ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 3-10.

УДК 517.518

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ПОРЯДКА

А.М. АБЫЛАЕВА, А.О. БАЙАРЫСТАНОВ

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия компактности оператора

$$Kf(x)=\int\limits_0^x \ln\frac{x}{x-s}\frac{f(s)}{s}ds$$

из $L_{p,v}$ в $L_{q,u}$ при $1<p\leqslant q<\infty$ и $v(x)=x^{-\gamma}$, $\gamma>0$, где $L_{q,u}$ — совокупность всех измеримых на $(0,\infty)$ функции f, для которых конечна норма $\|uf\|_q$.

Ключевые слова: компактность, оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка, оператор Римана-Лиувилля, сингулярный оператор, сопряженный оператор, неравенство Гельдера, весовые неравенства.

1. Введение

Пусть $1<p\leqslant q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $R_+=(0,\infty)$, $u,v:R_+\to R$ весовые функции, т.е. неотрицательные измеримые на R_+ функции.

Начиная 70-х годов прошлого века, в мировой математической литературе интенсивно исследуется весовая оценка вида

$$\|uKf\|_q\leqslant C\|vf\|_p \tag{1}$$

для различных классов операторов K, где $\|\cdot\|_p$ — обычная норма пространства $L_p\equiv L_p(R)$. Далее через $L_{p,v}$ обозначим совокупность функции $f:R_+\to R$ с конечной нормы $\|f\|_{p,v}=\|vf\|_p$. Обзор исследований оценок вида (1) с 1970 по 1982 гг. можно найти в [1]. Некоторые направления исследований оценок вида (1), сделанных для интегральных операторов до 2003 года, даны в монографии [2]. В работе [3] указана последовательность классов неотрицательных функции $K(\cdot,\cdot)$ и дано полное описание весов u и v, при которых для интегрального оператора

$$Kf(x)=\int\limits_0^x K(x,s)f(s)ds \tag{2}$$

справедлива оценка (1) при принадлежности его ядра к этим классам. Однако эти результаты не охватывают оператора вида (2) в случае, когда ядро $K(\cdot,\cdot)$ имеет сингулярность, например, оператор Римана-Лиувилля

$$R_\alpha f(x)=\int\limits_0^x\frac{f(s)ds}{(x-s)^{1-\alpha}}\,, \tag{3}$$

A.M. Abylayeva, A.O. Baiarystanov, Compactness criterion for fractional integration operator of infinitesimal order.

Поступила 23 декабря 2011 г.

при $0 < \alpha < 1$. Оценка вида (1) для оператора (3) в общем случае остается открытой. Но исследованы следующие случаи: $u \equiv v$ в [4], $v \equiv 1$ в [5, 6] и случай невозрастания одной из весовых функций u, v в [7].

Оператор вида

$$Kf(x) = \int_0^x \ln \frac{x}{x-s} \frac{f(s)}{s} ds \tag{4}$$

называется оператором дробного интегрирования бесконечно малого порядка (см. [8], стр. 34).

В [9] исследована оценка (1) для оператора (4) в случае, когда $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > 0$. Эта оценка равносильна оценке

$$\|uT_\gamma f\|_q \leqslant C\|f\|_p \tag{5}$$

для оператора

$$T_\gamma f(x) = \int_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} f(s) ds.$$

Так как

$$\ln \frac{x}{x-s} = \int_0^s \frac{dt}{x-t} \quad \text{при } x > s \geq 0,$$

то имеет место неравенство

$$\frac{s}{x-s} > \ln \frac{x}{x-s} > \frac{s}{x}, \quad x > s > 0. \tag{6}$$

Функция $\ln \frac{x}{x-s}$ убывает по x и возрастает по s при $x > s \geq 0$, а функции $x \ln \frac{x}{x-s}$, $\frac{1}{s} \ln \frac{x}{x-s}$ убывают по x и возрастают по s при $x > s > 0$. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \ln \frac{x}{x-s}\right) = \ln \frac{x}{x-s} - \frac{s}{x-s} < 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s} \ln \frac{x}{x-s}\right) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{s}{x-s} - \ln \frac{x}{x-s}\right) > 0$$

при $x > s > 0$. Отметим, что для дифференцируемой функции f оценка (1) для оператора (4) эквивалентна неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left|u(x) \int_0^x \frac{f(x)-f(s)}{x-s} ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int_0^\infty |f'(x) x^{1-\gamma}|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{7}$$

В работе принимаются следующие соглашения. Неопределенности вида $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ полагаются равными нулю. Неравенство вида $A \leqslant \beta B$, где положительная постоянная β, быть может, зависит от параметров p, q и γ, будем писать в виде $A \ll B$, а соотношение $A \approx B$ будет означать $A \ll B \ll A$.

$\chi_{(a,b)}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала (a, b), Z — множества целых чисел.

В работе [9] получены критерии ограниченности оператора T_γ и сопряженного к нему оператора

$$T_\gamma^* g(s) = s^{\gamma-1} \int_s^\infty g(x) \ln \frac{x}{x-s} dx, \tag{8}$$

из L_p в $L_{q,u}$.

В частности доказаны следующие теоремы.

Теорема A. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Оператор T_γ ограничен из L_p в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда*

$$D_\gamma = \sup_{x>0} D_\gamma(x) < \infty, \;\; \text{где} \;\; D_\gamma(x) = x^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int_x^\infty t^{-q} u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

При этом $\|T_\gamma\| \approx D_\gamma$.

Теорема B. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{q}$. Тогда оператор T_γ^* ограничен из $L_{p,v}$ в L_q тогда и только тогда, когда*

$$D_\gamma^* = \sup_{x>0} D_\gamma^*(x) \equiv \sup_{x>0} x^{\gamma+\frac{1}{q}} \left(\int_x^\infty t^{-p'} v^{1-p'}(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

При этом $\|T_\gamma^*\| \approx D_\gamma^*$.

В настоящей работе мы исследуем вопросы компактности оператора T_γ из L_p в $L_{q,u}$.

2. Основной результат

Теорема 1. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > \frac{1}{p}$. Оператор T_γ компактен из L_p в $L_{q,u}$ тогда и только тогда, когда $D_\gamma < \infty$ и*

$$\lim_{x\to 0} D_\gamma(x) = \lim_{x\to\infty} D_\gamma(x) = 0. \tag{9}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть T_γ есть компактный оператор из L_p в $L_{q,u}$. На основании теоремы A, $D_\gamma < \infty$.

Теперь докажем выполнение условий (9). Для $0 < s < \infty$ рассмотрим семейство функций

$$f_s(x) = \chi_{(0,s)}(x) s^{-\frac{1}{p}}, \;\; x > 0, \tag{10}$$

с нормой

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty |f_s(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^s s^{-1} dx \right)^{\frac{1}{p}} = s^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^s dx \right)^{\frac{1}{p}} = 1. \tag{11}$$

Покажем, что семейство функции (10) слабо сходится к нулю в L_p. В силу теоремы [10] об общем виде линейных непрерывных функционалов в лебеговом пространстве, линейный непрерывный функционал в L_p имеет вид:

$$\int_0^\infty f(x) g(x) dx, \;\; \text{где} \;\; g \in L_{p'}.$$

Используя неравенство Гельдера, выводим:

$$\int_0^\infty f_s(x) g(x) dx = \int_0^s s^{-\frac{1}{p}} g(x) dx \leqslant$$

$$\leqslant s^{-\frac{1}{p}} \left(\int_0^s dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^s |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^s |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{12}$$

Для любого $g \in L_{p'}$ последний интеграл в (12) стремится к нулю при $s \to 0$, что означает слабую сходимость $f_s \to 0$ в L_p при $s \to 0$. Тогда по свойству компактных операторов в банаховом пространстве

$$\lim_{s\to 0} \|T_\gamma f_s\|_{q,u} = 0. \tag{13}$$

Поскольку, $\ln \frac{x}{x-t} \geq \frac{t}{x}$ при $0 < t < x$, то

$$\|T_\gamma f_s\|_{q,u} = \left(\int\limits_0^\infty u(x) \left| \int\limits_0^x t^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-t} f_s(t) dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_s^\infty u(x) \left| \int\limits_0^s t^{\gamma-1} s^{-\frac{1}{p}} \ln \frac{x}{x-t} dt \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \geq$$

$$\geq s^{-\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^s t^\gamma dt \right) \left(\int\limits_s^\infty x^{-q} u(x) \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\gamma+1} D_\gamma(s). \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что $\lim\limits_{s\to 0} D_\gamma(s) = 0$, т.е. выполнено первое соотношение (9). Покажем второе соотношение (9). Из компактности оператора T_γ следует компактность сопряженного оператора T_γ^* (8) из $L_{q',u^{1-q'}}$ в $L_{p'}$. Для $0 < s < \infty$ введем семейство функций

$$g_s(x) = \chi_{(s,\infty)}(x) \left(\int\limits_s^\infty t^{-q} u(t) dt \right)^{-\frac{1}{q'}} u(x) x^{1-q}. \tag{15}$$

Из условия $D_\gamma < \infty$ следует сходимость интеграла в (15). Покажем, что для любого $s > 0$ функция $g_s \in L_{q',u^{1-q'}}$.

Действительно,

$$\|g_s\|_{q',u^{1-q'}} = \left(\int\limits_0^\infty |g_s x|^{q'} u^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} =$$

$$= \left(\int\limits_s^\infty t^{-q} u(t) dt \right)^{-\frac{1}{q'}} \left(\int\limits_s^\infty \left(u(x) x^{1-q} \right)^{q'} u^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} = 1. \tag{16}$$

Для всех $f \in L_{q,u}$, в силу (16)

$$\int\limits_0^\infty g_s(x) f(x) dx = \int\limits_s^\infty g_s(x) f(x) dx \leqslant \left(\int\limits_s^\infty |g_s(x)|^{q'} u^{1-q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_s^\infty |f(x)|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int\limits_s^\infty |f(x)|^q u(x) dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Предельный переход в последнем неравенстве при $s \to \infty$ показывает, что $g_s \to 0$, слабо в $L_{q',u^{1-q'}}$ при $s \to \infty$. Тогда $T_\gamma^* g_s$ (в силу компактности T_γ^*) сходится к нулю при $s \to \infty$ по норме $L_{p'}$, т.е.

$$\lim_{s\to\infty} \|T_\gamma^* g_s\|_{p'} = 0. \tag{17}$$

Из оценки

$$\|T_\gamma^* g_s\|_{p'} = \left(\int\limits_0^\infty \left| t^{\gamma-1}\int\limits_t^\infty g_s(x)\ln\frac{x}{x-t}dx\right|^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \geq$$

$$\geq \left(\int\limits_0^s t^{p'(\gamma-1)}\left(\int\limits_s^\infty \frac{u(x)}{x^{q-1}}\ln\frac{x}{x-t}dx\right)^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_s^\infty x^{-q}u(x)dx\right)^{-\frac{1}{q'}} \geq$$

(опять используем неравенство $\ln\frac{x}{x-t} \geq \frac{t}{x}$)

$$\geq \left(\int\limits_s^\infty x^{-q}u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^s t^{p'(\gamma-1)}t^{p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\frac{1}{p'\gamma+1}\right)^{\frac{1}{p'}} D_\gamma(s).$$

Откуда и из (17) получаем справедливость второго соотношения в (9). Утверждение теоремы в необходимую сторону доказано полностью.

Достаточность. Пусть $0 < a < b < \infty$ и

$$P_a f = \chi_{(0,a)} f,\ \ P_{ab} f = \chi_{[a,b)} f,\ \ Q_b f = \chi_{[b,\infty)} f.$$

Тогда для оператора T_γ

$$T_\gamma f = P_{ab}T_\gamma P_{ab} + P_a T_\gamma P_a f + P_{ab}T_\gamma P_a f + Q_b T_\gamma f. \tag{18}$$

Покажем, что оператор $P_{ab}T_\gamma P_{ab}$ компактен из L_p в $L_{q,u}$. Так как $P_{ab}T_\gamma P_{ab}f(x) = P_{ab}T_\gamma \chi_{[ab)}(x)f(x) = 0$, при $x \notin [a,b)$, то достаточно показать, что оператор $P_{ab}T_\gamma P_{ab}$ компактен из $L_p(a,b)$ в $L_{q,u}(a,b)$, а это, в свою очередь, эквивалентно компактности из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$ оператора $Tf(x) = \int\limits_a^b K(x,s)f(s)ds$ с ядром $K(x,s) = u^{\frac{1}{q}}(x)\chi_{(a,b)}(x-s)s^{\gamma-1}\ln\frac{x}{x-s}$, который, в силу локальной суммируемости функции u, удовлетворяет условию

$$\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^b |K(x,s)|^{p'}ds\right)^{\frac{q}{p'}}dx = \int\limits_a^b u(x)\left(\int\limits_a^x\left(s^{\gamma-1}\ln\frac{x}{x-s}\right)^{p'}ds\right)^{\frac{q}{p'}} \leqslant$$

(используем неравенство $\frac{s}{x-s} \geq \ln\frac{x}{x-s}$ при $x > s > 0$)

$$\leqslant \int\limits_a^b u(x)\left(\int\limits_a^x s^{p'\gamma}\left(\frac{1}{x-s}\right)^{p'}ds\right)^{\frac{q}{p'}} \leqslant \left(\int\limits_a^b s^{p'\gamma}ds\right)^{\frac{q}{p'}}\int\limits_a^b u(x)x^{-q}dx < \infty.$$

Следовательно, по признаку Кантаровича [10], оператор T_γ компактен из $L_p(a,b)$ в $L_q(a,b)$, что равносильно компактности из L_p в $L_{q,u}$ оператора $P_{ab}T_\gamma P_{ab}$. Из (18) имеем

$$\|T_\gamma - P_{ab}T_\gamma P_{ab}\| \leqslant \|P_a T_\gamma P_a\| + \|P_{ab}T_\gamma P_a\| + \|Q_b T_\gamma\|. \tag{19}$$

Покажем, что правая часть (19) стремится к нулю при $a \to 0$ и $b \to \infty$, тогда оператор T_γ как равномерный предел компактных операторов ([11], VI.12) будет компактным из L_p в $L_{q,u}$.

Пусть $u_a = P_a u$, тогда на основании Теоремы A имеем:

$$\|P_a T_\gamma P_a f\|_{q,u_a} \leqslant \|P_a T_\gamma f\|_{q,u_a} = \left(\int\limits_0^\infty u_a(x)\left|\int\limits_0^x s^{\gamma-1}\ln\frac{x}{x-s}f(s)ds\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u_a(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

Следовательно,

$$\|P_a T_\gamma P_a\| \ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u_a(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{0<z<a} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^a u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<z<a} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{0<z<a} D_\gamma(z).$$

Откуда

$$\lim_{a\to 0} \|P_a T_\gamma P_a\| \ll \overline{\lim_{z\to 0}} D_\gamma(z) = \lim_{z\to 0} D_\gamma(z) = 0. \tag{20}$$

Оценка $\|P_{ab} T_\gamma P_a\|$:

$$\|P_{ab} T_\gamma P_a f\|_{q,u} = \left(\int\limits_a^b u(x) \left| \int\limits_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} (P_a f)(s) ds \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_a^\infty u(x) \left(\int\limits_0^a s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} |f(s)| ds \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

(используем неравенство Гельдера и свойство функции $x \ln \frac{x}{x-s}$)

$$\leqslant \left(\int\limits_a^\infty u(x) \left(\int\limits_0^a \left| s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^a |f(s)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_a^\infty u(x) x^{-q} \left(\int\limits_0^a \left| s^{\gamma-1} x \ln \frac{x}{x-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_a^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^a \left| s^{\gamma-1} a \ln \frac{a}{a-s} \right|^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \leqslant$$

$$\leqslant (\beta_p)^{\frac{1}{p'}} a^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_a^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p \leqslant (\beta_p)^{\frac{1}{p'}} D_\gamma(a) \|f\|_p,$$

где $\beta_p = \int\limits_0^1 \left| s^{\gamma-1} \ln \frac{1}{1-s} \right|^{p'} ds \leqslant \ln^{p'} 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} s^{p'(\gamma-1)} ds + \max\left\{1, 2^{-p'(\gamma-1)}\right\} \int\limits_{\ln 2}^\infty t^{p'} e^{-t} dt.$

Откуда $\|P_{ab} T_\gamma P_a\| \ll D_\gamma(a)$. Следовательно,

$$\lim_{b\to\infty} \lim_{a\to 0} \|P_{ab} T_\gamma P_a\| \ll \lim_{a\to 0} D_\gamma(a) = 0. \tag{21}$$

Пусть $u_b = Q_b u$, тогда на основании Теоремы A получим

$$\|Q_b T_\gamma f\|_{q,u} = \left(\int\limits_0^\infty u_b(x) \left| \int\limits_0^x s^{\gamma-1} \ln \frac{x}{x-s} f(s) ds \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \ll$$

$$\ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u_b(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_p.$$

Откуда

$$\|Q_b T_\gamma\| \ll \sup_{z>0} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u_b(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \sup_{z\geq b} z^{\gamma+\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_z^\infty u(x) x^{-q} dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{z\geq b} D_\gamma(z).$$

Следовательно,

$$\lim_{b\to\infty} \|Q_b T_\gamma\| \ll \overline{\lim_{z\to\infty}} D_\gamma(z) = \lim_{z\to\infty} D_\gamma(z) = 0. \tag{22}$$

Из (19), (20), (21) и (22) следует, что правая часть (19) стремится к нулю при $a \to 0$ и $b \to \infty$. Теорема 1 доказана.

Переходя к сопряженному оператору и применяя теорему 1, имеем

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma > 1 - \frac{1}{q}$. *Тогда оператор (8) компактен из* $L_{p,v}$ *в* L_q *тогда и только тогда, когда*

$$D^*_\gamma < \infty, \quad и \quad \lim_{x\to 0} D^*_\gamma(x) = \lim_{x\to\infty} D^*_\gamma(x) = 0.$$

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$, *и* $v(x) = x^{-\gamma}$. *Оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка (4) компактен из* $L_{p,v}$ *в* $L_{q,u}$ *тогда и только тогда, когда* $D_\gamma < \infty$ *и выполнено (9).*

В случае $q < p$ имеет место

Теорема 4. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > \frac{1}{p}$. *Оператор дробного интегрирования бесконечно малого порядка (4) компактен из* $L_{p,v}$ *в* $L_{q,u}$ *тогда и только тогда, когда*

$$E_\gamma = \left(\int\limits_0^\infty \left[\left(\int\limits_x^\infty \frac{u(t)}{t^q} dt \right)^{\frac{1}{q}} x^{\gamma+\frac{1}{p'}} \right]^{\frac{pq}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Справедливость утверждения Теоремы 2 непосредственно следует из Теоремы 2 работы [9], так как по теореме Андо ([12], § 5), при $1 < q < p < \infty$ всякий ограниченный интегральный оператор из L_p в $L_{q,u}$ является компактным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дынькин Е.М., Осиленкер Б.П. *Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения* // Математический анализ. Т. 21 (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). М. 1983, С. 42–129.
2. A. Kufner, L-E. Persson *Weighted inequalities of Hardy type.* World Scientific, New Jersey, 2003.
3. Ойнаров Р. *Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтеровского типа* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, №5. С. 1100–1115.
4. K.F. Andersen, E.T. Sawyer *Weighted norm inegualities for the Riemann - Liouville and Weyl fractional integral operators*// Trans.Amer.Math.Soc.1988, V. 308, № 2. P. 547–557.
5. D.V. Prokhorov *On the boundedness and compactness of a class of integral operators* // J.London Math. Soc. 2000. V. 61, № 2. P. 617–628.
6. A. Meskhi *Solution of some weight problems for the Riemann - Liouville and Weil operators* // Georgian Math.J. 1998. № 5. P. 565–574.
7. Прохоров Д.В., Степанов В.Д. *Операторы Риммана–Лиувилля* // Доклады РАН. 2002, Т. 382, № 4. С. 452–455.
8. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* М.: Высшая школа, 1995.
9. Абылаева А.М., Омирбек М.Ж. *Весовая оценка для интегрального оператора с логарифмической особенностью* // Известия, серия физико-математическая. Алматы: НАН РК, 2005. № 1. С. 38–47.
10. Кантарович Л.В., Акилов Г.Р. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1977.
11. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 1. М.: Мир. 1977.
12. Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функции.* М.: Наука. 1966.

Абылаева Акбота Мухамедияровна,
Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова 5,
473021, г. Астана, Казахстан
E-mail: abylayeva_b@mail.ru

Байарыстанов Аскар Ойнарович,
Евразийский Национальный университет им. Л.Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова 5,
473021, г. Астана, Казахстан
E-mail: oskar_62@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 11-16.

УДК 519.63

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА В МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

А.К. БАЗЗАЕВ

Аннотация. Рассматриваются разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка в многомерной области с краевыми условиями третьего рода. Доказываются устойчивость и сходимость разностных схем для рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: разностные схемы, уравнение диффузии дробного порядка, априорная оценка, принцип максимума, третья краевая задача, устойчивость и сходимость разностной схемы.

Введение

Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают при описании физических процессов стохастического переноса [1], при изучении фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде [2]. Уравнения в дробных производных описывают эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем показатель производной указывает на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции. Такие системы могут быть классифицированы как системы с "остаточной" памятью, занимающие промежуточное положение между системами, обладающими полной памятью, с одной стороны, и марковскими системами, с другой [3].

Работа посвящена рассмотрению разностных схем для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего рода в многомерной области. В работе [4] рассмотрены разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. Локально-одномерные схемы для дифференциальных уравнений диффузии дробного порядка с краевыми условиями первого рода рассмотрены в работе [5], локально-одномерные схемы для третьей краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка (в работе [6]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В цилиндре $Q_T = G \times [0 < t \leqslant T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \dots,\ x_p) : 0 < x_\beta < \ell_\beta,\ \beta = 1,\ 2,\ \dots,\ p\}$ с границей Γ, $\overline{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается третья начально-краевая задача:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\begin{cases} k_\beta(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \varkappa_{-\beta}(x,t)u - \mu_{-\beta}(x,t),\ x_\beta = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -k_\beta(x,t)\ \dfrac{\partial u}{\partial x_\beta} = \varkappa_{+\beta}(x,t)u - \mu_{+\beta}(x,t),\ x_\beta = \ell_\beta,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{2}$$

A.K. Bazzaev, Finite-difference schemes for diffusion equation of fractional order with third type boundary conditions in multidimensional domain.

Поступила 10 ноября 2011 г.

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G}, \tag{3}$$

где

$$Lu=\sum_{\beta=1}^{p}L_\beta u,\ L_\beta u=\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(k_\beta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\beta}\right),$$

$$0<c_0\leqslant k_\beta\leqslant c_1,\ \varkappa_{\pm\beta}\geqslant\varkappa^*>0,$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\dfrac{\dot u(x,\eta)}{(t-\eta)^\alpha}d\eta$ — дробная производная Капуто порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$ [7], $\dot u=\dfrac{\partial u}{\partial t},\ c_0,\ c_1$ – положительные постоянные, $\beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p,\ \overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\leqslant t\leqslant T]$.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) — (3) обладают таким количеством непрерывных производных, которое необходимо для обеспечения нужной гладкости решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

2. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_β с шагом $h_\beta=\ell_\beta/N_\beta,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p$:

$$\overline{\omega}_h=\{x_i=(i_1h_1,\ldots,\ i_ph_p)\in G,\ i_\beta=0,1,\ldots,N_\beta,\ h_\beta=\ell_\beta/N_\beta,\ \beta=1,\ 2,\ \ldots,\ p\}.$$

На отрезке $[0,T]$ также введем равномерную сетку с шагом $\tau=T/j_0$:

$$\overline{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,\ldots,\ j_0\}.$$

В работе [4] предложен дискретный аналог дробной производной Капуто порядка α, $0<\alpha<1$.

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{t_j}\frac{\dot u(x,\eta)}{(t_j-\eta)^\alpha}d\eta=\Delta_{0t_j}^{\alpha}u+O\left(\tau/p\right), \tag{4}$$

где

$$\Delta_{0t_j}^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)u_{\overline{t}}^{s/p},\ u_{\overline{t}}^{s}=\frac{u^{s+1}-u^s}{\tau}.$$

Перейдем теперь к построению разностной схемы для дифференциальной задачи (1)–(3). Уравнению (1) поставим в соответствие разностное уравнение

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}u=\Lambda y+\varphi^{j+1}, \tag{5}$$

$$\Lambda y=\sum_{\beta=1}^{p}\Lambda_\beta y,\ \Lambda_\beta y=\left(a_\beta y_{\overline{x}_\beta}\right)_{x_\beta},\ \beta=1,2,\ldots,p.$$

К уравнению (5) присоединим граничные и начальные условия. Запишем разностный аналог для граничных условий (2):

$$\begin{cases} a^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}=\varkappa_{-\beta}y_0-\mu_{-\beta},\ x_\beta=0,\\ -a^{(N_\beta)}y_{\overline{x}_\beta,N_\beta}=\varkappa_{+\beta}y_{N_\beta}-\mu_{+\beta},\ x_\beta=\ell_\beta.\end{cases} \tag{6}$$

Условия (6) имеют порядок аппроксимации $O(h_\beta)$. Применяя известный прием повышения порядка аппроксимации до $O(h_\beta^2)$ на решениях уравнения (1) при каком-либо β, получим разностный аналог краевых условий

$$\Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha}y\Big|_{x_\beta=0}=\frac{(a^{(1_\beta)}y_{x_\beta,0}-\varkappa_{-\beta}y_0)}{0.5h_\beta}+\frac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta},$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y\Big|_{x_\beta=N_\beta} = -\frac{(a^{(N_\beta)} y_{\overline{x}_\beta,N_\beta} + \varkappa_{+\beta} y_{N_\beta})}{0.5h_\beta} + \frac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta},$$

где

$$\overline{\mu}_{-\beta} = \mu_{-\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,0},\ \overline{\mu}_{+\beta} = \mu_{+\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

Итак, разностный аналог задачи (1) — (3) имеет вид:

$$\begin{gathered} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y = \overline{\Lambda} y^{j+1} + \Phi, \\ y(x,0) = u_0(x),\ x \in \overline{G}, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\overline{\Lambda} y = \begin{cases} \Lambda y = \sum\limits_{\beta=1}^{p} (a_\beta y_{\overline{x}_\beta})_{x_\beta},\ x_\beta \in \omega_h, \\ \Lambda^{-} y = \dfrac{a^{(1_\beta)} y_{x_\beta,0} - \varkappa_{-\beta} y_0}{0.5h_\beta},\ x_\beta = 0, \\ \Lambda^{+}_{\beta} y = -\dfrac{a^{(N_\beta)} y_{\overline{x}_\beta,N_\beta} + \varkappa_{+\beta} y_{N_\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \varphi,\ x_\beta \in \omega_h, \\ \overline{\mu}_{-\beta},\ x_\beta = 0, \\ \overline{\mu}_{+\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \end{cases}$$

$$\overline{\mu}_{-\beta} = \mu_{-\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,0},\ \overline{\mu}_{+\beta} = \mu_{+\beta} + 0.5h_\beta f_{\beta,N_\beta}.$$

3. АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Получим априорную оценку в сеточной норме C для решения разностной задачи (7), выражающую устойчивость разностной схемы по начальным данным, по правой части и по граничным данным. Исследование устойчивости разностной схемы (7) будем проводить на основании принципа максимума ([8], с. 226), для чего разностную задачу (7) перепишем в виде

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y = \sum_{\beta=1}^{p} (a_\beta y_{\overline{x}_\beta})_{x_\beta} + \varphi(x,t),\ \beta = 1, 2, \ldots, p, \tag{8}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y_0 = \frac{(a^{(1_\beta)} y_{x_\beta,0} - \varkappa_{-\beta} y_0)}{0.5h_\beta} + \frac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = 0, \tag{9}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+1}} y_{N_\beta} = -\frac{(a^{(N_\beta)} y_{\overline{x}_\beta,N_\beta} + \varkappa_{+\beta} y_{N_\beta})}{0.5h_\beta} + \frac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta},\ x_\beta = \ell_\beta, \tag{10}$$

$$y(x,0) = u_0(x). \tag{11}$$

В ([8], с. 226) доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P),$$

где

$$A(P) > 0,\ B(P,Q) > 0,\ D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geqslant 0,$$

где P, Q — узлы сетки $\overline{\omega}_h$, $Ш'(P)$ — окрестность узла P, не содержащего самого узла P.

Обозначим через $P(x,t')$, где $x \in \omega_h$, $t' \in \omega'_\tau$ узел $(p+1)$-мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$, через S — границу Ω, состоящую из узлов $P(x,0)$ при $x \in \overline{\omega}_h$ и узлов $P(x,t_{j+1})$ при $t_{j+1} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_{h_\beta}$ для всех $\beta = 1, 2, \ldots, p$; $j = 0, 1, \ldots, j_0$.

Чтобы получить априорную оценку для решении разностной задачи (8)–(11), представим ее решение в виде суммы

$$y=\overset{\circ}{y}+\overset{*}{y},$$

где $\overset{\circ}{y}$ — решение однородных уравнений (8) с неоднородными краевыми условиями (9)–(10) и однородными начальными условиями (11), а $\overset{*}{y}$ — решение неоднородных уравнений (8) с однородными краевыми условиями (9)–(10) и неоднородными начальными условиями (11).

Оценим для начала $\overset{\circ}{y}$. Для этого запишем уравнение для $\overset{\circ}{y}$ в канонической форме

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\sum_{\beta=1}^{p}\frac{a_{\beta,i_\beta+1}+a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2}\right]\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{i_\beta}=\sum_{\beta=1}^{p}\left(\frac{a_{\beta,i_\beta+1}}{h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{i_\beta+1}+\right.$$
$$\left.+\frac{a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{i_\beta-1}\right)+\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{\circ}{y}{}^{j}_{i_\beta}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Big[\left(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{0}_{i_\beta}+\left(-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{1}_{i_\beta}+$$
$$+\ldots+\left(-t_3^{1-\alpha}+2t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j-1}_{i_\beta}\Big]. \tag{12}$$

К каноническому виду следует привести и граничные условия. В точке $P=P(x_0,t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{a^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}+\frac{\varkappa_{-\beta}}{0.5h_\beta}\right]\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{0}=\frac{a^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{0}+\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{\circ}{y}{}^{j}_{0}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{0}_{0}+\left(-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{1}_{0}+\right.$$
$$\left.+\ \ldots\ +\left(-t_3^{1-\alpha}+2t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j-1}_{0}\right]+\frac{\overline{\mu}_{-\beta}}{0.5h_\beta}. \tag{13}$$

В точке $P=P(x_{N_\beta},t_{j+1})$ имеем:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{a^{(N_\beta)}}{0.5h_\beta^2}+\frac{\varkappa_{+\beta}}{0.5h_\beta}\right]\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{N_\beta}=\frac{a^{(1_\beta)}}{0.5h_\beta^2}\overset{\circ}{y}{}^{j+1}_{N_\beta}+\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{\circ}{y}{}^{j}_{N_\beta}+$$
$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{0}_{N_\beta}+\left(-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{1}_{N_\beta}+\right.$$
$$\left.+\ \ldots\ +\left(-t_3^{1-\alpha}+2t_2^{1-\alpha}-t_1^{1-\alpha}\right)\overset{\circ}{y}{}^{j-1}_{N_\beta}\right]+\frac{\overline{\mu}_{+\beta}}{0.5h_\beta}. \tag{14}$$

Проверим, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках (согласно лемме из [5]), выполнимость условий теоремы 3 ([9], гл. V. Дополнение, §2, ф. (16)).

