ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 5. № 2 (2013). С. 18-30.

УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЗНАКОПЕРЕМЕННОГО РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВЫПУКЛО-ВОГНУТЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В.Е. БОБКОВ

Аннотация. В ограниченной связной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ с гладкой границей $\partial\Omega$ рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения с выпукло-вогнутой нелинейностью

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{\gamma-2}u, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

где $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$. В основном результате доказывается существование знакопеременного решения данного уравнения на нелокальном интервале $\lambda \in (-\infty, \lambda_0^*)$, где значение λ_0^* задается вариационным принципом нелинейного спектрального анализа по процедуре проективного расслоения.

Ключевые слова: знакопеременные решения, выпукло-вогнутая нелинейность, метод расслоений.

Mathematics Subject Classification: 35D30, 35J25, 35J20, 35J60.

1. Введение

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{\gamma-2}u, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{$\mathcal{D}$}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$. При этом предполагается

$$1 < q < 2 < \gamma < 2^*, \quad \text{где} \quad 2^* = \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & \text{при} \quad N > 2, \\ +\infty & \text{при} \quad N \leqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Основная цель данной работы — исследование вопроса о существовании знакопеременных решений (nodal solutions) задачи ($\mathcal{D}$). Уравнения такого типа возникают в различных областях физики, например, статистической механике, теории поля, нелинейной оптике и пр. (см. [1]). Также, решения задачи ($\mathcal{D}$) могут рассматриваться (см. [2]) как стационарные решения соответствующей краевой задачи для нелинейного параболического уравнения

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \lambda |u|^{q-2}u + |u|^{\gamma-2}u, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Подобные задачи возникают в популяционной динамике (см. [1]).

V.E. Bobkov, On existence of nodal solution of elliptic equations with convex-concave nonlinearities.

Работа поддержана РФФИ (грант №13-01-00294-а).

Поступила 5 марта 2012 г.

Существованию положительных решений краевой задачи $(\mathcal{D})$ посвящено большое число работ, см., например, [3], [4], [5], [6], [7]. При этом, например, в работе [5] показано существование положительных решений u_0, которые являются основными состояниями (ground state) соответствующего нелинейного уравнения Шредингера [8], т.е.

$$I_\lambda(u_0) \leqslant I_\lambda(v),$$

где $v \in W\backslash\{0\}$ — любое решение задачи $(\mathcal{D})$, а I_λ — соответствующий функционал энергии (см. ниже).

В то же время, используя топологические методы Красносельского и Люстерника-Шнирельмана, в ряде работ ([3], [5], [9]) доказано существование бесконечного числа bound state-решений u_k задачи $(\mathcal{D})$, т.е. таких решений, что

$$I_\lambda(u_0) < I_\lambda(u_k).$$

Однако, этот результат не дает информации о структуре решений, и более того, поскольку примененные методы не конструктивны, то затруднительно использовать их в дальнейшем для численного нахождения и анализа таких решений. Отметим, что нахождение bound state-решений также важно с точки зрения приложений (см. [10]).

В последнее время возрос интерес к конструктивному нахождению bound state-решений нелинейных эллиптических уравнений с их последующим численным анализом, что отражается появлением достаточно большого числа публикаций по этой теме (см., например, [11], [12], [13]). В основном, эти результаты получены для уравнений коэрцитивного типа, где применимы прямые вариационные методы. Ситуация с более сложной нелинейностью, такой как выпукло-вогнутая, мало изучена. Применительно к задаче $(\mathcal{D})$ основной трудностью является то, что соответствующий функционал энергии $I_\lambda(u)$ не коэрцитивен и не ограничен снизу. Геометрия ветвей решений такого типа уравнений сложноструктурированна. В частности, как известно ([5]), уравнение $(\mathcal{D})$ обладает кратными положительными решениями и бифуркациями типа точек поворота.

В данной работе развивается метод расслоений ([14, 15]) и спектральный анализ по методу расслоений ([16, 17]), применительно к многообразию знакопеременных решений.

Изложим наш основной результат.

Мы будем рассматривать *слабые решения* задачи $(\mathcal{D})$, т.е. функции $u \in W\backslash\{0\}$, такие что

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \phi dx = \lambda \int_\Omega |u|^{q-2} u \phi dx + \int_\Omega |u|^{\gamma-2} u \phi dx, \quad \forall \phi \in W\backslash\{0\},$$

где $W = W_0^{1,2}(\Omega)$ — стандартное соболевское пространство функций, являющееся замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Легко видеть, что слабые решения задачи $(\mathcal{D})$ являются критическими точками функционала энергии I_λ:

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}H(u) - \frac{\lambda}{q}G(u) - \frac{1}{\gamma}F(u), \tag{2}$$

где

$$H(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx, \quad G(u) = \int_\Omega |u|^q dx, \quad F(u) = \int_\Omega |u|^\gamma dx. \tag{3}$$

Наряду с I_λ будем рассматривать как в [5] следующий функционал $\mathcal{L}_\lambda$ на W, заданный равенством

$$\mathcal{L}_\lambda(u) = H(u) - \lambda(q-1)G(u) - (\gamma-1)F(u),$$

и будем рассматривать следующее характеристическое значение, задаваемое по методу спектрального параметра ([5])

$$\lambda_0^* = \frac{q(\gamma-2)}{\gamma(2-q)} \left(\frac{\gamma(2-q)}{2(\gamma-q)}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \inf_{v \in W\setminus\{0\}} \left(\frac{H^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}}(v)}{G(v)F^{\frac{2-q}{\gamma-2}}(v)}\right). \tag{4}$$

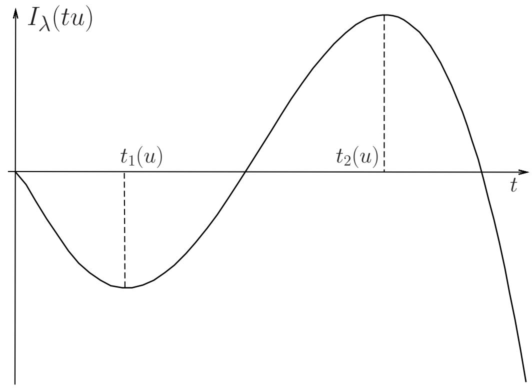

Рис. 1.

