ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 31-42.

УДК 517.968.4+517.968.74

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С НЕКОМПАКТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ НА ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ПОЛУПРЯМОЙ

М.Ф. БРОЯН, Х.А. ХАЧАТРЯН

Аннотация. Статья посвящена исследованию некоторых классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами Гаммерштейнского типа. Указанные уравнения имеют важное применение в кинетической теории газов и в теории распределения дохода в однопродуктовой экономике.

Ключевые слова: интегральное уравнение, оператор Гаммерштейна, пространство Соболева, сходимость, монотонность.

1. Введение

Работа посвящена вопросу разрешимости в определенных функциональных пространствах для следующих классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактным оператором типа Гаммерштейна-Винера-Хопфа:

$$f(x)=\int_0^\infty K_0(x-t)N_0(t,f(t))dt+\int_0^\infty K_1(x+t)N_1(t,f(t))dt,\quad x>0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx}+\lambda\varphi(x)=\displaystyle\int_0^\infty T(x-t)H(t,\varphi(t))dt+\int_0^\infty T_1(x+t)H_1(t,\varphi(t))dt,\quad x>0, & (2)\\ \varphi(0)=0 & (3)\end{cases}$$

относительно искомых функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ соответственно.

Указанные классы уравнений, кроме самостоятельного математического интереса, имеют непосредственное применение в кинетической теории газов (уравнение (1)), в эконометрике (задача (2)-(3)) (см. [1]-[4]).

В уравнении (1)

$$K_0(x)\geq 0,\quad x\in\mathbb{R},\quad K_0\in L_1(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R}),\quad \int_{-\infty}^{+\infty}K_0(x)dx=1, \tag{4}$$

$$K_1(x)\geq 0,\quad K_1\not\equiv 0,\quad \int_x^\infty K_1(\tau)d\tau\leqslant\int_x^\infty K_0(\tau)d\tau,\quad x\in\mathbb{R}^+\equiv(0,+\infty). \tag{5}$$

M.F. Broyan, Kh.A. Khachatryan, On some nonlinear integral and integro-differential equations with noncompact operators on positive semi axis.

Поступила 25 января 2012 г.

В задаче (2)-(3): λ — положительный числовой параметр уравнения (2), а ядра T и T_1 удовлетворяют следующим условиям:

$$T_1(x) \geq 0, \quad T_1 \not\equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad T_1 \in L_1(\mathbb{R}^+), \tag{6}$$

$$T(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad T \in L_1(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T(x)dx = \lambda, \tag{7}$$

$$\int\limits_x^{\infty} T_1(z)dz \leqslant \int\limits_x^{\infty} T(z)dz, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{8}$$

$$\nu(T) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau T(\tau)d\tau < -1, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j T(\tau)d\tau < +\infty, \quad j = 1, 2. \tag{9}$$

$N_0, \quad N_1, \quad H$ и H_1- определенные на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ вещественозначные функции, удовлетворяющие определенным условиям (см. Теоремы 1-3).

В линейном случае, когда $N_0(t, z) \equiv N_1(t, z) \equiv z$, изучению и решению уравнения (1) были посвящены многочисленные работы (см. [5]–[8] и ссылки в них).

В случае, когда $K_0(x) = K_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ и $N_0(t, z) = N_1(t, z) = z^p, \quad p \in (0, 1)$, уравнение (1) в связи с важным применением в $p-$адической теории струны исследовалось в работах (см. [9]-[12]).

В том случае, когда $N_0(t, z) \equiv G(z), \quad N_1(t, z) \equiv G_1(z), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$ (где $G, G_1 \in C[0, \eta]$, $G(z) \geq z, \quad G_1(z) \geq 0, \quad z \in [0, \eta], \quad G, G_1 \uparrow$ на $[0, \eta]$ и $G(\eta) = G_1(\eta) = \eta$ при некотором $\eta > 0,$) уравнение (1) исследовалось в работе [13], и там доказано существование положительного и ограниченного решения с пределом η в бесконечности.