В точке $P=P(x_{i_\beta},t_{j+1})$ имеем:

$$A(P)>0,\ B(P,Q)>0,\ D(P)=0,$$

в точке $P=P(x_0,t_{j+1})$ имеем:

$$A(P)>0,\ B(P,Q)>0,\ D(P)=\frac{\varkappa_{-\beta}}{0.5h_\beta}\geqslant\frac{\varkappa^*}{0.5h_\beta}>0,$$

в точке $P = P(x_{N_\beta}, t_{j+1})$ имеем:

$$A(P) > 0,\ B(P,Q) > 0,\ D(P) = \frac{\varkappa_{+\beta}}{0.5h_\beta} \geqslant \frac{\varkappa^*}{0.5h_\beta} > 0.$$

Таким образом, выполнены все условия 3 ([9], гл. V. Дополнение, §2, ф. (16)) и

$$D(x_\beta, t_{j+1}) = 0,\ D(0, t_{j+1}) = \frac{\varkappa^*}{0.5h_\beta} > 0,\ D(\ell_\beta, t_{j+1}) = \frac{\varkappa^*}{0.5h_\beta} > 0.$$

На основании вышеуказанной теоремы 3 получаем оценку для $\overset{\circ}{y}$:

$$\|\overset{\circ}{y}^{j+1}\| \leqslant \frac{1}{\varkappa^*} \max_{x\in\gamma_h,\ t\in\overline{\omega}_\tau} \left(|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')| + |\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')|\right),\ \varkappa_{\pm\beta} \geqslant \varkappa^* > 0. \tag{15}$$

Переходим теперь к оценке функции $\overset{*}{y}$. Уравнение для $\overset{*}{y}$ перепишем в виде

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{p} \frac{a_{\beta,i_\beta+1} + a_{\beta,i_\beta}}{h_\beta^2}\right] \overset{*}{y}{}^{j+1}_{i_\beta} =$$

$$= \sum_{\beta=1}^{p} \frac{1}{h_\beta^2}\left(a_{\beta,i_\beta+1}\overset{*}{y}{}^{j+1}_{i_\beta+1} + a_{\beta,i_\beta}\overset{*}{y}{}^{j+1}_{i_\beta-1}\right) + \Phi(P_{j+1}), \tag{16}$$

где

$$\Phi(P_{j+1}) = \frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}\overset{*}{y}{}^{j}_{i_\beta} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_2^{1-\alpha} - t_1^{1-\alpha}\right)\overset{*}{y}{}^{j-1}_{i_\beta} -$$

$$-\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{j-1}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right)\left(\overset{*}{y}{}^{s}_{i_\beta} - \overset{*}{y}{}^{s-1}_{i_\beta}\right) + \varphi^{j+1}.$$

Проверим выполнимость условий теоремы 4 (см. [9], стр.347)

$$D'(P_{(j+1)}) = A(P_{(j+1)}) - \sum_{Q\in Ш'_{j+1}(P_{(j+1)})} B(P_{(j+1)}, Q) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} > 0,$$

$$A(P_{(j+1)}) > 0,\ B(P_{(j+1)}, Q) > 0, P_{(j+1)} = P(x, t_{j+1})$$

для всех $Q \in Ш''_j, Q \in Ш'_{j+1}$ на основании леммы (см. [9], стр.347)

$$\sum_{Q\in Ш''_j} B(P_{j+1}, Q) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} > 0,$$

$$\frac{1}{D'(P_{(j+1)})}\sum_{Q\in Ш''_j} B(P_{(j+1)}, Q) = 1, \tag{17}$$

где

$$Ш'_{(P(x,t_{j+1}))} = Ш'_{j+1} + Ш''_j,$$

$$Ш'_{j+1} - \text{множество узлов } Q = Q(\xi, t_{j+1}) \in Ш'_{(P(x,t_{j+1}))},$$

$$Ш''_j - \text{множество узлов } Q = Q(\xi, t_j) \in Ш'_{(P(x,t_j))}.$$

На основании упомянутой теоремы 4 (см. [9], стр.347) и в силу (17) получаем оценку

$$\|\overset{*}{y}{}^{j+1}\|_C \leqslant \|\overset{*}{y}{}^{0}\|_C + \Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^\alpha \max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\varphi^s\|. \tag{18}$$

Из оценок (15) и (18) следует окончательная оценка

$$\|y^{j+1}\|_C \leqslant \|y^0\|_C + \frac{1}{\varkappa^*}\max_{0<t'\leqslant j\tau}\left(|\overline{\mu}_{-\beta}(x,t')| + |\overline{\mu}_{+\beta}(x,t')|\right) +$$

$$+\Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\varphi^{s}\|. \qquad (19)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Разностная схема (7) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (7) справедлива оценка (19).*

4. Сходимость разностной схемы

Для погрешности $z = y - u$ справедлива оценка

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant \Gamma(2-\alpha)\sum_{j'=0}^{j}\tau^{\alpha}\max_{0\leqslant s\leqslant j'}\|\psi^{s}\|. \qquad (20)$$

Так как $\psi = O(|h|^2+\tau)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2$, то из (20) следует

$$\|z^{j+1}\|_C = O\left(\frac{|h^2|}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{\alpha}\right).$$

При $\alpha \to 1$, как и в [4], получаем известный результат

$$\|z^{j+1}\|_C = O\left(|h|^2+\tau\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чукбар К. В. *Стохастический перенос и дробные производные* // Ж. эксперим. и теор. физ. 1995. Т. 108. Вып. 5(11). С. 1875–1884.
2. Кобелев В.Л., Кобелев Я.Л., Романов Е.П. *Недебаевская релаксация и диффузия в фрактальном пространстве* // Докл. РАН 1998. Т.361. № 6. С. 755–758.
3. Нигматуллин Р.Р. *Дробный интеграл и его физическая интерпретация* // Теоретическая и матем. физика. 1992. Т. 90. № 3.
4. Таукенова Ф.И., Шхануков-Лафишев М.Х. *Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. № 10. С.1871–1881.
5. Лафишева М.М., Шхануков-Лафишев М.Х. *Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 10. С.1878–1887.
6. Баззаев А.К., Шхануков-Лафишев М.Х. *Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. №7. С. 1200–1208.
7. A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo *Theory and Applications of Fractional Differential Equations* // ELSEVIER. 2006. № 6. C.1106–1111. 523 p.
8. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1989.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* М.: Наука, 1973.

Александр Казбекович Баззаев,
Северо–осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова,
ул. Ватутина, 44-46,
362025, г. Владикавказ, Россия
E-mail: `alexander.bazzaev@gmail.com`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 17-35.

УДК 517.5

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ, АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЫ В НАЧАЛЕ КООРДИНАТ

Ю.Н. ДРОЖЖИНОВ, Б.И. ЗАВЬЯЛОВ

Аннотация. В работе получено полное описание обобщенных функций, асимптотически однородных в начале координат относительно мультипликативной однопараметрической группы преобразований, у которой вещественные части всех собственных значений инфинитезимальной матрицы положительны, в том числе и в случае критических порядков. Полученные результаты применяются для построения асимптотически однородных решений дифференциальных уравнений, символами которых являются квазиоднородные многочлены относительно этой группы в некритическом случае.

Ключевые слова: обобщенные функции, однородные функции, квазиасимптотика, дифференциальные уравнения в частных производных.

1. Введение

Данная работа является обобщением нашей статьи [1]. Пусть $U = \{U_k, k > 0\}$ — мультипликативная однопараметрическая группа линейных преобразований $\mathbb{R}^n$, так что $U_{k_1k_2} = U_{k_1}U_{k_2}$, причем предполагаем, что реальные части собственных значений генератора группы положительны. Пусть также $\mathcal{S}$ — некоторое пространство основных функций ($S(R^n), \mathcal{D}(R^n)$ и т.п), инвариантное относительно U_k, $\varrho(k)$ — положительная непрерывная функция при $k > 0$ и $f \in \mathcal{S}'$ (как обычно, штрихом сверху обозначено пространство соответствующих обобщенных функций).

Определение 1.1. Мы говорим, что f обладает квазиасимптотикой в нуле (на бесконечности) относительно $\rho(k)$ по группе U_k, если для любой $\psi(t) \in \mathcal{S}$ и некоторой $g \in \mathcal{S}'$

$$\frac{1}{\varrho(k)}(f(U_{\frac{1}{k}}t), \psi(t)) \xrightarrow[k\to\infty]{} (g(t), \psi(t))$$

$$\left(\frac{1}{\rho(k)}(f(U_k t), \psi(t)) \xrightarrow[k\to\infty]{} (g(t), \psi(t))\right). \quad (1.1)$$

В этом случае также говорят, что f *асимптотически однородна* на $\mathcal{S}$ по группе $U = \{U_k, k > 0\}$ в нуле (на бесконечности) и пишут $f \in AO_\varrho^{-U}(\mathcal{S})$ (соответственно $f \in AO_\varrho^{U}(\mathcal{S})$). В одномерном случае, когда U_k есть умножение на k, будем писать $f \in AO_\varrho^{-1}(\mathcal{F})$ и $f \in AO_\varrho^{1}(\mathcal{S})$ соответственно.

Yu. N. Drozhzhinov, B.I. Zavialov, Generalized functions asymptotically homogeneous with respect to one–parametric group at origin.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 10-01-00178, и грант РФ НШ 2928.2012.1.
Поступила 25 апреля 2012 г.

Если $g \equiv 0$, то мы говорим, что $f(t)$ обладает *тривиальной квазиасимптотикой* по группе U. Если для $f \in \mathcal{S}'$ выполнено соотношение (1.1), и $g \not\equiv 0$, то функция $\varrho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией. Напомним, что положительная непрерывная функция $\varrho(k)$, $k > 0$, называется автомодельной, если для любого $a > 0$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\varrho(ak)}{\varrho(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a^\alpha$$

равномерно на компактах по a, см. [6]. Число α называется порядком автомодельности ϱ. Порядок α автомодельной функции $\varrho(k)$, участвующей в (1.1), называется порядком асимптотически однородной обобщенной функции. Отметим, что любая автомодельная функция $\varrho(k)$ порядка α может быть представлена в виде

$$\varrho(k) = k^\alpha L(k), \quad k > 0, \tag{1.2}$$

где $L(k)$ – автомодельная функция нулевого порядка (медленно меняющаяся функция). Мы допускаем комплексный порядок автомодельности (следовательно, и комплексные автомодельные функции), имея в виду, что комплексная автомодельная функция имеет представление (1.2) с $\alpha \in \mathbb{C}$.

Заметим, что если $\varrho(k)$ в соотношении (1.1) имеет порядок α, то g является однородной обобщенной функцией степени $\alpha \in \mathbb{C}$ по соответствующей группе преобразований аргумента

$$g(U_k t) = k^\alpha g(t), \quad k > 0.$$

Иногда такие функции называют "квазиоднородными"порядка α относительно группы U, см. [8].

Асимптотически однородные функции хорошо изучены в пространстве S'_+ — обобщенных функций из пространства Шварца S' с носителями на положительной полуоси. Функция $f(r) \in S'_+$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(\frac{r}{k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} C f_{-\alpha+1}(r) \quad \text{в } S'_+,$$

где $f_N(r)$ ядро дробного (дифференциирования) интегрирования Лиувилля. Напомним, что $f(r)$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, тогда и только тогда, когда существует число $N > -\alpha + 1$, такое что ее N-я первообразная непрерывна и обладает обычной асимптотикой относительно $r^N \rho(\frac{1}{r})$.

Отметим, что U_k может быть представлена в виде $U_k = e^{\ln kE}$, где E — некоторое линейное преобразование $\mathbb{R}^n$. В работах [3], [4] дается описание асимптотически однородных на бесконечности (в [1] в нуле), обобщенных функций, в случае, когда матрица E имеет строго диагональный вид, ее собственные значения вещественны и одного знака. В частном случае, когда собственные значения матрицы E еще и одинаковы (соответствующая группа преобразований — группа растяжений $\mathbb{R}^n$), полное описание однородных обобщенных функций относительно такой группы дано в [2].

Основная цель данной работы получить полное описание асимптотически однородных обобщенных функции в нуле относительно мультипликативных однопараметрических групп преобразований, у которых вещественные части всех собственных значений инфинитезимальной матрицы группы U положительны. При этом, в матрице E наряду с нормальной составляющей может присутствовать еще и нильпотентная часть. Основным инструментом такого описания служит, так называемое, *обобщенное сферическое представление* обобщенных функций [5], которое описывается во второй секции. Это представление сводит изучение асимптотических свойств обобщенных функций в нуле относительно группы $\{U_k, r > 0\}$ к исследованию радиальных асимптотических свойств обобщенных функций, заданных на специальных пространствах основных функций.

Асимптотически однородные обобщенные функции на этих специальных пространствах изучаются в секции 3. Там же дается описание обобщенных функций из $S'(\mathbb{R}^n)$, асимптотически однородных вдоль траекторий, определяемых мультипликативной однопараметрической группой. Отметим, что некоторые утверждения секции 3 мы приводим без доказательства, так как они в идейном плане близки к доказательствам соответствующих утверждений работ [1], [5] и легко могут быть воспроизведены в новой ситуации.

Наконец, в последней секции доказывается теорема о делении обобщенной функции на многочлен однородный относительно группы U_k, и полученные результаты применяются для построения асимптотически однородных решений дифференциальных уравнений, символами которых являются однородные многочлены, в некритическом случае.

2. Обобщенное сферическое представление обобщенных функций

Обобщенное сферическое представление в наиболее подходящей для нас форме введено в [5]. Для удобства читателей мы повторим здесь основные моменты его построения.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ (а следовательно и в $\mathbb{C}^n$) действует вещественная непрерывная мультипликативная группа линейных преобразований $U = \{U_k = e^{\ln kE}, k > 0\}$. Оператор E – генератор этой группы представляется в виде

$$E = H + N; \quad H = M + iL, \tag{2.1}$$

где H – нормальная, а N – нильпотентная составляющие этого оператора. Оператор H имеет вид $\sum_j \kappa_j \mathcal{P}_j$, где κ_j его собственные значения, а $\mathcal{P}_j$ – проекторы на соответствующие собственные подпространства. При этом $M = \sum_j \mathrm{Re}\, \kappa_j \mathcal{P}_j$, а $L = \sum_j \mathrm{Im}\, \kappa_j \mathcal{P}_j$. Отметим, что все эти операторы коммутируют друг с другом. Соответствующие этим операторам однопараметрические группы обозначим

$$\mathfrak{H}_k = e^{\ln kH}; \quad \mathfrak{M}_k = e^{\ln kM}; \quad \mathfrak{L}_k = e^{i \ln kL}; \quad \mathfrak{N}_k = e^{\ln kN}, \tag{2.2}$$

так что

$$U_k = \mathfrak{H}_k \cdot \mathfrak{N}_k = \mathfrak{M}_k \cdot \mathfrak{L}_k \cdot \mathfrak{N}_k$$

Пусть

$$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n), \quad \sigma_i = \mu_i + i\nu_i, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \mu_i > 0, \tag{2.3}$$

собственные значения E с учетом кратности, так что μ_i, ν_i собственные значения M и L соответственно. Так как группа U вещественна, то наряду с каждым комплексным собственным значением $\sigma_i = \mu_i + i\nu_i$ найдется комплексно сопряженное собственное значение $\sigma_j = \mu_i - i\nu_i$. Положим

$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n), \quad \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n), \quad |\mu| = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i > 0. \tag{2.4}$$

Пусть Γ — замкнутая бесконечно гладкая поверхность в $\mathbb{R}^n$, охватывающая начало координат, и такая, что каждая траектория, группы $\{U_k, k > 0\}$ пересекает эту поверхность только в одной точке и по не касательному направлению. Такие поверхности будем называть *допустимыми*. Нетрудно показать, что класс допустимых поверхностей не пуст, в частности, в качестве такой поверхности можно взять достаточно сжатый по некоторым осям эллипсоид. Введем в $\mathbb{R}^n$ обобщенные сферические координаты по формуле

$$t = \varrho(r, e) = U_r e, \quad e \in \Gamma, r > 0. \tag{2.5}$$

Пусть функция $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$. Тогда при преобразовании (2.5) она перейдет в функцию $\psi(r, e) = \varphi(U_r e)$, заданную на $\Gamma \times \mathbb{R}_+$. Это отображение обозначим ζ, так что

$$\zeta: \quad \varphi \mapsto \psi(r, e) = \varphi(U_r e), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad e = (e_1, \ldots, e_n) \in \Gamma. \tag{2.6}$$

Возникает вопрос, какому пространству принадлежит функция $\psi(r, e)$? Нетрудно видеть, что при $r > 0$ функция $\psi(r, e)$ бесконечно дифференцируема и убывает при $r \to +\infty$

вместе со всеми производными быстрее любой степени $\frac{1}{r}$, а в нуле обладает специальным асимптотическим разложением. Для того чтобы описать образ отображения ζ, и обосновать соответствующую замену переменных введем некоторые определения.

Положим

$$J_U = \{\lambda : (\sigma, j) = \lambda, j \in \mathbb{Z}^n_+\}, \tag{2.7}$$

$\mathcal{E}_\lambda$ – пространство многочленов $Q(t)$, однородных относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k > 0\}$, степени λ, так что $\mathcal{E}_\lambda = \{Q(t) : Q(\mathfrak{H}_k t) = k^\lambda Q(t)\}$. В пространствах $\mathcal{E}_\lambda$ определим операторы A_λ, действующие по формулам

$$\mathrm{A}_\lambda Q(t) = \operatorname{grad} Q(t) N t = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} t_\ell \varepsilon_{k\ell} \frac{\partial Q(t)}{\partial t_k}, \quad Q(t) \in \mathcal{E}_\lambda, \tag{2.8}$$

где $\varepsilon_{k\ell}$ элементы нильпотентной матрицы, соответствующей оператору N. Операторы A_λ нильпотентны.

Вернемся к обобщенным сферическим координатам. Формально асимптотическое разложение $\psi(r, e) = \varphi(U_r e)$ в окрестности нуля имеет вид

$$\psi(r, e) = \varphi(U_r e) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \big[C_{\lambda,0}(e) + \ln r C_{\lambda,1}(e) + \dots + \ln^{n(\lambda)} r C_{\lambda,n(\lambda)}(e)\big]. \tag{2.9}$$

Здесь $C_{\lambda,0}(e)$ след на Γ многочлена из пространства $\mathcal{E}_\lambda$, а

$$C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!} \mathrm{A}^m_\lambda C_{\lambda,0}(t)\Big|_{t=e\in\Gamma}, \quad m = 1, \dots, n(\lambda), \tag{2.10}$$

$n(\lambda)$ — некоторые целые числа. Придадим этим наблюдениям строгий математический смысл.

Пусть Γ допустимая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пространство $S(\Gamma)$ – пространство бесконечно дифференцируемых на этой поверхности функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Соответствующую систему полунорм обозначим $Q_N\{\cdot\}$.

Введем пространство $W_{\bar{J}_U}$, как пространство функций $\psi(r, e)$ бесконечно дифференцируемых при $e \in \Gamma$ и $r \in \mathbb{R}_+$, для которых при $N = 0, 1, \dots$ существуют функции $C_{\lambda,m}(e) \in S(\Gamma), \lambda \in J, 0 \leqslant m \leqslant n(\lambda)$, такие, что

$$\psi(r, e) - \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r \in C^N\Big([0, +\infty)) \times S(\Gamma)\Big),$$

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell [\psi(r, e) - \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r]\Bigg|_{r=0} = 0, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant N.$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} &\overline{\Omega}_q[\psi](r, e) = \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant q \\ \lambda \in J}} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e), \quad \Omega_q[\psi](r, e) = \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda < q \\ \lambda \in J}} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r, e), \\ &\omega_\lambda[\psi](r, e) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Топология на $W_{\bar{J}_U}$ задается с помощью системы норм

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0\leqslant \ell\leqslant N} \sup_{r>0} Q_N\left\{(1+r)^N\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell\left[\psi(r,e)-\eta(r)\overline{\Omega}_N[\psi](r,e)\right]\right\}+ \\ + \max_{\mathrm{Re}\ \lambda\leqslant N, \lambda\in J} Q_N\big\{C_{\lambda,m}(e)\big\}, \quad (2.12)$$

Определим в $W_{\bar{J}_U}$ подпространство

$$V = \{\psi(r,e)\in W_{\bar{J}}:\quad C_{\lambda,0}(e)\in\mathcal{E}_\lambda,\quad C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!}\mathrm{A}_\lambda^m C_{\lambda,0}(e)\}. \quad (2.13)$$

Здесь пространство многочленов, однородных относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k>0\}$, степени λ, и пространство их следов на Γ мы отождествляем и обозначаем одной и той же буквой $\mathcal{E}_\lambda$. Топология в V наследуется топологией $W_{\bar{J}_U}$. Нетрудно видеть, что V замкнутое подпространство пространства $W_{\bar{J}_U}$. Отметим, что из соотношений (2.9), (2.10) и (2.8) для функций из V следует формула

$$r\frac{d}{dr}\omega_\lambda[\psi](r,e) = \mathrm{A}_\lambda\omega_\lambda[\psi](r,e) \quad (2.14)$$

Теорема 2.1. *Отображение ζ, определяемое формулой (2.6) осуществляет изоморфизм пространств $S(\mathbb{R}^n)$ и V.*

Это утверждение позволяет для обобщенной функции $f(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$ ввести функционал $f_s(r,e), r>0, e\in\Gamma$ по формуле

$$\big(f_s(r,e),\psi(r,e)\big) = \big(f(t),\varphi(t)\big),\ \text{где}\ \varphi(U_r e) = \psi(r,e)\in V,$$

так что $f_s(r,e)$ принадлежит V'. По теореме Хана-Банаха мы можем продолжить f_s на все $W_{\bar{J}_U}$. Обозначим это продолжение $F(r,e)$ и назовем его *обобщенным сферическим представлением* функции $f(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$, так что

$$(F(r,e),\psi(r,e)) = (f_s,\psi(r,e)),\quad \forall\psi(r,e)\in V.$$

При этом

$$(f(U_{\frac{1}{k}}t),\varphi(t)) = \frac{1}{\det U_{\frac{1}{k}}}\big(f(t),\varphi(U_k t)\big) = \\ = \frac{1}{\det U_{\frac{1}{k}}}\Big(F(r,e),\varphi\big(U_{rk}e\big)\Big) = \frac{\det U_k}{k}\Big(F(\frac{r}{k},e),\varphi(U_r e)\Big). \quad (2.15)$$

Отметим, что обобщенное сферическое представление $F(r,e)$ функции $f\in S'(\mathbb{R}^n)$ определяется неоднозначно. Из формулы (2.15) следует

Утверждение 2.1. *Пусть $\varrho(k)$ – автомодельная функция порядка α. Для того чтобы обобщенная функция $f(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$ была асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\varrho(k)$ по группе преобразований $U=\{U_k, k>0\}$, необходимо и достаточно, чтобы ее обобщенное сферическое представление $F(r,e)$ было асимптотически однородным в нуле по r относительно $\rho_1(k)$ на V, где*

$$\rho_1(k) = \frac{k}{\det U_k}\rho(k) = k^{1-|\mu|}\rho(k). \quad (2.16)$$

Таким образом, для описания класса $AO_\rho^{-U}(S(\mathbb{R}^n))$ нам достаточно описать класс асимптотически однородных обобщенных функций на пространствах $V\subset W_{\bar{J}_U}$. Этому мы предпошлем описание асимптотически однородных обобщенных функций в нуле на более общих специальных пространствах обобщенных функций.

3. Асимптотически однородные обобщенные функции в нуле на $S_{\bar J}, W_{\bar J}, V_{J,\mathcal{F}}$ и $S(\mathbb{R}^n)$

Пусть J не более чем счетное (может быть пустое) множество комплексных чисел, такое, что в каждой полуплоскости $\{\mathrm{Re}\ z < a : \quad z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}\}$ содержится не более конечного числа точек из J. Каждому $\lambda \in J$ сопоставим целое неотрицательное число $n(\lambda) \in \mathbb{Z}_+$. Множества пар чисел $(\lambda, n(\lambda))$ будем обозначать $\bar J$ и называть *допустимыми множествами.* Условимся считать, что если $n(\lambda) < 0$, то точка $\lambda \notin J$.

Обозначим через $S_{\bar J}$ пространство функций $\psi(r) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, быстро убывающих при $r \to +\infty$ вместе со всеми производными и таких, что для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ и некоторых постоянных $C_{\lambda,m}$, зависящих от ψ,

$$\left[\psi(r) - \bar\Omega_N[\psi](r)\right] \in C^N([0,+\infty)), \left(\frac{d}{dr}\right)^\ell \left[\psi(r) - \bar\Omega_N[\psi](r)\right]\Bigg|_{r=0} = 0,$$

где $\ell = 0, \ldots, N$, а

$$\begin{aligned} \Omega_N^J[\psi](r) &= \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda < N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r, \\ \bar\Omega_N^J[\psi](r) &= \sum_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda \leqslant N \\ \lambda \in J}} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r, \end{aligned} \tag{3.1}$$

Верхний индекс J будем опускать, когда ясно о каком $S_{\bar J}$ идет речь. Топологию на $S_{\bar J}$ зададим с помощью системы норм

$$\mathcal{P}_N(\psi) = \max_{0\leqslant\ell\leqslant N} \sup_{r>0} (1 + r)^N \left| \left(\frac{d}{dr}\right)^\ell \left[\psi(r) - \eta(r)\bar\Omega_N[\psi](r)\right] \right| + \max_{\substack{\mathrm{Re}\ \lambda\leqslant N, \lambda\in J \\ m\leqslant n(\lambda)}} |C_{\lambda,m}|.$$

Здесь и далее функция $\eta(r)$ бесконечно дифференцируема на $[0,+\infty)$, финитна и равна 1 в некоторой окрестности нуля. Отметим, что $\psi(r) \in S_{\bar J}$ имеет в нуле асимптотическое разложение

$$\psi(r) \sim \sum_{\lambda\in J} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r. \tag{3.2}$$

Пространство $S_{\bar J}$ – пространство Фреше. Отметим также, что $S_{\bar J}$ инвариантно относительно растяжений аргумента.

В качестве примера обобщенных функций из $S'_{\bar J}$ приведем функции

$$r_+^\beta, \quad \beta \in \mathbb{C},$$

обобщающие функции x_+^λ из [2]. Для этого введем несколько определений и обозначений. Пусть $\sigma \in J$. Через $\overline{J \setminus \sigma}$ обозначим множество пар $\bar J$ с выброшенной парой $(\sigma, n(\sigma))$, а через $\mathrm{Pr}\, J$ обозначаем множество вещественных чисел $\{\mathrm{Re}\ \lambda : \quad \lambda \in J\}$. Пусть $(\sigma, n(\sigma)) \in \bar J$. Введем отображение

$$D_\sigma \equiv r^\sigma \left(r\frac{d}{dr}\right)^{n(\sigma)+1} r^{-\sigma} : \quad \varphi(r) \mapsto \psi(r) = D_\sigma\varphi(r). \tag{3.3}$$

Отображение D_σ осуществляет изоморфизм пространств $S_{\bar J}$ и $S_{\overline{J\setminus\sigma}}$. Отметим, что эти отображения коммутируют с растяжениями.

Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$ и $\bar J$ — допустимое множество пар. Положим

$$J_\gamma = \{\lambda \in J : \mathrm{Re}\ \lambda = \mathrm{Re}\ \gamma\}, \tag{3.4}$$

Ясно, что J_γ зависит только от $\operatorname{Re}\gamma$. Отметим, что J_γ – конечное множество. Положим

$$D_{\bar J_\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{Re}\gamma \notin \operatorname{Pr} J, \\ \prod\limits_{\lambda\in J_\gamma} D_\lambda, & \text{если } \operatorname{Re}\gamma \in \operatorname{Pr} J, \end{cases} \tag{3.5}$$

где порядок, в котором перемножаются операторы D_λ, каким-то образом зафиксирован. Дальнейшие результаты не будут зависеть от этого порядка. Нетрудно видеть, что

$$D_{\bar J_\gamma} \sum_{\lambda\in J_\gamma} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r) = 0, \qquad \text{где} \qquad \omega_\lambda[\psi](r) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m} \ln^m r. \tag{3.6}$$

Обозначим через $S_\emptyset$ пространство основных функций из S_+, обращающихся в нуль вместе со всеми своими производными в начале координат.

Утверждение 3.1. *Пусть $\bar J$ допустимое множество и число $\beta \in \mathbb{C}$, такое, что $-\beta-1 \notin J$. Тогда существует единственное однородное степени β продолжение r^β с $S_\emptyset$ на $S_{\bar J}$. Это продолжение задается формулой*

$$(r_+^\beta, \varphi(r)) = \begin{cases} \int\limits_0^\infty r^\beta\Big(\varphi(r) - \bar\Omega_{-\operatorname{Re}\beta-1}[\varphi](r)\Big)dr, \\ \qquad\qquad \textit{если } -\operatorname{Re}\beta-1 \notin \operatorname{Pr} J; \\ \prod\limits_{\lambda\in J_{-\beta-1}} \Big(\frac{-1}{\beta+1+\lambda}\Big)^{n(\lambda)+1} \int\limits_0^\infty r^\beta D_{\bar J_{-\beta-1}}\Big(\varphi(r) - \bar\Omega_{-\operatorname{Re}\beta-1}[\varphi](r)\Big)dr, \\ \qquad\qquad \textit{если } -\operatorname{Re}\beta-1 \in \operatorname{Pr} J, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $\varphi(r) \in S_{\bar J}$, а $\Omega_{-\operatorname{Re}\beta-1}[\varphi](r)$ определено в (3.1).

Отметим, что r_+^β мероморфная по $\beta\in\mathbb{C}$ обобщенная функция и в точках $-\lambda-1, \lambda\in J$, имеет полюса порядка $n(\lambda)+1$. Так что в окрестности точки $\beta_0+1 \in -J$ функция $(r_+^\beta, \varphi(r))$ разлагается в ряд Лорана

$$(r_+^\beta, \varphi(r)) \sim \frac{d_{\beta_0}}{(\beta-\beta_0)^{n(\beta_0)+1}} + \cdots,$$
$$\text{где } d_{\beta_0} = (-1)^{n(-\beta_0-1)}\big(n(-\beta_0-1)\big)!C_{-\beta_0-1,n(-\beta-1)}. \tag{3.8}$$

Введем в $S'_{\bar J}$ обобщенные функции

$$\Delta_{\lambda,m}(r), \quad m = 0,\dots,n(\lambda),$$

аналоги дальта функций и их производных. Пусть $(\lambda, n(\lambda)) \in \bar J$ и $\psi(r)\in S_{\bar J}$, положим

$$(\Delta_{\lambda,m}(r), \psi(r)) = C_{\lambda,m}, \quad m = 0,\dots,n(\lambda), \tag{3.9}$$

где $C_{\lambda,m}$ соответствующие коэффициенты разложения (3.2).

Лемма 3.1. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, а $F(r)\in S'_{\bar J}$ и ее носитель отделен от нуля, то есть существует число $a>0$, так что $\operatorname{supp} F(r) \subset \{r \geqslant a\}$. Тогда $F(r)$ имеет тривиальную квазиасимптотику в нуле относительно $\rho(k)$.*

Пользуясь идеями работ [1] и [5], нетрудно установить справедливость следующих теорем

Теорема 3.1. *Пусть $\bar J$ допустимое множество, $\rho(k)$ автомодельная функция порядка β, причем $\operatorname{Re}\beta - 1 \notin \operatorname{Pr} J$ и число ℓ таково, что*

$$\operatorname{Re}\beta - 1 - \operatorname{Re}\ell \notin \mathbb{Z}_+. \tag{3.10}$$

Тогда, для того чтобы $F(r)\in AO_\rho^{-1}(S_{\bar J})$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(r) = F_0(r) + F_1(r), \quad F_0, F_1 \in S'_{\bar J}, \tag{3.11}$$

где supp F_0 отделен от нуля, а F_1 определяется следующим образом. Существуют числа A, $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная при $r > 0$ функция $\gamma(r)$, причем

$$\gamma(r) \sim Ar^{N+\ell}\rho(\frac{1}{r}), \quad r \to +0, \tag{3.12}$$

такие, что для любой основной функции $\varphi \in S_{\bar{J}}$

$$(F_1(r), \varphi(r)) = \int\limits_0^1 \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left[r^{-\ell}(\varphi(r) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\varphi](r))\right] dr. \tag{3.13}$$

Теорема 3.2. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем $\mathrm{Re}\,\beta - 1 \in \mathrm{Pr}\,J$, и число $\ell \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию* (3.10)*. Для того чтобы $F(r) \in AO_\rho^{-1}(S_{\bar{J}})$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* (3.11)*, где supp $F_0(r)$ отделен от нуля, а обобщенная функция $F_1(r)$ для любой $\psi(r) \in S_{\bar{J}}$ определяется формулой*

$$(F_1(r), \psi(r)) = \int\limits_0^1 \gamma(r) \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell}\left(D_{\bar{J}_{\beta-1}}\right)\left(\psi(r) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r)\right) dr, \tag{3.14}$$

с некоторым $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывной функцией $\gamma(r)$, удовлетворяющей асимптотическому соотношению (3.12)*. Здесь $D_{\bar{J}_{\beta-1}}$ определяется формулой* (3.5)*.*

Пусть Γ допустимая поверхность в $\mathbb{R}^n$. Пространство $S(\Gamma)$ – это пространство бесконечно дифференцируемых на этой поверхности функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Пусть Γ покрыта конечным числом карт U_α, в каждой из которых действуют локальные координаты $\xi^\alpha = (\xi_1^\alpha, \ldots, \xi_{n-1}^\alpha)$. Тогда соответствующая система полунорм определяется как

$$Q_N\{\varphi(e)\} = \max_\alpha \max_{|j|\leqslant N} \sup_{\xi^\alpha \in U_\alpha} |\partial^j \varphi(\xi)|, \tag{3.15}$$

где j — мультиндекс, а ∂^j — соответствующий дифференциальный оператор.

Положим $W_{\bar{J}} = S_{\bar{J}} \otimes S(\Gamma)$ (проективное тензорное произведение пространств $S_{\bar{J}}$ и $S(\Gamma)$). Пространство $W_{\bar{J}}$ может быть реализовано как пространство функций $\psi(r, e)$ бесконечно дифференцируемых при $e \in \Gamma$ и $r \in \mathbb{R}_+$. Так, что для любого $N \in \mathbb{Z}_+$ существуют функции $C_{\lambda,m}(e) \in S(\Gamma)$, $\lambda \in J, 0 \leqslant m \leqslant n(\lambda)$, такие, что

$$\psi(r,e) - \overline{\Omega}_N[\psi](r,e) \in C^N\Bigg([0, +\infty)) \times S(\Gamma)\Bigg),$$

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^\ell [\psi(r,e) - \overline{\Omega}_N[\psi](r,e)]\Bigg|_{r=0} = 0, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant N,$$

где $\bar{\Omega}_N[\psi](r, e)$ введена в (2.11). Топология на $W_{\bar{J}}$ задается с помощью системы норм (2.12). Для $\psi(r, e) \in W_{\bar{J}}$ имеет место асимптотическое разложение (2.9)

$$\psi(r,e) \sim \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \sum_{m=0}^{n(\lambda)} C_{\lambda,m}(e) \ln^m r = \sum_{\lambda \in J} r^\lambda \omega_\lambda[\psi](r,e), \quad r \to 0, \tag{3.16}$$

которое можно дифференциировать по r сколь угодно раз. Точнее, для любого $M \in \mathbb{Z}_+$ существует $N \in \mathbb{Z}_+$ такое, что

$$Q_M\Big\{\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\ell \left(\psi(r,e) - \overline{\Omega}_N[\psi](r,e)\right)\Big\} = O(r^M), \quad r \to 0, \quad \ell = 0, \ldots, M.$$

В пространстве $W_{\bar{J}}$ справедливы большинство утверждений аналогичных утверждениям в $S_{\bar{J}}$. В частности, аналоги теорем 3.1 и 3.2.