Отметим, что $\mathcal{L}_\lambda(u)$ определяется (см. [14]) через расслоенный функционал $\tilde{I}_\lambda(t,u) = I_\lambda(tu)$ (зависимость $I_\lambda(tu)$ от t при $\lambda > 0$ см. на рис. 1) по формуле

$$\mathcal{L}_\lambda(u) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\lambda(tu)|_{t=1}.$$

Далее всюду при рассмотрении функций $I_\lambda(tu)$ и $\mathcal{L}_\lambda(tu)$ относительно t будем считать, что $t > 0$.

Как известно, любое слабое решение задачи $(\mathcal{D})$ лежит на многообразии Нехари, т.е. на множестве вида

$$\mathcal{N}_\lambda = \{u \in W\setminus\{0\} : \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu)|_{t=1} = H(u) - \lambda G(u) - F(u) = 0\}.$$

В [5] показано, используя метод расслоения, что если $\lambda < \lambda_0^*$, то многообразие Нехари состоит из двух непересекающихся компонент. В одной компоненте все слабые решения u задачи $(\mathcal{D})$ удовлетворяют неравенству $\mathcal{L}_\lambda(u) < 0$, тогда как в другой компоненте $\mathcal{L}_\lambda(u) > 0$.

Пусть $u \in W$. Введем функции $u_+ = \max\{u, 0\} \geq 0$, и $u_- = \min\{u, 0\} \leqslant 0$. Тогда $u = u_+ + u_-$, и можно доказать, что $u_+ \in W$ и $u_- \in W$ (см. Теорему 2, доказательство см. в [18]). Решения u, для которых $u_+ \neq 0$ и $u_- \neq 0$, будем называть *знакопеременными* (nodal solutions [19]). Соответственно, если $u \neq 0$, но $u_+ \neq 0$ и $u_- = 0$, либо $u_+ = 0$ и $u_- \neq 0$, то u будем называть *знакопостоянным* решением. Здесь и далее, для произвольного $w \in W$, будем считать, что $w \neq 0$, если $\mu(\{x \in \Omega : w(x) \neq 0\}) \neq 0$, где μ — мера Лебега на Ω.

Нашим основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, и значение λ_0^* задается вариационной задачей (4). Тогда для любого $\lambda \in (-\infty, \lambda_0^*)$ существует знакопеременное решение $u_\lambda = u_\lambda^+ + u_\lambda^-$, задачи $(\mathcal{D})$, такое что*

$$u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^1 = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : u_+ \in \mathcal{N}_\lambda, \quad \mathcal{L}_\lambda(u) < 0, \quad \mathcal{L}_\lambda(u_+) < 0, \quad \mathcal{L}_\lambda(u_-) < 0\}.$$

При этом u_λ является основным состоянием на множестве $\mathcal{N}_\lambda^1$, т.е. $I_\lambda(u_\lambda) \leqslant I_\lambda(v)$, для всех решений $v \in \mathcal{N}_\lambda^1$.

Статья организована следующим образом. В параграфе 2 приведены необходимые вспомогательные леммы, описывающие свойства функционала энергии I_λ, а также его критических точек, в зависимости от изменения параметра λ. В параграфе 3 доказывается основной результат работы — Теорема 1. Аппендикс содержит необходимые технические утверждения.

2. Анализ по методу расслоений

Для начала отметим, что вариационная задача, введенная выше равенством (4), может быть получена из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t^2H(u) - \lambda\frac{1}{q}t^qG(u) - \frac{1}{\gamma}t^\gamma F(u) = 0, \\ tH(u) - \lambda t^{q-1}G(u) - t^{\gamma-1}F(u) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

которая соответствует случаю, когда $I_\lambda(tu) = 0$ и $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu) = 0$, для произвольной функции $u \in W\backslash\{0\}$. Решая эту систему относительно $\lambda = \lambda(u)$ и $t = t(u)$, получим

$$\lambda(u) = \frac{q(\gamma-2)}{\gamma(2-q)}\left(\frac{\gamma(2-q)}{2(\gamma-q)}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \frac{H^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}}(u)}{G(v)F^{\frac{2-q}{\gamma-2}}(u)}, \tag{6}$$

$$t(u) = \left(\frac{\gamma(2-q)}{2(\gamma-q)}\frac{H(u)}{F(u)}\right)^{1/(\gamma-2)}.$$

Таким образом, следуя [5], из (6) получаем характеристическое значение

$$\lambda_0^* = \inf_{u\in W\backslash\{0\}} \lambda(u).$$

Заметим, что $t(u) > 0$, причем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\lambda(u)}(t(u)u) &= t(u)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}I_\lambda(tu)|_{t=t(u)} \\ &= -t(u)^2\frac{(2-q)(\gamma-q)}{2}H(u) < 0,\end{aligned}$$

т.е. $t(u)$ — точка максимума $I_{\lambda(u)}(tu)$ по t.

Предложение 1. *Пусть* $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, $u \in W\backslash\{0\}$. *Тогда существует такое* $\widetilde{\lambda}(u) > 0$, *что*

1) *если* $\lambda > \widetilde{\lambda}(u)$, *то функция* $I_\lambda(tu)$ *относительно* t *не имеет точек экстремума;*
2) *при всех* $\lambda \in (0, \widetilde{\lambda}(u))$ *функция* $I_\lambda(tu)$ *относительно* t *имеет ровно одну точку минимума* $t_1(u)$ *и одну точку максимума* $t_2(u)$, *причем* $t_1(u) < t_2(u)$*;*
3) *при* $\lambda \leqslant 0$ *функция* $I_\lambda(tu)$ *относительно* t *имеет лишь одну точку максимума* $t_3(u)$.