В случае, когда $N_0(t, z) \equiv z - \omega(z), N_1(t, z) \equiv 0$, а $K_0(-x) = K_0(x), \quad x > 0$,
$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^j K_0(x)dx {<} {+}\infty, \quad j = 1, 2$, где $0 \leqslant \omega \downarrow$ по z на $[A, +\infty), \quad A > 0$,
$\omega \in C[A, +\infty) \cap L_1(0, +\infty)$, в работе [14] было доказано существование однопараметрического семейства положительных решений с асимптотическим поведением $O(x)$ при $x \to +\infty$. В дальнейшем этот результат был обобщен сперва на случай $\nu(K_0) \leqslant 0$, $N_0(t, z) \equiv \mu(t)(z - \overset{\circ}{\omega}(t, z)), \quad N_1(t, z) \equiv z$ (где $0 < \mu(t) \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}^+, 1 - \mu \in L_1(\mathbb{R}^+)$, $\overset{\circ}{\omega}(t, z) \geq 0, \quad \overset{\circ}{\omega}(t, z) \leqslant \omega(z), \quad (t, z) \in \mathbb{R}^+ \times [A, +\infty), \quad \overset{\circ}{\omega} \downarrow$ по z на $[A, +\infty)$) в работах [15, 16], а после этого, в случаях $N_0(t, z) \equiv \mu(t)(G(z) - \overset{\circ}{\omega}(t, z)), \quad N_1(t, z) \equiv G_1(z)$ в [17, 18].

Задача (2)-(3), в том случае, когда $H(t, z) = G(z), \quad H_1 \equiv 0$, сравнительно недавно была изучена в работе [19]. В [19] построено неотрицательное и монотонно возрастающее ненулевое решение из пространства Соболева $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$.

В настоящей работе мы будем заниматься построением ненулевых и неотрицательных решений для уравнений (1) и (2) при совершенно других условиях на N_0, N_1, H и H_1. Отметим также, что решение уравнения (1) при различных значениях $\nu(K_0)$ строится в пространствах $L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$ и $L^0_\infty(\mathbb{R}^+) \equiv \{\varphi(x) : \varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^+), \quad \lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0\}$, а решение задачи (2)-(3) при условиях (6)-(9)-в пространстве Соболева $W^1_1(\mathbb{R}^+)$.

2. Разрешимость уравнения (1) в случае отрицательности первого момента ядра K_0

Пусть для функций $N_0(t,z)$ и $N_1(t,z)$ существуют числа $\eta > 0$ и $\eta_0 \in (0,\eta)$, такие, что

1) $N_0(t,z), N_1(t,z) \uparrow$ по z на $[\Phi_{\eta_0}(t),\eta]$, при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$, где

$$\Phi_{\eta_0}(t) \equiv \eta_0 \int\limits_t^\infty K_1(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{10}$$

2) N_0 и N_1 удовлетворяют условию Каратеодори на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, по аргументу z. Это условие в дальнейшем вкратце запишем в следующем виде:

$$N_0, N_1 \in Carat_z(\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]), \tag{11}$$

$$3) \quad N_0(t,0) \equiv 0, \quad N_1(t,0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}^+ \tag{12}$$

$$4) \quad 0 \leqslant N_0(t,z) \leqslant z, \quad (t,z) \in \mathbb{R}^+ \times [\Phi_{\eta_0}(t),\eta] \tag{13}$$

$$5) \quad N_1(t,\Phi_{\eta_0}(t)) \geq \eta_0, \quad N_1(t,\eta) \leqslant \eta. \tag{14}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть ядра K_0 и K_1 удовлетворяют условиям* (4)-(5), *причем* $\nu(K_0) \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tau K_0(\tau)d\tau < 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j K_0(\tau)d\tau < +\infty$, $\quad j = 1,2$. *Тогда уравнение* (1) *в пространстве* $L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$ *имеет положительное решение.*

Доказательство. Сперва рассмотрим интегральное уравнение Винера-Хопфа:

$$S(x) = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)S(t)dt, \quad x > 0 \tag{15}$$

относительно искомой вещественной и измеримой функции $S(x)$, ядро K_0 которого удовлетворяет условиям теоремы 1.