Пусть $F(r) \in S'_{\bar{J}}$ и $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$. Тогда $F(r)\Phi(e) \in W'_{\bar{J}}$ определяется формулой

$$(F(r)\Phi(e), \psi(r,e)) = (F(r), (\Phi(e), \psi(r,e))_e), \quad \psi(r,e) \in W_{\bar{J}}.$$

Здесь и всюду далее нижний индекс e у $(\Phi(e), \psi(r,e))_e$ означает значение обобщенной функции $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$ на функции $\psi(r,e)$, рассматриваемой как основной из $S(\Gamma)$ при фиксированном r.

В частности, если $-\beta - 1 \notin J$, то

$$(r_+^\beta \Phi(e), \psi(r,e)) =$$
$$= \begin{cases} \int\limits_0^\infty r^\beta \Big(\Phi(e), \psi(r,e) - \bar{\Omega}_{-\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e)\Big)_e dr, \text{ при } -\mathrm{Re}\,\beta - 1 \notin \mathrm{Pr}\,J; \\ C \int\limits_0^\infty r^\beta D_{\bar{J}_{-\beta-1}} \Big(\Phi(e), \psi(r,e) - \bar{\Omega}_{-\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e)\Big)_e dr, \\ \qquad\qquad\qquad \text{при } -\mathrm{Re}\,\beta - 1 \in \mathrm{Pr}\,J, \end{cases} \tag{3.17}$$

где $C = \prod_{\lambda \in J_{-\beta-1}} \left(\frac{-1}{\beta+1+\lambda}\right)^{n(\lambda)+1}$. Функция $r_+^\beta \Phi(e)$ однородна по r степени β.

Пусть $\Phi(e) \in S'(\Gamma)$, тогда

$$(\Delta_{\lambda,m}(r)\Phi(e), \psi(r,e)) = (\Phi(e), C_{\lambda,m}(e))_e. \tag{3.18}$$

В пространстве $W_{\bar{J}}$ обощенные функции асимптотически однородные в нуле в некритическом случае описываются следующей теоремой.

Теорема 3.3. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем* $\mathrm{Re}\,\beta - 1 \notin \mathrm{Pr}\,J$ *и число $\ell \in \mathbb{C}$ таково, что*

$$\mathrm{Re}\,\beta - \mathrm{Re}\,\ell - 1 \notin \mathbb{Z}_+. \tag{3.19}$$

Обобщенная функция $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_{\bar{J}})$ тогда и только тогда, когда

$$F(r,e) = F_0(r,e) + F_1(r,e), \quad F_0(r,e), F_1(r,e) \in W'_{\bar{J}},$$

где supp $F_0(r)$ отделен от нуля, а $F_1(r,e)$ представляется в следующем виде: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma(r,e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому соотношению

$$\gamma(r,e) \sim r^{N+\ell}\rho(\frac{1}{r})B(e), \quad r \to +0, \tag{3.20}$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие, что для любой $\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$

$$(F_1(r,e), \psi(r,e)) = \int\limits_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \Big(r^{-\ell}(\psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e))\Big)\right)_e dr. \tag{3.21}$$

В пространстве $W_{\bar{J}}$ обощенные функции асимптотически однородные в нуле в критическом случае описываются следующей теоремой.

Теорема 3.4. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем* $\mathrm{Re}\,\beta - 1 \in \mathrm{Pr}\,J$ *и число $\ell \in \mathbb{C}$ таково, что выполнено условие (3.19). Обобщенная функция $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_{\bar{J}})$ тогда и только тогда, когда*

$$F(r,e) = F_0(r,e) + F_1(r,e), \quad F_0(r,e), F_1(r,e) \in W'_{\bar{J}},$$

где supp $F_0(r)$ отделен от нуля, а $F_1(r,e)$ представляется в следующем виде: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma(r,e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому соотношению (3.20) с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие, что для любой $\psi(r,e) \in W_{\bar J}$

$$(F_1(r,e),\psi(r,e)) \;=\; \int\limits_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell}\left(D_{\bar J_{\beta-1}}\right)(\psi(r,e) - \bar\Omega_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e))\right)_e dr. \quad (3.22)$$

Определение 3.1. Пусть каждому $\lambda \in J$ сопоставлено конечномерное линейное подпространство $\mathcal{E}_\lambda \in S(\Gamma)$ и нильпотентный линейный оператор A_λ, действующий в $\mathcal{E}_\lambda$, так что $A_\lambda^{n(\lambda)+1}\varphi \equiv 0$, при $\varphi \in \mathcal{E}_\lambda$. Кроме того, если $\lambda_1, \lambda_2 \in J$, причем $\mathrm{Re}\,\lambda_1 = \mathrm{Re}\,\lambda_2$, но $\mathrm{Im}\,\lambda_1 \neq \mathrm{Im}\,\lambda_2$, то

$$\mathcal{E}_{\lambda_1} \cap \mathcal{E}_{\lambda_2} = \{0\}.$$

Определим в $W_{\bar J}$ подпространство, полагая

$$V_{J,\mathcal{F}} = \{\psi(r,e) \in W_{\bar J}: \quad C_{\lambda,0}(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \quad C_{\lambda,m}(e) = \frac{1}{m!}A_\lambda^m C_{\lambda,0}(e)\}, \quad (3.23)$$

где $\mathcal{F} = \{\mathcal{E}_\lambda, A_\lambda : \lambda \in J\}$, и $m = 0,\dots,n(\lambda)$. Топология в $V_{J,\mathcal{F}}$ наследуется топологией $W_{\bar J}$. Нетрудно видеть, что $V_{\bar J,\mathcal{F}}$ замкнутое подпространство пространства $W_{\bar J}$.

Следующая теорема в сочетании с теоремой (3.3) дает описание обобщенных функций из класса $AO_\rho^{-1}(V_{J,\mathcal{F}})$ в некритическом случае.

Теорема 3.5. *Пусть $\bar J$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем $\mathrm{Re}\,\beta - 1 \notin \mathrm{Pr}\,J$, и $F(r,e) \in W_{\bar J}$. Тогда, если $F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(V_{J,\mathcal{F}})$, то $F(r,e)$ продолжается до $\widehat F(r,e) \in AO_\rho^{-1}(W_{\bar J})$.*

Для описания асимптотически однородных функций в нуле в критическом случае мы проведем некоторые вспомогательные построения, проясняющие структуру пространств $V_{J,\mathcal{F}}$.

Так как A_λ нильпотентен, то в $\mathcal{E}_\lambda$ существует базис

$$\{\chi^\lambda_{\ell,m}(e) \in \mathcal{E}_\lambda, \quad \ell = 1,\dots,q_\lambda; \quad m = 0,1,\dots,m^\lambda_\ell\} \quad (3.24)$$

такой, что при любом $\ell = 1,\dots,q_\lambda$,

$$A_\lambda\chi^\lambda_{\ell,0}(e) = 0, \quad A_\lambda\chi^\lambda_{\ell,m}(e) = \chi^\lambda_{\ell,m-1}(e), \quad 1 \leqslant m \leqslant m^\lambda_\ell. \quad (3.25)$$

Пусть $\psi(r,e) \in V_{\bar J\mathcal{F}}$. Фиксируем $\lambda \in J$ и в асимптотическом соотношении (3.16) выделим слагаемое, соответствующее этому λ,

$$\psi(r,e) \sim \dots + r^\lambda\omega_\lambda[\psi](r,e) + \dots, \text{ где } \omega_\lambda[\psi](r,e) = \sum_{m=0}^{n(\lambda)} \ln^m r \frac{1}{m!}A_\lambda^m C_{\lambda,0}(e). \quad (3.26)$$

Разлагая $C_{\lambda,0}(e)$ и $\omega_\lambda[\psi](r,e)$ по базису (3.24), нетрудно получить следующие соотношения:

$$\big[\omega_\lambda[\psi](r,e)\big]_{\ell,m} = \big(r\frac{d}{dr}\big)\big[\omega_\lambda[\psi](r,e)\big]_{\ell,m-1} = \dots =$$
$$= \big(r\frac{d}{dr}\big)^m\big[\omega_\lambda[\psi](r,e)\big]_{\ell,0},$$

Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, напомним, что $J_\gamma = \{\lambda \in J : \mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\gamma\}$. Обозначим

$$E_\gamma = \bigoplus_{\lambda\in J_\gamma}\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Lin}\{\chi^\lambda_{\ell,m}(e) : \lambda \in J_\gamma, \ell = 1,\dots,q_\lambda, 0 \leqslant m \leqslant m^\lambda_\ell\} \quad (3.27)$$

Пусть

$$\{\chi^{\lambda*}_{\ell,m}(e) \in S'(\Gamma) : \lambda \in J_\gamma, \ell = 1,\dots,q_\lambda, 0 \leqslant m \leqslant m^\lambda_\ell\}, \quad (3.28)$$

— некоторое биортогональное семейство обобщенных функций из $S'(\Gamma)$, то есть семейство со свойствами

$$(\chi^{\lambda*}_{\ell,m}(e),\chi^{\lambda'}_{\ell',m'}(e))=\delta^{\lambda,\lambda'}_{\ell,\ell';m,m'},\tag{3.29}$$
$$\lambda,\lambda'\in J_\gamma,\ell'=1,\dots,q_{\lambda'},0\leqslant m'\leqslant m^{\lambda'}_{\ell'},\quad \ell=1,\dots,q_\lambda,0\leqslant m\leqslant m^\lambda_\ell,$$

где $\delta^{\lambda,\lambda'}_{\ell,\ell';m,m'}$ — символ Кронекера. Выбор такого семейства неоднозначен. В дальнейшем мы этим воспользуемся.

Теперь мы можем дать описание асимптотически однородных функций на $V_{J,\mathcal{F}}$ в критическом случае.

Теорема 3.6. *Пусть $\bar{J}$ — допустимое множество, $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка β, причем $\mathrm{Re}\,\beta-1\in\mathrm{Pr}\,J$, и пусть в $W_{\bar{J}}$ задано подпространство $V_{J,\mathcal{F}}$. При этом в $\mathcal{E}_\lambda$ выберем базис $\{\chi^\lambda_{\ell,m}(e)\}$ как в (3.24)-(3.25), а в $S'(\Gamma)$ биортогональную систему $\{\chi^{\lambda*}_{\ell,m}(e)\}$, смотри (3.28)-(3.29). Пусть также задано число $\kappa\in\mathbb{C}$, удовлетворяющее соотношению*

$$\mathrm{Re}\,\beta-1-\mathrm{Re}\,\kappa\notin\mathbb{Z}_+.\tag{3.30}$$

Для того чтобы $F(r,e)\in AO^{-1}_\rho(V_{J,\mathcal{F}})$, необходимо и достаточно, чтобы на $V_{J,\mathcal{F}}$

$$F(r,e)=F_0(r,e)+F_1(r,e)+F_2(r,e),\tag{3.31}$$

где F_0,F_1 и F_2 удовлетворяют следующим условиям.

$F_0(r,e)\in W'_{\bar{J}}$, имеет носитель отделенный от нуля.

Обобщенная функция $F_1(r,e)\in W'_{\bar{J}}$ определяется следующим образом

$$(F_1(r,e),\psi(r,e))=$$
$$=\int\limits_0^1\left(\gamma_1(r,e),\Big(\frac{d}{dr}\Big)^N r^{-\kappa}(\psi(r,e)-\Omega_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e))\right)_e dr,\tag{3.32}$$

для любой $\psi(r,e)\in V_{J,\mathcal{F}}$, с некоторыми $N\in\mathbb{Z}_+$, функцией $\gamma_1(r,e)$ непрерывной по $r>0$ со значениями в $S'(\Gamma)$ такой, что

$$(\gamma_1(r,e),\varphi(e))\equiv 0 \ \text{в}\ S'_{\bar{J}},\quad \forall\varphi(e)\in E_{\beta-1}=\bigoplus_{\lambda\in J_{\beta-1}}\mathcal{E}_\lambda,\tag{3.33}$$

$$\gamma_1(r,e)\sim r^{N+\kappa}\rho(\frac{1}{r})B_1(e),r\to+0,\ \text{на}\ S(\Gamma),\tag{3.34}$$

с некоторой $B_1(e)\in S'(\Gamma)$.

Обобщенная функция $F_2(r,e)\in W'_{\bar{J}}$ представляется в следующем виде.

$$(F_2(r,e),\psi(r,e))=\sum_{\lambda\in J_{\beta-1}}\sum_{\ell=1}^{q_\lambda}\sum_{m=1}^{m^\lambda_\ell+1}\int\limits_0^1\gamma^\lambda_{\ell,m}(r)\Big(\frac{d}{dr}\Big)^Q$$
$$\left(r^{-\kappa}\left(\chi^{\lambda*}_{\ell,m}(e)-r^\lambda(r\frac{d}{dr})r^{-\lambda}\chi^{\lambda*}_{\ell,m-1}(e),\psi(r,e)-\bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\beta-1}[\psi](r,e)\right)_e\right)dr,\tag{3.35}$$

для любой $\psi(r,e)\in V_{J,\mathcal{F}}$, с некоторыми $Q\in\mathbb{Z}_+$, непрерывными функциями $\gamma^\lambda_{\ell,m}(r)$, удовлетворяющими асимптотическим оценкам

$$\gamma^\lambda_{\ell,m,}(r)\sim C_{\lambda,m,\ell}r^{Q+\kappa}\rho(\frac{1}{r}),\quad r\to+0,\tag{3.36}$$

с некоторыми постоянными $C_{\lambda,m,\ell}$. Здесь мы считаем, что $\chi^{\lambda*}_{\ell,m^\lambda_\ell+1}(e)=0$.

Опишем теперь обобщенные функции из $S'(\mathbb{R}^n)$, асимптотически однородные в нуле вдоль траекторий, определяемых мультипликативной однопараметрической группой $\{U_k = e^{E\ln k}, k > 0\}$ линейных преобразований $\mathbb{R}^n$. Генератор этой группы E представляется в виде (2.1). Его собственные значения определяют вектор σ, см. (2.3), со свойствами (2.4). Во второй секции мы ввели понятие обобщенного сферического представления $F(r,e) \in W'_{\bar{J}}$ для обобщенной функций $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, так что

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r,e), \psi(r,e)), \quad \psi(r,e) = \varphi(U_r e), \quad r > 0, e \in \Gamma,$$

где $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ а Γ — допустимая поверхность.

Определение 3.2. Будем говорить, что пространства $S_{\bar{J}}, W_{\bar{J}}$ и $V_{J,\mathcal{F}}$ *сгенерированы* группой $\{U_k, k > 0\}$, если функция $\psi(r,e)$ принадлежит пространству $V_{J,\mathcal{F}}$, в котором J определяется формулой (2.7), а соответствующие каждому $\lambda \in J$, числа $n(\lambda)$ вычисляются из асимптотического разложения (2.9). При этом, сопостовляемое каждому λ из J пространство $\mathcal{E}_\lambda$ есть пространство многочленов $Q(t)$, однородных относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k > 0\}$ степени λ, так что пространство $V_{J,\mathcal{F}} = V$, пространству, определенному в (2.13). Будем так же говорить, что пространство $W_{\bar{J}}$ *выбрано оптимально,* если $A_\lambda^{n(\lambda)}$ отличен от нуля, а $A_\lambda^{n(\lambda)+1} \equiv 0$.

Теперь для описания асимптотически однородных обобщенных функциях, учитывая соотношение (2.16), мы можем воспользоваться теоремой 3.3 в некритическом случае и теоремой 3.6 в критическом случае.

В некритическом случае справедлива

Теорема 3.7. *Пусть даны $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, причем*

$$\mathrm{Re}\,\alpha - |\mu| \notin \mathrm{Pr}\, J, \tag{3.37}$$

и число ℓ такое, что

$$\mathrm{Re}\,(\alpha - |\mu| - \ell) \notin \mathbb{Z}_+. \tag{3.38}$$

Тогда для того чтобы $f(t) \in AO_\rho^{-U}(S(\mathbb{R}^n))$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(t) = f_0(t) + f_1(t), \quad f_0, f_1 \in S(\mathbb{R}^n)$$

где supp $f_0(t)$ отделен от нуля, а обобщенная функция $f_1(t)$ определяется следующим образом: существуют число $N \in \mathbb{Z}_+$, непрерывная по r функция $\gamma(r,e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому условию

$$\gamma(r,e) \sim r^{N+|\mu|+\ell-1}\rho(\frac{1}{r})B(e), \quad r \to +0, \tag{3.39}$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$, такие что

$$(f_1(t), \varphi(t)) =$$
$$= \int_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell}(\varphi(U_r e) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|}[\varphi(U_r e)](r,e))\right)\right)_e dr. \tag{3.40}$$

Для формулировки соответствующей теоремы в критическом случае нам понадобятся некоторые дополнительные построения.

Пусть $\mathcal{E}_\lambda$ – пространство многочленов $Q(t)$, однородных относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k > 0\}$ степени λ. Аналогично $\mathcal{E}^*_\lambda$ – многочлены $P(t)$, однородные относительно группы $\{\mathfrak{H}_k^T, k > 0\}$, транспонированной к $\mathfrak{H}_k$, так что

$$\mathcal{E}_\lambda = \{Q(t) : Q(\mathfrak{H}_k t) = k^\lambda Q(t)\}, \quad \mathcal{E}^*_\lambda = \{P(t) : P(\mathfrak{H}_k^T t) = k^\lambda P(t)\}. \tag{3.41}$$

Если многочлен $Q(t)$ однороден относительно группы $\{\mathfrak{H}_k, k > 0\}$ степени $d = a + ib$, тогда он однороден относительно групп $\mathfrak{M}_k$ и $\mathfrak{L}_k$ степеней a и ib соответственно.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Положим

$$E_\lambda = \bigoplus_{\substack{\kappa\in J\\ \mathrm{Re}\ \kappa=\mathrm{Re}\ \lambda}} \mathcal{E}_\kappa, \quad E^*_\lambda = \bigoplus_{\substack{\kappa\in J\\ \mathrm{Re}\ \kappa=\mathrm{Re}\ \lambda}} \mathcal{E}^*_\kappa. \tag{3.42}$$

Согласно сказанному, все полиномы из E_λ однородны относительно группы $\mathfrak{M}_k$ степени $\mathrm{Re}\ \lambda$ (аналогично, все полиномы из E^*_λ однородны относительно группы $\mathfrak{M}^T_k$ степени $\mathrm{Re}\ \lambda$). В пространствах E_λ и E^*_λ определим операторы A_λ и A^+_λ, действующие по формулам

$$\mathrm{A}_\lambda Q(t) = \mathrm{grad}\, Q(t)Nt = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} t_\ell \varepsilon_{k\ell}\frac{\partial Q(t)}{\partial t_k}, \quad Q(t)\in E_\lambda, \tag{3.43}$$

$$\mathrm{A}^+_\lambda P(t) = t^T N^T(\mathrm{grad}\, P(t))^T = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} t_\ell \varepsilon_{\ell k}\frac{\partial P(t)}{\partial t_k}, \quad P(t)\in E^*_\lambda, \tag{3.44}$$

где $\varepsilon_{k\ell}$ элементы нильпотентной матрицы, соответствующей оператору N. Операторы A_λ и A^+_λ нильпотентны.

Пусть

$$P(t)\in E^*_\lambda, \quad Q(t)\in E_\lambda, \quad \lambda\in J. \tag{3.45}$$

Пользуясь правилом дифференциирования сложной функции, получим

$$p(t') = P\big(\frac{\partial}{\partial t'}\big)Q(t') = P\left(\left(\mathfrak{M}^T_k\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\right)Q(\mathfrak{M}_k t)\Big|_{t=\mathfrak{M}_k^{-1}t'} =$$
$$= k^{-\lambda}P\big(\frac{\partial}{\partial t}\big)k^\lambda Q(t)\Big|_{t=\mathfrak{M}_k^{-1}t'} = p(t)|_{\mathfrak{M}_k^{-1}t'} = p(\mathfrak{M}_k^{-1}t').$$

Так как $p(t)$ многочлен, матрица оператора $\mathfrak{M}_k$ – невырождена и все ее собственные значения положительны, то это возможно только при $p(t) = \mathrm{const}$. Поэтому на $E^*_\lambda \times E_\lambda$ можно ввести билинейную форму

$$< P(t), Q(t) >= P\big(\frac{\partial}{\partial t}\big)Q(t), \quad P(t)\in E^*_\lambda, Q(t)\in E_\lambda, \quad \lambda\in J. \tag{3.46}$$

Отметим некоторые свойства этой билинейной формы.

1. Если $P\in\mathcal{E}^*_{\lambda_1}, \quad Q\in\mathcal{E}_{\lambda_2}$ и $\lambda_1\neq\lambda_2$, то $< P(t), Q(t) >= 0$.
2. Операторы A_λ и A^+_λ взаимно сопряжены относительно билинейной формы (3.46), так что

$$< P(t), [\mathrm{A}_\lambda Q](t) >=< [\mathrm{A}^+_\lambda P](t), Q(t) >,$$
$$P(t)\in E^*_\lambda, \quad Q(t)\in E_\lambda, \quad \lambda\in J. \tag{3.47}$$

3. Операторы A_λ и A^+_λ оставляют инвариантными соответствующие пространства $\mathcal{E}_\lambda$ и $\mathcal{E}^*_\lambda$.

Операторы A_λ и A^+_λ можно продолжить на все $S(\Gamma)$. Для этого введем сдедующие определения.

Определение 3.3. Пусть заданы однопараметрическая группа $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_k, k>0\}$, допустимая поверхность Γ и число $\lambda\in\mathbb{C}$. Для любой $\varphi(e)\in S(\Gamma)$ определим оператор продолжения (continuation) $cont_{\mathcal{B},\lambda}[\varphi](t)$, как однородное относительно группы $\mathcal{B}$ степени λ продолжение функции $\varphi(e)$ с Γ на $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$.

Определение 3.4. Пусть заданы однопараметрическая группа $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_k, k>0\}$, допустимая поверхность Γ, число $\lambda\in\mathbb{C}$ и обобщенная функция $f(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$, у которой $\mathrm{supp}\ f$ ограничен и отделен от нуля. Определим ее ограничение (restriction) на $S(\Gamma)$ формулой

$$(rest_{\mathcal{B},\lambda}[f](e), \varphi(e)) = (f(t), cont_{\mathcal{B},\lambda}[\varphi](t)), \quad \varphi(e)\in S(\Gamma). \tag{3.48}$$

Заметим, что если $\varphi(e)$ – след многочлена однородного относительно группы $\mathcal{B}$ степени λ, то
$$(rest_{\mathcal{B},\lambda}[f](e),\varphi(e)) = (f(t),\varphi(t)). \tag{3.49}$$
Пусть $\{\chi^{\lambda}_{\ell,m}(e)\}$ — канонический базис оператора A_λ в $\mathcal{E}_\lambda$. Тогда
$$\{\chi^{\lambda}_{\ell,m}(e), \quad \lambda\in J_\lambda, 1\leqslant \ell\leqslant q_\lambda, 0\leqslant m\leqslant m^{\lambda}_{\ell}\}$$
канонический базис оператора A_λ в E_λ. Построим специальное биортоганальное семейство $\{\chi^{\lambda *}_{\ell,m}\}\in S'(\Gamma)$. Пусть $\{\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m}(e)\}$ — биортоганальное семейство многочленов к $\{\chi^{\lambda}_{\ell,m}\}$ в E^*_λ относительно билинейной формы (3.46) и обобщенная функция $g(t)\in S'(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем, отделенным от нуля, такая, что $(g(t),1)=1$, например $g(t)=\delta(t-t_0)$, где $t_0\in\Gamma$. Теперь в качестве семейства $\{\chi^{\lambda *}_{\ell,m}\}$ можно взять семейство
$$\chi^{\lambda *}_{\ell,m}(e) = rest_{\mathfrak{M}_k,\mathrm{Re}\,\lambda}\left[\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m}(\frac{\partial}{\partial t})g(t)\right](e). \tag{3.50}$$
Заметим, что при таком выборе
$$\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m}(e) = A^{+}_{\lambda}\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m+1}, \quad m=0,\dots,m^{\lambda}_{\ell}+1,$$
где, как и раньше, мы считаем $\widehat{\chi}^{\lambda}_{\ell,m^{\lambda}_{\ell}+1}(e)\equiv 0$. Теперь теорема 3.6 приобретает вид

Теорема 3.8. *Пусть $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка α, причем*
$$\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|\in \Pr J, \tag{3.51}$$
$t_0\in\Gamma$, и число $\ell\in\mathbb{C}$ таково, что
$$\mathrm{Re}\,\alpha-\mathrm{Re}\,\ell-|\mu|\notin\mathbb{Z}_+. \tag{3.52}$$
Обобщенная функция $f(t)\in AO^{-U}_{\rho}(V)$ тогда и только тогда, когда
$$f(t)=f_0(t)+f_1(t)+f_2(t), \quad f_0,f_1,f_2\in V', \tag{3.53}$$
где f_0,f_1,f_2 удовлетворяют следующим условиям:

supp $f_0(t)$ отделен от нуля;

$f_1(t)$ представляется в следующем виде: существуют число $N\in\mathbb{Z}_+$ и непрерывная по r функция $\gamma_1(r,e)$ со значениями в $S'(\Gamma)$, удовлетворяющая асимптотическому соотношению
$$\gamma_1(r,e)\sim r^{N+\ell+|\mu|-1}\rho(\frac{1}{r})B(e), \quad r\to+0, \tag{3.54}$$
с некоторой обобщенной функцией $B(e)\in S'(\Gamma)$, и условию
$$(\gamma_1(r,e),\varphi(e))\equiv 0, \qquad \text{для всех } \varphi(e)\in E_{\alpha-|\mu|}, \tag{3.55}$$
такие, что для любой $\psi(t)\in S(\mathbb{R}^n)$
$$(f_1(t),\psi(t)) = \int\limits_0^1\left(\gamma(r,e),(\frac{d}{dr})^N\big(r^{-\ell}(\psi(r,e)-\bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|}[\psi](r,e))\big)\right)_e dr. \tag{3.56}$$

$(f_2(t),\psi(t))$ есть линейная комбинация по всем $\lambda\in J_{\alpha-|\mu|}$ и всем полиномам P_λ, пробегающим некоторый базис $\mathcal{E}^*_\lambda$, слагаемых вида
$$\int\limits_0^1\gamma(r)(\frac{d}{dr})^N r^{-\ell}\Big(rest_{\mathfrak{M},\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|}\Big[\big((\mathrm{A}^{+}_{\alpha-|\mu|}P_\lambda)(\frac{\partial}{\partial t})-$$
$$-r^{\alpha-|\mu|}(r\frac{d}{dr})r^{-\alpha+|\mu|}P_\lambda(\frac{\partial}{\partial t})\big)\delta(t-t_0)\Big](e),(\psi(U_re)-\bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\,\alpha-|\mu|}[\psi](r,e))\Big)_e dr, \tag{3.57}$$

где непрерывная функция $\gamma(r)$ (зависящая от λ и полинома $P_\lambda(e)$) удовлетворяет асимптотическому соотношению

$$\gamma(r) \sim br^{N+|\mu|+\ell-1}\rho(\frac{1}{r}), \quad r \to +0, \tag{3.58}$$

с некоторой постоянной b (зависящей от γ).

В заключении этого сектора мы заметим, что полное описание обобщенных функций, однородных относительно группы U дано в работе [10].

4. О делении обобщенной функции на многочлен с сохранением квазиасимптотики и некоторые приложения

В качестве приложения приведенных выше результатов рассмотрим следующую задачу: Пусть заданы автомодельная функция $\rho(k)$ порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, многочлен $P(t)$, однородный относительно группы $\{U_k, k>0\}$, степени $q \in \mathbb{C}$, то есть такой, что

$$P(U_k t) = k^q P(t), \tag{4.1}$$

и обобщенная функция $g(x) \in AO_\rho^U(S(\mathbb{R}^n))$. Когда дифференциальное уравнение

$$P(\partial)u(x) = g(x) \tag{4.2}$$

имеет решение $u(x) \in AO_{\rho_1}^U(S(\mathbb{R}^n)$, где $\rho_1(k)$ подходящая автомодельная функция?

Для решения такого рода задач нам понадобятся некоторые результаты о делении обобщенной функции на многочлен однородный относительно группы U_k с сохранением квазиасимптотики.

Лемма 4.1. *Пусть Γ — допустимая поверхность относительно группы U_k и $P(e)$ — след однородного (относительно этой группы) многочлена степени q на Γ, тогда для любой нормы $Q_N\{\cdot\}$ на $S(\Gamma)$ существует норма $Q_M\{\cdot\}$ и постоянная C такие, что*

$$Q_N\{\varphi(e)\} \leqslant CQ_M\{P(e)\varphi(e)\}, \quad \varphi(e) \in S(\Gamma). \tag{4.3}$$

Это утверждение следует из классической леммы Хермандера и следующей оценки. Пусть $\widehat{\varphi}(t)$ — однородное (относительно группы U_k) степени q продолжение функции $\varphi(e)$ с Γ в $\mathbb{R}^n$ и

$$\widehat{Q}_N\{\psi(t)\} = \max_{|j|\leqslant N}\sup_{t\in\Gamma^\varepsilon}|\partial^j\psi(t)|,$$

норма для функций, определенных в $\mathbb{R}^n$. Здесь Γ^ε — ε окрестность Γ. Тогда существуют постоянные C и c, не зависящие от $\varphi(e) \in S(\Gamma)$, такие, что

$$c\widehat{Q}_N\{\widehat{\varphi}(t)\} \leqslant Q_N\{\varphi(e)\} \leqslant C\widehat{Q}_N\{\widehat{\varphi}(t)\}.$$

Отсюда вытекает следующая

Лемма 4.2. *Пусть Γ — допустимая поверхность, $P(e)$, $e \in \Gamma$ — след многочлена, однородного относительно группы $\{U_k, k>0\}$ и $\{\gamma(k,e) \in S'(\Gamma), k>0\}$ — семейство обобщенных функций непрерывное по параметру k, причем*

$$\gamma(k,e) \xrightarrow[k\to+0]{} \gamma_0(e) \quad \text{в} \quad S'(\Gamma).$$

Тогда существует семейство обобщенных функций

$$\{\sigma(k,e) \in S'(\Gamma), k>0\},$$

слабо измеримое по параметру k, так что

1. $\sigma(k,e) \xrightarrow[k\to+0]{} \sigma_0(e) \text{в} S'(\Gamma)$;

2. $P(e)\sigma(k,e) = \gamma(k,e)$.

Доказательство проводится точно по схеме доказательства леммы 5.1. работы [1], надо только воспользоваться предыдущей леммой.

Пусть $S_{\bar{J}}, W_{\bar{J}}$ и $V_{J,\mathcal{F}}$ сгенерированы группой $\{U_k, k>0\}$, причем пространство $W_{\bar{J}}$ выбрано оптимальным образом, см. определение 3.2. Пусть $P(t)$ — многочлен однородный относительно этой группы степени q, то есть $P(U_k t) = k^q P(t)$. Тогда он однороден той же степени относительно группы $\mathfrak{M}_k = e^{\ln kM}$ (группы чистых растяжек по соответствующим осям). Следовательно, существует мультиндекс $m \in \mathbb{Z}^n_+$, такой, что $q = (\sigma, m)$. Обозначим через $J+q$ множество $\{\lambda + q, \lambda \in J\}$. Докажем, что $\overline{J+q} \subset \bar{J}$, то есть $J+q \subset J$ и $n(\lambda) \leqslant n(\lambda+q)$.
Действительно, $P(t) = r^q P(e)$, и так как $S(\mathbb{R}^n)$ выдерживает умножение на $P(t)$, то $V_{J,\mathcal{F}}$ выдерживает умножение на $r^q P(e)$. Возмем функцию $\psi(r,e) \in V_{J,\mathcal{F}}$ такую, что

$$\omega_\lambda[\psi](r,e) = C_{\lambda,0}(e) + \cdots + C_{\lambda,n(\lambda)}(e)\ln^{n(\lambda)} r, \quad C_{\lambda,n(\lambda)}(e) \not\equiv 0.$$

Тогда

$$\omega_{\lambda+q}[P(t)\psi(t)](r,e) = P(e)C_{\lambda,0}(e) + \cdots + P(e)C_{\lambda,n(\lambda)}(e)\ln^{n(\lambda)} r,$$
$$P(e)C_{\lambda,n(\lambda)}(e) \not\equiv 0.$$

А так как $r^q P(e)\psi(r,e) \in V_{J,\mathcal{F}}$, то $n(\lambda+q) \geqslant n(\lambda)$.