Доказательство. Пусть $u \in W\backslash\{0\}$. Тогда, уравнение $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu) = 0$ имеет не более двух корней при $t > 0$. Действительно, т.к. $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, то из

$$\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu) = t^{q-1}(t^{2-q}H(u) - \lambda G(u) - t^{\gamma-q}F(u)) = 0$$

следует, что если $t > 0$, то корни уравнения $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu) = 0$ совпадут с корнями уравнения

$$\alpha_\lambda(t) = t^{\gamma-q}F(u) - t^{2-q}H(u) + \lambda G(u) = 0.$$

Найдем экстремумы функции $\alpha_\lambda(t)$:

$$\alpha'_\lambda(t) = t^{1-q}((\gamma-q)t^{\gamma-2}F(u) - (2-q)H(u)) = 0.$$

Отсюда, в силу того, что $t > 0$, получаем

$$(\gamma - q)t^{\gamma-2}F(u) - (2-q)H(u) = 0.$$

Единственный корень этого уравнения

$$t = t(u) = \left(\frac{(2-q)H(u)}{(\gamma-q)F(u)}\right)^{1/\gamma-2}.$$

Заметим, что если $t \in (0, t(u))$, то $\alpha'_\lambda(t) < 0$, а если $t > t(u)$, то $\alpha'_\lambda(t) > 0$, т.е. $t(u)$ — точка минимума функции $\alpha_\lambda(t)$, являющаяся ее единственным экстремумом при $t > 0$. Из вида $\alpha_\lambda(t)$ очевидно, что для произвольных $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, таких что $\lambda_1 > \lambda_2$, выполнено $\alpha_{\lambda_1}(t) > \alpha_{\lambda_2}(t)$ для всех $t > 0$. Найдем значение $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(u)$, при котором минимум функции $\alpha_{\widetilde{\lambda}}(t)$ касается оси t:

$$\alpha_{\widetilde{\lambda}}(t(u)) = \left(\frac{(2-q)H(u)}{(\gamma-q)F(u)}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} F(u) - \left(\frac{(2-q)H(u)}{(\gamma-q)F(u)}\right)^{\frac{2-q}{\gamma-2}} H(u) + \widetilde{\lambda}G = 0.$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{\lambda} = \frac{\gamma-2}{2-q}\left(\frac{2-q}{\gamma-q}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \frac{H^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}}(u)}{G(u)F^{\frac{2-q}{\gamma-2}}(u)}. \tag{7}$$

Таким образом, если $\lambda > \widetilde{\lambda}$, то $\min\limits_{t>0} \alpha_\lambda(t) > 0$, т.е. уравнение $\alpha_\lambda(t) = 0$ не имеет корней. Следовательно, при $\lambda > \widetilde{\lambda}$ функция $I_\lambda(tu)$ относительно t не имеет точек экстремума.

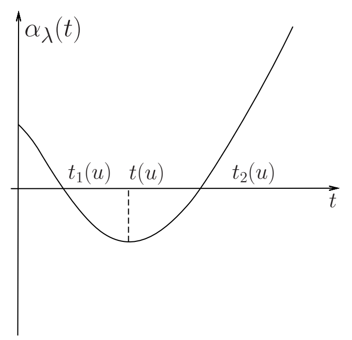

Рис. 2.

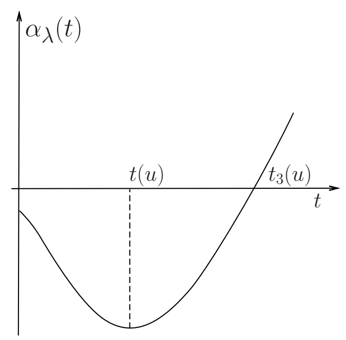

Рис. 3.

Пусть $\lambda \in (0, \widetilde{\lambda})$ (см. рис. 2). Тогда $\alpha_\lambda(t) > 0$ при $t \to 0$, и $\min\limits_{t>0} \alpha_\lambda(t) < 0$. Так как $\alpha'_\lambda(t) < 0$ при $t \in (0, t(u))$, то существует единственное $t_1(u) > 0$, такое что $\alpha_\lambda(t_1(u)) = 0$. В то же время, так как $\alpha'_\lambda(t) > 0$ при $t > t(u)$ и $\alpha_\lambda(t) \to +\infty$, при $t \to +\infty$, то существует единственное $t_2(u) > 0$, такое что $\alpha_\lambda(t_2(u)) = 0$. Таким образом, $t_1(u)$ и $t_2(u)$ — корни уравнения $\alpha_\lambda(t) = 0$, при этом $t_1(u) < t_2(u)$. Более того, т.к. $-\alpha'_\lambda(t)$ соответствует $\frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\lambda(tu)$, то $t_1(u)$ — точка минимума, а $t_2(u)$ — точка максимума функции $I_\lambda(tu)$ относительно t (см. рис. 1).

Пусть теперь $\lambda \leqslant 0$ (см. рис. 3). Тогда $\alpha_\lambda(t) \leqslant 0$ при $t \to 0$, и $\min\limits_{t>0} \alpha_\lambda(t) < 0$. В силу монотонного убывания $\alpha_\lambda(t)$ при $t \in (0, t(u))$, на этом промежутке $\alpha_\lambda(t)$ не имеет корней. Аналогично, в силу монотонного возрастания $\alpha_\lambda(t)$ при $t > t(u)$ и того, что $\alpha_\lambda(t) \to +\infty$, при $t \to +\infty$, существует единственное $t_3(u) > 0$, такое что $\alpha_\lambda(t_3(u)) = 0$, т.е. $t_3(u)$ — искомый корень, причем $t_3(u)$ — точка максимума функции $I_\lambda(tu)$ относительно t. $\square$

Замечание 1. *Несложно убедиться, что* $\widetilde{\lambda} = \widetilde{\lambda}(u)$, *определенная из* (7), *является решением системы*

$$\begin{cases} tH(u) - \widetilde{\lambda}\ t^{q-1}G(u) - t^{\gamma-1}F(u) = 0, \\ 2H(u) - \widetilde{\lambda}\ q\ t^{q-2}G(u) - \gamma\ t^{\gamma-2}F(u) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

которая возникает в случае $\frac{\partial}{\partial t}I_{\widetilde{\lambda}}(tu) = 0$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}I_{\widetilde{\lambda}}(tu) = 0$.

Введем следующее характеристическое значение

$$\Lambda^* = \inf_{u\in W\setminus\{0\}} \widetilde{\lambda}(u), \tag{9}$$

где $\widetilde{\lambda}(u)$ определено из (7).

Предложение 2. *Пусть* λ_0^* *и* Λ^* *определены из вариационных задач* (4) *и* (9) *соответственно. Тогда* $\lambda_0^* < \Lambda^*$.