Как известно (см.[20]), для уравнения (15) существует положительное и ограниченное решение со следующими свойствами:

$$S(x) \geq \eta(1-\gamma_+), \quad S(x) \uparrow \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+ \tag{16}$$

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \eta, \tag{17}$$

$$\gamma_+ \equiv \int\limits_0^\infty v_+(x)dx \in (0,1). \tag{18}$$

Здесь функции $v_\pm(x) \geq 0 \quad v_\pm(x) \in L_1(\mathbb{R}^+)-$ определяются из нелинейных уравнений факторизации Н.Б. Енгибаряна:

$$v_\pm(x) = K_0(\pm x) + \int\limits_0^\infty v_\mp(t)v_\pm(x+t)dt, \quad x > 0, \tag{19}$$

причем

$$\gamma_- \equiv \int\limits_0^\infty v_-(x)dx = 1, \quad \gamma_+ \in (0,1). \tag{20}$$

В недавней работе автора (см.[21]), в качестве вспомогательного утверждения, доказаны следующие дополнительные свойства функции $S(x)$:

$$\eta - S(x) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+), \tag{21}$$

$$\eta - S(x) \geq \eta \int\limits_x^\infty K_0(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{22}$$

Включение (21) и неравенство (22) в дальнейших рассуждениях нам понадобятся. Теперь введем следующие последовательные приближения:

$$f_0(x) = \eta - S(x), \tag{23}$$

$$\begin{gathered} f_{n+1} = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f_n(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_n(t))dt, \\ n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{gathered} \tag{24}$$

Индукцией по n докажем следующие свойства последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$:

$$a) \quad f_n(x) \downarrow \text{по} \quad n, \qquad b) \quad f_n(x) \geq \Phi_{\eta_0}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Заметим, что из (22) с учетом того, что $\eta_0 \in (0, \eta)$, непосредственно следует

$$\eta \geq f_0(x) \geq \eta \int\limits_x^\infty K_0(\tau)d\tau \geq \eta_0 \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau = \Phi_{\eta_0}(x). \tag{26}$$

В силу свойств функций N_0 и N_1 с учетом (26), в (24) получим

$$f_1(x) = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, \eta - S(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \eta - S(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)(\eta - S(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \eta)dt \leqslant$$

$$\leqslant \eta \int\limits_{-\infty}^x K_0(\tau)d\tau - \int\limits_0^\infty K_0(x-t)S(t)dt + \eta \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau \leqslant \eta - S(x) = f_0(x),$$

$$f_1(x) \geq \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_0(t))dt \geq \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \Phi_{\eta_0}(t))dt \geq$$

$$\geq \eta_0 \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau = \Phi_{\eta_0}(x).$$

Предположим теперь, что $\Phi_{\eta_0}(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Тогда, из (24) с учетом монотонности N_0 и N_1 и свойства (14), будем иметь:

$$f_{n+1}(x) \leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f_{n-1}(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_{n-1}(t))dt = f_n(x),$$

$$f_{n+1}(x) \geq \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \Phi_{\eta_0}(t))dt \geq \Phi_{\eta_0}(x).$$

Следовательно, последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел, когда $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Из условия (11), с учетом предельной теоремы Лебега (см.[22]), следует, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Кроме того, свойства (25) влекут следующие неравенства для предельной функции $f(x)$:

$$\Phi_{\eta_0}(x) \leqslant f(x) \leqslant \eta - S(x). \tag{27}$$

Так как $\eta - S(x) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$, то из (27) получаем, что $f(x) > 0$, $f \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$. **Теорема доказана.**

3. Разрешимость уравнения (1) в случае четного ядра K_0

Теперь займемся решением уравнения (1) при других предположениях относительно функций N_0 и N_1, в случае, когда

$$K_0(-x) = K_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{28}$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть для некоторой измеримой функции $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ζ и $\eta-$ первые положительные корни уравнений $Q(x) = 2x$ и $Q(x) = x$ соответственно, причем $2\zeta < \eta$, $Q \in C[0,\eta]$, $Q(x) \uparrow$ по x на $[0,\eta]$. Предположим, что*
a) $0 \leqslant N_0(t,z) \leqslant \eta - Q(\eta - z)$, при $(t,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$,
b) $N_0, N_1 \in Carat_z(\mathbb{R}^+ \times [0,\eta])$,
c) $N_0, N_1 \uparrow$ по z на отрезке $[0,\eta]$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$,
d) существует $\eta_0 \in (0,\eta)$, такое что

$$N_1(t, \Phi_{\eta_0}(t)) \geq \eta_0, \quad N_1(t,\eta) \geq \eta.$$

Тогда при условиях (4), (5), (28) уравнение (1) в пространстве $L^0_\infty(\mathbb{R}^+)$ имеет положительное решение.

