambda) < 0$), где $\Gamma = \{\gamma \in \mathbf{C}([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_\lambda\}$. Более того, аналогично [7], [14] можно показать, что $f^\lambda(u) > \varepsilon > 0$ для $||u|| = r > 0$ и $||u_\lambda|| > r$. Следовательно, существует $v_\lambda \in E$ такое, что $f^\lambda(v_\lambda) > 0$. Таким образом, для любого $\lambda > \lambda_*$ существует второе нетривиальное решение v_λ, а уравнение (1) для любого $\lambda > \lambda_*$ имеет по крайней мере три решения (нулевое, $u_\lambda \neq 0$, $v_\lambda \neq 0$). Отметим, что решения u_λ и v_λ различны, поскольку $f^\lambda(u_\lambda) < 0$, а $f^\lambda(v_\lambda) > 0$. Теорема 2 доказана.

2. Приложения

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим вопрос существования решений задачи

$$Lu(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + c(x)u(x) = \lambda g(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{3}$$

где λ – положительный параметр. Здесь L – равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$ с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega}), c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$; функция $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ суперпозиционно измерима [15], и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbf{R}$ разрывы только первого рода, $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)] \ \forall \ u \in \mathbf{R}$, $g_-(x, u) = \varliminf\limits_{\eta\to u} g(x, \eta)$, $g_+(x, u) = \varlimsup\limits_{\eta\to u} g(x, \eta)$; граничное условие (3) имеет вид: либо условие Дирихле $u(x)|_\Gamma = 0$, либо условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x)|_\Gamma = 0$ с конормальной производной $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(\mathbf{n}, x_j)$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(\mathbf{n}, x_j)$ – направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}$, либо третье краевое условие $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}_L}(x) + \sigma(x)u(x)|_\Gamma = 0$, функция $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$, неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ.

В зависимости от вида граничного условия (3) определим пространство X. Пусть $X = \mathbf{H}^1_\circ(\Omega)$, если (3) – граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (3) – граничное условие Неймана или третье краевое условие. Сопоставим краевой задаче (2)–(3) функционал J^λ, определенный на X, следующим образом: $J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda J_2(u)$, где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c(x)u^2(x)dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} \sigma(s)u^2(s)ds$$

в случае третьего краевого условия;

$$J_2(u) = \int\limits_{\Omega} dx \int\limits_{0}^{u(x)} g(x, s)ds.$$

Определение 11. Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Назовем $u \in \mathbf{R}$ *прыгающим разрывом* функции f, если $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s \to u\pm} f(s)$.

Определение 12. *Сильным решением* задачи (2)–(3) называется функция $u \in \mathbf{W}_r^2(\Omega)$, $r > 1$, которая удовлетворяет для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (2) и для которой след $Bu(x)$ на Γ равен нулю.

Определение 13. *Полуправильным решением* задачи (2)–(3) называется такое сильное ее решение u, значение которого $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ является точкой непрерывности функции $g(x, \cdot)$.

В работе [12] вариационное исчисление Кларка применено для локально липшицевых функций к доказательству существования сильных решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа второго порядка с разрывной нелинейностью, развит вариационный подход применительно к краевым задачам для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями. Полуправильные решения в работе [12] не рассматривались. В работах [7], [8] получены достаточные условия существования нетривиального полуправильного решения задачи (2)–(3).

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*
1) $J_1(u) \geq 0 \ \ \forall u \in X$*;*
2) для почти всех $x \in \Omega$ *функция* $g(x, \cdot)$ *имеет только прыгающие разрывы,* $g(x, 0) = 0$ *и* $|g(x, u)| \leqslant a(x)\ \forall u \in \mathbf{R}$*, где* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$*,* $q > \frac{2n}{n+2}$*, фиксирована;*
3) найдется $u_0 \in X$*, для которого* $J_2(u_0) > 0$;
4) если пространство $N(L)$ *решений задачи*

$$\begin{cases} Lu = 0, \\ Bu|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

ненулевое (резонансный случай), то дополнительно предполагается, что $\lim\limits_{u \in N(L),\, ||u|| \to +\infty} J_2(u) = -\infty$.
Тогда существует $\lambda_* > 0$ *такое, что для любого* $\lambda > \lambda_*$ *задача (2)–(3) имеет по крайней мере три сильных решения, причем по крайней мере одно из ненулевых решений является полуправильным.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия 1), 3), 4) теоремы 3 и дополнительно условия*
1′) для почти всех $x \in \Omega$ *функция* $g(x, \cdot)$ *невозрастающая на* $\mathbf{R}$ *и для некоторой* $a \in \mathbf{L}_{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ *справедливо неравенство* $|g(x, u)| \leqslant a(x)\ \ \forall u \in \mathbf{R}$;
2′) для почти всех $x \in \Omega$ *точки разрыва функции* $g(x, \cdot)$ *лежат на плоскостях* $u = u_i$*,* $i \in I$ *(I – не более чем счетно), и если* $g(x, u_i-) > g(x, u_i+)$*, то* $g(x, u_i-)g(x, u_i+) > 0$ *для любого* $i \in I$*.*
Тогда существует $\lambda_* > 0$ *такое, что для любого* $\lambda > \lambda_*$ *задача (2)–(3) имеет по крайней мере одно ненулевое полуправильное решение.*