Доказательство. Предположим, от противного, что $\lambda_0^* \geq \Lambda^*$. Сравнивая λ_0^* и Λ^*, последнее неравенство запишем в виде

$$\frac{q}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{\frac{\gamma-q}{\gamma-2}} \geq 1. \tag{10}$$

Пусть $2 = \alpha q$, $\gamma = 2\beta$, где по условию леммы $\alpha, \beta > 1$. Тогда неравенство (10) можно записать в виде

$$\frac{1}{\alpha}\beta^{\frac{\alpha-1}{\alpha(\beta-1)}} \geq 1.$$

Логарифмируя обе части этого неравенства, получим

$$\frac{(\alpha-1)\ln\beta}{\alpha(\beta-1)\ln\alpha} \geq 1.$$

Для значений функции логарифма воспользуемся оценкой $\frac{t-1}{t} \leqslant \ln t \leqslant t-1$. Заметим, что так как $\alpha, \beta > 1$, то имеют место строгие неравенства $\frac{\alpha-1}{\alpha} < \ln\alpha < \alpha-1$ и $\frac{\beta-1}{\beta} < \ln\beta < \beta-1$. Тогда

$$1 \leqslant \frac{(\alpha-1)\ln\beta}{\alpha(\beta-1)\ln\alpha} < 1,$$

т.е. получили противоречие. Таким образом, $\lambda_0^* < \Lambda^*$. $\square$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, $\lambda < \Lambda^*$ *и* $u \in \mathcal{N}_\lambda$. *Тогда:*

1. $\mathcal{L}_\lambda(u) \neq 0$,
2. $I_\lambda(u) \to +\infty$ *при* $||u|| \to +\infty$, *т.е. функционал* I_λ *коэрцитивен на* $\mathcal{N}_\lambda$.

Доказательство. Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, $\lambda < \Lambda^*$ и $u \in \mathcal{N}_\lambda$.

1) Предположим, от противного, что $\mathcal{L}_\lambda(u) = 0$. Тогда функция u удовлетворяет системе (8) при $t = 1$ и $\lambda = \widetilde{\lambda}(u)$, определяемым из (7). Но в этом случае $\Lambda^* \leqslant \lambda = \widetilde{\lambda}(u)$, что противоречит условию. Следовательно, $\mathcal{L}_\lambda(u) \neq 0$.

2) Докажем теперь коэрцитивность функционала I_λ на $\mathcal{N}_\lambda$. Пусть $u \in \mathcal{N}_\lambda$, т.е. выполнено условие $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu)|_{t=1} = 0$. Тогда функционал I_λ на $\mathcal{N}_\lambda$ можно записать в виде

$$I_\lambda(u) = \frac{\gamma-2}{2\gamma}H(u) - \lambda\frac{\gamma-q}{\gamma q}G(u). \tag{11}$$

Отсюда, если $\lambda > 0$, то в силу теоремы вложения, имеем оценку

$$I_\lambda(u) > \frac{\gamma-2}{2\gamma}H(u) - \lambda\frac{\gamma-q}{\gamma q}C_q H(u)^{q/2},$$

где константа $C_q = C_q(q,\gamma,\Omega) > 0$.

Если $\lambda \leqslant 0$, то (11) оценим следующим образом

$$I_\lambda(u) \geq \frac{\gamma-2}{2\gamma}H(u).$$

Тогда, в обоих случаях, $I_\lambda(u) \to +\infty$ при $H(u) = ||u||^2 \to +\infty$. Т.е. функционал I_λ коэрцитивен на $\mathcal{N}_\lambda$. □

Следствие 1. *Пусть* $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$ *и* $\lambda < \Lambda^*$. *Если* $u \in W\backslash\{0\}$ *такая, что* $u_+ \in \mathcal{N}_\lambda$ *(*$u_- \in \mathcal{N}_\lambda$*), то* $\mathcal{L}_\lambda(u_+) \neq 0$ *(*$\mathcal{L}_\lambda(u_-) \neq 0$*).*

Доказательство. Пусть $u \in W\backslash\{0\}$ и $u_+ \in \mathcal{N}_\lambda$. Обозначим $\Omega_+ := \mathrm{supp} u_+$, тогда, очевидно,

$$u_+(x) = \begin{cases} u(x) & , \quad x \in \Omega_+ \\ 0 & \quad x \in \Omega\backslash\Omega_+. \end{cases}$$

Таким образом, для каждой пробной функции $u \in W\backslash\{0\}$ минимизационной задачи (9), функция $u_+ \in W$ так же является пробной для этой задачи, если $u_+ \neq 0$. Как известно, дополнительные ограничения, накладываемые на минимизационную задачу, *не уменьшают* точной нижней грани, поэтому

$$\Lambda^* = \Lambda^*_\Omega = \inf_{u\in W\backslash\{0\}} \widetilde{\lambda}(u) \leqslant \inf_{\substack{u\in W\backslash\{0\}:\\ u(x)=0,\ x\in\Omega\backslash\Omega_+}} \widetilde{\lambda}(u) = \Lambda^*_{\Omega_+}.$$

По условию, $\lambda < \Lambda^*$. Следовательно, $\lambda < \Lambda^* \leqslant \Lambda^*_{\Omega_+}$, и, в силу Леммы 1, $\mathcal{L}_\lambda(u_+) \neq 0$. □

Замечание 2. *В силу Предложения 2, результаты Леммы 1 и ее следствия сохраняются при* $\lambda < \lambda_0^*$.

В дальнейшем нам потребуются следующие свойства $I_\lambda(u)$ на множестве Нехари.

Лемма 2. *Пусть* $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$ *и* $\lambda < \lambda_0^*$. *Если* $u \in \mathcal{N}_\lambda$ *и* $\mathcal{L}_\lambda(u) < 0$, *то*

1) $I_\lambda(u) > 0$,
2) $t = 1$ *является точкой глобального максимума функции* $I_\lambda(tu)$ *по* t *при* $t > 0$,
3) $||u|| > \delta > 0$, *где* δ *не зависит от* u.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{L}_\lambda(u) < 0$ и $\lambda < \lambda_0^*$.