Доказательство. Сначала рассмотрим следующее вспомогательное нелинейное интегральное уравнение Гаммерштейновского типа:

$$\psi(x) = \int_0^\infty K_0(x-t)Q(\psi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{29}$$

относительно искомой функции $\psi(x)$. Введем следующие итерации:

$$\psi_{n+1}(x) = \int_0^\infty K_0(x-t)Q(\psi_n(t))dt, \quad \psi_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{30}$$

В силу свойств функций Q и K_0 индукцией по n нетрудно убедиться, что

$$\psi_n(x) \quad \downarrow \text{по} \quad n, \quad \psi_n(x) \geq \zeta, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, последовательность функций $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел: $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x)$, причем предельная функция по теореме Б. Леви будет удовлетворять уравнению (29) и соотношению

$$\zeta \leqslant \psi(x) \leqslant \eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{31}$$

Индукцией также можно доказать, что

$$\psi_n(x) \quad \uparrow \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{32}$$

если итерации (30) записать в следующем виде:

$$\psi_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^x K_0(\tau)Q(\psi_n(x-\tau))d\tau, \quad \psi_0(x) \equiv \eta, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{33}$$

Следовательно, с учетом (32) получаем, что

$$\psi(x) \quad \uparrow \text{по} \quad x \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^+. \tag{34}$$

Таким образом, в силу (31) и (34) можем утверждать, что существует

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) \equiv \eta^* \leqslant \eta, \quad \eta^* > 0. \tag{35}$$

В обеих частях в (29), переходя к пределу когда $x \to \infty$, с использованием известного свойства операций в свертках, с учетом формулы (4) получим $\eta^* = Q(\eta^*)$. Так как $\eta-$ первый положительный корень уравнения $Q(x) = x$ и $0 < \eta^* \leqslant \eta$, то $\eta^* = \eta$.

Следовательно,

$$0 \leqslant \eta - \psi \in L^0_\infty(\mathbb{R}^+). \tag{36}$$

Теперь докажем следующее вспомогательное неравенство:

$$\eta - \psi(x) \geq \eta \int\limits_x^\infty K_0(\tau)d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{37}$$

Из (29), с учетом (4) и свойств функции Q имеем

$$\eta - \psi(x) = \eta - \int\limits_0^\infty K_0(x-t)Q(\psi(t))dt = \eta \int\limits_x^\infty K_0(\tau)d\tau + \eta \int\limits_{-\infty}^x K_0(\tau)d\tau -$$

$$- \int\limits_0^\infty K_0(x-t)Q(\psi(t))dt = \eta \int\limits_x^\infty K_0(\tau)d\tau + \int\limits_0^\infty K_0(x-t)(Q(\eta) - Q(\psi(t)))dt \geq \eta \int\limits_x^\infty K_0(t)dt.$$

Теперь для уравнения (1) рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{cases} f_{n+1}(x) = \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f_n(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_n(t))dt, & (38) \\ f_0(x) = \Phi_{\eta_0}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad x \in \mathbb{R}^+. & (39) \end{cases}$$

Сперва по индукции докажем, что

$$f_n(x) \quad \uparrow \text{по} \quad n. \tag{40}$$

Так как

$$0 \leqslant f_0(x) \leqslant \eta \int\limits_x^\infty K_1(z)dz \leqslant \eta \int\limits_x^\infty K_0(z)dz,$$

то

$$f_1(x) \geq \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_0(t))dt \geq \Phi_{\eta_0}(x) \equiv f_0(x),$$

$$f_1(x) \leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t,\eta)dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t,\eta)dt \leqslant \eta \int\limits_{-\infty}^x K_0(\tau)d\tau +$$

$$+ \eta \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau \leqslant \eta.$$