Из доказанного следует, что $W_{\bar{J}}$ выдерживает умножение на $r^q P(e)$. В частности, если $\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$, то $\psi_1(r,e) = r^q \psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$, причем

$$C^{\psi_1}_{\lambda,m}(e) = \begin{cases} C^{\psi}_{\lambda-q}(e), & \text{если } \lambda - q \in J; \\ 0, & \text{если } \lambda - q \notin J. \end{cases} \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка $\beta \in \mathbb{C}$, $P(t)$ — многочлен однородный относительно группы $\{U_k\}$ степени q, и $F(r,e) \in AO^{-1}_{\rho(k)}(W_{\bar{J}})$. Пусть так же*

$$\mathrm{Re}\ (\beta - 1 + q) \notin \mathrm{Pr}\, J. \tag{4.5}$$

Тогда существует обобщенная функция $\Theta(r,e) \in W'_{\bar{J}}$, такая, что

1. $\Theta(r,e) \in AO^{-1}_{k^q\rho(k)}(W_{\bar{J}})$;

2. $r^q P(e)\Theta(r,e) = F(r,e)$ *в* $W'_{\bar{J}}$,

то есть для любой $\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$

$$(\Theta(r,e), P(e)r^q\psi(r,e)) = (F(r,e), \psi(r,e)). \tag{4.6}$$

Доказательство. Пользуясь теоремой 3.3, имеем $F = F_0 + F_1$, где носитель F_0 отделен от нуля, а F_1 определяется формулой

$$(F_1(r,e), \psi(r,e)) = \int\limits_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N \left(r^{-\ell}(\psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\mathrm{Re}\ \beta-1}[\psi](r,e))\right)\right)_e dr \tag{4.7}$$

с $\gamma(r,e)$ удовлетворяющей асимптотическому соотношению

$$\gamma(r,e) \sim r^{N+\ell}\rho(\frac{1}{r})B(e), \quad r \to +0, \tag{4.8}$$

с некоторой обобщенной функцией $B(e) \in S'(\Gamma)$. Заметим, что можно считать, что носитель обобщенной функции, полученной в результате деления F_0 на многочлен P, тоже отделен от нуля. Поэтому достаточно доказать теорему лишь для функции F_1. Для

$\psi(r,e) \in W_{\bar{J}}$ положим

$$(\Theta(r,e), \psi(r,e)) =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\sigma(r,e), (\frac{d}{dr})^N r^{-\ell-q}[\psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\beta-1+q}[\psi](r,e)]\right)_e dr =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\sigma(r,e), (\frac{d}{dr})^N r^{-\ell_1}[\psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\beta_1-1}[\psi](r,e)]\right)_e dr, \quad (4.9)$$

где $\beta_1 = \beta + q, \ell_1 = \ell + q$. Здесь семейство обобщенных функций $\sigma(r,e)$ — результат деления $\gamma(r,e)$ на $P(e)$ — след многочлена на поверхности Г. Оно существует, согласно лемме 4.2, причем

$$\sigma(r,e) \sim \left[\frac{B(e)}{P(e)}\right] r^{\ell+N} r^{-q} \rho(\frac{1}{r}), \quad r \to +0, \quad (4.10)$$

где $\left[\frac{B(e)}{P(e)}\right]$ — некоторая регуляризация отношения этих функций. Заметим, что интеграл в (4.9) корректно определен. Отсюда, согласно той же теореме 3.3, следует, что $\Theta(r,e) \in AO^{-1}_{k^q\rho(k)}(W_{\bar{J}})$. Проверим соотношение (4.6). Пользуясь тем, что $\sigma(r,e)P(e) = \gamma(r,e)$, имеем

$$(\Theta(r,e), P(e)r^q\psi(r,e)) = (\Theta(r,e), P(e)r^q\psi(r,e))$$
$$\int\limits_0^1 \left(\gamma(r,e), \left(\frac{d}{dr}\right)^N r^{-\ell} r^{-\beta+1-q}(r^q\psi(r,e) - \bar{\Omega}_{\beta-1+q}[r^q\psi](r,e))\right)_e dr, \quad (4.11)$$

Теперь достаточно заметить, что

$$\bar{\Omega}_{\beta-1+q}[r^q\psi](r,e) = r^q\bar{\Omega}_{\beta-1}[\psi](r,e)) \quad (4.12)$$

и сравнить с формулой (4.7). Теорема доказана.

Отсюда получаем следующую теорему.

Теорема 4.2. *Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка α, $P(t)$ однородный относительно группы U_k многочлен степени q и $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ имеет квазиасимптотику в нуле по группе U относительно $\rho(k)$. Тогда, если*

$$\mathrm{Re}\ (\alpha - |\mu| + q) \notin \mathrm{Pr}\, J, \quad (4.13)$$

то существует обобщенная функция $u(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$, обладающая квазиасимптотикой в нуле по группе U относительно $\rho_1(k) = k^q\rho(k)$, такая, что

$$P(t)u(t) = f(t). \quad (4.14)$$

Эта теорема есть непосредственная переформулировка теоремы 4.1, в которой следует считать $\psi(r,e) \in V$ и воспользоваться тем фактом, что если $\psi(r,e) \in V$, то $r^qP(e)\psi(r,e) \in V$. Теперь ответ на поставленный в начале секции вопрос дает следующая

Теорема 4.3. *Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка α, $P(t)$ — однородный относительно группы $\{U_k, k > 0\}$ многочлен степени q и $g(x) \in AO^{U^T}_{\rho}(S(\mathbb{R}^n))$.*

Тогда, если

$$\mathrm{Re}\ (\alpha + q) \notin \mathrm{Pr}\, J, \quad (4.15)$$

то уравнение

$$P(\partial)u(x) = g(x) \quad (4.16)$$

имеет решение

$$u(x) \in AO^{U^T}_{\rho_1}(S(\mathbb{R}^n)), \quad (4.17)$$

где $\rho_1(k) = k^q\rho(k)$.

Утверждение теоремы, по сути, есть утверждение предыдущей теоремы, сформулированное в терминах преобразований Фурье.

Следствие 4.1. *Если в условиях теоремы* $g(x)$ *— однородна относительно группы* U^T *степени* α, *то есть*
$$g(U_k^T x) = k^\alpha g(x),$$
то уравнение (4.16) *имеет однородное относительно группы* U^T *решение степени* $\alpha + q$.

Действительно, согласно теореме 4.3 уравнение (4.16) имеет решение $u(x) \in AO^{U^T}_{k^{\alpha+q}}(S(\mathbb{R}^n))$. Так как многочлен $P(t)$ -однороден относительно группы $\{U_k, k > 0\}$ степени q, то имеем
$$P(\partial)u(U_k^T x) = k^{\alpha+q}g(x).$$
Отсюда
$$P(\partial)\frac{1}{k^{\alpha+q}}u(U_k^T x) = g(x). \tag{4.18}$$
Поскольку, в силу теоремы, существует
$$\frac{1}{k^{\alpha+q}}u(U_k^T x) \xrightarrow[k\to\infty]{} u_0(x),$$
причем $u_0(x)$ — однородная функция, то, переходя в (4.18) к пределу, получаем
$$P(\partial)u_0(x) = g(x). \tag{4.19}$$

Пример 4.1. Пусть в $\mathbb{R}^4$ действует группа
$$U_k = k\begin{pmatrix} \cos\tau & -\sin\tau & 0 & 0 \\ \sin\tau & \cos\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\tau & -\sin\tau \\ 0 & 0 & \sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \tau & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.20}$$
где $\tau = \ln k$. Отметим, что в переменных $z_1 = t_1 + it_2, z_2 = t_3 + it_4, z_3 = \bar{z}_1, z_4 = \bar{z}_2$, матрица генератора этой группы имеет стандартную комплексную жорданову форму
$$E = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$
так, что $J = \{0, 1+i, 1-i, 2, \dots\}$, в частности, $\Pr J = \mathbb{Z}_+$ и $|\mu| = 4$. Нетрудно проверить, что полином $P(t) = t_2t_3 - t_1t_4$ однороден относительно группы $\{U_k\}$ степени $q = 2$.

Рассмотрим ультрагиперболическое уравнение
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_4} = g(x). \tag{4.22}$$
Пусть $g(x) \in AO^{U^T}_\rho(S(\mathbb{R}^n))$, где $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, и
$$U_k^T = k\begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau & 0 & 0 \\ -\sin\tau & \cos\tau & 0 & 0 \\ \tau\cos\tau & \tau\sin\tau & \cos\tau & \sin\tau \\ -\tau\sin\tau & \tau\cos\tau & -\sin\tau & \cos\tau \end{pmatrix}, \quad \tau = \ln k. \tag{4.23}$$

Если $\operatorname{Re}\alpha + 2 \notin \mathbb{Z}_+$, тогда, согласно теореме 4.3, существует решение $u(x) \in AO^{U^T}_{k^2\rho(k)}(S(\mathbb{R}^n))$. В частности, если $g(x) = \delta(x)$ и $\rho(k) = k^{-4}$, то существует фундаментальное решение уравнения (4.22), обладающее квазиасимптотикой относительно $\rho(k) = k^{-2}$ вдоль траекторий, определяемых группой (4.23). Более того, согласно следствию к теореме 4.3, существует фундаментальное однородное относительно группы (4.23) степени -2 решение уравнения (4.22). Такими решениями с точностью до коэффициентов являются обобщенные функции

$$u(x) = (x_2x_3 - x_1x_4 + i0)^{-1} \quad \text{или} \quad (x_2x_3 - x_1x_4 - i0)^{-1}, \tag{4.24}$$

определенные в [2].

Пример 4.2. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4}\right)^2 u(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\right) \delta(x). \tag{4.25}$$

Нетрудно проверить, что функция справа однородна относительно группы (4.23) степени $\alpha = -6$. Замечая, что многочлен $P(t) = (t_2t_3 - t_1t_4)^2$ однороден относительно группы (4.20) степени $q = 4$, согласно следствию к тереме 4.3, получим, что существует решение уравнения (4.25) однородное относительно группы (4.23) степени $\alpha + q = -2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции в начале координат* // Уфимский мат. журн. 2009. Т. 1. № 4. С. 33–66.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними.* Москва, Физматлит, 1959.
3. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически однородные обобщенные функции по специальным групп преобразований* // Мат. сборник. 200 (2009), №6. С. 23–66.
4. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Асимптотически квазиоднородные обобщенные функции в нуле и уравнения в свертках с ядрами, символы которых квазиоднородные многочлены* // Доклады РА. 426 (2009), №3. С. 300–303.
5. Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Обобщенные функции, асимптотически однородные по траекториям, определяемым однопараметрическими группами* // Известия РАН, сер. математ., Т. 76, № 3. С. 39–91.
6. Сенета Е. *Правильно меняющиеся функции.* Наука. М.:, 1985.
7. Владимиров В.С., Дрожжинов Ю.Н., Завьялов Б.И. *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций.* Наука. М.: 1986.
8. O. Grudzinski *Quazihomogeneous Distribution.* North-Holland mathematics studies 165, North-Holland-Amsterdam, 1991.
9. L. Hörmander *On the division of distribution by polynomials* // Ark. math. 1958. V. 3. № 6. P. 555–568.
10. Yu.N. Drozhzhinov, B.I. Zavialov *Homogeneous Generalized Functions with Respect to One-Parametric Group* // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications. 2012, Vol. 4, No 1. P. 20–31.

Юрий Николаевич Дрожжинов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, ГСП-1, г. Москва, Россия
E-mail: drozzin@mi.ras.ru

Борис Иванович Завьялов,
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8,
119991, ГСП-1, г. Москва, Россия
E-mail: bzavial@mi.ras.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 36-55.

УДК 517.9

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С КОМПЛЕКСНЫМ УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Х.К. ИШКИН

Аннотация. Изучаются спектральные свойства оператора L_β, ассоциированного с квадратичной формой $\mathcal{L}_\beta[y] = \int\limits_0^\infty (|y'|^2 - \beta x^{-\gamma}|y|^2)dx$ с областью определения $Q_0 = \{y \in W_2^1(0,\infty) : y(0) = 0\}$, $0 < \gamma < 2$, $\beta \in \mathbf{C}$, а также возмущенного оператора $M_\beta = L_\beta + W$. При условии $\left(1 + x^{\gamma/2}\right) W \in L^1(0, +\infty)$ доказано существование конечного квантового дефекта дискретного спектра, которое ранее было установлено Л.А. Сахновичем при $\beta > 0, \gamma = 1$, вещественном W, удовлетворяющем более жесткому условию убывания на бесконечности. Основной результат статьи — доказательство необходимости полученных ранее Х.Х. Муртазиным достаточных условий на $W(x)$, при которых функция Вейля оператора M_β допускает аналитическое продолжение на некоторый угол из нефизического листа.

Ключевые слова: спектральная неустойчивость, локализация спектра, квантовый дефект, функция Вейля, преобразование Дарбу.

1. Введение

Оператор L, действующий в некотором гильбертовом пространстве H, условимся называть *близким к самосопряженному*, если $L = L_0 + V$, где L_0 самосопряжен, V компактен относительно L_0, то есть $D(V) \supset D(L_0)$ и оператор $V(L_0 + i)^{-1}$ компактен. Если оператор L_0 полуограничен снизу и при некотором $r > 0$ оператор $(L_0 + r)^{-1/2} V (L_0 + r)^{-1/2}$ компактен, то оператор $L = L_0 + V$, где сумма понимается в смысле квадратичных форм, будем называть *близким к самосопряженному в смысле квадратичных форм.* Операторы, близкие к самосопряженным, составляют тот естественный класс несамосопряженных операторов, к которым применимы методы абстрактной теории возмущений, что позволяет получить результаты достаточно общего характера об асимптотическом поведении спектра и свойствах системы корневых векторов. Так, согласно теореме М.В. Келдыша [1], если L_0 — самосопряженный оператор с дискретным спектром, функция распределения которого $N(r, L_0)$ (количество собственных значений, с учетом кратности, в интервале $(-r, r)$) удовлетворяет некоторому условию (K)[1], то любой оператор L, близкий к L_0, обладает свойствами:

а) система корневых векторов L полна в H;

Kh.K. Ishkin, On analytic properties of Weyl function of Sturm – Liouville operator with a decaying complex potential.

Работа поддержана Министерством образования и науки РФ (соглашение 14.B37.21.0358) и РФФИ (гранты №№ 12-01-00567-а, 11-01-97009-р_поволжье_а).

Поступила 15 января 2013 г.

[1]Это условие заключается в существовании некоторой функции $\varphi(r)$ такой, что $N(r, L_0) \sim \varphi(r)$ при $r \to +\infty$ и $\varphi(r)$ удовлетворяет тауберовым условиям Келдыша [1, 2], которые впоследствии были обобщены Б.И. Коренблюмом [3].

б) спектр оператора L имеет ту же асимптотику, что и спектр оператора L_0, то есть при любом $\varepsilon > 0$ спектр оператора L вне углов $\{|\arg\lambda| < \varepsilon\}$ и $\{|\arg\lambda - \pi| < \varepsilon\}$ конечен, и для функции $\widetilde{N}(r, L)$ — количества собственных значений оператора L, с учетом их алгебраических кратностей, в круге $|\lambda| < r$ — справедливо соотношение

$$\widetilde{N}(r, L) \sim N(r, L_0), \quad r \to +\infty. \tag{1}$$

При более жестких условиях на функцию $N(r, L_0)$ и порядок малости V можно получить утверждения о базисности (в каком-либо смысле) системы корневых векторов (см. [4] — [6]) и уточнить асимптотику собственных чисел вплоть до того, что можно вычислить регуляризованные следы (см.[7] и имеющиеся там ссылки).

Таким образом, любой оператор L, близкий к самосопряженному оператору L_0 с функцией распределения спектра $N(r, L_0)$, удовлетворяющей условию (K), обладает свойством *спектральной устойчивости* в следующем смысле: любое возмущение L вида $M = L + W$, где W — L-компактен, обладает свойствами а) и б), где вместо (1) имеем

$$\widetilde{N}(r, M) \sim \widetilde{N}(r, L), \quad r \to +\infty. \tag{2}$$

Известно (см., например, [8] и библиографию к ней), что операторы, не близкие к самосопряженным, такой устойчивостью не обладают. Предположим теперь, что L близок к самосопряженному оператору L_0, спектр которого не дискретен, то есть $\sigma(L_0) = \sigma_{\text{disc}}(L_0) \cup \sigma_{\text{ess}}(L_0)$, где $\sigma_{\text{disc}}(L_0)$ и $\sigma_{\text{ess}}(L_0)(\neq \varnothing)$ — соответственно дискретная и существенная части спектра L_0. Поскольку при относительно компактном возмущении существенный спектр не меняется (см.[9, с. 306]), то $\sigma_{\text{ess}}(L) = \sigma_{\text{ess}}(L_0) \neq \varnothing$. Пусть $\sigma_{\text{disc}}(L) = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, где λ_k пронумерованы с учетом алгебраических кратностей, и пусть существует конечный или бесконечный предел $l = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k$.

Поставим вопрос: каков класс возмущений W, сохраняющих асимптотику дискретного спектра L в следующем смысле: собственные числа μ_k оператора $M = L + W$ можно пронумеровать так, что

$$\mu_k \sim \lambda_k, \quad k \to \infty? \tag{3}$$

Согласно теореме Вейля – фон Неймана [9, с. 648] любой самосопряженный оператор L_0 в сепарабельном гильбертовом пространстве H можно превратить в самосопряженный оператор $L_0 + V$ с чисто точечным спектром, прибавив к нему оператор Гильберта – Шмидта V со сколь угодно малой нормой. Поэтому естественно ожидать, что классы возмущений W, сохраняющих асимптотику дискретного спектра операторов L_1 и L_2, могут сильно отличаться даже в том случае, когда L_1 и L_2 близки к одному и тому же самосопряженному оператору. Кроме того, возмущения операторов могут быть однозначно определены по спектру (или по его части) только в исключительных случаях (см.[10] и Теорему 5 ниже). Так что представляется более корректной следующая

Задача 1. *Дан оператор L, спектр которого обладает свойствами $P = P_{\text{disc}} \wedge P_{\text{ess}}$, где P_{disc} и P_{ess} — некоторые свойства соответственно дискретной и существенной частей спектра L. Требуется найти условия (по возможности необходимые и достаточные) на возмущения W, при которых спектр оператора $M = L + W$ обладает теми же свойствами.*

Конечно, задача в такой абстрактной форме вряд ли разрешима: не понятно, как выбрать свойства P_{ess}, еще более не понятно, как из свойств P извлечь условия на W. Тем не менее, для отдельных классов операторов (например, дифференциальных) удается сформулировать условия (вполне естественные) на спектр и дать точное описание класса возмущений, сохраняющих эти свойства [11, 12].

Пусть

$$q_\beta(x) = \frac{\beta}{x^\gamma}.$$

Рассмотрим семейство квадратичных форм $\mathcal{L}_\beta[y] = \int\limits_0^\infty (|y'|^2 - q_\beta(x)|y|^2)dx$ с областью определения $Q_0 = \{y \in W_2^1(0,\infty) : y(0) = 0\}$, где $0 < \gamma < 2$ считается фиксированным — мы будем изучать зависимость только от параметра $\beta \in \mathbf{C}$ (см. §2):

Лемма 1. *$\mathcal{L}_\beta$ — голоморфное семейство типа (A) на $\mathbb{C}$, т.е.* [9, с. 494]*:*
1)при каждом $\beta \in \mathbb{C}$ форма $\mathcal{L}_\beta$ секториальна и замкнута;
2)для каждого $y \in Q_0$ функция $f(\beta) = \mathcal{L}_\beta[y]$ целая.

Из п.1) леммы 1 по теореме о представлении [9, с. 404] следует, что при каждом $\beta \in \mathbb{C}$ существует m-секториальный оператор L_β, ассоциированный с формой $\mathcal{L}_\beta$. Семейство L_β называется аналитическим семейством типа (B) (см. [9, с. 494]).

Лемма 2. *Оператор L_β определяется следующим образом:*

$$\begin{aligned} L_\beta y &= -y'' - q_\beta y, \\ D(L_\beta) &= \{y \in L^2(0,+\infty) : y' \in AC[0,b]\ \forall\ b > 0, -y'' - q_\beta y \in L^2(0,+\infty),\ y(0) = 0\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Оператор L_β при любом $\beta \in \mathbb{C}$ является близким (в смысле квадратичных форм) к самосопряженному оператору $L_0 := L_\beta|_{\beta=0}$ (см. §2, Лемма 3), а потому [13, с. 133] $\sigma_{\text{ess}}(L_\beta) = \sigma_{\text{ess}}(L_0) = [0,+\infty)\ \forall\ \beta \in \mathbb{C}$. Однако с дискретным спектром мы имеем совершенно другую картину (Теорема 1):

при $0 \le |\arg\beta| < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ $\sigma_{\text{disc}}(L_\beta)$ состоит из бесконечного числа простых (алгебраической кратности 1) собственных чисел, имеющих вид[1] $\lambda_k(\beta) = -\beta^{2/(2-\gamma)} r_k,\ k = 1,2,\dots$, где $r_k \searrow 0,\ k \to +\infty$,

при $\frac{2-\gamma}{2}\pi \le |\arg\beta| \le \pi$ дискретный спектр оператора $L(\beta)$ пуст.

Поэтому свойство P, фигурирующее в Задаче 1, видимо, должно как-то зависеть от β.

В предлагаемой статье сформулировано некоторое свойство P_β (в терминах функции Вейля оператора L_β) и получено необходимое и достаточное условие на функцию $W(x)$, при котором оператор M_β, который получается из L_β заменой потенциала $q_\beta(x)$ на $q_\beta(x) + W(x)$, также обладает свойством P_β. При этом оказалось, что это условие при комплексном параметре β существенно отличается от соответствующего условия в случае вещественного β.

Основной результат статьи — Теорема 6 (§5). Но прежде чем сформулировать ее, мы в §3 и §4 устанавливаем некоторые свойства соответственно аналитических (Теоремы 2, 3) и финитных (Теоремы 4, 5) возмущений оператора L_β, наводящие в некотором смысле на основной результат.

Наш выбор L_β в качестве невозмущенного оператора обусловлен следующим: операторы Штурма – Лиувилля с комплексным убывающим потенциалом изучены достаточно подробно (см. [14] —[19] и имеющиеся там ссылки), вместе с тем до сих пор остается открытым вопрос о степени необходимости известных достаточных условий на потенциал, при которых удается получить асимптотику дискретного спектра (см. Замечание 2). Ниже будет показано, что этот вопрос является частью Задачи 1.

2. Свойства операторов L_β

Доказательство Леммы 1. Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем $\dfrac{1}{x^\gamma} = q_1(x) + q_2(x)$, где

$$q_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^\gamma}, & 0 < x \le \delta_\varepsilon, \\ 0, & x > \delta_\varepsilon, \end{cases} \qquad q_2(x) = \frac{1}{x^\gamma} - q_1,$$

[1] Здесь и всюду далее, если не оговорено другое, ветвь функции z^α ($\alpha \in \mathbb{R}$) выбираем так, что $z^\alpha > 0$ при $z > 0$.

где число δ_ε выбрано так, чтобы $\dfrac{1}{x^\gamma} < \dfrac{\varepsilon}{4x^2}$ при $x \in (0, \delta_\varepsilon]$. Тогда в силу известного неравенства (см., например, [20, с. 132]) для всех $y \in Q_0$

$$\left(\frac{1}{x^\gamma} y, y\right) < \varepsilon \|y'\|^2 + C_\varepsilon \|y\|^2, \tag{5}$$

с некоторой постоянной $C_\varepsilon > 0$.

Следовательно, квадратичная форма $\left(\dfrac{1}{x^\gamma} y, y\right)$ ограничена относительно замкнутой положительной формы $\mathcal{L}_0[y] = \|y'\|^2$, $D(\mathcal{L}_0) = Q_0$, и относительная грань равна нулю. Отсюда (см. [9, с. 425] следует пункт 1).

Утверждение 2) очевидно. Лемма доказана.

Доказательство Леммы 2. Обозначим через $\mathcal{L}_\beta[y, v]$ полуторалинейную форму, задаваемую квадратичной формой $\mathcal{L}_\beta[y]$ с помощью поляризационного тождества (см. [9, с. 387]):

$$\mathcal{L}_\beta[y, v] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^{-k} \mathcal{L}_\beta[y + i^k v, y + i^k v].$$

Ясно, что

$$\mathcal{L}_\beta[y, v] = \int_0^\infty (y' \overline{v}' - q_\beta(x) y \overline{v})\, dx, \quad y, v \in Q_0.$$

Далее, обозначим через D_β правую часть (4) и докажем, что $D(L_\beta) \subset D_\beta$.

Пусть $y \in D(L_\beta)$ и $L_\beta y = f$. Тогда по теореме о представлении

$$(f, v) = \mathcal{L}_\beta[y, v] := \int_0^\infty \left(y' \overline{v'} - q_\beta(x) y \overline{v}\right) dx, v \in Q_0 \tag{6}$$

Пусть $(a, b) \subset (0, +\infty)$. Тогда равенство (6) верно для всех v, принадлежащих множеству $Q'_{ab} = \{y \in Q_0 : y(x) \equiv 0 \text{ при } x \notin (a, b)\}$.

Пусть h — первообразная функции $-f - q_\beta(x) y$ на интервале (a, b):

$$h' = -f - q_\beta(x) y \quad \text{п.в. на} (a, b).$$

Тогда при всех $v \in Q'_{ab}$:

$$\int_0^\infty (f + q_\beta(x) y)\, \overline{v} dx = -\int_a^b h' \overline{v} dx = \int_a^b h \overline{v}' dx.$$

С другой стороны, из (6) имеем:

$$\int_a^b (f + q_\beta(x) y)\, \overline{v} dx = \int_a^b y' \overline{v}' dx.$$

Следовательно,

$$\int_a^b (h - y') \overline{v}' dx = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in Q'_{ab}. \tag{7}$$

Обозначим через φ_{ab} сужение $h - y'$ на (a, b). Тогда (7) означает, что

$$\varphi_{ab} \perp \mathrm{Ran} T_{ab}, \tag{8}$$

где T_{ab} — оператор $\frac{d}{dx}$ с областью определения $D(T_{ab}) = \{v \in W_2^1(a, b) : v(a) = v(b) = 0\}$.

В свою очередь, (8) равносильно утверждению $\varphi_{ab} \in \mathrm{Ker}(T^*_{ab})$. Имеем $T^*_{ab} = -\frac{d}{dx}$, $D(T^*_{ab}) = W^1_2(a,b)$, так что $\varphi_{ab} = c = \mathrm{const}$ п.в. на (a,b), откуда в силу произвольности a, b $y' = h - c$ п.в. на $(0,+\infty)$. Следовательно, $y' \in AC[0,b]$ $\forall\ b > 0$ и $-y'' = f + q_\beta(x)y$, т.е. $L_\beta y = -y'' + q_\beta(x)y$.

Докажем теперь, что $D_\beta \subset D(L_\beta)$. По определению оператора, ассоциированного с квадратичной формой (см. [9, с. 404]), если $y \in Q_0$, $w \in L^2(0,+\infty)$ и равенство

$$\mathcal{L}_\beta[y,v] = (w,v) \tag{9}$$

справедливо для всех v, принадлежащих ядру[1] формы $\mathcal{L}_\beta$, то $y \in D(L_\beta)$ и $L_\beta y = w$.

Покажем, что $C^\infty_0(0,+\infty)$ является ядром для $\mathcal{L}_\beta$. Замыкание $C^\infty_0(0,+\infty)$ по норме $W^1_2(0,+\infty)$ есть Q_0, поэтому $C^\infty_0(0,+\infty)$ является ядром для формы $\mathcal{L}_0[y,v] = \int\limits_0^\infty y'\overline{v}'dx$ с $D(\mathcal{L}_0) = Q_0$. Отсюда в силу неравенства (5) следует, что $C^\infty_0(0,+\infty)$ есть ядро для $\mathcal{L}_\beta[y,v]$ при всех $\beta \in \mathbb{C}$.

Пусть $y \in D_\beta$ и $f = -y'' - q_\beta(x)y$. Тогда согласно (9)

$$\mathcal{L}_\beta[y,v] = \int\limits_0^\infty (y'\overline{v}' - q_\beta(x)y)\,\overline{v}dx = (f,v), \quad \text{для любого } v \in C^\infty_0(0,+\infty).$$

С другой стороны, интегрируя по частям, имеем:

$$\mathcal{L}_\beta[y,v] = \int\limits_0^\infty (-y'' - q_\beta(x)y)\,\overline{v}dx = (f,v),$$

следовательно, $(f - w, v) = 0$ для любого $v \in C^\infty_0(0,+\infty)$. Но $C^\infty_0(0,+\infty)$ всюду плотно в $L^2(0,+\infty)$, следовательно, $w = f$ п.в. на (a,b). Отсюда следует, что $y \in D(L_\beta)$ и $L_\beta y = -y'' - q_\beta(x)y$. Тем самым лемма доказана.

Пусть $L_0 = L_\beta|_{\beta=0}$, то есть $L_0 y = -y''$, $y \in D(L_0) = \{y \in W^2_2(0,+\infty) : y(0) = 0\}$. Справедлива

Лемма 3. *Пусть q — оператор умножения на функцию $x^{-\gamma}$. Тогда при любом $r > 0$ оператор $K = (L_0 + r)^{-\frac{1}{2}} q (L_0 + r)^{-\frac{1}{2}}$ компактен.*

Доказательство. Пусть $\delta > 0$, χ_1, χ_2, χ_3 — характеристические функции промежутков $(0,\delta), (\delta, \frac{1}{\delta})$ и $(\frac{1}{\delta}, +\infty)$ соответственно. Тогда $K = K_1 + K_2 + K_3$, где $K_i = (L_0 + r)^{-\frac{1}{2}} q\chi_i (L_0 + r)^{-\frac{1}{2}}, i = \overline{1,3}$. Поскольку ядро резольвенты $(L_0 + 1)^{-1}$ имеет вид:

$$G(x,t) = \begin{cases} \mathrm{sh} x e^{-t}, & 0 \le x < t, \\ e^{-x}\mathrm{sh} t, & 0 \le t \le x, \end{cases}$$

то $q\chi_2(L_0+1)^{-1}$ — оператор Гильберта-Шмидта. Известно [13, с. 403], что если H_0 — положительный самосопряженный оператор, V — симметрический оператор с $D(V) \supset D(H_0)$, то из компактности оператора $V(H_0+1)^{-1}$ следует компактность $(H_0+1)^{-\frac{1}{2}} V (H_0+1)^{-\frac{1}{2}}$. Поэтому оператор K_2 компактен.

Далее, поскольку $\|K_3\| < \sup \mid q\chi_3 \mid = \delta^\gamma \to 0, \delta \to 0$, то для доказательства леммы достаточно убедиться, что $\|K_1\| \to 0$, $\delta \to 0$.

Если $\delta < 1$, то для любого $u \in L^2(0,+\infty)$ имеем

$$(K_1 u, u) < 4\delta^{2-\gamma} \left(\frac{1}{4} x^{-2} (L_0+1)^{-\frac{1}{2}} u, (L_0+1)^{-\frac{1}{2}} u \right).$$

[1] По определению (см. [9, с. 397]), линейное подпространство Q' множества Q_0 называется ядром формы $\mathcal{L}_\beta$, если замыкание сужения $\mathcal{L}_\beta$ на Q' совпадает с $\mathcal{L}_\beta$.

В силу принципа неопределенности [21, с. 192]

$$\frac{1}{4}\left(x^{-2}y,y\right) < \int_0^\infty |y'|^2dx = \|L_0^{\frac{1}{2}}y\|^2, \quad \forall\ y \in Q_0,$$

поэтому $(K_1u,u) < 4\delta^{2-\gamma}\|L_0^{\frac{1}{2}}(L_0+1)^{-\frac{1}{2}}u\|^2 < 4\delta^{2-\gamma}\|u\|^2$. Отсюда поскольку для любого ограниченного самосопряженного оператора A на всем гильбертовом пространстве H $\|A\| = \sup|(Au,u)|$ [22, с. 240] , то $\|K_1\| < 4\delta^{2-\gamma} \to 0,\ \delta \to 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

1) при $0 \le |\arg\beta| < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ $\quad\sigma_{\rm disc}(L_\beta)$ *состоит из бесконечного числа простых (геометрической кратности 1) собственных чисел, лежащих на луче* $\arg(-\lambda) = \frac{2\arg\beta}{2-\gamma}$, *а именно,*

$$\sigma_{\rm disc}(L_\beta) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\lambda_k(\beta)$$

и

$$\lambda_k(\beta) = -\beta^{2/(2-\gamma)}r_k, \tag{10}$$

где $-r_k$ *— занумерованные в порядке возрастания собственные числа самосопряженного оператора* L_1 *(то есть* $L_\beta|_{\beta=1}$*), которые имеют асимптотику*

$$r_k \sim C\cdot(k-1/4)^{-2\gamma/(2-\gamma)}, \quad k \to +\infty, \quad C = \left[\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma})}{2\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{\gamma})}\right]^{\frac{2\gamma}{2-\gamma}}; \tag{11}$$

2) при $\frac{2-\gamma}{2}\pi \le |\arg\beta| \le \pi$ *дискретный спектр оператора* L_β *пуст;*

3) при всех $\beta \in \mathbb{C}$ *оператор* L_β *на полуоси* $[0,+\infty)$ *не имеет ни собственных значений, ни спектральных особенностей* [23, с. 456]*:* $v_\beta(0,\lambda) \ne 0\ \forall\ \lambda \ge 0$, *где* $v_\beta(x,\lambda)$ *— решение уравнения* (19), *удовлетворяющее оценке* (20) .

Доказательство. Из равенства $\sigma_{\rm disc}(L_{\overline{\beta}}) = \overline{\sigma_{\rm disc}(L_\beta)}$ следует, что утверждения 1) — 3) достаточно доказать при $0 \le \arg\beta \le \pi$.

Докажем 1). Рассмотрим однопараметрическое семейство унитарных растяжений из $L^2(0,+\infty)$ $\quad [U_\omega\varphi](x) = e^{\frac{\omega}{2}}\varphi(e^\omega x)$, где $\omega \in \mathbb{R}$. Имеем

$$U_\omega L_1 U_\omega^{-1} = e^{-2\omega}L_{e^{(2-\gamma)\omega}}, \omega \in \mathbb{C}. \tag{12}$$

Отсюда согласно лемме 1 следует, что семейство операторов $T(\omega) = U_\omega L_1 U_\omega^{-1}$ есть аналитическое семейство типа (B) на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Так как $-r_k$ — простое собственное значение оператора $T(0)$, то по теореме XII.13 из [13] при малых $\omega \in \mathbb{C}$ вблизи $-r_k$ существует единственное собственное значение $\lambda_k(\omega)$ оператора $T(\omega)$, аналитические около $\omega = 0$. С другой стороны, при вещественных ω оператор $T(\omega)$ унитарно эквивалентен оператору L_1, так что $\lambda_k(\omega) \equiv -r_k$ при всех малых вещественных ω. Из аналитичности $\lambda_k(\omega)$ следует, что $\lambda_k(\omega) \equiv -r_k$ при всех достаточно малых $\omega \in \mathbb{C}$. Ясно, что это утверждение остается верным, если 0 заменить на любое $\omega_0 \in \mathbb{C}$ такое, что $-r_k \in \sigma_{\rm disc}(T(\omega_0))$.