1) Отметим, что $\lambda < \lambda_0^* \leqslant \lambda(u)$, где $\lambda(u)$ определено равенством (6). Тогда

$$I_\lambda(u) = \frac{1}{2}H(u) - \frac{\lambda}{q}G(u) - \frac{1}{\gamma}F(u) > \frac{1}{2}H(u) - \frac{\lambda(u)}{q}G(u) - \frac{1}{\gamma}F(u) = 0.$$

2) В силу Предложения 1, $t = 1$ является единственной точкой локального максимума функции $I_\lambda(tu)$ по t при $t > 0$, и $I_\lambda(u) > 0$. При этом на границах области $(0, +\infty)$ имеем

$$I_\lambda(tu) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0,$$
$$I_\lambda(tu) \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

Следовательно, $t = 1$ — точка глобального максимума $I_\lambda(tu)$ по t.

3) Запишем условия $\frac{\partial}{\partial t}I_\lambda(tu)|_{t=1} = 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial t^2}I_\lambda(tu)|_{t=1} < 0$ в виде системы

$$\begin{cases} H(u) - \lambda G(u) - F(u) = 0, \\ \\ H(u) - \lambda(q-1)G(u) - (\gamma-1)F(u) < 0. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $\lambda G(v)$ и подставим в неравенство. Тогда, в силу теоремы вложения Соболева, получим следующую цепочку неравенств

$$\frac{2-q}{\gamma-q}H(u) < F(u) < C_\gamma H(u)^{\gamma/2}, \quad C_\gamma = C_\gamma(q,\gamma,\Omega) > 0.$$

Откуда следует, что

$$H(u) > \left(\frac{2-q}{(\gamma-q)C_\gamma}\right)^{\frac{2}{\gamma-2}} = \delta^2(q,\gamma,\Omega) = \delta^2 > 0.$$

Таким образом, $||u|| = H(u)^{1/2} > \delta > 0$. □

Замечание 3. *Очевидно, что результаты Леммы 2 сохраняются для u, u_+, u_-, если $u \in \mathcal{N}^1_\lambda$.*

Отметим, что из Теоремы 2 (см. Аппендикс) следует, что если $u \in W$, то $u_+ \in W$ и $u_- \in W$. Более того, для представления $u = u_+ + u_-$ имеет место равенство

$$I_\lambda(u) = I_\lambda(u_+) + I_\lambda(u_-),$$

которое также следует из Теоремы 2. Из этого равенства легко вытекают следующие:

$$\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu) = \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_+) + \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_-), \tag{12}$$

$$\mathcal{L}_\lambda(u) = \mathcal{L}_\lambda(u_+) + \mathcal{L}_\lambda(u_-). \tag{13}$$

Покажем теперь, что при $\lambda < \lambda^*_0$ множество $\mathcal{N}^1_\lambda$ не пусто. Возьмем произвольную подобласть $\Omega_1 \subset \Omega$, и функцию $u_1 \in W\backslash\{0\}$, такую что $\mathrm{supp} u_1 = \overline{\Omega}_1$. Тогда, по Предложению 1, существует $t_1(u_1) > 0$, такое что $\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_1)|_{t=t_1(u_1)} = 0$ и $\mathcal{L}_\lambda(t_1(u_1)u_1) < 0$. Теперь выберем некоторую подобласть $\Omega_2 \subset \Omega$, такую что $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, и функцию $u_2 \in W\backslash\{0\}$, такую что $\mathrm{supp} u_2 = \overline{\Omega}_2$. Тогда существует такое $t_2(u_2) > 0$, что $\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_2)|_{t=t_2(u_2)} = 0$ и $\mathcal{L}_\lambda(t_2(u_2)u_2) < 0$. Обозначим $v_+ = t_1(u_1)u_1,\ v_- = -t_2(u_2)u_2$ и $v = v_+ + v_-$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tv)|_{t=1} = \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tv_+)|_{t=1} + \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tv_-)|_{t=1} = 0$$

$$\mathcal{L}_\lambda(v) = \mathcal{L}_\lambda(v_+) + \mathcal{L}_\lambda(v_-) < 0.$$

Таким образом, мы нашли функцию $v \in W\backslash\{0\}$, такую что $v \in \mathcal{N}^1_\lambda$, т.е. $\mathcal{N}^1_\lambda \neq \emptyset$.

Рассмотрим следующую минимизационную задачу с ограничениями:

$$\begin{cases} I_\lambda(u) \to \min, \\ u \in \mathcal{N}^1_\lambda. \end{cases} \tag{14}$$

Лемма 3. *Пусть $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, и $\lambda < \lambda^*_0$. Если $u \in \mathcal{N}^1_\lambda$ — решение минимизационной задачи (14), то u — критическая точка I_λ на $W\backslash\{0\}$, т.е.*

$$\langle D_u I_\lambda(u), \phi\rangle = 0, \quad \forall \phi \in W.$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{N}^1_\lambda$ — решение минимизационной задачи (14), т.е. $\beta = I_\lambda(u) = \inf\{I_\lambda(v) : v \in \mathcal{N}^1_\lambda\}$. Преположим от противного, что $D_u I_\lambda(u) \neq 0$.

Так как $\lambda < \lambda^*_0$, то в силу Леммы 2 $t = 1$ является точкой глобального максимума функции $I_\lambda(tu)$ по t. Более того, из Замечания 3 следует, что $t = 1$ также является точкой глобального максимума функций $I_\lambda(tu_+)$ и $I_\lambda(tu_-)$ по t. Следовательно,

$$\begin{aligned} I_\lambda(su_+ + tu_-) = I_\lambda(su_+) + I_\lambda(tu_-) < \\ I_\lambda(u_+) + I_\lambda(u_-) = I_\lambda(u_+ + u_-) = I_\lambda(u), \end{aligned} \tag{15}$$

для всех $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+\backslash\{1,1\}$.

Так как по предположению $D_u I_\lambda(u) \neq 0$, то в силу непрерывности функционала $D_u I_\lambda$ существуют $\alpha, \delta > 0$, такие что $||D_u I_\lambda(v)|| \geq \alpha$ при $v \in U_{3\delta}(u) = \{w \in W : ||u - w|| < 3\delta\}$.