Предполагая, что $\eta \geq f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$, из (38), в силу условий c) и d), будем иметь:

$$f_{n+1}(x) \geq \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, f_{n-1}(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, f_{n-1}(t))dt = f_n(x)$$

и

$$f_{n+1}(x) \leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t,\eta)dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t,\eta)dt \leqslant \eta.$$

Теперь убедимся в справедливости следующего неравенства

$$f_n(x) \leqslant \eta - \psi(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{41}$$

Действительно, при $n = 0-$ (41) сразу следует из (37). Пусть $f_n(x) \leqslant \eta - \psi(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (38), с учетом условий a) и d) теоремы 2, получим

$$f_{n+1}(x) \leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)N_0(t, \eta - \psi(t))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t, \eta-\psi(t))dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty K_0(x-t)(\eta - Q(\psi(t)))dt + \int\limits_0^\infty K_1(x+t)N_1(t,\eta)dt \leqslant$$

$$\leqslant \eta \int\limits_{-\infty}^x K_0(\tau)d\tau - \psi(x) + \eta \int\limits_x^\infty K_1(\tau)d\tau \leqslant \eta - \psi(x).$$

Следовательно, из (40) и (41) получаем поточечную сходимость последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем

$$0 \leqslant \Phi_{\eta_0}(x) \leqslant f(x) \leqslant \eta - \psi(x) \in L_\infty^0(\mathbb{R}^+), \quad x > 0. \tag{42}$$

По теореме Б. Леви $f(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Из (42) следует, что $f \in L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Результаты теоремы 2 остаются в силе, если вместо условия (28) потребовать более слабое условие: $\int\limits_{-\infty}^0 K_0(\tau)d\tau \geq \frac{1}{2}$.

4. Примеры функций N_0, N_1 и Q

Ниже приведем несколько примеров функций N_0, N_1 и Q в зависимости от условий выше доказанных теорем.

Примеры для теоремы 1.

I) $N_0(t,z) \equiv h(t,z)\widetilde{N}(z)$, где функция $h-$ непрерывна по совокупности своих аргументов на множестве $\mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, $0 \leqslant h(t,z) \leqslant 1$, $(t,z) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\eta]$, $h \uparrow$ по z на $[0,\eta]$, $\widetilde{N} \in C[0,\eta]$, $\widetilde{N} \uparrow$ по z на $[0,\eta]$, $0 \leqslant \widetilde{N}(z) \leqslant z$, $z \in [0,\eta]$. В качестве функций h и $\widetilde{N}$ можно выбрать следующие примеры:

- $h(t,z) = ze^{-z} \cdot sin^2 t, \quad \widetilde{N}(z) = z^p, \quad p > 1, \quad \eta = 1.$
- $h(t,z) = \eta e^{\frac{z}{\eta}-1}, \quad \widetilde{N}(z) = sinz.$

II)

$$N_1(t,z)=\frac{\alpha z}{z+(\frac{\alpha}{\eta_0}-1)\Phi_{\eta_0}(t)},\quad \eta>\alpha>\eta_0>0, \tag{43a}$$

$$N_1(t,z)=\frac{\alpha z}{z+(\frac{\alpha}{\eta_0}-1)\Phi_{\eta_0}(t)}+\frac{1}{2\eta^{p-1}}z^p,\quad p>1,\quad \eta\geq 2\alpha,\quad \alpha>\eta_0. \tag{43b}$$

Примеры для теоремы 2.

III) $Q(z)=\frac{z^\alpha}{\eta^{\alpha-1}},\quad \alpha\in(0,1),$

IV) $Q(z)=\eta e^{\frac{z}{\eta}-1}$

V) $Q(z)=\sqrt{ze^{z-1}},\quad \eta=1$

VI) $N_0(t,z)=\dfrac{(\eta-Q(\eta-z))^\beta}{\eta^{\beta-1}},\quad \beta\geq 1$

VII) $N_0(t,z)=sin(\eta-Q(\eta-z))$

В качестве $N_1(t,z)$ в теореме 2 можно рассматривать примеры $(43a)$ и $(43b)$.