Доказательство теорем 3, 4. Важным условием, обеспечивающим существование нетривиального решения задачи (2)–(3), является условие 3) теоремы 3. В работах [7], [8] доказано, что при выполнении условий теорем 3, 4 существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_0$ $\inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v) < 0$, и найдется $u_\lambda \in X$, для которого $J^\lambda(u_\lambda) = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v)$, и любое такое u_λ является ненулевым полуправильным решением задачи (2)–(3). Таким образом, найдется и $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ существует по крайней мере одно ненулевое полуправильное решение u_λ задачи (2)–(3). Теорема 4 доказана. Наличие второго, тривиального, решения задачи (2)–(3) в теореме 3 обуславливается условием 2) теоремы 3 ($g(x, 0) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$). Отметим, что оператор $A : X \to X$, определяемый равенством

$$(Au, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx + \int\limits_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx \ \ \forall u, v \in X$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана, и равенством

$$(Au, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} dx +$$

$$\int\limits_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx + \int\limits_{\Gamma} \sigma(s)u(s)v(s)ds \ \ \forall u, v \in X$$

в случае третьего краевого условия, является самосопряженным, линейным и ограниченным. Ядро оператора A совпадает с пространством $N(L)$. Согласно теории Фредгольма отрицательное подпространство оператора A конечномерно и если $N(L) \neq \{0\}$, то нуль — изолированная точка спектра оператора A конечной кратности [16]. Гильбертово пространство X плотно и компактно (в силу условия 2) теоремы 3) вложено в рефлексивное банахово пространство $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $p = \frac{q}{q-1}$, $q > \frac{2n}{n+2}$ [17]. Аналогично [7] показывается, что для компактного отображения $T : \mathbf{L}_p \to \mathbf{L}_q$ выполнены условия 2)-3) теоремы 1. Итак, все условия теоремы 2 выполнены. Поэтому существует $\lambda_* > 0$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_*$ задача (2)–(3) имеет по крайней мере три решения. Действительно, применив теорему о горном перевале [12] получим, что для каждого $\lambda > \lambda_*$ существует также элемент $v_\lambda \in X$ – критическая точка функционала J^λ такая, что $J^\lambda(v_\lambda) > 0$ ($J^\lambda(v_\lambda) = \inf\limits_{\gamma\in\Gamma} \sup\limits_{t\in[0,1]} J^\lambda(\gamma(t))$, где $\Gamma = \{\gamma \in \mathbf{C}([0,1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_\lambda\}$). Итак, в условиях теоремы 3 функционал J^λ имеет по крайней мере три различные критические точки. Таким образом, для любого $\lambda > \lambda_*$ существует по крайней мере два ненулевых решения задачи (2)–(3). Решение u_λ будет полуправильным при сделанных предположениях на разрывы нелинейности [7]. Теорема 3 доказана.

Отметим, что в работе [18] получены аналогичные теоремы о числе решений однопараметрического семейства задач Дирихле для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями. Доказательство этих теорем может быть также сведено к проверке выполнения условий теорем 1, 2 данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.* М.: Гостехиздат, 1956. 392 с.
2. Rabinowitz P.H. *Some global results for nonlinear eigenvalue problems* // J. Funct. Anal. 1971. Vol. 7. P. 487–513.
3. Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений.* М.: Физматгиз, 1962. 396 с.
4. Amann H. *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spases* // SIAM Review. 1976. Vol. 18. № 4. P. 620–709.
5. Rabinowitz P.H. *Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems* // Indiana Univ. Math. J. 1974. Vol. 23. № 8. P. 729–754.
6. Rabinowitz P.H. *A bifurcation theorem for potentional operators* // J. Funct. Anal. 1977. Vol. 25. P. 412–424.
7. Павленко В.Н., Потапов Д.К. *О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами* // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 4. С. 911–919.
8. Потапов Д.К. *О существовании луча собственных значений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями в критическом случае* // Вестн. С.-Петерб. ун-та.

Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2004. Вып. 4. С. 125–132.
9. Потапов Д.К. *Оценка бифуркационного параметра в спектральных задачах для уравнений с разрывными операторами* // Уфимск. матем. журн. 2011. Т. 3. № 1. С. 43–46.
10. Потапов Д.К. *Оценивание норм оператора в задачах на собственные значения для уравнений с разрывными операторами* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11. Вып. 4. С. 41–45.
11. Павленко В.Н. *Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами* // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. 3. Математика. Механика. 1994. № 1(2). С. 87–95.
12. Chang K.C. *Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations* // J. Math. Anal. and Appl. 1981. Vol. 80. № 1. P. 102–129.
13. Рисс Ф., Секефальви–Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* М.: Мир, 1979. 588 с.
14. Павленко В.Н., Винокур В.В. *Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Изв. вузов. Матем. 2001. № 5. С. 43–58.
15. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* М.: Наука, 1983. 272 с.
16. Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных.* М.: Наука, 1983. 424 с.
17. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* М.: Наука, 1982. 336 с.
18. Потапов Д.К. *О числе полуправильных решений в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа высокого порядка с разрывными нелинейностями* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 3. С. 447-449.

Дмитрий Константинович Потапов,
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7/9,
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: potapov@apmath.spbu.ru