Введем функцию

$$g : A = \left(\frac{1-t_1(u_+)}{2}, \frac{1+t_1(u_+)}{2}\right) \times \left(\frac{1-t_1(u_-)}{2}, \frac{1+t_1(u_-)}{2}\right) \to W,$$

$$g(s,t) = su_+ + tu_-.$$

Напомним, что $t_1(u_+)$ и $t_1(u_-)$, соответственно, точки минимума функций $I_\lambda(tu_+)$ и $I_\lambda(tu_-)$ по t.

Из Предложения 1 и условия $\lambda < \lambda_0^*$ следует, что $t_1(u_+), t_1(u_-) < 1$, следовательно, $A \neq \emptyset$. Более того, из (15) следует, что

$$\beta_0 := \max_{(s,t)\in\partial A} I_\lambda(g(s,t)) < \beta.$$

Обозначим $\varepsilon := \min\left\{\frac{\beta-\beta_0}{2}, \frac{\alpha\delta}{8}\right\}$ и $S = U_\delta(u)$. Тогда из Деформационной леммы (см. Теорему 3 из Аппендикса) следует существование гомотопии η, такой что для $\eta_1 := \eta(1,\cdot) : W \to W$ выполняется:

1) $\eta_1(v) = v$, если $I_\lambda(v) \leqslant \beta - 2\varepsilon$,
2) $\eta_1(\{v \in S : I_\lambda(v) \leqslant \beta + \varepsilon\}) \subset \{v \in W : I_\lambda(v) \leqslant \beta - \varepsilon\}$,
3) $I_\lambda(\eta_1(v)) \leqslant I_\lambda(v)$ для всех $v \in W$.

Из 2) следует, что

$$\max_{\{(s,t)\in A:\ g(s,t)\in S\}} I_\lambda(\eta_1(g(s,t))) < \beta. \tag{16}$$

С другой стороны, из 3) и (15) следует

$$\max_{\{(s,t)\in A:\ g(s,t)\notin S\}} I_\lambda(\eta_1(g(s,t))) \leqslant \max_{\{(s,t)\in A:\ g(s,t)\notin S\}} I_\lambda(g(s,t)) < \beta. \tag{17}$$

Обозначим для удобства

$$f := \eta_1(g(s,t)).$$

Тогда из 1) следует, что $f(s,t) = g(s,t)$ при $(s,t) \in \partial A$ в силу выбора ε. Рассмотрим отображение

$$\psi : A \to \mathbb{R}^2, \quad \psi(s,t) := \left(Q_\lambda(f(s,t)_+), Q_\lambda(f(s,t)_-)\right),$$

где $Q_\lambda(su) := \langle D_u I_\lambda(su), u\rangle = s\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu)|_{t=s}$. Отметим, что $\psi(s,t) = (0,0)$ тогда и только тогда, когда $f(s,t)_+, f(s,t)_- \in \mathcal{N}_\lambda$.

Так как $f = g$ при $(s,t) \in \partial A$, то

$$\psi(s,t) = \left(Q_\lambda(su_+), Q_\lambda(tu_-)\right), \quad (s,t) \in \partial A.$$

При этом

$$Q_\lambda\left(\frac{1-t_1(u_+)}{2}u_+\right) > 0 > Q_\lambda\left(\frac{1+t_1(u_+)}{2}u_+\right), \tag{18}$$

$$Q_\lambda\left(\frac{1-t_1(u_-)}{2}u_-\right) > 0 > Q_\lambda\left(\frac{1+t_1(u_-)}{2}u_-\right). \tag{19}$$

Тогда по Теореме 4 из Аппендикса следует существование точки $(s_0,t_0) \in A$, такой что $\psi(s_0,t_0) = (0,0)$, следовательно, $f(s_0,t_0)_+, f(s_0,t_0)_- \in \mathcal{N}_\lambda$. Более того, из (18), (19) и Предложения 1 следует, что $\mathcal{L}_\lambda(f(s_0,t_0)_+) < 0$ и $\mathcal{L}_\lambda(f(s_0,t_0)_-) < 0$, так как существует единственная точка максимума функций $I_\lambda(zf(s_0,t_0)_+)$ и $I_\lambda(zf(s_0,t_0)_-)$ по z при $z > 0$.

Таким образом, $f(s_0,t_0) \in \mathcal{N}_\lambda^1$, т.е. $f(s_0,t_0)$ — допустимая функция минимизационной задачи (14). Кроме этого, из (16) и (17) следует

$$I_\lambda(f(s_0,t_0)) < \beta = \inf\{I_\lambda(v) : v \in \mathcal{N}_\lambda^1\},$$

т.е. получили противоречие. Таким образом, $D_u I_\lambda(u) = 0$, т.е. u — критическая точка I_λ на $W\backslash\{0\}$. □

3. Существование знакопеременных решений

Будем полагать, что $1 < q < 2 < \gamma < 2^*$, и $\lambda < \lambda_0^*$. Пусть

$$c_1 = \inf\{I_\lambda(v) : v \in \mathcal{N}_\lambda^1\},$$

и $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^1$ — минимизирующая последовательность, т.е. $I_\lambda(u_n) \to c_1$. При этом, в силу Леммы 2, $c_1 \geq 0$. Тогда, из коэрцитивности I_λ на $\mathcal{N}_\lambda$ (см. Лемму 1) следует, что последовательность u_n ограничена в W. Отсюда, в силу рефлексивности пространства W, из теоремы Эберлейна-Шмульяна [20] следует, что существуют $u, v, w \in W$, такие что

$$u_n \rightharpoonup u, \quad (u_n)_+ \rightharpoonup v, \quad (u_n)_- \rightharpoonup w \text{ слабо в } W. \tag{20}$$

Более того, оставляя прежнюю индексацию по n, из теоремы вложения Соболева следует, что

$$u_n \to u, \quad (u_n)_+ \to v, \quad (u_n)_- \to w \text{ в } L^\gamma, \tag{21}$$

$$u_n \to u, \quad (u_n)_+ \to v, \quad (u_n)_- \to w \text{ в } L^q, \tag{22}$$

т.к. $q < \gamma < 2^*$.