5. О разрешимости задачи (2)-(3) в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть функция $H(t,z)$ в уравнении (2) удовлетворяет всем условиям функции $N_0(t,z)$ теоремы 1, а $H_1(t,z)$ — определенная на множестве $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ вещественная функция, причем существуют положительные числа $\eta>0$, $\eta_0\in(0,\eta)$, $\xi\in(0,\frac{1}{\lambda})$, $\theta\in(0,1)$ такие, что*

$$i_1)\quad H_1(t,\xi\rho^\sigma_{\eta_0}(t))\geq\eta_0,\quad H_1(t,\eta)\leqslant\eta, \tag{44}$$

где

$$\rho^\sigma_{\eta_0}(t)=\eta_0\int\limits_{t+\sigma}^{\infty}T_1(z)dz,\quad \sigma=\frac{1}{\lambda\theta}ln\frac{1}{1-\lambda\xi} \tag{45}$$

$$i_2)\quad H_1(t,0)\equiv 0,\quad H_1\in Carat_z(\mathbb{R}^+\times[0,\eta]). \tag{46}$$

$i_3)$ $H_1(t,z)\uparrow$ *по* z *на* $[0,\eta]$ *при каждом фиксированном* $t\in\mathbb{R}^+$.

Тогда при условиях (6)–(9) задача (2)-(3) в пространстве Соболева $W_1^1(\mathbb{R}^+)$ имеет неотрицательное и нетривиальное решение.

Доказательство. Введем следующую функцию:

$$K_0(x)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}T(x-z)dz,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{47}$$

В силу теоремы Фубини, функция $K_0(x)$ обладает следующими "замечательными" свойствами:

$$K_0(x)\geq 0,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_0(x)dx=1,\quad K_0\in L_1(\mathbb{R})\cap L_\infty(\mathbb{R}), \tag{48}$$

$$\nu(K_0)<0,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau^2K_0(\tau)d\tau<+\infty. \tag{49}$$

Докажем справедливость следующего неравенства для $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\int_x^\infty K_0(t)dt \geq \frac{1}{\lambda}\int_x^\infty T(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{50}$$

Имеем

$$\int_x^\infty K_0(t)dt = \int_x^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda z}T(t-z)dzdt = \int_0^\infty e^{-\lambda z}\int_x^\infty T(t-z)dtdz =$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda z}\int_{x-z}^\infty T(y)dydz \geq \frac{1}{\lambda}\int_x^\infty T(t)dt.$$

Рассмотрим однородное уравнение Винера-Хопфа:

$$S(x) = \int_0^\infty K_0(x-t)S(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{51}$$

с ядром вида (47). Как уже было отмечено из (48), (49) следует существование положительного решения со свойствами (16), (17), (21), (22).

Обозначим через

$$F(x) = \frac{d\varphi}{dx} + \lambda\varphi(x). \tag{52}$$

Тогда уравнение (2)(с начальным условием (3)) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} F(x) = \int_0^\infty T(x-t)H\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F(\tau)d\tau\right)dt+ \\ + \int_0^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F(\tau)d\tau\right)dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{53}$$

Рассмотрим следующие итерации:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) = \int_0^\infty T(x-t)H\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F_n(\tau)d\tau\right)dt+ \\ + \int_0^\infty T_1(x+t)H_1\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}F_n(\tau)d\tau\right)dt \\ F_0(x) = \lambda(\eta - S(x)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{54}$$

Ниже докажем, что

$$j_1) \quad F_n(x) \downarrow \text{по} \quad n, \tag{55}$$

$$j_2) \quad F_n(x) \geq \rho^\sigma_{\eta_0}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{56}$$

В силу (22) и (50) имеем

$$F_0(x) = \lambda(\eta - S(x)) \geq \lambda\eta\int_x^\infty K_0(t)dt \geq \eta\int_x^\infty T(t)dt \geq \eta\int_x^\infty T_1(t)dt \geq$$
$$\geq \eta_0\int_{x+\sigma}^\infty T_1(t)dt = \rho^\sigma_{\eta_0}(x).$$