Пусть $0 < |\arg\beta| < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ (при $\arg\beta = 0$ равенство (10) превращается в тождество). Положим $\omega_\beta = \frac{1}{2-\gamma}(\ln\mid\beta\mid + i(\arg\beta))$. Покажем, что $e^{2\omega_\beta}(-r_k)$ — собственное значение оператора L_β. Отсюда будет следовать (10).

Поскольку $e^{(2-\gamma)\omega_\beta} = \beta$, то в силу (12) достаточно доказать, что $-r_k \in \sigma_{\rm disc}(T(\omega_\beta))$. Пусть $I_\beta = [0,\omega_\beta]$. Обозначим через J_β множество всех $\omega \in I_\beta$, при которых $-r_k \in \sigma_{\rm disc}(T(\omega))$. Так как $0 \in J_\beta$, то $J_\beta \ne \varnothing$. Из сказанного выше следует, что J_β открыто в I_β. С другой стороны, поскольку L_β аналитическое семейство типа (B), то по (12) таким же свойством обладает и семейство $T(\omega),\ \omega \in \mathbb{C}$, поэтому если $\omega_n \to \omega$ и $-r_k \in \sigma_{\rm disc}(T(\omega_n))$ при всех n, то $-r_k \in \sigma(T(\omega))$. Но по (12) и Лемме 3

$$\sigma_{\rm ess}(T(\omega)) = e^{-2(Im\omega)i}[0,+\infty) \tag{13}$$

и $\mathrm{Im}\omega_\beta = -\frac{\pi - arg\beta}{2-\gamma} > -\frac{\pi}{2}$, следовательно, при всех $\omega \in I_\beta$ точка $-r_k$ лежит вне $\sigma_{\mathrm{ess}}(T(\omega_n))$. Значит, если $\omega \in I_\beta$ и $\omega_n \to \omega, -r_k \in \sigma_{\mathrm{disc}}(T(\omega_n))$, то $-r_k \in \sigma_{\mathrm{disc}}(T(\omega))$. Это означает, что множество J_β замкнуто в I_β. Таким образом, J_β является замкнутым и открытым непустым подмножеством I_β. Следовательно, $J_\beta = I_\beta$. Тем самым равенство (10) доказано.

Докажем (11). Пусть $-r$, $r > 0$, — собственное значение оператора L_1. Тогда для соответствующей собственной функции f имеем

$$\begin{aligned} -f''(x) - \frac{1}{x^\gamma} f(x) &= -r \cdot f(x), \ x > 0, \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Заменой

$$\xi = \left(\sqrt{r}x\right)^{(2-\gamma)/2}, \ f = x^{\gamma/4} g(\xi, \mu), \ \mu = \left(\frac{2}{2-\gamma}\right)^2 r^{-(2-\gamma)/2},$$

приходим к задаче

$$-\frac{d^2 g}{d\xi^2} + p(\xi) g = \mu \cdot g, \tag{14}$$

$$g(0) = 0, \tag{15}$$

где $p(\xi) = 4\nu^2 \xi^\alpha - \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\xi^{-2}, \ \nu = 1/(2-\gamma), \ \alpha = 2\gamma/(2-\gamma)$.

Таким образом, $r \in \sigma_{\mathrm{disc}}(L_1)$ тогда и только тогда, когда

$$\mu = \left(\frac{2}{2-\gamma}\right)^2 r^{-(2-\gamma)/2} \tag{16}$$

— собственное значение задачи (14) — (15). Асимптотика спектра задачи (14) — (15) хорошо известна [24]:

$$\mu_k \sim (C_0 \pi k)^{2\alpha/(2+\alpha)}, \quad k \to +\infty, \quad C_0 = \frac{\alpha \Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Отсюда и из (16) следует (11).

2) Сначала докажем, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\arg\beta = \frac{2-\gamma}{2}\pi$. Предположим противное: пусть существует $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta)$ при некотором $\beta = b \cdot e^{\frac{2-\gamma}{2}\pi i}, b > 0$. Пусть f – нормированная собственная функция, соответствующая λ_0, тогда из соотношения $\lambda_0 = \|f'\|^2 - \beta(x^{-\gamma} f, f)$ видно, что

$$-\frac{\gamma\pi}{2} < \arg\lambda_0 < 0. \tag{17}$$

Положим $T(\omega) = U(\omega) L_\beta U^{-1}(\omega)$. Имеем $T(\omega) = e^{-2\omega} L_{\beta e^{(2-\gamma)\omega}}$, так что

$$T\left(-\frac{i\pi}{2}\right) = -L_\beta. \tag{18}$$

Пусть $I = [0, -\frac{i\pi}{2}]$. Из соотношения (13) следует, что при всех $\omega \in I$ $\lambda_0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(T(\omega))$, так что рассуждая так же, как и при доказательстве пункта 1), получим, что $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(T(-\frac{i\pi}{2}))$. Отсюда в силу (18) $\lambda_0 > 0$, что противоречит с (17).

Теперь докажем, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\frac{2-\gamma}{2}\pi < \arg\beta \le \pi$. Снова предположим противное: пусть при некотором $\beta_0 = b_0 \cdot e^{i\theta_0}$, $b_0 > 0$, $\frac{2-\gamma}{2}\pi < \theta_0 < \pi$, оператор L_{β_0} имеет собственное значение λ_0. Тогда $-\pi + \theta_0 < \arg\lambda_0 < 0$ и, рассуждая так же, как в случае $\arg\beta = \frac{2-\gamma}{2}\pi$, получим, что $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{disc}}(T(\omega))$ $\forall \omega \in [0, -\frac{i\pi}{2}]$, то есть $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) \ne \varnothing$ при $\theta_0 - \frac{2-\gamma}{2}\pi \le \arg\beta \le \theta_0$. Отсюда в силу того, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\arg\beta = \frac{2-\gamma}{2}\pi$, имеем $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\frac{2-\gamma}{2}\pi \le \arg\beta \le \min\{\pi, (2-\gamma)\pi\}$. Если $\gamma \le 1$, то доказательство 2) закончено. Если $\gamma \le 2(1 - 1/(k+2))$, $k \in \mathbb{N}$, то повторяя предыдущую процедуру еще k раз, мы покажем, что $\sigma_{\mathrm{disc}}(L_\beta) = \varnothing$ при $\frac{2-\gamma}{2}\pi \le \arg\beta \le \pi$. Тем самым утверждение 2) доказано.

3) Пусть $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$ и $\beta \in \mathbb{C}$. Далее пусть $a = a(\lambda,\beta) > 0$ такое, что $\lambda + \beta x^{-\gamma} \neq 0$ при $x \geq a$. Тогда (см., например, [25, с. 34]) уравнение

$$-y''(x) - q_\beta(x)y(x) = \lambda \cdot y(x), \tag{19}$$

имеет решение $v_\beta(x,\lambda)$, для которого верна ВКБ-оценка :

$$v_\beta(x,\lambda) \sim (\lambda + q_\beta(x))^{-1/4} \exp\left(i\int_0^x (\lambda + q_\beta(t))^{1/2}\,dt\right)\left[1 + O\left(x^{\gamma/2-1}\right)\right],\ x \to +\infty. \tag{20}$$

Тогда для $m_\beta(\lambda)$ — функции Вейля оператора L_β — справедлива формула

$$m_\beta(\lambda) = \frac{v'_\beta(0,\lambda)}{v_\beta(0,\lambda)}.$$

В работе [18] показано, что функция $m_\beta(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение через разрез по полуоси $[0,+\infty)$ на бесконечнолистную риманову поверхность по формуле

$$m_\beta(\lambda) = e^{-i\varphi} m_{\beta e^{i(2-\gamma)}}(e^{2i\varphi}\lambda),\ v_b(0,\lambda) \neq 0. \tag{21}$$

Допустим, что $0 < \arg\beta < \pi$ и $\lambda_0 > 0$ — полюс $m_\beta(\lambda)$. Тогда из (21) при $\varphi = -\arg\beta/(2-\gamma)$ следует, что точка $e^{-2i\arg\beta/(2-\gamma)}\lambda_0$ является полюсом функции $m_{|\beta|}(\lambda)$, то есть собственным значением самосопряженного оператора $L_{|\beta|}$, что невозможно.

Если $\beta \in \mathbb{R}$ и $v_\beta(0,\lambda_0) = 0$ при некотором $\lambda_0 > 0$, то $\overline{v_\beta}(0,\lambda_0) = 0$, следовательно, вронскиан функций v_β и $\overline{v_\beta}$ в нуле равен 0. Но функция $\overline{v_\beta}(x,\lambda_0)$ также является решением уравнения (19), и в силу (20) вронскиан v_β и $\overline{v_\beta}$ равен $2i$.

Таким образом, ни при каком $\beta \in \mathbb{C}$ оператор L_β не имеет положительных собственных значений и спектральных особенностей. То, что 0 не является собственным значением или спектральной особенностью, следует из того, что $v_\beta(x,0)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с функцией $f(x) = \sqrt{x}H_\nu^{(1)}\left(2\nu\sqrt{\beta}x^{(2-\gamma)/2}\right)$, где $\nu = 1/(2-\gamma)$, $H_\nu^{(1)}$ — функция Ханкеля и $f(0) \neq 0$ [25, с. 190]. Теорема доказана.

Замечание 1. *Формула* (21) *уточняет утверждения 1) и 2): для каждого фиксированного k собственное число $\lambda_k(\beta)$ оператора L_β при возрастании (убывании) аргумента β от 0 до $\frac{2-\gamma}{2}\pi$ (соответственно до $-\frac{2-\gamma}{2}\pi$) двигается по окружности $|\lambda| = -\lambda_k(|\beta|)$ от точки $\lambda_k(|\beta|) < 0$ против часовой стрелки (соответственно по) и попадает на $[0,+\infty)$ — существенный спектр L_β. При дальнейшем росте $|\arg\beta|$ $\lambda_k(\beta)$, являясь полюсом аналитического продолжения функции Вейля на следующий лист, продолжает свое движение по той же окружности.*

3. Вычисление квантовых дефектов

Введем в рассмотрение семейство операторов

$$M_\beta = L_\beta + W,$$

где W — оператор умножения на комплекснозначную измеримую функцию $W(x)$, удовлетворяющую условию

$$\int_0^\infty (1 + x^{\gamma/2})|W(x)|dx < \infty. \tag{22}$$

В работе [19] при $\beta > 0, \gamma = 1$ и вещественном W, удовлетворяющем оценке:

$$|W(x)| \leq \int_{3/2}^2 x^{-t}|d\sigma(t)|, \quad \text{где } \int_{3/2}^2 \frac{|d\sigma(t)|}{(t-3/2)(2-t)} < \infty, \tag{23}$$

было показано, что $\{\mu_k(\beta)\}_1^\infty$ — собственные числа оператора M_β, пронумерованные в порядке возрастания, — имеют асимптотику (ср. с (10) и (11))

$$\mu_k(\beta) \sim -\beta^{-2/(2-\gamma)}C(k - 1/4 + \delta_\beta)^{-2\gamma/(2-\gamma)}, \quad k \to +\infty, \tag{24}$$

где $z^{-2/(2-\gamma)} > 0$ при $z > 0$, константа C определена по формуле (11), δ_β — некоторая не зависящая от k вещественная константа, которую называют **квантовым дефектом** [26].

Легко проверить, что из (23) следует (22).

Мы покажем, что формула (24) остается справедливой и при комплексных W, удовлетворяющих (22) и дополнительному условию, которое выполняется автоматически в случае вещественных W (см. Замечание 2). Также будет доказано, что в случае $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{\gamma}\pi$ для выполнения (24) вместо (22) достаточно потребовать, чтобы W имело аналитическое продолжение $\widetilde{W}$ в некоторый угол $\{-\arg\beta/(2-\gamma) < \arg z < 0$ и чтобы (22) выполнялось только на луче $\arg z = -\arg\beta/(2-\gamma)$.

3.1. Случай $\beta > 0$. Всюду в этом пункте мы считаем параметр β фиксированным, поэтому в обозначениях всех объектов, если нет особой необходимости, мы не будем указывать зависимость от β.

Лемма 4. *Пусть $\beta > 0$. Тогда уравнение*

$$-y'' + (-q_\beta + W)y = 0 \tag{25}$$

имеет 2 линейно независимых решения $e_\pm(x)$, удовлетворяющие асимптотическим оценкам

$$e_\pm^{(\nu)}(x) \sim (q_\beta(x))^{-1/4+\nu/2}(\pm i)^\nu \exp\left(\pm i \int_0^x \sqrt{q_\beta(x)}dx\right), \quad x \to +\infty,\ \nu = 0, 1. \tag{26}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнения

$$e_\pm(x) = u_\pm(x) - \int_x^{+\infty} \sin\left(\int_t^x \sqrt{q_\beta(\tau)}d\tau\right) x^{\gamma/4} t^{\gamma/4} \left(\frac{\gamma(4-\gamma)}{16}t^{-2} + W(t)\right) e_\pm(t)dt, \tag{27}$$

где $u_\pm$ означает правую часть (26). Легко проверить, что любое решение (27) является и решением (25). Покажем, что при достаточно больших $x > 0$ уравнение однозначно разрешимо, и его решение удовлетворяет (26).

Для $\widetilde{e}_\pm = e_\pm/u_\pm$ имеем

$$\widetilde{e}_\pm = 1 + A_\pm \widetilde{e}_\pm, \tag{28}$$

где A интегральный оператор с ядром

$$A_\pm(x,t) = \begin{cases} \pm\frac{1}{2i}\left(1 - \exp\left(\pm 2i \int_x^t \sqrt{q_\beta(\tau)}d\tau\right)\right) t^{\gamma/2}\left(\frac{\gamma(4-\gamma)}{16}t^{-2} + W(t)\right), & t > x > 0, \\ 0, & 0 < t < x. \end{cases}$$

Из условия (22) следует, что при любом $b > 0$ оператор $A_\pm$ ограничен в пространстве $C[b, +\infty)$, и его норма стремится к 0 при $b \to +\infty$. Следовательно,

$$\widetilde{e}_\pm(x) \sim 1,\ x \to +\infty, \tag{29}$$

откуда следует (26) при $\nu = 0$. Чтобы получить (26) при $\nu = 1$, продифференцируем (28) и подставим туда (29).

Теорема 2. *Пусть $\beta > 0$, и функция W удовлетворяет оценке* (22) *и условию $e_\pm(0) \neq 0$. Тогда для собственных чисел $\mu_k(\beta)$ оператора M_β (при надлежащей нумерации) справедливо разложение* (24)*, где δ_β вычисляется по формулам* (48)*,* (36) *и* (26)*.*

Замечание 2. *Если функция W вещественна, то условие $e_\pm(0) \neq 0$ выполняется, так как $e_-(x) = \overline{e_+(x)}$ и $W(e_-, e_+) = 2i \neq 0$.*

Возмущение $W(x)$, не удовлетворяющее условию $e_\pm(0) \neq 0$, строится довольно просто. Пусть $\tilde{e}_+ = e_+|_{W\equiv 0}$ и $b > 0 :\ \tilde{e}_+(b) \neq 0$. Далее пусть $\varphi(x) = x\psi(x)$, где $\psi(x)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая и не имеющая нулей на $[0, b]$ функция, удовлетворяющая условиям:

$$\psi'(0) = 0,\ \psi(b) = \frac{\tilde{e}_+(b)}{b},\ \psi'(b) = \frac{b \cdot \tilde{e}'_+(b) - \tilde{e}_+(b)}{b^2}.$$

Положим

$$W(x) = \begin{cases} 0, & x \geq b, \\ \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} - q_\beta(x), & 0 \leq x < b. \end{cases}$$

Тогда $e_+(x) = \varphi(x)$ при $x \in [0, b]$, так что $e_+(0) = 0$.

Доказательство Теоремы 2 разобьем на леммы.

Согласно Лемме 4 уравнение

$$-y'' + (-q_\beta + \varepsilon W)y = 0. \tag{30}$$

имеет 2 решения $e_\pm(\varepsilon, x)$, для которых справедливы оценки (26), равномерные по ε из любого компакта $K \subset \mathbb{C}$.

Лемма 5. *При любом фиксированном $x \geq 0$ $e_\pm(\varepsilon, x)$ — целые функции по ε.*

Доказательство. Функции $e_\pm(\varepsilon, x)$ удовлетворяют уравнению

$$e_\pm(\varepsilon, x) = e_\pm(0, x) + \frac{\varepsilon}{2i} \int_x^{+\infty} \left(e_+(0, x)e_-(0, t) - e_-(0, x)e_+(0, t)\right) W(t) e_\pm(\varepsilon, t) dt.$$

Отсюда, полагая $\widetilde{e}_\pm(\varepsilon, x) = e_\pm(\varepsilon, x)(1 + x)^{-\gamma/4}$, будем иметь

$$\widetilde{e}_\pm(\varepsilon, \cdot) = \widetilde{e}_\pm(0, \cdot) + \varepsilon A_\pm \widetilde{e}_\pm(\varepsilon, \cdot),$$

где оператор A действует по формуле

$$Af = \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \left(\widetilde{e}_+(0, x)\widetilde{e}_-(0, t) - \widetilde{e}_-(0, x)\widetilde{e}_+(0, t)\right) \left(1 + t^{\gamma/2}\right) W(t) f(t) dt.$$

Ясно, что A — вольтерров оператор в пространстве $C[0, +\infty)$, так что

$$\widetilde{e}_\pm(\varepsilon, \cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A^k [\widetilde{e}_\pm(0, \cdot)].$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Пусть $\varphi_0(\varepsilon, x)$ — решение уравнения (30), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(\varepsilon, 0) = 0,\ \varphi'(\varepsilon, 0) = 1. \tag{31}$$

Имеем

$$\varphi_0(\varepsilon, x) = \frac{e_-(\varepsilon, 0)e_+(\varepsilon, x) - e_+(\varepsilon, 0)e_-(\varepsilon, x)}{2i}. \tag{32}$$

Так как $e_\pm(1, x) = e_\pm(x)$, то по условию Теоремы 2 $e_\pm(1, 0) \neq 0$. Тогда, поскольку $e_\pm(0, 0) \neq 0$ (см. Замечание 2), то согласно Лемме 5 найдется кривая l, соединяющая точки 0 и 1, такая, что $e_\pm(\varepsilon, 0) \neq 0\ \forall\ \varepsilon \in l$.

Обозначим через $\varphi(\varepsilon, x, \lambda)$ решение уравнения

$$-y'' + (-q_\beta + \varepsilon W)y = \lambda y, \tag{33}$$

удовлетворяющее начальным условиям (31).

Лемма 6. *В условиях Теоремы 2 при $\Omega(r, M) \ni \lambda \to 0$*

$$\varphi(\varepsilon, |\lambda|^{-1/2}, \lambda) = \Delta |\lambda|^{-\gamma/8} \left[\sin\left(\frac{2\sqrt{\beta}}{2-\gamma} |\lambda|^{-(2-\gamma)/4} + \delta(\varepsilon)\right) + O\left(\lambda^{(2-\gamma)/4}\right)\right], \tag{34}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \varphi(\varepsilon, |\lambda|^{-1/2}, \lambda) = \Delta \sqrt{\beta} |\lambda|^{\ \gamma/8} \left[\cos\left(\frac{2\sqrt{\beta}}{2-\gamma} |\lambda|^{-(2-\gamma)/4} + \delta(\varepsilon)\right) + O\left(\lambda^{(2-\gamma)/4}\right)\right], \tag{35}$$

где оценка остаточных членов равномерна по $\arg\lambda, \varepsilon \in l$,

$$\Delta = \sqrt{e_-(\varepsilon,0)e_+(\varepsilon,0)}, \quad \delta(\varepsilon) = \ln\sqrt{\frac{e_-(\varepsilon,0)}{e_+(\varepsilon,0)}}, \tag{36}$$

ветви $\sqrt{z}$, $\ln z$ *выбраны так, что они положительны при* $z > 1$.

Доказательство. Функция $\varphi(\varepsilon,x,\lambda)$ является решением уравнения

$$\varphi(\varepsilon,x,\lambda) = \varphi_0(\varepsilon,x) - \frac{\lambda}{2i}\int_0^x \left(e_+(\varepsilon,x)e_-(\varepsilon,t) - e_-(\varepsilon,x)e_+(\varepsilon,t)\right)\varphi(\varepsilon,t,\lambda)dt, \tag{37}$$

которое заменой $\widetilde{\varphi}(\varepsilon,x,\lambda) = \varphi(\varepsilon,x,\lambda)(1+x)^{-\gamma/4}$, $\widetilde{\varphi}_0(\varepsilon,x) = \varphi_0(\varepsilon,x)(1+x)^{-\gamma/4}$, $\widetilde{e}_\pm(\varepsilon,x) = e_\pm(\varepsilon,x)(1+x)^{-\gamma/4}$ преобразуется в уравнение

$$\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_0 + B(\varepsilon,\lambda)\widetilde{\varphi},$$

где $B(\varepsilon,\lambda)$ действует по формуле

$$B(\varepsilon,\lambda)f = -\frac{\lambda}{2i}\int_0^x \left(e_+(\varepsilon,x)\widetilde{e}_-(\varepsilon,t) - \widetilde{e}_-(\varepsilon,x)\widetilde{e}_+(\varepsilon,t)\right)t^{\gamma/2}\varphi(t)dt.$$

Так как в силу оценок (26)

$$\sup_{x\le 0,\ \varepsilon\in l}|\widetilde{e}_\pm(\varepsilon,x)| \le c_0 < \infty,$$

то норма оператора $B(\varepsilon,\lambda)$ в пространстве $C\left[0,|\lambda|^{-1/2}\right]$ удовлетворяет оценке

$$\|B(\varepsilon,\lambda)\| = O\left(|\lambda|^{(2-\gamma)/4}\right),\ \lambda \to 0,$$

равномерно по $\varepsilon \in l$. Отсюда и из оценок (26), а также (3.2) следует (34). Чтобы получить (35), нужно продифференцировать (37) и воспользоваться полученной оценкой для $\varphi(\varepsilon,x,\lambda)$. Лемма доказана.

Теперь мы построим решение уравнения (33), принадлежащее $L^2(|\lambda|^{-1/2},+\infty)$.

Введем обозначения. Пусть

$$\Omega(r,M) = \{\lambda = \mu + i\nu:\ -r < \mu < 0,\ |\nu| \le M|\mu|^{(2+\gamma)/(2\gamma)}\},$$

где $r > 0, M > 0$. Далее пусть

$$a_\lambda = \left(-\frac{\lambda}{\beta}\right)^{1/\gamma},\ Q(x,\lambda) = \int_{a_\lambda}^x \sqrt{-\lambda - q_\beta(t)}dt,\ P(x,\lambda) = \int_x^{a_\lambda}\sqrt{\lambda + q_\beta(t)}dt.$$

Лемма 7. *При выполнении условия* (22) *уравнение* (33) *имеет решение* $v(\varepsilon,x,\lambda)$, *для которого верны следующие оценки:*
а) при фиксированном $\lambda \notin [0,+\infty)$ *и* $x \to +\infty$

$$v(\varepsilon,x,\lambda) \ \sim\ \frac{1}{2}(-\lambda - q_\beta(x))^{-1/4}\exp\left(-Q(x,\lambda)\right); \tag{38}$$

б) при $\Omega(r,M) \ni \lambda \to 0$

$$v(\varepsilon,|\lambda|^{-1/2},\lambda) \ \sim\ (\lambda + q_\beta(|\lambda|^{-1/2}))^{-1/4}\left[\sin\left(P(|\lambda|^{-1/2},\lambda) + \pi/4\right) + o(1)\right], \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}v(\varepsilon,|\lambda|^{-1/2},\lambda) \ \sim\ (\lambda + q_\beta(|\lambda|^{-1/2}))^{1/4}\left[-\cos\left(P(|\lambda|^{-1/2},\lambda) + \pi/4\right) + o(1)\right]. \tag{40}$$

Доказательство такое же, как и Леммы 6. Опишем только, как выбираются эталонные решения и соответствующее интегральное уравнение. Рассмотрим в области $D_0 = \{\lambda < 0, x > a_\lambda\}$ положительную функцию

$$\xi(x,\lambda) = \left(\frac{3}{2}Q(x,\lambda)\right)^{2/3},$$

и продолжим далее по аналитичности. Легко проверить, что при $\lambda < 0$ и $0 < x < a_\lambda$

$$\xi(x,\lambda) = -\left(\frac{3}{2}P(x,\lambda)\right)^{2/3}.$$

Положим

$$v_1(x,\lambda) = \xi'^{-1/2} Bi(\xi(x,\lambda)), \quad v_2 = \xi'^{-1/2} Ai(\xi(x,\lambda)), \tag{41}$$

где $Ai(\xi)$, $Bi(\xi)$ – функции Эйри [25, с. 169].

Из асимптотических формул для функций Эйри вытекают следующие соотношения:

при $\mathrm{Re}Q \to +\infty$

$$v_k(x,\lambda) \sim \frac{1}{k}(-\lambda - q_\beta(x))^{-1/4} \exp\left((-1)^{k-1}Q(x,\lambda)\right)\left[1 + O\left(Q^{-1}(x,\lambda)\right)\right], \ k = 1,2,$$

при $\mathrm{Re}P \to +\infty$

$$\begin{aligned}
v_1(x,\lambda) &\sim (\lambda + q_\beta(x))^{-1/4}\left[\cos\left(P(x,\lambda) + \pi/4\right) + O\left(P^{-1}(x,\lambda)\right)\right],\\
v_2(x,\lambda) &\sim (\lambda + q_\beta(x))^{-1/4}\left[\sin\left(P(x,\lambda) + \pi/4\right) + O\left(P^{-1}(x,\lambda)\right)\right],\\
v_1'(x,\lambda) &\sim (\lambda + q_\beta(x))^{1/4}\left[\sin\left(P(x,\lambda) + \pi/4\right) + O\left(P^{-1}(x,\lambda)\right)\right],\\
v_2'(x,\lambda) &\sim (\lambda + q_\beta(x))^{1/4}\left[-\cos\left(P(x,\lambda) + \pi/4\right) + O\left(P^{-1}(x,\lambda)\right)\right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение

$$v(\varepsilon,x,\lambda) = v_2(x,\lambda) - \varepsilon\int_x^{+\infty}\left(v_1(x,\lambda)v_2(t,\lambda) - v_2(x,\lambda)v_1(t,\lambda)\right)W(t)v(\varepsilon,t,\lambda)dt. \tag{42}$$

Согласно (41) $W(v_1,v_2) = -1$, так что $v(\varepsilon,x,\lambda)$ является решением уравнения (33). Далее, действуя так же, как при доказательстве Леммы 6, получим оценки (38) — (40).

Замечание 3. *Из доказательства видно, что для выполнения оценки* (38) *вместо* (22) *достаточно потребовать, чтобы* $W \in L^1(0,+\infty)$.

Доказательство Теоремы 2. Пусть $M(\beta,\varepsilon) = L_\beta + \varepsilon W$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Из оценки (38) следует, что при любом $\lambda \notin [0,+\infty)$ $\quad v(\varepsilon,\cdot,\lambda) \in L^2[|\lambda|^{-1/2},+\infty)$, так что λ — собственное значение оператора $M(\beta,\varepsilon)$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi(\varepsilon,\lambda) := \langle\varphi(\varepsilon,x,\lambda), v(\varepsilon,x,\lambda)\rangle|_{x=|\lambda|^{-1/2}} = 0, \tag{43}$$

где

$$\langle f,g\rangle(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x). \tag{44}$$

Подставляя сюда асимптотические формулы (34), (34) и (39), (40), получим

$$\Phi(\varepsilon,\lambda) = -\Delta\sqrt{\beta}\Phi_0(\varepsilon,\lambda) + o(1), \ \Omega(r,M) \ni \lambda \to 0, \tag{45}$$

где

$$\Phi_0(\varepsilon,\lambda) = \sin\left(\int_0^{a_\lambda}\sqrt{\lambda + q_\beta(t)}dt + \pi/4 + \delta(\varepsilon)\right), \tag{46}$$

и оценка остаточного члена равномерна по $\varepsilon \in l$.

Обозначим через $\lambda_k(\beta,\varepsilon)(k = 1,2,\dots)$ пронумерованные в порядке возрастания отрицательные корни функции $\Phi_0(\varepsilon,\lambda)$. Имеем (см. (10))

$$\lambda_k(\beta,\varepsilon) \sim \lambda_k(\beta)\left(1 - \frac{2\gamma}{2-\gamma}\delta(\varepsilon)k^{-1}\right), \quad k \to +\infty. \tag{47}$$

Из соотношений (43) — (47) на основании Теоремы Руше заключаем, что для всякого $\sigma > 0$ найдется $K_\sigma \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k \in \mathbb{N}$: $k \geq K_\sigma$ и $\varepsilon \in l$ в круге $B_k(\varepsilon,\sigma) = \{|\lambda - \lambda_k(\beta,\varepsilon)| \leq \sigma|\lambda_k(\beta)|k^{-1}\}$ содержится ровно 1 простое (алгебраической кратности 1) собственное значение оператора $M(\beta,\varepsilon)$. Назовем это σ-свойством.

Обозначим через $\mu_n(\beta,\varepsilon)(n = 1,2,\dots)$ собственные числа оператора $M(\beta,\varepsilon)$, пронумерованные в порядке убывания модулей с учетом алгебраических кратностей. Из (10), (11) и определения $B_k(\varepsilon,\sigma)$ следует, что существуют $\sigma_0 > 0,\ K_0 \in \mathbb{N}$ такие, что при всех $0 < \sigma < \sigma_0$ и $k \le K_0$ круги $B_k(\varepsilon,\sigma)$ попарно не пересекаются. Выберем $0 < \sigma < \sigma_0$ так, что $K_\sigma \ge K_0$. Покажем, что при всех $k \ge K_\sigma \quad \mu_k(\beta,\varepsilon) \in B_k(\varepsilon,\sigma)$ для всех $\varepsilon \in l$.

Договоримся о некоторых обозначениях. Пусть $\varepsilon = \varepsilon(t),\ 0 \le t \le 1$, — некоторая параметризация кривой l. Для точек $\varepsilon_1 = \varepsilon(t_1)$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon(t_2)$ будем писать $\varepsilon_1 \prec \varepsilon_2$, если $t_1 < t_2$. Далее, если $a \prec b$, то через l_{ab} будем обозначать дугу $\{\varepsilon \in l:\ a \prec \varepsilon \prec b\}$.

Допустим теперь, что при некотором $m \ge K_0$ и $\delta \in l$ $\mu_m(\beta,\delta) \notin B_m(\delta,\sigma)$. Из Леммы 5 и формулы (36) следует, что функция $\lambda_m(\beta,\varepsilon)$ непрерывна по ε на кривой l. Поэтому семейство окружностей $\Gamma_m(\varepsilon,\sigma) = \{|\lambda - \lambda_m(\beta,\varepsilon)| = \sigma|\lambda_m(\beta)|m^{-1}\}$ будет совершать непрерывное движение при движении ε по кривой l. Функция $\mu_m(\beta,\varepsilon)$ также непрерывна на l (следует из аналитичности функции $\Phi(\beta,\varepsilon)$ на l). Поэтому на дуге $l_{0\delta}$ найдется точка ξ такая, что $\mu_m(\beta,\xi)$ лежит на окружности $\Gamma_m(\xi,\sigma)$ и $\mu_m(\beta,\varepsilon)$ лежит вне $B_m(\varepsilon,\sigma)$ при всех $\varepsilon \succ \xi$. В силу σ-свойства на $\Gamma_m(\xi,\sigma)$ должно найтись хотя бы одно собственное значение оператора $M(\beta,\xi)$, отличное от $\mu_m(\beta,\xi)$. Тогда круг $B_m(\xi,\sigma_1)$, где $\sigma_1 > \sigma$, содержит хотя бы 2 собственных значения оператора $M(\beta,\xi)$, что противоречит σ-свойству.

Таким образом, $\mu_k(\beta,\varepsilon) \sim \lambda_k(\beta,\varepsilon),\ k \to +\infty$, равномерно по $\varepsilon \in l$. Отсюда, в силу равенств $\mu_k(\beta,1) = \mu_k(\beta)$ и

$$\lambda_k(\beta,1) = C\,[k - 1/4 + \delta_\beta]^{-\frac{2\gamma}{2-\gamma}},$$

где

$$\delta_\beta = -\frac{\delta(1)}{\pi}, \tag{48}$$

следует (24). Теорема доказана.

Замечание 4. *В работе* [27] *аналогичным методом вычислен квантовый дефект оператора Дирака на полуоси.*

3.2. Случай $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{2}\pi$**.** Так как случаи $-\frac{2-\gamma}{2}\pi < \arg < 0$ и $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ абсолютно равноправны, ограничимся случаем $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{2}\pi$. Пусть $\omega_\beta = -\frac{\arg\beta}{2-\gamma}$, $U_\beta = \{z : \omega_\beta < \arg z < 0\}$, $U_\beta(R) = U_\beta \cap \{|z| < R\},\ E_p(\Omega)$, где $p > 1$ и Ω — область, ограниченная спрямляемой жордановой кривой γ, — класс Смирнова [28, с. 203] — множество функций $f(z)$, аналитичных в области Ω и таких, что для некоторой последовательности спрямляемых кривых γ_n, стягивающихся к γ,

$$\int_{\gamma_n} |f(z)|^p |dz| < C,$$

где C не зависит от n.

Далее, если $f \in\in L^p_{loc}[0,+\infty),\ p > 1$, то будем говорить, что f допускает аналитическое продолжение $\widetilde{f}(z)$ в угол U_β, если $\forall\ R > 0\ \widetilde{f}(z) \in E_p(U_\beta(R))$ и при почти всех $x > 0$ угловое граничное значение функции $\widetilde{f}$ в точке x совпадает с $f(x)$.