Из Леммы 4 известно, что при $r = q$ и $r = \gamma$ отображение $h : L^r \to L^r \quad (u \to u_+)$ непрерывно, поэтому из (21) следует, что $u_+ = v \geq 0$ и $u_- = w \leqslant 0$. Покажем, что u меняет знак, т.е. $u_+ > 0$ и $u_- < 0$. Так как $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^1$, то из Леммы 2 следует, что

$$\lambda \int\limits_\Omega (u)_+^q + \int\limits_\Omega (u)_+^\gamma dx = \lim_{n\to\infty} \left(\lambda \int\limits_\Omega (u_n)_+^q dx + \int\limits_\Omega (u_n)_+^\gamma dx \right) = \lim_{n\to\infty} ||(u_n)_+||^2 > 0.$$

Следовательно, $u_+ > 0$. Аналогично показывается, что $u_- < 0$.

Покажем теперь, что $(u_n)_+ \to u_+$ в W. Из слабой сходимости $(u_n)_+$ к u_+ в W и слабой полунепрерывности снизу нормы пространства W следует, что $||u_+||^2 \leqslant \liminf\limits_{n\to\infty} ||(u_n)_+||^2$. Докажем, что имеет место равенство. Предположим, что $||u_+||^2 < \liminf\limits_{n\to\infty} ||(u_n)_+||^2$. Тогда

$$||u_+||^2 - \lambda G(u_+) - F(u_+) < \liminf_{n\to\infty} \big(||(u_n)_+||^2 - \lambda G((u_n)_+) - F((u_n)_+) \big) = 0.$$

Пусть $\lambda \in (0, \lambda_0^*)$. В силу Предложения 1, существуют такие $\alpha = t_2(u_+) > 0$ и $\beta = t_2(u_-) > 0$, что

$$\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_+)|_{t=\alpha} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(tu_-)|_{t=\beta} = 0,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\lambda(tu_+)|_{t=\alpha} < 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} I_\lambda(tu_-)|_{t=\beta} < 0.$$

В этом случае $\frac{\partial}{\partial t} I_\lambda(t(\alpha u_+ + \beta u_-))|_{t=1} = 0$. Тогда, по предположению,

$$\begin{aligned} I_\lambda(\alpha u_+ + \beta u_-) &< \liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda(\alpha (u_n)_+ + \beta (u_n)_-) \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda(\alpha (u_n)_+) + I_\lambda(\beta (u_n)_-) \right). \end{aligned} \tag{23}$$

В свою очередь, в силу Замечания 3,

$$\liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda(\alpha (u_n)_+) + I_\lambda(\beta (u_n)_-) \right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda((u_n)_+) + I_\lambda((u_n)_-) \right), \tag{24}$$

так как $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^1$, т.е. $t = 1$ — точка глобального максимума функций $I_\lambda(tu_+)$ и $I_\lambda(tu_-)$ по t. В то же время

$$\liminf_{n\to\infty} \left(I_\lambda((u_n)_+) + I_\lambda((u_n)_-) \right) = \liminf_{n\to\infty} I_\lambda(u_n) = \inf_{\mathcal{N}_\lambda^1} I_\lambda = c_1. \tag{25}$$

Таким образом, из (23), (24), (25) следует, что $I_\lambda(\alpha u_+ + \beta u_-) < c_1$, что противоречит условию. Получили противоречие, следовательно $(u_n)_+ \to u_+$, $(u_n)_- \to u_-$ в W, и $\alpha = \beta = 1$. Аналогичный результат имеет место при $\lambda \leqslant 0$.

Таким образом, $u \in \mathcal{N}_\lambda^1$ и

$$I_\lambda(u) = \inf\{I_\lambda(v) : v \in \mathcal{N}_\lambda^1\},$$

а значит u — решение типа основного состояния на множестве $\mathcal{N}_\lambda^1$.

4. Аппендикс

Приведем некоторые необходимые утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $0 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда* $\max\{u, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *и для* $1 \leqslant i \leqslant N$ *справедливо следующее равенство в обобщенном смысле:*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \max\{u, 0\} = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}, & \text{в } \{x \in \Omega : u(x) > 0\}, \\ 0, & \text{в } \{x \in \Omega : u(x) \leqslant 0\}. \end{cases}$$

Доказательство. См. [18]. □

Следствие 2. *Пусть* $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $0 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \text{ п.в. в } E = \{x \in \Omega : u = 0\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N.$$

Зададим отображение $h : L^r \to L^r$, $r \geq 1$, формулой $h(u) = \max\{u, 0\}$.

Лемма 4. *Отображение* h *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $u \in L^r(\Omega)$. Тогда, очевидно, $u_+ \in L^r(\Omega)$ и $u_- \in L^r(\Omega)$. Заметим, что отображение h почти всюду в Ω можно представить в виде $h(u) = j(u)u$, где $j(u) = 1$, если $u \geq 0$, и $j(u) = 0$, если $u < 0$. Пусть $u_n \to u$ в $L^r(\Omega)$. Тогда существует подпоследовательность u_{n_k}, такая что $u_{n_k} \to u$ почти всюду в Ω. Для краткости обозначений, без ограничения общности, оставим прежнюю индексацию по n, не переходя к индексации по подпоследовательности. Тогда

$$||h(u_n) - h(u)||_r^r = \int_\Omega |h(u_n) - h(u)|^r dx =$$
$$= \int_\Omega |j(u_n)(u_n - u) + (j(u_n) - j(u))u|^r dx.$$

Заметим, что так как $\varphi(s) = s^r$ — выпуклая функция при $r \geq 1$ и $s \geq 0$, то, воспользовавшись неравенством Йенсена $(s_1 + s_2)^r \leqslant 2^{r-1}(s_1^r + s_2^r)$, получим

$$||h(u_n) - h(u)||_r^r \leqslant 2^{r-1} \left(\int_\Omega |(u_n - u)|^r dx + \int_\Omega |(j(u_n) - j(u))u|^r dx \right).$$

Первый интеграл сходится к 0, так как $u_n \to u$ в $L^r(\Omega)$. С другой стороны, для п.в. $x \in \Omega$ выполняется $j(u_n) \to j(u) = 0$, либо $j(u_n) \to j(u) = 1$. Отсюда получаем

$$\int_\Omega |(j(u_n) - j(u))u|^r dx \leqslant \sup_{x \in \Omega} (j(u_n) - j(u)) \int_\Omega |u|^r dx \to 0,$$

в силу того, что $u \in L^r(\Omega)$. Таким образом, $||h(u_n) - h(u)||_r \to 0$. Следовательно, $h \in C(L^r; L^r)$. □

Следствие 3. *Используя аналогичное рассуждение, легко получить, что $h \in C(W;W)$.*

Следующая теорема является одним из вариантов деформационной леммы.