Отсюда, в частности, следует также, что

$$\rho_{\eta_0}^{\sigma}(x) \leqslant \lambda\eta, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{57}$$

Используя свойства функций H, H_1, T и T_1, будем иметь:

$$F_1(x) \leqslant \int_0^\infty T(x-t) H\left(t, \eta - \lambda \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} S(\tau) d\tau\right) dt + \int_0^\infty T_1(x+t) H_1(t,\eta) dt \leqslant$$

$$\leqslant \eta \int_0^\infty T(x-t) dt - \lambda \int_0^\infty T(x-t) \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} S(\tau) d\tau dt + \eta \int_x^\infty T_1(z) dz \leqslant$$

$$\leqslant \lambda\eta - \lambda \int_0^\infty K_0(x-\tau) S(\tau) d\tau = \lambda(\eta - S(x)) = F_0(x).$$

Пусть $F_n(x) \geq \rho_{\eta_0}^{\sigma}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

Тогда, с учетом (44), (45), i_3) и монотонности $H(t,z)$, из (54) получим

$$F_{n+1}(x) \geq \int_0^\infty T(x-t) H\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \rho_{\eta_0}^{\sigma}(\tau) d\tau\right) dt +$$

$$+ \int_0^\infty T_1(x+t) H_1\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \rho_{\eta_0}^{\sigma}(\tau) d\tau\right) dt \geq$$

$$\geq \int_0^\infty T_1(x+t) H_1\left(t, \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \rho_{\eta_0}^{\sigma}(\tau) d\tau\right) dt \geq$$

$$\geq \int_\sigma^\infty T_1(x+t) H_1\left(t, \int_{(1-\theta)\sigma}^t e^{-\lambda(t-\tau)} \rho_{\eta_0}^{\sigma}(\tau) d\tau\right) dt \geq$$

$$\geq \int_\sigma^\infty T_1(x+t) H_1\left(t, \rho_{\eta_0}^{\sigma}(t) \int_{(1-\theta)\sigma}^\sigma e^{-\lambda(\sigma-\tau)} d\tau\right) dt \geq$$

$$\geq \int_\sigma^\infty T_1(x+t) H_1\left(t, \rho_{\eta_0}^{\sigma}(t) \frac{(1-e^{-\lambda\theta\sigma})}{\lambda}\right) dt =$$

$$= \int_\sigma^\infty T_1(x+t) H_1\left(t, \xi \rho_{\eta_0}^{\sigma}(t)\right) dt \geq \eta_0 \int_{x+\sigma}^\infty T_1(y) dy = \rho_{\eta_0}^{\sigma}(x).$$

Пусть $F_n(x) \leqslant F_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из монотонности H и H_1 сразу следует, что $F_{n+1} \leqslant F_n$. Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \tag{58}$$

причем $F(x)-$ удовлетворяет уравнению (53) и оценкам

$$\rho_{\eta_0}^{\sigma}(x) \leqslant F(x) \leqslant \lambda(\eta - S(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+). \tag{59}$$

Из (59) следует,что $F \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$.

Решая следующую простейшую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} + \lambda\varphi(x) = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{60}$$

приходим к завершению доказательства. **Теорема доказана.**

Замечание 2. Поскольку решение задачи (60) имеет вид

$$\varphi(x) = \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} F(t)dt,$$

то из (59) для $\varphi(x)$ получаем следующую двойную оценку:

$$\int_0^x e^{-\lambda(x-t)} \rho^{\sigma}_{\eta_0}(t)dt \leqslant \varphi(x) \leqslant \lambda \int_0^x e^{-\lambda(x-t)}(\eta - S(t))dt.$$

В конце работы приведем два примера $H_1(t, z)$:

$$1) \quad H_1(t,z) = \frac{\alpha z}{z + (\frac{\alpha}{\eta_0} - 1)\rho^{\sigma}_{\eta_0}(t)}, \quad \eta > \alpha > \eta_0 > 0,$$

$$2) \quad H_1(t,z) = \frac{\alpha z}{z + (\frac{\alpha}{\eta_0} - 1)\rho^{\sigma}_{\eta_0}(t)} + \frac{1}{2\eta^{p-1}} z^p, \quad p > 1, \quad \eta \geq 2\alpha, \quad \alpha > \eta_0.$$