Теорема 3. *Пусть*

а) функция $W \in L^2_{loc}(0,+\infty)$ и допускает аналитическое продолжение $\widetilde{W}(z)$ в угол U_β так, что $\widetilde{W}(z) \to 0,\ z \to \infty$ равномерно по $\omega_\beta \le \arg z \le 0$ (на лучах $\arg z = 0$ и $\arg z = \omega_\beta$ предел понимается в смысле почти всюду);

б) функция $\widehat{W}(x) = \widetilde{W}(xe^{i\omega_\beta})$ удовлетворяет оценке

$$\int_0^\infty (1 + x^{\gamma/2})|\widehat{W}(x)|dx < \infty, \tag{49}$$

в) $\widehat{e}_\pm(0) \ne 0$, где $\widehat{e}_\pm$ получаются из $e_\pm$ заменой в (25) $-q_\beta(x)+W(x)$ на $-|\beta|x^{-\gamma}+e^{2\omega_\beta i}\widehat{W}(x)$.

Тогда для собственных чисел $\mu_k(\beta)$ *оператора* M_β *(при надлежащей нумерации) справедливо разложение* (24), *где* δ_β *вычисляется по формулам* (48), (36) *и* (26) *при* $W(x) = e^{2\omega_\beta i}\widehat{W}(x)$.

Доказательство Так как $W \in L^2_{loc}(0, +\infty)$ и $W \to 0,\ x \to +\infty$, то оператор $W(L_0 + 1)^{-1}$ (W — оператор умножения на функцию $W(x)$) есть равномерный предел операторов Гильберта – Шмидта (см. доказательство Леммы 3), а потому компактен. Следовательно, $\sigma_{\text{ess}}(M_\beta) = [0, +\infty)$. Далее, действуя так же, как при доказательстве п. 1) Теоремы 1, получим

$$\mu_k(\beta) = e^{2\omega_\beta i} r_k(\beta),$$

где $\{r_k(\beta)\}_{k=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора $L_{|\beta|} + e^{2\omega_\beta i}\widehat{W}$, которые в силу условий б), в) и Теоремы 2 имеют разложение (24). Теорема доказана.

Замечание 5. *При комплексных* β *для получения разложения* (24) *на возмущение* W *пришлось наложить гораздо более жесткие требования (аналитичность в угле* U_β*) по сравнению со случаем* $\beta > 0$. *В связи с этим возникает вопрос, насколько необходимо условие аналитичности. В §5 мы покажем необходимость (с некоторыми оговорками) этого условия.*

4. Финитные возмущения

В работе [18] показано, что в условиях Теоремы 3 функция Вейля (см. (62)) оператора M_β допускает мероморфное продолжение в угол

$$Y_\beta = \{2\pi < \arg\lambda < 2(\pi + \arg\beta/(2-\gamma))\}, \tag{50}$$

и ее полюса в этом угле образуют ограниченное множество и могут скапливаться только к лучу $\arg\lambda = 2(\pi + \arg\beta/(2-\gamma))$. В этом параграфе мы сформулируем 2 утверждения, которые в некотором смысле подтверждают необходимость условия аналитичности возмущения W для выполнения указанных свойств функции Вейля и тем самым подсказывают выбор свойства P, фигурирующего в Задаче 1.

Теорема 4. *Пусть* W *финитна* ($\text{supp}W \subset [0, b]$), *и в некоторой полуокрестности точки* b *допускает представление*

$$W(x) = (b-x)^n V(x),$$

где $n \geq 0,\ V(b-0)$ *существует, конечен и не равен 0.*

Тогда функция Вейля оператора M_β *допускает мероморфное продолжение в угол* Y_β, *которое имеет неограниченную последовательность полюсов около луча* $\arg\lambda = 2\pi$:

$$\lambda_k \sim \left(\frac{\pi k}{b} + i\frac{n+2}{2b}\ln k + O(1)\right)^2, \quad k \to +\infty. \tag{51}$$

Доказательство. То, что функция Вейля оператора M_β допускает мероморфное продолжение в угол Y_β, следует из рассуждений работы [18] (см. Теорему 2 и Замечание 4). Формула (51) доказывается точно так же, как в [29] (см. Теорему 3).

Следующий результат — аналог известной теоремы Амбарцумяна — нам представляется вовсе неожиданным — возможность восстановления возмущения только по части спектра носит исключительный характер и может быть реализована крайне редко.

Теорема 5. *Пусть функция* W *— финитна и суммируема на своем носителе. Тогда если* $\sigma_{\text{disc}}(M_\beta) = \sigma_{\text{disc}}(L_\beta)$, *то* $W = 0$ *п.в. на* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Введем обозначения. Пусть $S(x, \lambda)$ и $C(x, \lambda)$ — решения уравнения

$$-y'' + (-q_\beta + W)y = \lambda y, \tag{52}$$

удовлетворяющие условиям

$$S(0,\lambda)=0,\ S'(0,\lambda)=1,\quad C(b,\lambda)=1,\ C'(b,\lambda)=0,$$

и пусть

$$S_0(x,\lambda)=S(x,\lambda)|_{W\equiv 0}\,,\ C_0(x,\lambda)=C(x,\lambda)|_{W\equiv 0}\,. \tag{53}$$

Далее обозначим через $v_0(x,\lambda)$ решение уравнения (19), удовлетворяющее асимптотическому соотношению (20) при всех $\lambda\notin[0,+\infty)$.

Пусть $b>0:\ \operatorname{supp} W\subset[0,b]$. Тогда собственные числа оператора M_β суть корни уравнения (см. (44))

$$\langle S,v_0\rangle(b)=0. \tag{54}$$

Так как при $x>b$ $W(x)\equiv 0$, то

$$S(x,\lambda)=a_1(\lambda)S_0(x,\lambda)+a_2(\lambda)C_0(x,\lambda), \tag{55}$$

где $a_1(\lambda)=\langle C_0,S\rangle(b),\ a_2(\lambda)=-\langle S_0,S\rangle(b)$. Подставляя (55) в (54) и учитывая, что $\langle S_0,v_0\rangle(b)=\langle S_0,v_0\rangle(0)=-v_0(0,\lambda),\ \langle C_0,v_0\rangle(b)=v_0'(b,\lambda)$, для собственных чисел оператора M_β будем иметь

$$-a_1(\lambda)v_0(0,\lambda)+a_2(\lambda)v_0'(b,\lambda)=0. \tag{56}$$

По условию теоремы $\sigma_{\rm disc}(M_\beta)=\sigma_{\rm disc}(L_\beta)=\{\lambda_k\}_1^\infty$, где $\lambda_k\to 0,\ k\to\infty$. Тогда $\forall\ k\in\mathbb{N}$, $v_0(0,\lambda_k)=0$. Покажем, что $v_0'(b,\lambda_k)\neq 0$ при достаточно больших k. Действительно, если бы это было не так, то спектр задачи

$$\begin{aligned} -y''-q_\beta y &= \lambda y,\ 0<x<b,\\ y(0)=y'(b) &= 0 \end{aligned}$$

имел бы предельную точку в нуле, что невозможно в силу дискретности спектра этой задачи.

Тогда из (56) следует, что $a_2(\lambda_k)=0$, начиная с некоторого номера. Но $a_2(\lambda)$ — целая функция, поэтому $a_2(\lambda)\equiv 0$, так что (55) принимает вид

$$S(x,\lambda)=a_1(\lambda)S_0(x,\lambda),\ x\geq b.$$

Целая функция $a_1(\lambda)$ не имеет нулей (если бы $a_1(\lambda_0)=0$, то $S(x,\lambda_0)\equiv 0$), так что $a_1(\lambda)=e^{P(\lambda)}$, где $P(\lambda)$ — целая. Имеем $\ln|a_1(\lambda)|=O(\lambda^{1/2}),\ \lambda\to\infty$, так что $P(\lambda)=\text{const}$, то есть $a_1(\lambda)\equiv\text{const}$.

Далее,

$$a_1(\lambda)=\langle C_0,S\rangle(0)+\int_0^b(C_0S''-C_0''S)dx=1+\int_0^b WC_0Sdx.$$

С другой стороны (см., например, [30, с. 13]), при $\lambda\to+\infty$

$$C_0(x,\lambda)\ \sim\ \cos\sqrt{\lambda}x+O(\lambda^{-1/2}), \tag{57}$$

$$S(x,\lambda)\ \sim\ \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+O(\lambda^{-1}), \tag{58}$$

равномерно по $x\in[0,b]$. Отсюда имеем $a_1(\lambda)=1+O(\lambda^{-1/2}),\ \lambda\to+\infty$, следовательно, $a_1(\lambda)\equiv 1$, то есть

$$S(x,\lambda)\equiv S_0(x,\lambda),\ x\geq b,\ \lambda\in\mathbb{C}. \tag{59}$$

Далее,

$$C(x,\lambda)=b(\lambda)C_0(x,\lambda),\ x\geq b, \tag{60}$$

где $b(\lambda)=-\langle S_0,C\rangle(b)=-S_0(\lambda)$. Найдем $b(\lambda)$. Так как

$$v_0(x,\lambda)=C(x,\lambda)+m_\beta^0(\lambda)S_0(x,\lambda),$$

то (59) и (60) следует

$$v(x,\lambda)=b(\lambda))v_0(x,\lambda),\ x\geq b,$$

так что $m_\beta(\lambda) = b(\lambda)m^0_\beta(\lambda)$ или

$$b(\lambda) = \frac{m_\beta(\lambda)}{m^0_\beta(\lambda)}.$$

При больших λ равномерно по $\arg\lambda \in [0, 2\pi]$ имеем [30, с. 82]

$$\begin{aligned} m_\beta(\lambda) &\sim i\sqrt{\lambda} + O(1), \\ m^0_\beta(\lambda) &\sim i\sqrt{\lambda} + O(1). \end{aligned}$$

Следовательно, целая функция $b(\lambda)$ ограничена на $\mathbb{C}$, поэтому $b(\lambda) \equiv 1$, поэтому $m_\beta(\lambda) \equiv m^0_\beta(\lambda)$, откуда в силу единственности решения обратной задачи [31, с. 202] $M_\beta = L_\beta$, то есть $W = 0$ п.в.

5. Основной результат

Договоримся о некоторых терминах. Пусть U_β — угол, введенный в пункте 3.2. Будем говорить, что некоторая локально суммируемая на $[0, +\infty)$ функция f допускает мероморфное продолжение $\widetilde{f}$ в угол U_β, если

а) $\forall\ R > 0$ функция $\widetilde{f}$ в области $U_\beta(R)$ имеет конечное число полюсов $z_1, \ldots, z_n$ так, что функция

$$\widetilde{f} - \sum_{k=1}^{n} G_k(z),$$

где $G_k(z)$ — главная часть разложения Лорана $\widetilde{f}$ в точке z_k, принадлежит $E_1(U_\beta(R))$,

б) при почти всех $x \in (0, +\infty)$ угловое граничное значение функции $\widetilde{f}$ в точке x равно $f(x)$.

Далее, будем говорить, что полюс z_0 функции $f(z)$ удовлетворяет условию безмонодромности, если в некоторой окрестности U точки z_0 справедливо разложение

$$f(z) = \frac{m(m+1)}{(z-z_0)^2} + \sum_{k=0}^{m-1} f_k(z-z_0)^{2k} + (z-z_0)^{2m} r_m(z), \tag{61}$$

где $m \in \mathbb{N},\ r_m(z)$ — аналитична в U.

Замечание 6. *Известно* [32]*, что условие* (61) *необходимо и достаточно для того, чтобы все решения уравнения $-y'' + fy = \lambda y$ при всех значениях параметра λ были однозначны в окрестности U точки z_0. Следуя* [33]*, мы его будем называть условием безмонодромности.*

Пусть $W \in L^1(0, +\infty)$. Тогда согласно Замечанию 3 уравнение (52) имеет решение $v(x, \lambda)$, которое при $\lambda \notin [0, +\infty)$ удовлетворяет оценке (38). Известно, (см., например, [18] или [31, Гл. 2]) что при каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $v_\beta(x, \lambda)$ и $v'_\beta(x, \lambda)$ аналитичны в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ и непрерывны вплоть до верхнего и нижнего берегов разреза по $\lambda > 0$, и нули $v_\beta(0, \lambda)$ образуют ограниченное множество Λ. Следовательно,

$$m_\beta(\lambda) = \frac{v'(0, \lambda)}{v(0, \lambda)} \tag{62}$$

— функция Вейля оператора $M_\beta(\lambda)$ — мероморфна в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$, ее полюса образуют ограниченное множество, могут скапливаться только к лучу $[0, +\infty)$ и $M_\beta(\lambda)$ непрерывна в $\{\lambda \neq 0 :\ 0 \leq \arg\lambda \leq 2\pi\} \setminus \Lambda$.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат. Пусть $0 < \arg\beta < \frac{2-\gamma}{2}\pi$ (случай $-\frac{2-\gamma}{2}\pi < \arg\beta < 0$ аналогичен). Рассмотрим оператор $M_\beta = L_\beta + W$, где функция $W \in L^1(0, +\infty)$.

Теорема 6. *Пусть функция W имеет мероморфное продолжение $\widetilde{W}(z)$ в угол U_β так, что*

(a) *каждый полюс функции $\widetilde{W}(z)$ удовлетворяет условию безмонодромности,*

(b) *функция $\widehat{W}(x) := e^{2i\omega_\beta}\widetilde{W}(e^{i\omega_\beta}x),\ x>0$, суммируема на $(0,+\infty)$,*

(c) *существует некоторое бесконечное множество $\Lambda' \subset \{\lambda \neq 0:\ -2\omega_\beta \leq \arg\lambda \leq 2\pi\}$, имеющее хотя бы одну конечную предельную точку $\lambda_0 \neq 0$, что при всех $\lambda \in \Lambda'$*

$$v'(0,\lambda)\widehat{v}\left(0,\lambda e^{2i\omega_\beta}\right) - e^{-i\omega_\beta}v(0,\lambda)\widehat{v}'\left(0,\lambda e^{2i\omega_\beta}\right) = 0, \tag{63}$$

где $\widehat{v}(x,\mu)$ — решение уравнения

$$-v'' + (-|\beta|x^{-\gamma} + \widehat{W})v = \mu v, \tag{64}$$

удовлетворяющее оценке (38).

Тогда $m_\beta(\lambda)$ — функция Вейля оператора M_β — имеет мероморфное продолжение $\widetilde{m}_\beta(\lambda)$ с области $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ в угол Y_β (см. (50)) такое, что

$$\widehat{m}_\beta(\mu) := e^{i\omega_\beta}\widetilde{m}_\beta\left(e^{-2i\omega_\beta}\mu\right) \tag{65}$$

является функцией Вейля оператора $L_{|\beta|} + \widehat{W}$.

Обратно, если $m_\beta(\lambda)$ имеет мероморфное продолжение $\widetilde{m}_\beta(\lambda)$ в угол Y_β так, что (65) *является функцией Вейля оператора $L_{|\beta|} + V$ с некоторым $V \in L^1(0,+\infty)$, то W имеет мероморфное продолжение $\widetilde{W}(z)$ в угол U_β, при этом выполнены* (a) – (c), *причем $\widehat{W}(x) \equiv V(x)$.*

Доказательство. Согласно (62) и определению $\widehat{v}(x,\mu)$ функция Вейля оператора $L_{|\beta|} + \widehat{W}$ имеет вид

$$\widehat{m}_\beta(\mu) = \frac{\widehat{v}'(0,\mu)}{\widehat{v}(0,\mu)}. \tag{66}$$

Далее, в силу сказанного выше функции $v_\beta(0,\mu)$ и $v'_\beta(0,\mu)$ аналитичны в $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ и непрерывны вплоть до верхнего и нижнего берегов разреза по $\mu>0$, и нули $v_\beta(0,\mu)$ образуют ограниченное множество M. Следовательно, левая часть (63) аналитична в угле $\{\lambda\neq 0:\ -2\omega_\beta < \arg\lambda < 2\pi\}$, непрерывна до его сторон, кроме точки 0. Поэтому равенство (63) выполняется при всех $\lambda \in \{\lambda \neq 0:\ -2\omega_\beta \leq \arg\lambda \leq 2\pi\}$, то есть

$$m_\beta(\lambda) = e^{-i\omega_\beta}\widehat{m}_\beta\left(e^{2i\omega_\beta}\lambda\right),\ -2\omega_\beta \leq \arg\lambda \leq 2\pi,\ \lambda \notin \Lambda \cup \Lambda'', \tag{67}$$

где $\Lambda'' = e^{-2i\omega_\beta}M$. Но правая часть определена и при $\lambda \in Y_\beta \setminus \Lambda''$, откуда получаем аналитическое продолжение $m_\beta(\lambda)$ в область $Y_\beta \setminus \Lambda''$. Равенство (65) следует из (66) и (67).

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $m_\beta(\lambda)$ имеет мероморфное продолжение $\widetilde{m}_\beta(\lambda)$ в угол Y_β так, что (65) является функцией Вейля оператора $L_{|\beta|}+V$ с некоторым $V \in L^1(0,+\infty)$. Введем в рассмотрение семейство ломаных $\Gamma_a = [a,0]\cup[0,ae^{i\omega_\beta}],\ a>0$, с параметризацией

$$z = \begin{cases} a(1-2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ ae^{i\omega_\beta}(2t-1), & 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

Далее положим

$$\widetilde{W}(z) = \begin{cases} W(z), & z>0, \\ e^{-2i\omega_\beta}V\left(e^{-i\omega_\beta}z\right), & z = e^{-i\omega_\beta}r,\ r>0, \end{cases}$$

и введем семейство операторов Штурма – Лиувилля $T_a,\ a>0$, которое определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} T_a y &= -y''(z) + (-q_\beta(z) + \widetilde{W}(z))y(z),\ z \in \Gamma_a, \\ D(T_a) &= \{y:\ y, y' \in AC(\Gamma_a),\ -y'' + (-q_\beta + \widetilde{W})y \in L^2(\Gamma_a),\ y(a) = y(ae^{i\omega_\beta}) = 0\}, \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование вдоль Γ_a.

Пусть $\varphi_a(z,\lambda)$ — решение уравнения

$$-y''(z)+(-q_\beta(z)+\widetilde{W}(z)y(z)=\lambda^2 y(z), \tag{68}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_a(a,\lambda)=0,\ \left.\frac{d}{dz}\varphi_a(z,\lambda)\right|_{z=a}=1.$$

Положим $\Phi_a(\lambda)=\varphi_a\left(ae^{i\omega_\beta}\right)$. Тогда λ^2 собственное значение оператора T_a тогда и только тогда, когда

$$\Phi_a(\lambda)=0. \tag{69}$$

Функция $\Phi_a(\lambda)$ — четная. Обозначим $\{\lambda_n\}_1^\infty$ корни уравнения (69), лежащие в верхней полуплоскости, занумерованные в порядке возрастания модулей с учетом алгебраических кратностей. Из Леммы 2 работы [34] следует, что за исключением конечного числа λ_n лежат в угле $\{-\omega_\beta\le\arg\lambda\le\pi\}$.

Лемма 8. *Если* (65) *является функцией Вейля оператора* $L_{|\beta|}+V$, *то*

$$\lambda_n\sim\frac{\pi n}{a(e^{i\omega_\beta}-1)},\ n\to+\infty. \tag{70}$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha=\arg\lambda,\ B_\alpha=\begin{cases}0, & -\omega_\beta\le\alpha\le\pi,\\ a, & \pi<\alpha\le\pi-\omega_\beta,\\ b, & 0\le\alpha<-\omega_\beta.\end{cases}$$

Обозначим $\psi(z,\lambda)$ решение уравнения (68), удовлетворяющее условиям $\psi(B_\alpha)=1$, $\psi'(B_\alpha,\lambda)=-i\lambda$. Положим

$$e_\pm(z,\lambda)=(\lambda^2+p_\beta)^{-1/4}\exp\left(\pm i\int_0^x\sqrt{\lambda^2+p_\beta}dt\right),$$

где $p_\beta=q_\beta\cdot(1-\chi_r),\ \chi_r$ — характеристическая функция круга $|z|<r,\ r>a$. Тогда ψ удовлетворяет уравнению

$$\psi(z,\lambda)=\sqrt{\lambda}e_(z,\lambda)+\frac{1}{2i}\int_{B_\alpha}^z(e_-(z,\lambda)e_+(t,\lambda)-e_+(z,\lambda)e_-(t,\lambda))V_\beta(t,\lambda)\psi(t,\lambda)dt,$$

где $V_\beta=\chi_r q_\beta-\widetilde{W}+\frac{d^2}{dt^2}\left((p_\beta+\lambda^2)^{-1/4}\right)(p_\beta+\lambda^2)^{1/4}$. Отсюда для функции $\widetilde{\psi}=\psi/(\sqrt{\lambda}e_-)$ будем иметь

$$\widetilde{\psi}=1+A(\lambda)\widetilde{\psi},$$

где

$$A(\lambda)f=\frac{1}{2i}\int_{B_\alpha}^z\left(1-\exp\left(2i\int_t^z\sqrt{\lambda^2+p_\beta}dt\right)\right)\left(\lambda^2+p_\beta\right)^{-1/2}V_\beta(t,\lambda)f(t)dt.$$

Легко проверить, что оператор $A(\lambda)$ ограничен в пространстве $C(\Gamma)$, и его норма в этом пространстве допускает оценку $O(\lambda^{-1}),\ l\to\infty$, равномерно по $0\le\arg\lambda\le\pi-\omega$. Отсюда имеем

$$\psi(z,\lambda)\sim\sqrt{\lambda}e_(z,\lambda)\left(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right),\ \lambda\to\infty, \tag{71}$$

равномерно по $z\in\Gamma,\ 0\le\arg\lambda\le\pi-\omega$.

Тогда

$$\varphi_a(z,\lambda)=\psi(a,\lambda)\psi(z,\lambda)\int_a^z\psi^{-2}(t,\lambda)dt$$

при достаточно больших λ и $-\omega_\beta\le\alpha\le\pi$. Следовательно,

$$\Phi_a(\lambda)\sim\lambda^{-1}e^{-\lambda a(1+e^{i\omega})}F_a(\lambda), \tag{72}$$

где

$$F_a(\lambda) = \int_a^{ae^{i\omega}} \psi^{-2}(t,\lambda)dt. \tag{73}$$

Согласно (71) при достаточно больших λ из угла $\{0 \le \arg\lambda \le \pi - \omega\}$

$$\psi(z,\lambda) \sim \sqrt{\lambda} e_(z,\lambda)(1 + O\left(\lambda^{-1}\right),\ \Gamma \ni z \to \infty.$$

Следовательно,

$$v_\beta(x,\lambda) = C_0\psi(x,\lambda)\int_x^{+\infty}\psi^{-2}(t,\lambda)dt,\ \widehat{v}_\beta(x,\lambda) = C_1\psi(xe^{i\omega_\beta},\lambda)\int_x^{+\infty}\psi^{-2}(te^{i\omega_\beta},\lambda)dt, \tag{74}$$

где $C_{0,1} = \mathrm{const}$.

Из условия леммы следует, что функции v_β и $\widehat{v}_\beta$ удовлетворяют равенству (63) (при всех λ, в которых определены функции v_β и $\widehat{v}_\beta$), откуда в силу равенств (72) получим

$$\int_\Gamma \psi^{-2}(t,\lambda)dt = 0,$$

что ввиду (73) дает

$$F_a(\lambda) = \int_a^{+\infty}\psi^{-2}(t,\lambda)dt - \int_{ae^{i\omega}}^{\infty e^{i\omega}}\psi^{-2}(t,\lambda)dt.$$

Подставляя сюда (71), будем иметь

$$\begin{aligned} F_a(\lambda) &\sim \frac{1}{2i\lambda}\left(e^{2i\lambda a}(1+O\left(\lambda^{-1}\right) - e^{2i\lambda a e^{i\omega}}(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2i\lambda}e^{2i\lambda a}\left(1 - e^{2i\lambda a(1-e^{i\omega})}\left(1+O\left(\lambda^{-1}\right)\right)\right),\ \lambda\to\infty, \end{aligned}$$

равномерно по $-\omega_\beta \le \arg\lambda \le \pi$. Отсюда и из (72) следует утверждение леммы.

Теперь остается только применить Теорему 2 из [11], согласно которой из соотношения (70) следуют a) — c). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш М.В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений*// ДАН СССР. Т. 77. № 1. 1951. С. 11–14.
2. Келдыш М.В. *Об одной тауберовой теореме*// Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова. Т. 38. 1951. С. 77–86.
3. Коренблюм Б.И. *Общая тауберова теорема для отношения функций*// ДАН СССР. Т. 88. № 5. 1953. С. 745–748.
4. Агранович М.С. *Спектральные свойства задач дифракции.* В кн.: Войтович Н.Н., Каценеленбаум В.З., Сивов А.Н. *Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции.* М. 1977.
5. Маркус А.С., Мацаев В.И. *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики.* Тр. Московского математического общества. 1982.
6. Шкаликов А.А. *О базисности корневых векторов возмущенного самосопряженного оператора.* Теория функций и дифференциальные уравнения, Сб. статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. Тр. МИАН. Т. 269. М. 2010. С. 290—303.
7. Садовничий В.А., Подольский В.Е. *Следы операторов*// УМН. Т. 61(371). № 5. 2006. С. 89—156.
8. Davies E.B. *Non-self-adjoint differential operators*// Bull. London Math. Soc. V. 34. № 5. 2002. P. 513–532.
9. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов.* М.: Мир. 1972.
10. Ambarzumian V.A. *Überline Frage der Eigenwerttheorie*// Zs. f. Phys. V. 53. 1929. P. 690–695.

11. Ишкин Х.К. *О критерии локализации собственных чисел спектрально неустойчивого оператора*// Докл. РАН. Т. 429. № 3. 2009. С. 301–304.
12. Ишкин Х.К. *Об условиях локализации предельного спектра модельного оператора, связанного с уравнением Орра – Зоммерфельда*// Докл. РАН. Т. 445. № 5. 2012. С. 506–509.
13. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 4. М.: Мир. 1982.
14. Наймарк М.А. *Исследования спектра и разложения по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси*// Тр. Моск. матем. об-ва. Т. 3. 1954. С. 181 – 270.
15. Лянце В.Э. *О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. I*// Матем. сб. Т. 64(106). № 4. 1964. С. 521-–561.
16. Лянце В.Э. *О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. II*// Матем. сб. Т. 65(107). № 1. 1964. С. 47—103.
17. Павлов Б.С. *О несамосопряженном операторе Шредингера на полуоси. I — III*// В сб. "Проблемы математической физики". Вып. 1. 1966. С. 102–132; Вып. 2. 1967. С. 102–132; Вып. 3. 1968. С. 59–80.
18. Муртазин Х.Х. *О свойствах резольвенты дифференциального оператора с комплексными коэффициентами*// Мат. заметки. Т. 31. № 2. 1982. С. 231–244.
19. Сахнович Л.А. *О спектре радиального уравнения Шредингера в окрестности нуля*// Матем. сб. Т. 67(109). № 2. 1965. С. 221 – 243.
20. Глазман И.М. *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.* М.: Физматгиз. 1963.
21. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 2. М.: Мир. 1978.
22. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* Т. 1. М.: Мир. 1977.
23. Наймарк М.А. *Линейные дифференциальные операторы.* М.: Наука. 1969.
24. Муртазин Х.Х., Амангильдин Т.Г. *Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля*// Матем. сб. Т. 110(152). № 1. 1979. С. 135—149.
25. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Наука. 1983.
26. Зоммерфельд А. *Строение атома и спектры.* Т. 1. М.: Гостехиздат. 1956.
27. Ишкин Х.К., Муртазин Х.Х. *О квантовом дефекте оператора Дирака с неаналитическим потенциалом*// ТМФ. Т. 125. № 3. 2000. С. 444–452.
28. Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций.* М.,Л.: ГИТТЛ, 1950.
29. Ишкин Х.К. *О спектральной неустойчивости оператора Штурма–Лиувилля с комплексным потенциалом*// Дифф. уравнения. Т. 45. № 4. 2009. С. 480 – 495.
30. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака.* М.: Наука. 1988.
31. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* М.: Физматлит. 2007.
32. Duistermaat J. J., Grünbaum F. A., *Differential equations in the spectral parameter*// Commun. Math. Phys. V. 103. 1986 P. 177–240.
33. Обломков А. А. *Безмонодромные операторы Шредингера с квадратично растущим потенциалом*// ТМФ. Т. 121. № 3. 1999. С. 374-–386.
34. Ишкин Х.К. *О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма – Лиувилля на кривой*// Мат. Заметки. Т. 78. № 1. 2005. С. 72 – 84.

Хабир Кабирович Ишкин,
Башкирский государственный университет,
ул. З. Валиди, 32,
450074, г. Уфа, Россия
E-mail: Ishkin62@mail.ru

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 56-62.

УДК 517.518.87

ВАРИАНТ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХААРА С УЗЛАМИ НА Π_0-СЕТКАХ

К.А. КИРИЛЛОВ, М.В. НОСКОВ

Аннотация. Предложен вариант двумерного дискретного преобразования Хаара с 2^D узлами, образующими Π_0-сетки, связанный с треугольными частичными суммами ряда Фурье–Хаара заданной функции. Вследствие структуры Π_0-сеток вычисление коэффициентов этого дискретного преобразования основано на кубатурной формуле с 2^D узлами, точной для полиномов Хаара степеней, не превосходящих D, благодаря чему все коэффициенты $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ построенного преобразования совпадают с коэффициентами Фурье–Хаара $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ для функций, являющихся полиномами Хаара степеней не выше $D - \max\{m_1, m_2\}$ $(0 \leqslant m_1 + m_2 \leqslant d$, где $d \leqslant D)$. Стандартное двумерное дискретное преобразование Хаара с 2^D узлами таким свойством не обладает.

Ключевые слова: кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара, дискретное преобразование Хаара, Π_0-сетки.

1. Введение

Существенный интерес в вычислительной математике вызывает задача применения кубатурных формул, точных на некоторой конечной ортонормированной системе функций, к дискретному преобразованию Фурье по этой системе. Так, приложения кубатурных формул высокой тригонометрической точности к дискретному преобразованию Фурье по тригонометрической системе рассмотрены в [1].

Идея использования треугольных частичных сумм ряда Фурье заданной функции при построении дискретного преобразования Фурье, реализованная в статье [1] для случая тригонометрической системы, в настоящей работе применена к построению варианта двумерного дискретного преобразования Хаара с узлами, образующими Π_0-сетки, являющиеся сетками, узлы которых распределены достаточно равномерно – если Π_0-сетка образована 2^D узлами, то каждый двоичный прямоугольник площади 2^{-D} содержит ровно один ее узел. Благодаря указанной структуре Π_0-сеток, вычисление коэффициентов построенного в данной работе дискретного преобразования основано на кубатурной формуле с 2^D узлами, точной для полиномов Хаара степеней, не превосходящих D, вследствие чего для любой функции, являющейся полиномом Хаара степени, не выше $D - \max\{m_1, m_2\}$ $(0 \leqslant m_1 + m_2 \leqslant d$, где $d \leqslant D)$, все коэффициенты $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ построенного преобразования равны соответствующим коэффициентам Фурье–Хаара $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$. Последнее свойство отсутствует у стандартного двумерного дискретного преобразования Хаара, связанного с прямоугольными частичными суммами ряда Фурье–Хаара функции и основанного на кубатурной формуле с прямоугольной сеткой узлов, для которой степень точности Хаара равна $M = \min\{M_1, M_2\}$, где 2^{M_1} и 2^{M_2} – число индексов по каждой компоненте при построении узлов кубатурной формулы, $M_1 + M_2 = D$.

K.A. Kirillov, M.V. Noskov, A version of discrete Haar transform with nodes of Π_0-grids.

Поступила 20 декабря 2011 г.

2. Основные определения и вспомогательные утверждения

В настоящей работе используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное А. Хааром [2], отличное от определения этих функций из [3] в их точках разрыва.

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}$, $j/2^{m-1}$ $(m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1})$. Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 – замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l^-_{m,j}$ и $l^+_{m,j}$ соответственно.

Двоичными прямоугольниками назовем множества $l_{m_1,j_1} \times l_{m_2,j_2}$, замкнутыми двоичными прямоугольниками – замыкания этих множеств, $m_n = 1, 2, \ldots, \quad j_n = 1, 2, \ldots, 2^{m_n-1}$, $n = 1, 2$.

Система функций Хаара строится группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \ldots, \quad j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определим следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^-_{m,j}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^+_{m,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m,j}}, \\ \frac{1}{2}[\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)], & \text{если } x \text{ — внутренняя} \\ & \text{точка разрыва,} \end{cases}$$

$\overline{l_{m,j}} = [\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}]$, $\quad m = 1, 2, \ldots,$ $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. В систему функций Хаара включают также функцию $\chi_{0,1}(x) \equiv 1$, которую отнесем к нулевой группе.

В двумерном случае полиномами Хаара степени d будем называть линейные комбинации с вещественными коэффициентами функций $\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)$, называемых мономами Хаара ($m_1 + m_2$ – степень монома), $m_1 + m_2 = 0, 1, \ldots, d$, $j_n \in \Lambda_{m_n}$,

$$\Lambda_{m_n} = \begin{cases} \{1, \ldots, 2^{m_n-1}\}, & \text{если } m_n > 0, \\ \{1\}, & \text{если } m_n = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$n = 1, 2$, при этом хотя бы один из коэффициентов при мономах Хаара степени d должен быть отличен от нуля.