Теорема 3 (Деформационная лемма)**.** *Пусть X — банахово пространство, $I \in \mathcal{C}^1(X,\mathbb{R})$, $S \subset X$, $c \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что*

$$||D_u I(u)||_{X^*} \geq \frac{8\varepsilon}{\delta}, \quad \forall u \in I^{-1}([c-2\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_{2\delta},$$

где $S_{2\delta} = \{v \in X : dist(v,S) \leqslant 2\delta\}$. Тогда существует гомотопия $\eta \in \mathcal{C}([0,1] \times X, X)$, такая что

- *если $t = 0$, либо если $u \notin I^{-1}([c-2\varepsilon, c+\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, то $\eta(t,u) = u$;*
- *$\eta(1, \{v \in S : I(v) \leqslant c+\varepsilon\}) \subset \{v \in W : I \leqslant c-\varepsilon\}$;*
- *$\eta(1,\cdot)$ задает гомеоморфизм $X \to X$ для всех $t \in [0,1]$;*
- *$||\eta(t,u) - u||_X \leqslant \delta$ для любых $u \in X$, $t \in [0,1]$;*
- *$I(\eta(\cdot,u))$ не возрастает для любого $u \in X$;*
- *$I(\eta(t,u)) < c$ для всех $u \in I^{-1}((-\infty, c]) \cap S_\delta$, $t \in [0,1]$.*

Доказательство. см. [21], Лемма 1.4. □

Следующая теорема является двумерным вариантом теоремы Миранды (см., например, [22]).

Теорема 4 (Миранда, 1940)**.** *Пусть $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\}$, отображение*

$$\psi = (\psi_1, \psi_2) : A \to \mathbb{R}^2$$

является непрерывным, и

$$\psi_1(a_1, x_2) \geq 0 \geq \psi_1(b_1, x_2), \quad \forall x_2 \in (a_2, b_2),$$
$$\psi_2(x_1, a_2) \geq 0 \geq \psi_2(x_1, b_2), \quad \forall x_1 \in (a_1, b_1).$$

Тогда существует точка $(x_1^0, x_2^0) \in A$, такая что $\psi(x_1^0, x_2^0) = (0,0)$.

Доказательство. См. [22]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Berestycki, P.L. Lions *Nonlinear Scalar FieM Equations, I. Existence of a Ground State* // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 82. 1983. P. 313–345.
2. T. Cazenave, F. Dickstein, M. Escobedo *A semilinear heat equation with concave-convex nonlinearity) // Rendiconti di Matematica. VII:19. 1999. P. 211–242.*
3. *A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems // J. Funct. Anal. 122. 1994. P. 519-–543.*
4. *T. Bartsch, M. Willem On an elliptic equation with concave and convex nonlinearities // Proc. Amer. Math. Soc., 123. 1995. P. 3555-–3561.*
5. *Ya. Il'yasov On nonlocal existence results for elliptic equations with convex-concave nonlinearities // Nonlinear Anal. 61. 2005. P. 211-–236.*
6. *L. Boccardo, M. Escobedo, I. Peral A Dirichlet problem involving critical exponents // Non-linear Anal.*, 24:11. 1995. P. 1639-–1648.
7. G. Azorero, J. Manfredi, I. Alonso *Sobolev versus Hlder local minimizes and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations* // Commun. Contemp. Math., 2:3. 2000. P. 385-–404.
8. S. Coleman, V. Glazer, A. Martin *Action minima among solution to a class of Euclidean scalar field equations* // Comm. Math. Phys., 58:2. 1978. P. 211-–221.

9. G. Azorero, I. Alonso *Multiplicity of Solutions for Elliptic Problems with Critical Exponent or with a Nonsymmetric Term* // Transactions of the American Mathematical Society. 323:2. 1991. P. 877–895.
10. H. Berestycki, P.L. Lions *Nonlinear scalar field equations, II. existence of infinitely many solutions* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 82. 1983. P. 347–375.
11. A. Castro, J. Cossio, J.M. Neuberger *A sign-changing solution for a superlinear Dirichlet problem.* // Rocky Mountain J. Math. 27:4. 1997. P. 1041-—1053.
12. D. Costa, Z. Ding, J.M. Neuberger *A numerical investigation of sign-changing solutions to superlinear elliptic equations on symmetric domains* // Journal of Computational and Applied Mathematics, 131. 2001. P. 299-–319.
13. T. Bartsch, T. Weth *A note on additional properties of sign changing solutions to superlinear elliptic equations* // Topol. Methods Nonlinear Anal. 22:1. 2003. P. 1–14.
14. Похожаев С.И. *Об одном подходе к нелинейным уравнениям* // ДАН СССР. 247. 1979. С. 1327–1331.
15. Похожаев С.И. *О методе расслоения решения нелинейных краевых задач* // Тр. МИАН СССР. 192. 1990. С. 146-–163.
16. Ya. Il'yasov *On a procedure of projective fibering of functionals on Banach spaces* // Proc. Steklov Inst. Math. 232. 2001. P. 150-–156.
17. Ильясов Я.Ш. *Нелокальные исследования бифуркаций решений нелинейных эллиптических уравнений* // Изв. РАН. Сер. матем. 66:6. 2002. С. 19-–48.
18. D. Kinderlehrer, G. Stampacchia *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications* // Academic Press. 1979.
19. M. Balabane, J. Dolbeault, H. Ounaies *Nodal solutions for a sublinear elliptic equation* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods, Applications. 52. 2003. P. 219–237.
20. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы. Том 1. Общая теория.* М.: ИЛ, 1962.
21. M. Willem *Minimax Theorems.* Birkhauser, Boston, 1996.
22. M.N. Vrahatis *A short proof and a generalization of Miranda's existence theorem* // Proc. Amer. Math. Soc. 107:3. 1989. P. 701–703.

Владимир Евгеньевич Бобков,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: `bobkovve@gmail.com`