В заключение выражаем благодарность проф. Н.Б. Енгибаряну и проф. В.Н. Маргаряну за полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коган М.Н. *Динамика разреженного газа.* Москва Изд."Наука"1962г, 440 с.
2. Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х. *О точной линеаризации задач скольжения разреженного газа в БГК модели* // ТМФ. Т. 119, №2. 2000. С. 339–342.
3. I.D. Sargan *The distribution of wealt. Econometrics* // 1957. V. 25, №4. P. 568–590.
4. Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А. *Об одном интегро-дифференциальном уравнении в задаче распределения богатства Саны* // Экономика и математические методы, ЦЭМИ РАН. 2009. Т. 45,№4. С. 84–96.
5. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. *Уравнения типа свертки.* М. Изд."Наука". 1978. 295 с.
6. Енгибарян Б.Н. *Применение многократной факторизации к однородному уравнению свертки* // Известия НАН Армении, Математика. 1997. Т. 32,№1. С. 38–48.
7. Енгибарян Н.Б., Хачатрян А.Х. *О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории* // ЖВМ и МФ. 1998. Т. 38, №3. С. 466–482.
8. Енгибарян Н.Б., Арабаджян Л.Г. *О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки* // Дифф.уравнения. 1990. Т. 26, №1, С. 1442–1452.
9. Владимиров В.С. *Об уравнении* p *-адической открытой Суны для скалярного поля тахинов* // Известия РАН, сер.матем., 2005. Т. 69, №3. С. 55–80.
10. V.S. Vladimirov, Y.I. Volovich *Nonlinear Dynamics equation in p-adic string theory* // Theoretical and Mathematical physics. 2004. V. 138, №3. P. 355–368.
11. P.H. Framton, Y. Okada *Effective scalar field theory of p-adic string* // Phys. Rev. D. 2004. V. 37, №10. P. 3077–3079.
12. V.S. Vladimirov *The equation of p-adic closed string for the scalar tachyon field* // Science in China, ser.A, Mathematics. 2008. V. 51, №4. P. 754–764.
13. A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan *On convolution type nonlinear integral equations, containing singular and discrete probability distributions* // Advances and Applications in Mathematical Sciences. India. 2010. V.5, №1, P. 1–16.
14. Арабаджян Л.Г. *Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна* // Известия НАН Армении, Математика. 1997. Т. 32, №1. С. 21–28.

15. A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan *On solvability of one class Hammerstein nonlinear integral equations* // Buletinul Academiei Stinte a Republici Moldova, Mathematica. 2010. V. 63, №2. P. 67–83.
16. Хачатрян Х.А. *Существование и асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегральных уравнений Урысона на полуоси* // Вестник РАУ. 2009. Т. 3, №2. С.15–25.
17. Хачатрян Х.А. *Об одном классе нелинейных интегральных уравнений с некомпактным оператором* // Известия НАН Армении, Математика. 2011. Т. 46, №2. С.71–86.
18. Хачатрян Х.А. *Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью* // Известия РАН, сер.Математическая. 2012. Т. 76, №1. С. 173–200.
19. Хачатрян Х.А., Хачатрян Э.А. *О разрешимости некоторых классов нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с некомпактным оператором* // Известия Вузов, Математика. 2011. Т. 54, №1. С. 91–100.
20. Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б. *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники* // Математический анализ. 1984. Т. 22. С. 175–242.
21. A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan *On Solvability of a nonlinear problem in theoty of income distribution* // Eurasian Math. J. 2011. V. 2, №2. P. 75–88.
22. Колмогоров А.Н., Фомин В.С. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Москва, "Наука". 1981. 544 с.

Марине Фирдусовна Броян,
Армянский Гос.Агр.Университета,
ул. Ул. Теряна 74,
0019, г. Ереван
E-mail: `Broyan@rambler.ru`

Хачатур Агавардович Хачатрян,
Институт Математики НАН Армении,
Проспект Маршала Баграмяна 24/5,
0019, г. Ереван
E-mail: `Khach82@rambler.ru`