Пусть функция $f(x_1, x_2)$ определена и суммируема на $[0,1]^2$. Будем говорить, что кубатурная формула

$$I[f] = \int\limits_0^1\!\!\int\limits_0^1 f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 \approx \sum_{i=1}^{N} C_i f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = Q[f] \tag{2}$$

с узлами $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0,1]^2$ и коэффициентами при узлах $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ обладает d-свойством Хаара, или просто – d-свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P(x_1, x_2)$ степени, не превосходящей d, т. е.

$$Q[P] = I[P].$$

Кубатурную формулу (2) будем называть формулой степени точности d Хаара, или d-точной, если она обладает d-свойством, но $(d+1)$-свойством не обладает.

Имеет место

Предложение 1. [4] *Если кубатурная формула (2) обладает d-свойством, то число ее узлов N удовлетворяет неравенству*

$$N \geqslant 2^{d-1} + 1.$$

В [3] используется определение функций Хаара, отличное от определения этих функций, введенного в [2], – в [3] функции Хаара считаются непрерывными справа в точках разрыва, в связи с чем двоичные промежутки $l_{m,j}$ $(m = 1, 2, \dots,\ \ j = 1, 2, \dots, 2^{m-1})$ определяются следующим образом:

$$l_{m,j} = \begin{cases} [0,1], & \text{если } m = 1,\ j = 1, \\ [\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}), & \text{если } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ j \in \{1, 2, \dots, 2^{m-1} - 1\}, \\ [1 - \frac{1}{2^{m-1}}, 1], & \text{если } m \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ j = 2^{m-1}. \end{cases} \tag{3}$$

Будем говорить, что 2^d точек единичного квадрата $[0,1]^2$ образуют Π_0-сетку, если каждый двоичный прямоугольник $l_{m_1,j_1} \times l_{m_2,j_2}$ площади 2^{-d} $(m_1 + m_2 = d + 2,\ \ j_n = 1, 2, \dots, 2^{m_n - 1}$, $n = 1, 2)$, являющийся декартавым произведением двоичных промежутков, определенных согласно (3), содержит ровно одну из этих точек.

В [5] показано, что существуют функции $\kappa_{m,j}(x)$, являющиеся линейными комбинациями функций Хаара групп номер $0, 1, \dots, m$, которые удовлетворяют равенству

$$\kappa_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^m & \text{при } x \in l_{m+1,j}, \\ 2^{m-1} & \text{при } x \in \overline{l_{m+1,j}} \setminus l_{m+1,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m+1,j}}, \end{cases} \tag{4}$$

$m = 0, 1, 2, \dots,\ \ j = 1, 2, \dots, 2^m$.

Функции $\kappa_{m_1,j_1}(x_1)\kappa_{m_2,j_2}(x_2)$ будем называть κ-мономами степени d, где $m_1 + m_2 = d$, $j_n = 1, 2, \dots, 2^{m_n},\ \ n = 1, 2$.

Имеет место

Предложение 2. [4] *Кубатурная формула (2) обладает d-свойством, тогда и только тогда, когда она точна для всех κ-мономов степени d.*

Замечание 1. Из равенства (4) следует, что каждый замкнутый двоичный прямоугольник площади 2^{-d} является носителем некоторого κ-монома степени d, именно: $\overline{l_{m_1+1,j_1} \times l_{m_2+1,j_2}} = \operatorname{supp}\{\kappa_{m_1,j_1}(x_1)\kappa_{m_2,j_2}(x_2)\}$, $m_n = 0, 1, 2, \dots,\ \ j_n = 1, 2, \dots, 2^{m_n},\ \ n = 1, 2$.

Докажем

Предложение 3. *Если $K_d(x_1, x_2)$ – произвольный κ-моном степени d, то*

$$I[K_d] = \int_0^1\!\!\int_0^1 K_d(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1. \tag{5}$$

Доказательство. Из соотношения (4) следует, что $K_d(x_1, x_2) = 2^d$ во внутренних точках множества $\operatorname{supp}\{K_d\}$. Учитывая, что $\operatorname{supp}\{K_d\}$ является двоичным прямоугольником площади 2^{-d} (замечание 1), приходим к равенству (5). Предложение доказано.

Имеет место

Предложение 4. [4] *В точках непрерывности функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ $(m = 1, 2, \dots,$ $j = 1, \dots, 2^{m-1})$ имеет место равенство:*

$$\chi^2_{m,j}(x) = \kappa_{m-1,j}(x). \tag{6}$$

Всюду, за исключением точек, в которых функции $\chi_{k,i}(x)$ и $\chi_{m,j}(x)$ одновременно терпят разрыв (если такие точки существуют), произведение этих функций

$$\chi_{k,i}(x)\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}}\chi_{m,j}(x), & \textit{если}, l_{m,j} \subseteq l^-_{k,i}, \\ -2^{\frac{k-1}{2}}\chi_{m,j}(x), & \textit{если}, l_{m,j} \subseteq l^+_{k,i}, \\ 0 & \textit{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{7}$$

где $m \geqslant k,\ \ i \neq j$ при $m = k$.

Из предложения 4 следует

Предложение 5. *Всюду, за исключением точек, в которых полиномы Хаара $P(x_1, x_2)$, $R(x_1, x_2)$ степеней, не превосходящих d, одновременно терпят разрыв (если такие точки существуют), функция $F(x_1, x_2) = P(x_1, x_2)R(x_1, x_2)$ есть полином Хаара степени, не превосходящей $2d$.*

3. Стандартный метод дискретного преобразования Хаара

Пусть $f(x_1, x_2)$ – функция, определенная и суммируемая на $[0, 1]^2$, допускающая разложение в абсолютно сходящийся ряд Фурье – Хаара:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{2} \sum_{m_n=0}^{\infty} \sum_{j_n \in \Lambda_{m_n}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2), \tag{8}$$

где Λ_{m_n} определяется равенством (1), $n = 1, 2$.

При стандартном двумерном дискретном преобразовании Хаара устанавливается взаимно однозначное соответствие между последовательностью значений функции $f(x_1, x_2)$ в узлах $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0, 1]^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, 2^D)$ и множеством коэффициентов этого преобразования $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ $(m_n = 0, 1, \ldots, M_n,\ j_n \in \Lambda_{m_n},\ n = 1, 2,\ \ M_1 + M_2 = D)$ так, что полином Хаара

$$H(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{2} \sum_{m_n=0}^{M_n} \sum_{j_n \in \Lambda_{m_n}} A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2) \tag{9}$$

восстанавливает функцию $f(x_1, x_2)$ в указанных узлах:

$$H(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}),\ i = 1, 2, \ldots, 2^D;$$

при этом число $A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ есть кубатурная сумма в кубатурной формуле

$$\begin{gathered} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} = \int_0^1\!\!\int_0^1 f(x_1, x_2)\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)\,dx_1\,dx_2 \approx \\ \approx 2^{-D} \sum_{i=1}^{2^D} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})\chi_{m_1,j_1}(x_1^{(i)})\chi_{m_2,j_2}(x_2^{(i)}) = A_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}, \end{gathered} \tag{10}$$

т. е. приближенное значение коэффициента Фурье – Хаара $c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)}$ функции $f(x_1, x_2)$, $m_n = 0, 1, \ldots, M_n,\ j_n \in \Lambda_{m_n},\ n = 1, 2$. Узлы $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)})$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^D)$, в которых вычисляются значения функции $f(x_1, x_2)$, считаются принадлежащими прямоугольной сетке

$$\{\big((2i_1 - 1)2^{-M_1-1}, (2i_2 - 1)2^{-M_2-1}\big) :\ i_n = 1, 2, \ldots, 2^{M_n},\ n = 1, 2\}.$$

Таким образом, в соответствии с (9) стандартный метод двумерного дискретного преобразования Хаара предполагает множество индексов m_1, m_2 таковым, что

$$S(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{2} \sum_{m_n} \sum_{j_n \in \Lambda_{m_n}} c_{m_1,m_2}^{(j_1,j_2)} \chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2) \tag{11}$$

есть прямоугольная частичная сумма ряда (8) $(m_n$ в сумме из правой части (11) принимает значения $0, 1, \ldots, M_n,\ n = 1, 2)$, а вычисление приближенных значений коэффициентов

Фурье – Хаара по формуле (10) проводится на основе кубатурной формулы

$$\begin{gathered} I[f] = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \approx \\ \approx 2^{-M_1-M_2}\sum_{i_1=1}^{2^{M_1}}\sum_{i_2=1}^{2^{M_2}} f\left((2i_1-1)2^{-M_1-1},(2i_2-1)2^{-M_2-1}\right) = Q_1[f], \end{gathered} \tag{12}$$

являющейся декартовым произведением двух квадратурных формул с 2^{M_1} и 2^{M_2} узлами.

Предложение 6. *Степень точности Хаара кубатурной формулы (12) равна* $M = \min\{M_1, M_2\}$.

Доказательство. Каждому замкнутому двоичному прямоугольнику площади 2^{-M} принадлежат ровно $2^{\max\{M_1,M_2\}}$ узлов кубатурной формулы (12), причем все эти узлы являются его внутренними точками. Тогда в соответствии с замечанием 1 и равенствами (4), (5) для каждого κ-монома $K_M(x_1,x_2)$ степени M имеем:

$$Q_1[K_M] = 2^{-M_1-M_2}\times 2^{\max\{M_1,M_2\}}\times 2^{\min\{M_1,M_2\}} = 1 = I[K_M].$$

В силу предложения 2 отсюда следует, что кубатурная формула (12) обладает M-свойством. Однако $(M+1)$-свойством она не обладает, так как в случае $M = M_1$ не точна, например, для κ-монома $\kappa_{M+1,1}(x_1)$, а в случае $M = M_2$ – для $\kappa_{M+1,1}(x_2)$. Таким образом, степень точности Хаара формулы (12) равна M. Предложение доказано.

Из предложений 5, 6 следует, что при условии $m_1 + m_2 \leqslant M$ для коэффициентов Фурье – Хаара функций $f(x_1,x_2)$, являющихся полиномами Хаара степеней, не превосходящих $M - \max\{m_1,m_2\}$, в приближенном равенстве (10) имеет место точное равенство

$$A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2} = c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2},\ j_n \in \Lambda_{m_n}, n = 1,2, \tag{13}$$

а если $m_1 + m_2 > M$, то выполнение равенства (13) нельзя гарантировать даже для $f(x_1,x_2) \equiv \mathrm{const}$ ни при каких значениях индексов m_1, m_2.

4. Дискретное преобразование Хаара с узлами, образующими Π_0-сетки

Рассматриваемый вариант дискретного преобразования Хаара с 2^D узлами связан с треугольной частичной суммой ряда (8), т. е. с суммой (11), у которой нижние индексы m_1, m_2 входящих в нее коэффициентов ряда Фурье – Хаара удовлетворяют условию

$$m_1 + m_2 \leqslant d, \tag{14}$$

где $d \leqslant D$ – некоторое фиксированное натуральное число. Вычисление коэффициентов $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ $(m_1 + m_2 \leqslant d,\ j_n \in \Lambda_{m_n},\ n = 1,2)$ данного дискретного преобразования проводится по формулам (10), при этом считается, что узлы $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) \in [0,1]^2$ $(i = 1,\ldots,2^D)$ не лежат на границах двоичных прямоугольников $l_{m_1,j_1}\times l_{m_2,j_2}$ площади 2^{-D} $(m_1 + m_2 = D+2)$ и образуют Π_0-сетку. Таким образом, вычисление коэффициентов $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ основано на кубатурной формуле

$$I[f] = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 \approx 2^{-D}\sum_{i=1}^{2^D} f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}) = Q_2[f] \tag{15}$$

с вышеуказанным расположением узлов.

Предложение 7. *Степень точности Хаара формулы (15) равна* D.

Доказательство. Каждому замкнутому двоичному прямоугольнику площади 2^{-D} принадлежит ровно 1 узел кубатурной формулы (15), который является его внутренней точкой. Тогда в соответствии с замечанием 1 и равенствами (4), (5) для каждого κ-монома $K_D(x_1,x_2)$ степени D

$$Q_2[K_D] = 1 = I[K_D].$$

В силу предложения 2 отсюда следует, что кубатурная формула (15) обладает D-свойством. Однако $(D+1)$-свойством она не обладает, так как число узлов любой кубатурной формулы, обладающей $(D+1)$-свойством, не меньше, чем 2^D+1 (предложение 1). Таким образом, степень точности Хаара формулы (15) равна D. Предложение доказано.

Из предложений 5, 7 следует, что в приближенном равенстве (10) имеет место точное равенство (13) для коэффициентов Фурье – Хаара функций $f(x_1,x_2)$, являющихся полиномами Хаара степеней, не превосходящих $D-\max\{m_1,m_2\}$.

Число коэффициентов Фурье – Хаара, нижние индексы которых удовлетворяют неравенству (14), обозначим через $\widetilde{N}(d)$. Указанное число находится по формуле:

$$\widetilde{N}(d) = 2^d(0.5\,d+1). \tag{16}$$

Значение параметра d в неравенстве (14) будем выбирать следующим образом:

$$d = \max\{p \in \mathbb{N}:\ 2^p(0.5\,p+1) \leqslant 2^D\}. \tag{17}$$

Предложение 8. *Для каждого $D \in \mathbb{N}$ существует единственное представление вида*

$$D = 2^{r+1} + r + s - 1, \quad \text{где}\ \ s = 0,1,\ldots,2^{r+1},\ r = 0,1,2,\ldots \tag{18}$$

Значение d, удовлетворяющее равенству (17), находится по формуле

$$d = 2^{r+1} + s - 2 = D - r - 1, \tag{19}$$

где r, s – значения параметров в представлении (18) соответствующего числа D.

Доказательство. При фиксированном $r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$$\Delta_r = \{2^{r+1}+r+s-1:\ s = 0,1,\ldots,2^{r+1}\}$$

есть множество натуральных чисел отрезка $[2^{r+1}+r-1, 2^{r+2}+r-1]$, причем различным значениям $s \in \{0,1,\ldots,2^{r+1}\}$ соответствуют различные натуральные числа этого отрезка. Δ_{r+1} есть множество натуральных чисел отрезка $[2^{r+2}+r, 2^{r+3}+r]$, не пересекающегося с $[2^{r+1}+r-1, 2^{r+2}+r-1]$. Следовательно, различным упорядоченным парам (r,s) соответствуют различные значения $2^{r+1}+r+s-1$ $(s = 0,1,\ldots,2^{r+1},\ r = 0,1,2,\ldots)$, и тогда представление (18) единственно для тех значений D, для которых оно существует. А так как

$$\bigcup_{r=0}^{\infty}\Delta_r = \bigcup_{r=0}^{\infty}\{[2^{r+1}+r-1, 2^{r+2}+r-1]\cap\mathbb{N}\} = \mathbb{N},$$

то существует оно для любого $D \in \mathbb{N}$.

Докажем теперь, что значение d, найденное по формуле (19), удовлетворяет условию (17).

Действительно, в соответствии с (16)

$$\widetilde{N}(2^{r+1}+s-2) = \widetilde{N}(D-r-1) = 2^{D-1} + 2^{D-r-2}s \leqslant 2^D,$$

так как $s \leqslant 2^{r+1}$. В то же время

$$\widetilde{N}(2^{r+1}+s-1) = \widetilde{N}(D-r) = 2^D + 2^{D-r-1}(s+1) > 2^D.$$

Предложение доказано.

Замечание 2. Если значение d найдено по формуле (19), то $\widetilde{N}(d) = 2^D$ только в случае $s = 2^{r+1}$, т. е. для $D = 2^{r+2} + r - 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ В случае $s = 0$ $(D = 2^{r+1} + r - 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots)$ $\widetilde{N}(d) = 2^{D-1}$, а случае $0 < s < 2^{r+1}$ величина $\widetilde{N}(d)/2^D \in (0.5, 1)$ и увеличивается с ростом s.

Таким образом, при $D \neq 2^{r+2} + r - 1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, в треугольной частичной сумме (11), содержащей мономы Хаара $\chi_{m_1,j_1}(x_1)\chi_{m_2,j_2}(x_2)$ степеней не выше d, меньше слагаемых, чем в соответствующей прямоугольной частичной сумме, включающей мономы Хаара, для которых $m_n \leqslant M_n$, $n = 1, 2$, $M_1 + M_2 = D$. Однако, учитывая стремление к нулю коэффициентов $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ при увеличении $m_1 + m_2$, можно ожидать, что качество предлагаемого варианта дискретного преобразования Хаара не хуже, чем при использовании стандартной схемы.

В то же время предложенный в настоящей работе вариант дискретного преобразования Хаара обладает некоторыми преимуществами по сравнению со стандартным преобразованием. Во-первых, при том же числе узлов, что и в стандартном преобразовании, расширяется множество функций $f(x_1, x_2)$, для коэффициентов которых имеет место равенство (13), причем в отличии от стандартного преобразования все коэффициенты $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье – Хаара $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ для полиномов Хаара первых нескольких степеней. Во-вторых, уменьшение числа слагаемых в частичной сумме (11) приводит к уменьшению объема вычислений при аппроксимации функции указанной частичной суммой, в которой вместо коэффициентов Фурье – Хаара $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ заданной функции берутся соответствующие значения $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2} \approx c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кашкин В.Б., Носков М.В., Осипов Н.Н. *Вариант дискретного преобразования Фурье с узлами на параллелепипедальных сетках* // Журнал вычислительной математики и математической физики. Т. 41. 2001. № 3. С. 355–359.
2. A. Haar *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* // Math. Ann. 1910. Vol. 69. P. 331–371.
3. Соболь И.М. *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара.* М.: Наука, 1969. 288 с.
4. M.V. Noskov, K.A. Kirillov *Minimal cubature formulas exact for Haar polynomials* // Journal of Approximation Theory. Vol. 162. Issue 3. March 2010. P. 615–627.
5. Кириллов К.А., Носков М.В. *Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42. № 6. С. 791–799.

Кирилл Анатольевич Кириллов,
Сибирский федеральный университет,
ул. Киренского, 26,
660074, г. Красноярск, Россия
E-mail: `KKirillov@rambler.ru`

Михаил Валерианович Носков,
Сибирский федеральный университет,
ул. Киренского, 26,
660074, г. Красноярск, Россия
E-mail: `MVNoskov@yandex.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 63-82.

УДК 517.946

УБЫВАНИЕ РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВОЙНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л.М. КОЖЕВНИКОВА, А.А. ЛЕОНТЬЕВ

Аннотация. Работа посвящена некоторому классу анизотропных параболических уравнений с двойной нелинейностью, представителем которого является модельное уравнение вида

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n}(|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha-2}u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad p_n \geq \ldots \geq p_1 > k, \quad k \in (1,2).$$

Для решений первой смешанной задачи в цилиндрических областях $D = (0,\infty) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, с однородным краевым условием Дирихле и финитной начальной функцией установлены точные оценки скорости убывания при $t \to \infty$. Ранее такие результаты были получены авторами для $k \geq 2$. Случай $k \in (1,2)$ отличается способом построения галеркинских приближений, который для модельного изотропного уравнения был предложен Э.Р. Андрияновой, Ф.Х. Мукминовым.

Ключевые слова: анизотропное уравнение, параболическое уравнение с двойной нелинейностью, существование решения, скорость убывания решения.

1. Введение

Пусть Ω — неограниченная область пространства $\mathbb{R}_n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного квазилинейного параболического уравнения второго порядка рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad k \in (1,2), \quad (t,\mathbf{x}) \in D; \tag{1}$$

$$u(t,\mathbf{x})\Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \tag{2}$$

$$u(0,\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad \varphi_{x_\alpha}(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s \geq 0$, $\alpha = \overline{1,n}$, подчиняются условиям: $a_\alpha(0) = 0$, $a_\alpha(s) \in C^1(0,\infty)$,

$$\overline{a}s^{(p_\alpha-2)/2} \leqslant a_\alpha(s) \leqslant \widehat{a}s^{(p_\alpha-2)/2}, \tag{4}$$

$$\frac{p_1}{2}a_\alpha(s) \leqslant a_\alpha(s) + a'_\alpha(s)s \leqslant \widehat{b}a_\alpha(s), \tag{5}$$

с положительными константами $\widehat{a} \geq \overline{a}$, $2\widehat{b} \geq p_1 > k$ ($p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$). Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\alpha = \overline{1,n}$, $\widehat{b} = p_n/2$.

Работа посвящена изучению скорости стабилизации при $t \to \infty$ решения задачи (1)–(3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$.

L.M. Kozhevnikova, A.A. Leontiev, Decay of solution of anisotropic doubly nonlinear parabolic equation in unbounded domains.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00440-а).

Поступила 23 декабря 2011 г.

Исследованию поведения решений смешанных задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений второго и высокого порядков при $t \to \infty$ посвящены работы А.К. Гущина, В.И. Ушакова, Ф.Х. Мукминова, А.Ф. Тедеева, Л.М. Кожевниковой, Р.Х. Каримова и др. Обзоры соответствующих результатов можно найти в [1], [2], [3].

В изотропном случае, т.е. когда все p_α равны между собой и равны p, $p \geq 2$, при $k = 2$ задача (1)–(3) исследовалась в работе [3]. Оценки скорости убывания решения задачи Коши для параболического вырождающегося уравнения с анизотропным p-лапласианом и двойной нелинейностью при $k \in (1, 2)$ установлены в работе С.П. Дегтярева, А.Ф. Тедеева [4].

Вопросы существования и единственности решения изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью рассматривались в работах P.A. Raviart, Ж.Л. Лионса, A. Bamberger, O. Grange, F. Mignot, H.W. Alt, S. Luckhaus, F. Bernis и других. Однако для получения оценки снизу убывания решения при $t \to \infty$ нужна его дополнительная гладкость.

Ф.Х. Мукминов, Э.Р. Андриянова [5] предложили обычный способ построения сильного решения для модельного изотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью сразу в неограниченной области на основе галеркинских приближений, которые в случае $k \in (1, 2)$ и $k \geq 2$ строятся различными способами. В работе [6] этот метод адаптирован на некоторый класс анизотропных параболических уравнений вида (1) при $k \geq 2$, и на основе галеркинских приближений получена оценка допустимой скорости убывания решения в неограниченной области. Настоящая работа является продолжением работы [6] для случая $k \in (1, 2)$.

Будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s, $s \in \overline{1,n}$ (область Ω лежит в полупространстве $\mathbb{R}_n^+[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_n \mid x_s > 0\}$, сечение $\gamma_r = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Ниже будет использовано обозначение: $\Omega_a^b = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\}$, при этом значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются.

Предполагается, что начальная функция ограничена и имеет ограниченный носитель так, что

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть область расположена вдоль оси Ox_s, $s \in \overline{1,n}$ и выполнено условие* (6)*. Тогда найдутся положительные числа $\kappa(p_s, k)$, $\mathcal{M}(p_s, k)$ и ограниченное решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи* (1)–(3) *такие, что при всех $t > 0$, $r \geq 2R_0$ справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega_r)} \leqslant \mathcal{M} \exp\left(-\kappa \left[\frac{r^{p_s}}{t}\right]^{1/(p_s-1)}\right) \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}. \tag{7}$$

На основе неравенства (7) устанавливается оценка снизу убывания решения задачи (1)–(3) при $t \to \infty$.

Допустимая скорость стабилизации решения изотропного квазилинейного параболического уравнения высокого порядка при $k = 2$ изучалась А.Ф. Тедеевым [7] для первой смешанной задачи и N. Alikakos, R. Rostmanian [8] для задачи Коши.

Теорема 2. *Пусть область расположена вдоль оси Ox_s, $s \in \overline{1,n}$ и выполнено условие* (6)*. Тогда существует положительное число $C(\varphi, k, p_1, \widehat{a}, \widehat{b})$ и ограниченное решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи* (1)–(3) *такие, что при всех $t \geq 0$ справедливо неравенство*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} \left(C(\varphi)t + 1\right)^{-1/(p_1-k)}. \tag{8}$$

Определим функцию

$$\mu_1(r) = \inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\Omega^r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega^r)} = 1\right\}, \quad r > 0. \tag{9}$$

Будем исследовать убывание в областях, для которых выполнено условие

$$\lim_{r\to\infty} \mu_1(r) = 0. \tag{10}$$

Показано, что если это условие не выполнено, то достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant Mt^{-1/(p_1-k)}, \quad t>0, \tag{11}$$

(см. [6, следствие 2]).

Положим

$$\nu(r)=\inf\left\{\|g_{x_1}\|_{L_{p_1}(\gamma_r)} \;\middle|\; g(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega),\ \|g\|_{L_{p_1}(\gamma_r)}=1\right\}, \quad r>0. \tag{12}$$

Будем считать, что область Ω удовлетворяет условию

$$\int\limits_1^\infty \nu^{p_1/p_s}(r)dr=\infty. \tag{13}$$

Пусть $r(t)$ — произвольная положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$(\mu_1^{p_1}(r(t))t)^{-1/(p_1-k)}\exp\left(\kappa\int\limits_1^{r(t)}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\geq 1, \quad t>0. \tag{14}$$

Существование такой функции следует из (10). Кроме того, из (14), (10) следует, что

$$\lim_{t\to\infty} r(t)=\infty.$$

Теорема 3. *Пусть область расположена вдоль оси Ox_s, $s\in\overline{2,n}$ и выполнены условия* (6)*,* (10)*,* (13)*. Тогда найдется положительное число $M(p_s,p_1,\|\varphi\|_{L_k(\Omega)})$ и ограниченное решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи* (1)*–*(3) *такие, что справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant M\left(t\mu_1^{p_1}(r(t))\right)^{-1/(p_1-k)}, \quad t>0. \tag{15}$$

Если выполнены условия:

$$\mu_1(r)\geq Cr^{-a}, \quad r>1, \quad a,C>0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\ln r}\int\limits_1^r \nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho=\infty,$$

то можно положить

$$r(t)=t^{\varepsilon/(ap_1)}, \quad t>0, \quad \varepsilon\in(0,1), \tag{16}$$

и оценка (15) принимает вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leqslant Mt^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)}, \quad t>0. \tag{17}$$

Выбор функции $r(t)$ формулой (16) является удовлетворительным, поскольку оценка (17) имеет показатель степени близкий к показателю $1/(p_1-k)$ оценки снизу (8). Другие примеры для областей вращения приведены в работе [6].

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\|\cdot\|_{p,Q}$ — норма в $L_p(Q)$, $p\geq 1$, $(\cdot,\cdot)_Q$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$, причем значения $p=2$, $Q=\Omega$ опускаются. Через $D_a^b=(a,b)\times\Omega$ обозначим цилиндр, значения $a=0$ и $b=\infty$ могут отсутствовать.

Банахово пространство $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)}=\sum_{\alpha=1}^n\|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}+\|u\|_k.$$

Банаховы пространства $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, соответственно, по нормам

$$\|u\|_{W^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} = \|u\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T},$$

$$\|u\|_{W^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} = \|u\|_{k,D^T} + \|u_t\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}\|_{p_\alpha,D^T}.$$

Определение 1. *Обобщенным решением задачи* (1)–(3) *назовем функцию* $u(t,\mathbf{x})$ *такую, что при всех* $T>0$ $u(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int\limits_{D^T} \left(-|u|^{k-2}uv_t + \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}v_{x_\alpha} \right) d\mathbf{x}dt = \int\limits_\Omega |\varphi(\mathbf{x})|^{k-2}\varphi(\mathbf{x})v(0,\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{18}$$

для любой функции $v(t,\mathbf{x}) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, $v(T,\mathbf{x})=0$.

Из условий (5) следуют неравенства

$$(p_1-1)a_\alpha(s) \leqslant a_\alpha(s) + 2a'_\alpha(s)s \leqslant \widehat{c}a_\alpha(s), \quad \widehat{c} = 2\widehat{b}-1, \quad s \geq 0, \quad \alpha = \overline{1,n}, \tag{19}$$

которые можно переписать в виде

$$0 \leqslant (a_\alpha(z^2)z)' \leqslant \widehat{c}a_\alpha(z^2), \quad z \in \mathbb{R}, \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{20}$$

Положим $A_\alpha(s) = \int\limits_0^s a_\alpha(\tau)d\tau$, тогда, пользуясь условиями (5), выводим неравенства

$$\frac{p_1}{2}A_\alpha(s) \leqslant a_\alpha(s)s \leqslant \widehat{b}A_\alpha(s), \quad s \geq 0, \quad \alpha = \overline{1,n}. \tag{21}$$

Лемма 1. *Любое ограниченное множество рефлексивного банахова пространства слабо компактно (см.* [9, гл. V, §19.7, теорема 1]*).*

Замечание 1. *Пространства* $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ *являются рефлексивными сепарабельными банаховыми пространствами (см.* [6, замечание 1]*).*

Замечание 2. *В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа "из последовательности* u^M *можно выделить подпоследовательность* u^{M_i}*, сходящуюся в* $L_2(\Omega)$ *при* $i \to \infty$*", будем говорить просто "последовательность* u^M *выборочно сходится в* $L_2(\Omega)$ *при* $M \to \infty$*". Соответственно, будем использовать термин "выборочно слабо сходится" и т.п.*

Лемма 2. *Пусть* $g^M(t,\mathbf{x})$, $M=\overline{1,\infty}$, $g(t,\mathbf{x})$ *— такие функции из* $L_p(Q)$, $1<p<\infty$, *что*

$$\|g^M\|_{p,Q} \leqslant C, \quad g^M \to g \text{ при } M\to\infty \text{ почти всюду в } Q,$$

тогда $g^M \rightharpoonup g$ *при* $M \to \infty$ *слабо в* $L_p(Q)$ *(см.* [10, гл. I, §1.4, лемма 1.3]*).*

Замечание 3. *Лемма 2 сформулирована в* [10] *для ограниченной области* Q*, однако она справедлива и для произвольной неограниченной области. Будем применять лемму 2 для* $Q=\Omega$ *и для* $Q=(0,T)\times\Omega$.

Лемма 3. *Пусть система функций* $\psi_i(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, $i=\overline{1,\infty}$, *линейно независима, и её линейная оболочка является всюду плотным множеством в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$. *Через* P_L *обозначим совокупность функций* $\sum\limits_{i=1}^L d_i(t)\psi_i(\mathbf{x})$, *где* $d_i(t) \in C^\infty[0,T]$. *Тогда множество* $P = \bigcup\limits_{L=1}^\infty P_L$ *плотно в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$.

Доказательство. Покажем плотность множества P в пространстве $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$. Пусть $v(t,\mathbf{x}) \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, очевидно $v(t,\mathbf{x}) \in C([-1,T+1] \to \overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega))$. Выберем произвольное ε и зафиксируем δ, такое что для любых $t, t^* \in [-1, T+1]$, таких что $|t-t^*| < 2\delta$ будет справедливо

$$\|v(t) - v(t^*)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} < \varepsilon. \tag{22}$$

Выберем конечную последовательность точек t_j, $j = \overline{1,N}$, такую что $(-1, T+1) = \bigcup\limits_{j=1}^{N}(t_j - \delta, t_j + \delta)$ и разбиение единицы

$$\sum_{j=1}^{N} w_j(t) = 1, \quad w_j(t) \in C_0^\infty((t_j-\delta, t_j+\delta)) \quad 0 \leqslant w_j(t) \leqslant 1.$$

Из определения системы функций $\psi_k(\mathbf{x})$ следует, что для каждого j, $j = \overline{1,N}$, найдется номер $L_j(\varepsilon)$ и числа f_{jk} такие, что

$$\|v(t_j,\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{L_j} f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} < \varepsilon, \quad j = \overline{1,N}. \tag{23}$$

Покажем, что функции $\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{L_j} w_j(t) f_{jk}\psi_k(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{L}\left(\sum\limits_{j=1}^{N} w_j(t) f_{jk}\right)\psi_k(\mathbf{x})$, $L = \max\limits_{j=\overline{1,N}} L_j$, $f_{jk} = 0$, $k > L_j$, приближают функцию $v(t,\mathbf{x})$ в норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ равномерно по $t \in [-1, T+1]$. Действительно, применив (22), (23), выводим:

$$\max_{t\in[-1,T+1]} \|v(t,\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{L_j} w_j(t) f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} =$$

$$= \max_{t\in[-1,T+1]} \|\sum_{j=1}^{N} w_j(t) v(t,\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{L_j} w_j(t) f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \max_{[-\delta+t_j,\delta+t_j]} \|w_j(t) v(t,\mathbf{x}) - w_j(t)\sum_{k=1}^{L} f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \max_{[-\delta+t_j,\delta+t_j]} \|v(t,\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{L} f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{N} \max_{[-\delta+t_j,\delta+t_j]} \|v(t,\mathbf{x}) - v(t_j,\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \|v(t_j,\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{L} f_{jk}\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} \leqslant N\varepsilon + N\varepsilon = 2N\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Введем обозначение $f_k(t) = \sum\limits_{k=1}^{L} w_j(t) f_{jk}$. Возьмем $w \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$, положим $v(t,\mathbf{x}) = w_t(t,\mathbf{x}) \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$. Согласно доказанному, для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $L(\varepsilon_1)$ такое, что

$$\max_{t\in[-1,T+1]} \|w_t - \sum_{k=1}^{L(\varepsilon_1)} f_k(t)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)} < \varepsilon_1. \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $w(t,\mathbf{x}) = \int\limits_{-1}^{t} w_\tau(\tau,\mathbf{x})d\tau$ и покажем, что функции вида $\sum\limits_{k=1}^{L}(\int\limits_{-1}^{t} f_k(\tau)d\tau)\psi_k(\mathbf{x})$ приближает функцию $w(t,\mathbf{x})$ в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ равномерно по $t\in[-1,T+1]$. Действительно, при $L\to\infty$

$$\max_{t\in[-1,T+1]}\|w(t,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L}\int\limits_{-1}^{t} f_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})d\tau\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}=$$

$$=\max_{t\in[-1,T+1]}\|\int\limits_{-1}^{t} w_\tau(\tau,\mathbf{x})d\tau-\sum_{k=1}^{L}\int\limits_{-1}^{t} f_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})d\tau\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}=$$

$$=\max_{t\in[-1,T+1]}\|\int\limits_{-1}^{t}\left(w_\tau(\tau,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L} f_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\right)d\tau\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant(T+2)\max_{\tau\in[-1,T+1]}\|w_\tau(\tau,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L} f_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}\to 0.$$

Обозначим $d_k(\tau)=\int\limits_{-1}^{\tau} f_k(\rho)d\rho$, тогда, из неравенства (24) и последних соотношений при $L\to\infty$ следует

$$\max_{\tau\in[-1,T+1]}\|w_\tau(\tau,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L} d_k'(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}\to 0,$$

$$\max_{[-1,T+1]}\|w(\tau,\mathbf{x})-\sum_{k=1}^{L} d_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)}\to 0,$$

откуда вытекает $\|w(\tau,\mathbf{x})-\sum\limits_{k=1}^{L} d_k(\tau)\psi_k(\mathbf{x})\|_{\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^{T+1}_{-1})}\to 0.$ □

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(\mathbf{x})\in\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$, $p_1\geq k,\ k\in(1,2)$, *тогда существует обобщенное решение* $u(t,\mathbf{x})$ *задачи* (1)–(3), *для любого* $T>0$, *удовлетворяющее условиям*

$$u\in L_\infty((0,\infty),\overset{\circ}{W}{}^{\,1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega));\tag{25}$$

$$|u|^{(k-2)/2}u_t\in L_2(D^T),\quad u\in C([0,\infty),L_k(\Omega));\tag{26}$$

$$u_t\in L_k(D^T).\tag{27}$$

При этом справедливы неравенства

$$(k-1)\|u(t)\|_k^k+k\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_0^t\|u_{x_\alpha}(\tau)\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}d\tau\leqslant(k-1)\|\varphi\|_k^k,\quad t\geq 0;\tag{28}$$

$$(k-1)\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k+k\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u_{x_\alpha}(t)\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}\leqslant 0,\quad t>0.\tag{29}$$

Доказательство. Выберем линейно независимую систему функций $\psi_i(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1,\infty}$, такую, что ее линейная оболочка является всюду плотным множеством в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega)$. Будем считать, что эта система является ортонормированной в $L_2(\Omega)$. Положим $I^M = \bigcup_{i=1}^M \operatorname{supp}\psi_i(\mathbf{x})$, $m_i = \max\limits_{\mathbf{x}\in I^M} |\psi_i(\mathbf{x})|$.

Приближенные решения $u^M(t,\mathbf{x})$ будем искать в виде $u^M(t,\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{M} c_i^M(t)\psi_i(\mathbf{x})$, $M = \overline{1,\infty}$. При этом функции $c_i^M(t)$, $t \in [0,\infty)$, определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left(\left((\omega^M)^{k/2-1}u^M\right)_t, \psi_j\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}, (\psi_j)_{x_\alpha}\right) = 0, \tag{30}$$

$$\omega^M = (u^M)^2 + \frac{k}{2}\varepsilon^M, \quad j = \overline{1,M},$$

(числа $\varepsilon^M > 0$ выберем позже) и начальных условий

$$c_i^M(0) = c_i^M, \quad i = \overline{1,M}, \tag{31}$$

подобранных так, что

$$u^M(0,\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{M} c_i^M \psi_i(\mathbf{x}) \to \varphi(\mathbf{x}) \text{ в } \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega) \text{ при } M \to \infty. \tag{32}$$

Отсюда сразу следует, что

$$\|u^M(0)\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)} \leqslant E_1(\|\varphi\|_{W_{k,\mathbf{p}}{}^1(\Omega)}), \quad M = \overline{1,\infty}. \tag{33}$$

Убедимся, что уравнения (30) разрешимы относительно производных $\dfrac{d}{dt}c_i^M(t)$. Очевидно, что уравнения (30) имеют вид

$$\sum_{i=1}^{M} A_{ji}(c_1^M(t),...,c_M^M(t))\frac{d}{dt}c_i^M(t) = F_j(c_1^M(t),...,c_M^M(t)), \quad j = \overline{1,M}, \tag{34}$$

$$A_{ji}(c_1,\ldots,c_M) = \left(\left(\varepsilon^M\frac{k}{2} + (k-1)\left(\sum_{l=1}^{M} c_l\psi_l\right)^2\right)(\omega^M)^{k/2-2}\psi_i, \psi_j\right) =$$

$$= (\psi_i,\psi_j)_M,\ i,j = \overline{1,M}, \quad F_j(c_1,\ldots,c_M) =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{i=1}^{M} c_i \left(a_\alpha\left(\left(\sum_{l=1}^{M} c_l(\psi_l)_{x_\alpha}\right)^2\right)(\psi_i)_{x_\alpha}, (\psi_j)_{x_\alpha}\right), \quad j = \overline{1,M}.$$

Нетрудно проверить, что $(g,h)_M$, $g,h \in C_0^\infty(\Omega)$, является скалярным произведением. Следовательно, матрица коэффициентов $A_{ji}(c_1^M(t),...,c_M^M(t))$ при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ψ_i, $i = \overline{1,M}$, и имеет обратную. Поэтому, систему (34) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}c_i^M(t) = \sum_{j=1}^{M} A_{ij}^{-1}(c_1^M(t),\ldots,c_M^M(t))F_j(c_1^M(t),\ldots,c_M^M(t)), \quad i = \overline{1,M}. \tag{35}$$

Установим теперь оценки для галеркинских приближений. Умножим j-е уравнение (30) на $c_j^M(t)$, и затем все уравнения сложим по j от 1 до M, в результате получим равенства

$$\left(\left((\omega^M)^{k/2-1}u^M\right)_t, u^M\right) + \sum_{\alpha=1}^{n} \left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}, u^M_{x_\alpha}\right) = 0, \quad M = \overline{1,\infty},$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{k-1}{k}\int\limits_{I^M}(\omega^M)^{k/2}d\mathbf{x}-\varepsilon^M\frac{k}{2}\int\limits_{I^M}(\omega^M)^{k/2-1}\right)+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{x_\alpha}\right)=0,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{36}$$

После интегрирования от 0 до t будем иметь

$$\frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|^k_{k,I^M}-\varepsilon^M\frac{k}{2}\int\limits_{I^M}(\omega^M(t,\mathbf{x}))^{k/2-1}d\mathbf{x}+\sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha},u^M_{x_\alpha}\right)_{D^t}=$$

$$=\frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(0)\|^k_{k,I^M}-\varepsilon^M\frac{k}{2}\int\limits_{I^M}(\omega^M(0,\mathbf{x}))^{k/2-1}d\mathbf{x},\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{37}$$

Выберем числа $\varepsilon^M\leqslant 1/M$ так, чтобы были справедливы неравенства

$$\operatorname{mes} I^M\leqslant(\varepsilon^M)^{-k/4},\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{38}$$

Применяя (38), (33), выводим неравенства

$$\|(\omega^M)^{1/2}(0)\|_{k,I^M}\leqslant\left\||u^M(0)|+\left(\frac{k}{2}\varepsilon^M\right)^{1/2}\right\|_{k,I^M}\leqslant\|u^M(0)\|_k+ \tag{39}$$

$$+\left(\frac{k}{2}\varepsilon^M\right)^{1/2}\left(\operatorname{mes} I^M\right)^{1/k}\leqslant E_1+\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2}(\varepsilon^M)^{1/4}\leqslant E_1+\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2},$$

$$\frac{k}{2}\varepsilon^M\int\limits_{I^M}(\omega^M(t,\mathbf{x}))^{k/2-1}d\mathbf{x}\leqslant\left(\frac{k}{2}\varepsilon^M\right)^{k/2}\operatorname{mes} I^M\leqslant\left(\frac{k}{2}\right)^{k/2}(\varepsilon^M)^{k/4}\leqslant\left(\frac{k}{2}\right)^{k/2}. \tag{40}$$

Учитывая (4), соединяя (39), (40), (37), для $t\geq 0$ получаем

$$\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|^k_k+\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}\|^{p_\alpha}_{p_\alpha,D^t}\leqslant E_2,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{41}$$

Кроме того, неравенства (4), (41) позволяют установить оценки

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\|a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1),D^t}\leq\widehat{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\|u^M_{x_\alpha}\|^{p_\alpha-1}_{p_\alpha,D^t}\leqslant E_3,\quad M=\overline{1,\infty}. \tag{42}$$

Здесь и ниже постоянные E_i зависят только от $\widehat{a},\overline{a},\widehat{b},\mathbf{p},\|\varphi\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\,1}(\Omega)}$.

Покажем, что все возможные решения задачи (31), (35) равномерно ограничены при $t\geq 0$. Действительно, пользуясь (41), для $t\geq 0$ выводим

$$\sum_{j=1}^{M}|c_j^M(t)|^2=\|u^M(t)\|^2=$$

$$=\int\limits_{\Omega}|u^M(t)|^k|u^M(t)|^{2-k}d\mathbf{x}\leqslant\|u^M(t)\|^k_k\max_{\mathbf{x}\in I^M}\left|\sum_{j=1}^{M}c_j^M(t)\psi_j(\mathbf{x})\right|^{2-k}\leqslant$$

$$\leqslant E_2\left(\sum_{j=1}^{M}|c_j^M(t)|^2\right)^{(2-k)/2}\left(\sum_{j=1}^{M}m_j^2\right)^{(2-k)/2}.$$

Откуда имеем

$$|c_i^M(t)|^k \leq \left(\sum_{j=1}^M |c_j^M(t)|^2\right)^{k/2} \leqslant E_2 \left(\sum_{j=1}^M m_j^2\right)^{(2-k)/2}, \quad i=\overline{1,M}.$$

Ввиду непрерывности правой части уравнений (35), существуют абсолютно непрерывные функции $c_i^M(t),\ t\in[0,\infty),\ i=\overline{1,M}$, которые почти всюду удовлетворяют системе (35) и начальному условию (31) (см. [11, с. 120]).

Умножим теперь j-е уравнение (30) на $\dfrac{d}{dt}c_j^M(t)$, и затем все уравнения сложим по j от 1 до M, в результате получим равенства

$$\left(\left((\omega^M)^{k/2-1}u^M\right)_t, u_t^M\right) + \sum_{\alpha=1}^n \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)u_{x_\alpha}^M, u_{tx_\alpha}^M\right) = 0, \quad M=\overline{1,\infty},$$

которые можно переписать в виде

$$(k-1)\|(\omega^M)^{k/4-1}u_t^M u^M\|^2 + \varepsilon^M\frac{k}{2}\|(\omega^M)^{k/4-1}u_t^M\|^2 + \tag{43}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_\Omega A_\alpha((u_{x_\alpha}^M(t))^2)d\mathbf{x} = 0, \quad M=\overline{1,\infty}.$$

После интегрирования от 0 до t, пользуясь (21), будем иметь

$$(k-1)\|(\omega^M)^{k/4-1}u_t^M u^M\|_{D^t}^2 + \varepsilon^M\frac{k}{2}\|(\omega^M)^{k/4-1}u_t^M\|_{D^t}^2 +$$

$$+\frac{1}{2\widehat{b}}\sum_{\alpha=1}^n \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M(t))^2)u_{x_\alpha}^M(t), u_{x_\alpha}^M(t)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p_1}\sum_{\alpha=1}^n \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M(0))^2)u_{x_\alpha}^M(0), u_{x_\alpha}^M(0)\right), \quad M=\overline{1,\infty}.$$

Далее, виду справедливости неравенств $(k-1)(u^M)^2+\varepsilon^M\frac{k}{2} \geq (k-1)\omega^M$, применяя (4), пользуясь (33), выводим

$$\|(\omega^M)^{(k-2)/4}u_t^M\|_{D^t}^2 + \sum_{\alpha=1}^n \|u_{x_\alpha}^M(t)\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leqslant E_5, \quad M=\overline{1,\infty}. \tag{44}$$

Пусть T — произвольное положительное число. Из неравенств (41), (44) следует ограниченность последовательности $\{(\omega^M)^{1/2}\}_{M=1}^\infty$ в пространствах $C([0,\infty),L_k(\Omega)),\ \ L_k(D^T)$, последовательности $\{u^M\}_{M=1}^\infty$ в пространствах $C([0,\infty),\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)),\ \ \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ и последовательности $\{(\omega^M)^{(k-2)/4}u_t^M\}_{M=1}^\infty$ в $L_2(D^T)$. Кроме того, из неравенств (42), следует ограниченность последовательностей $a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)u_{x_\alpha}^M$ в пространствах $L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T),\ \alpha=\overline{1,n}$. Установленные факты обеспечивают выборочную слабую сходимость указанных последовательностей при $M\to\infty$ в соответствующих пространствах:

$$u^M \rightharpoonup u \quad \text{в} \quad \overset{\circ}{W}{}^{0,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T),$$

$$a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)u_{x_\alpha}^M \rightharpoonup b_\alpha \quad \text{в} \quad L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T), \quad \alpha=\overline{1,n}.$$

Кроме того, рассмотрим последовательность $v^M=(\omega^M)^{(k-2)/4}u^M,\ M=\overline{1,\infty}$ и последовательность ее производных $v_t^M=(\omega^M)^{(k-6)/4}u_t^M(\frac{k-2}{2}u^2+\omega^M),\ M=\overline{1,\infty}$. Очевидно, из (44) следуют неравенства

$$\|v_t^M\|_{D^t} \leqslant \frac{k}{2}\|(\omega^M)^{(k-2)/4}u_t^M\|_{D^t} \leqslant E_6, \quad M=\overline{1,\infty}, \tag{45}$$

из которых следует выборочная слабая сходимость

$$v_t^M \rightharpoonup g \quad \text{в} \quad L_2(D^T).$$

Ниже докажем, что u^M выборочно почти всюду в D сходится к u, это позволит установить, что $g = (|u|^{(k-2)/2}u)_t$.

Последовательность $u^M \in C([0,\infty), \overset{\circ}{W}{}_{k,\mathbf{p}}^{1}(\Omega))$, $M = \overline{1,\infty}$, ограничена в этом пространстве. Для каждой ограниченной области $Q \subset \Omega$ с гладкой границей имеем компактность вложения $L_1(Q) \subset W_1^1(Q)$. Поэтому, диагональным процессом можно установить выборочную сильную сходимость $u^M(t_j, \mathbf{x}) \to h(t_j, \mathbf{x})$ в $L_1(Q)$ на счетном плотном множестве $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \subset [0,T]$. Будем полагать, что $0, T \in \{t_j\}_{j=1}^{\infty}$. Можно также считать, что $u^M(t_j, \mathbf{x}) \to h(t_j, \mathbf{x})$ выборочно почти всюду в Q при каждом t_j, $j = \overline{1,\infty}$. Совершенно аналогично, при $k \le p_1$ можно также считать, что последовательность $u^M(t_j, \mathbf{x}) \to h(t_j, \mathbf{x})$ сильно в $L_k(Q)$ при каждом t_j, $j = \overline{1,\infty}$.

Следуя Ж.-Л. Лионсу [10, гл. I, §12.2] докажем выборочную сильную сходимость последовательности $v^M = (\omega^M)^{(k-2)/4}u^M$ в пространстве $C([0,T], L_1(Q))$. Сначала, применяя (45), установим равностепенную непрерывность по t последовательности v^M в $L_2(\Omega)$:

$$\|v^M(t_2) - v^M(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} v_t^M(t)dt \right\| \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|v_t^M(t)\| dt \leqslant$$

$$\leqslant |t_2 - t_1|^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|v_t^M(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant E_6 |t_2 - t_1|^{1/2}, \quad t_1, t_2 \in [0,T], \quad M = \overline{1,\infty}. \tag{46}$$

Из неравенств (41) заключаем равномерную по $t \in [0,T]$ ограниченность последовательности $v^M(t, \mathbf{x})$ в $L_2(\Omega)$:

$$\|v^M(t)\| = \|(\omega^M)^{(k-2)/4}u^M(t)\| \leqslant \|(\omega^M)^{k/4}\| = \|(\omega^M)^{1/2}\|_k^{k/2} \leqslant E_7, \quad M = \overline{1,\infty}.$$

Ввиду ограниченности последовательности $v^M(t, \mathbf{x})$, $M = \overline{1,\infty}$, в пространстве $C([0,T], L_2(\Omega))$ она выборочно слабо сходится в $L_2(\Omega)$ при тех же t_j, что и выше. Из установленной выше выборочной сходимости $u^M(t_j, \mathbf{x}) \to h(t_j, \mathbf{x})$ почти всюду в Q при каждом t_j следует выборочная сходимость $v^M(t_j, \mathbf{x}) \to v(t_j, \mathbf{x}) = |h(t_j, \mathbf{x})|^{(k-2)/2} h(t_j, \mathbf{x})$ почти всюду в Q. Далее, на основе теоремы Егорова для любого $\delta > 0$ устанавливается равномерная сходимость $v^M(t_j, \mathbf{x}) \rightrightarrows v(t_j, \mathbf{x})$ на Q_δ, $\operatorname{mes}(Q \backslash Q_\delta) < \delta$. Отсюда, ввиду справедливости неравенств

$$\|v^M(t_j) - v(t_j)\|_{1,Q} \leqslant \operatorname{mes} Q \max_{\mathbf{x} \in Q_\delta} |v^M(t_j, \mathbf{x}) - v(t_j, \mathbf{x})| + \|v^M(t_j) - v(t_j)\|_{1, Q \backslash Q_\delta} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} Q \max_{\mathbf{x} \in Q_\delta} |v^M(t_j, \mathbf{x}) - v(t_j, \mathbf{x})| + \delta^{1/2} \|v^M(t_j) - v(t_j)\|_{2, Q \backslash Q_\delta},$$

следует сильная сходимость $v^M(t_j, \mathbf{x}) \to v(t_j, \mathbf{x})$ в $L_1(Q)$ при каждом t_j.

Для ограниченной области Q из (46) нетрудно установить равномерную фундаментальность последовательности $v^M(t, \mathbf{x})$ по норме $L_1(Q)$:

$$\|v^N(t) - v^M(t)\|_{1,Q} = \|v^N(t) - v^N(t_{j_l}) + v^N(t_{j_l}) - v^M(t_{j_l}) + v^M(t_{j_l}) - v^M(t)\|_{1,Q} \leqslant$$

$$\leqslant 2(\operatorname{mes} Q)^{1/2} E_6 |t - t_{j_l}|^{1/2} + \|v^N(t_{j_l}) - v^M(t_{j_l})\|_{1,Q}.$$

Выбрав конечный набор чисел t_{j_l} с малым шагом и затем увеличивая N, M, добиваемся равномерной по t малости правой части.

Итак, установлена выборочная сильная сходимость $v^M \to v$ в $C([0,T], L_1(Q))$. Сходимость будет также и в $L_1((0,T) \times Q)$, поэтому $v^M \to v$ выборочно сходится почти всюду в $(0,T) \times Q$. Благодаря произвольности Q последовательность v^M выборочно сходится к v

почти всюду в D^T. Кроме того, ввиду произвольности T, выбирая $T = 1, 2, ...,$ диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $v^M \to v$ почти всюду в D при $M \to \infty$. Тогда и последовательность $u^M(t, \mathbf{x})$ выборочно сходится к $h(t, \mathbf{x})$ почти всюду в D. Согласно лемме 2, $u^M(t, \mathbf{x}) \rightharpoonup h(t, \mathbf{x})$ в $L_k(D^T)$ при любом $T > 0$, в силу единственности предела $h(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x})$ почти всюду в D. Таким образом, v^M выборочно сходится к $v = |u|^{(k-2)/2}u$ почти всюду в D.

Согласно лемме 2, $v^M \rightharpoonup v$ слабо в $L_2(D^T)$. Далее, $(v_t^M, w)_{D^T} = -(v^M, w_t)_{D^T}$ для любой функции $w \in C_0^\infty(D^T)$, переходя к пределу при $M \to \infty$, получим

$$(g, w)_{D^T} = -(v, w_t)_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $g = v_t = (|u|^{(k-2)/2}u)_t$. Отметим, что принадлежность $v, v_t \in L_2(D^T)$ влечет $v \in C([0, \infty), L_2(\Omega))$.

Покажем, что последовательность $u_t^M,\ M = \overline{1, \infty}$, ограничена в $L_k(D^T)$. В самом деле, из (41), (44) следует

$$\|u_t^M\|_{k,D^T} = \left(\int\limits_{D^T} (\omega^M)^{k(k-2)/4}|u_t^M|^k(\omega^M)^{(2-k)k/4}d\mathbf{x}dt\right)^{1/k} \leqslant$$

$$\leqslant \|(\omega^M)^{(k-2)/4}u_t^M\|_{2,D^T}\|(\omega^M)^{1/2}\|_{k,D^T}^{(2-k)/2} \leqslant E_8.$$

Из ограниченности $\|u_t^M\|_{k,D^T}$ следует, что $u_t^M \rightharpoonup b$ в $L_k(D^T)$. Тогда $(u_t^M, w)_{D^T} = -(u^M, w_t)_{D^T}$, для любой функции $w \in C_0^\infty(D^T)$, переходя к пределу при $M \to \infty$, получим

$$(b, w)_{D^T} = -(u, w_t)_{D^T},$$

значит $b = u_t$. Тогда, можно считать, что $u_t^M \rightharpoonup u_t$ слабо в $L_k(D^T)$. Отметим, что из принадлежности $u, u_t \in L_k(D^T)$ следует $u \in C([0, \infty), L_k(\Omega))$.

С одной стороны, из оценки (33) и сходимости $u^M(0, \mathbf{x}) \to u(0, \mathbf{x})$ почти всюду при $M \to \infty$, согласно лемме 2, следует слабая сходимость $u^M(0, \mathbf{x}) \rightharpoonup u(0, \mathbf{x})$ в $L_k(\Omega)$ при $M \to \infty$. С другой стороны, согласно выбору (32), $u^K(0, \mathbf{x})$ сильно сходится к $\varphi(\mathbf{x})$ в $L_k(\Omega)$. Ввиду единственности слабого предела, $u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$.

Докажем, что функция $u(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет интегральному тождеству (18). Из (30) следуют тождества

$$\left(\left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M\right)_t, w\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)u_{x_\alpha}^M, w_{x_\alpha}\right)_{D^T} = 0, \quad M = \overline{1, \infty}, \tag{47}$$

справедливые для любой функции $w(\tau, \mathbf{x}) \in P = \bigcup_{L=1}^\infty P_L$. Первое слагаемое проинтегрируем по частям, получим

$$\left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w\right)\Big|_{t=0}^{t=T} - \left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w_t\right)_{D^T} + \tag{48}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^n \left(a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)u_{x_\alpha}^M, w_{x_\alpha}\right)_{D^T} = 0, \quad M = \overline{1, \infty}.$$

Заметим, что $(\omega^M)^{(k-2)/2}|u^M| \leqslant (\omega^M)^{(k-1)/2} \in C([0, \infty), L_{k'}(\Omega))$, так как $\|(\omega^M)^{(k-1)/2}\|_{k'} = \|(\omega^M)^{1/2}\|_k^{k-1}$ ограниченная последовательность в $C[0, \infty)$. Следовательно, по лемме 2, последовательность $(\omega^M)^{(k-2)/2}u^M$ выборочно слабо сходится к $|u|^{k-2}u$ в $L_{k'}(D^T)$ и $(\omega^M(T))^{(k-2)/2}u^M(T) \rightharpoonup |u(T)|^{k-2}u(T)$, $(\omega^M(0))^{(k-2)/2}u^M(0) \rightharpoonup |u(0)|^{k-2}u(0)$ в $L_{k'}(\Omega)$. Также можно утверждать, что $(\omega^M(T))^{1/2} \rightharpoonup |u(T)|$, $(\omega^M(0))^{1/2} \rightharpoonup |u(0)|$ в $L_k(\Omega)$. То, что предельные функции будут именно такими, обосновывается установленной выше сходимостью подпоследовательности u^M почти всюду в D^T, а также почти всюду в Ω при $t = 0, T$.

В (48) можно перейти к пределу при $M \to \infty$, в результате придем к тождеству

$$\left(|u|^{k-2}u, w\right)\Big|_{t=0}^{t=T} - \left(|u|^{k-2}u, w_t\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n} (b_\alpha, w_{x_\alpha})_{D^T} = 0, \tag{49}$$

которое справедливо для любой функции $w \in P$. Ввиду плотности P в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ (лемма 3) тождество (49) справедливо для произвольной $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. При этом пользуемся тем, что $|u|^{k-2}u \in L_{k'}(D^T)$, $b_\alpha \in L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T)$, $\alpha = \overline{1,n}$. В частности, для $w = u$, применяя равенство

$$\int_0^t (|u|^{k-2}u, u_\tau)d\tau = \frac{1}{k}\|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T}, \tag{50}$$

выводим

$$\begin{gathered}\sum_{\alpha=1}^{n}(b_\alpha, u_{x_\alpha})_{D^T} + \|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} - (|u|^{k-2}u, u_t)_{D^T} = \\ = \frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} + \sum_{\alpha=1}^{n}(b_\alpha, u_{x_\alpha})_{D^T} = 0.\end{gathered} \tag{51}$$

Докажем, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ справедливо равенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(b_\alpha, v_{x_\alpha})_{D^T} = \sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha((u_{x_\alpha})^2)u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha})_{D^T}. \tag{52}$$

Вычтем из (37) при $t = T$ равенства (48), для $w \in P$ получим соотношения

$$\begin{gathered}-\left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w\right)\Big|_{t=0}^{t=T} + \left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w_t\right)_{D^T} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((u^M_{x_\alpha})^2)u^M_{x_\alpha}, (u^M - w)_{x_\alpha}\right)_{D^T} + \\ + \frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} - \varepsilon^M \frac{k}{2}\int_{I^M}(\omega^M(t,\mathbf{x}))^{k/2-1}d\mathbf{x}\Big|_{t=0}^{t=T} = 0, \quad M = \overline{1,\infty},\end{gathered}$$

из которых, используя условие монотонного неубывания функций $a_\alpha(z^2)z$, $z \in \mathbb{R}$, $\alpha = \overline{1,n}$, (см. (20)), применяя неравенство (40), выводим неравенства

$$\begin{gathered}-\left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w\right)\Big|_{t=0}^{t=T} + \left((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w_t\right)_{D^T} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha((w_{x_\alpha})^2)w_{x_\alpha}, (u^M - w)_{x_\alpha}\right)_{D^T} + \\ + \frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} - (\varepsilon^M)^{k/4}\left(\frac{k}{2}\right)^{k/2} \leqslant 0, \quad M = \overline{1,\infty}.\end{gathered}$$

Далее, перейдем к пределу по $M \to \infty$ для фиксированного $w \in P$, при этом используем установленную выше сходимость.

Таким образом, для произвольной $w \in P$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}-\left(|u|^{k-2}u, w\right)\Big|_{t=0}^{t=T} + \left(|u|^{k-2}u, w_t\right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n}\left(a_\alpha(w^2_{x_\alpha})w_{x_\alpha}, (u - w)_{x_\alpha}\right)_{D^T} + \\ + \frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} \leqslant 0.\end{gathered} \tag{53}$$

Согласно лемме 3 множество P плотно в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. Тогда для произвольной функции $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$ найдется такая последовательность $w^l \in P$, что $\|w^l - w\|_{W^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)} \to 0$ при $l \to \infty$. Запишем (53) для $w = w^l$, затем перейдем к пределу при $l \to \infty$. Обоснование предельных переходов при $l \to \infty$

$$\big(a_\alpha((w^l_{x_\alpha})^2)w^l_{x_\alpha}, (u - w^l)_{x_\alpha}\big)_{D^T} \to \big(a_\alpha(w^2_{x_\alpha})w_{x_\alpha}, (u - w)_{x_\alpha}\big)_{D^T}, \quad \alpha = \overline{1,n},$$

приведено в [6]. Таким образом, тождество (53) установлено для произвольной $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$.

Из (53) вычтем (51) и прибавим (49), в результате выводим неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(w^2_{x_\alpha})w_{x_\alpha} - b_\alpha, (u - w)_{x_\alpha})_{D^T} \leq 0, \tag{54}$$

справедливое для любого $w \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$. В (54) положим $w = u + \varepsilon v$, $\varepsilon > 0$, где $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, получим

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha((u_{x_\alpha} + \varepsilon v_{x_\alpha})^2)(u_{x_\alpha} + \varepsilon v_{x_\alpha}) - b_\alpha, v_{x_\alpha})_{D^T} \geq 0.$$

Из последнего неравенства при $\varepsilon \to 0$ следует соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha} - b_\alpha, v_{x_\alpha})_{D^T} \geq 0,$$

из которого, ввиду произвольности v, будем иметь равенство (52). Из (49) и (52) для $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,1}_{k,\mathbf{p}}(D^T)$, заключаем справедливость тождества

$$-\big(|u|^{k-2}u, v_t\big)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^{n}\big(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}, v_{x_\alpha}\big)_{D^T} + (|u|^{k-2}u, v)\Big|_{t=0}^{t=T} = 0. \tag{55}$$

Таким образом, (18) установлено.

Из (51), (52) следует

$$\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^{n}\int_0^t(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}, u_{x_\alpha})d\tau = \frac{k-1}{k}\|\varphi\|_k^k, \quad t \geq 0, \tag{56}$$

дифференцируя которое по t, выводим

$$\frac{k-1}{k}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^{n}(a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}, u_{x_\alpha}) = 0, \quad t > 0. \tag{57}$$

Далее, применяя (4), из (56), (57) выводим (28), (29). □

Предложение 1. *Обобщенное решение $u(t,\mathbf{x})$ задачи (1)–(3) с ограниченной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x}) \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{1}_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ является ограниченным, т.е.*

$$\operatorname{vrai}\sup_{D} \mid u(t,\mathbf{x}) \mid \leqslant B < \infty. \tag{58}$$

Доказательство. Покажем, что если $|\varphi(\mathbf{x})| \leqslant B$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$, то выполняется неравенство (58).

Запишем тождество (55) при $v = u^{(B)}$, где $u^{(B)}$ =max$(u-B,0)$:

$$\int\limits_{D^T}\left(-|u|^{k-2}uu_t^{(B)}+\sum_{\alpha=1}^{n}a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha}u_{x_\alpha}^{(B)}\right)d\mathbf{x}dt+$$

$$+\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^{k-2}u(t,\mathbf{x})u^{(B)}(t,\mathbf{x})d\mathbf{x}\Big|_{t=0}^{t=T}=0.$$

Применяя (50), учитывая, что $u^{(B)}(0)=0$, получим

$$\frac{k-1}{k}\|u^{(B)}(T)\|_k^k+\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^T}a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha}u_{x_\alpha}^{(B)}d\mathbf{x}dt=0.$$

Поскольку

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^T}a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)u_{x_\alpha}u_{x_\alpha}^{(B)}d\mathbf{x}dt=\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^T}a_\alpha(u_{x_\alpha}^2)\big(u_{x_\alpha}^{(B)}\big)^2d\mathbf{x}dt\geq 0,$$

то, ввиду произвольности $T>0$, $\|u^{(B)}(t)\|_k^k\leqslant 0$ для всех $t\geq 0$, следовательно $u^{(B)}(t,\mathbf{x})=0$ для всех $t\geq 0$ при почти всех $\mathbf{x}\in\Omega$. Отсюда следует, что $u(t,\mathbf{x})\leqslant B$.

Выполнив аналогичные действия для функции $\tilde{u}=-u$, установим, что $u(t,\mathbf{x})\geq -B$. □

3. Допустимая скорость убывания решения

Поскольку единственность решения задачи (1)–(3) не установлена, фактически будет получена оценка снизу только для построенного решения.

Доказательство теоремы 2. Сначала предположим, что область Ω является ограниченной, и докажем оценку (8) для галеркинских приближений.

Введем обозначения

$$G^M(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}a_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)(u_{x_\alpha}^M)^2d\mathbf{x},\quad H^M(t)=\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{\Omega}A_\alpha((u_{x_\alpha}^M)^2)d\mathbf{x},$$

$$E^M(t)=\int\limits_{I^M}\left(\frac{k-1}{k}(\omega^M(t))^{k/2}-\varepsilon^M\frac{k}{2}(\omega^M(t))^{(k-2)/2}\right)d\mathbf{x}+\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}(\varepsilon^M)^{k/4},$$

пользуясь (21), получим неравенства

$$\frac{p_1}{2}H^M(t)\leqslant G^M(t)\leqslant\widehat{b}H^M(t),\quad t\geq 0. \tag{59}$$

Перепишем равенства (36), (43) в виде

$$\frac{dE^M(t)}{dt}+G^M(t)=0,\quad t>0, \tag{60}$$

$$\int\limits_{I^M}\left((k-1)(u^M)^2+\frac{k}{2}\varepsilon^M\right)(\omega^M)^{(k-4)/2}(u_t^M)^2+\frac{1}{2}\frac{dH^M(t)}{dt}=0,\quad t>0. \tag{61}$$

Применяя интегральное неравенство Коши-Буняковского, устанавливаем соотношения

$$\left(\frac{dE^M(t)}{dt}\right)^2=\left(\int\limits_{I^M}\left((k-1)(\omega^M)^{(k-2)/2}+\varepsilon^M\frac{k}{2}(2-k)(\omega^M)^{(k-4)/2}\right)u^Mu_t^Md\mathbf{x}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant \left((k-1)\left(\int\limits_{I^M}(\omega^M)^{(k-4)/2}(u^M)^2(u_t^M)^2\right)^{1/2}\left(\int\limits_{I^M}(\omega^M)^{k/2}\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon^M\frac{k}{2}\left(\int\limits_{I^M}(\omega^M)^{(k-4)/2}(u_t^M)^2\right)^{1/2}\left(\int\limits_{I^M}(2-k)(\omega^M)^{(k-2)/2}\right)^{1/2}\right)^2.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского для сумм, согласно (61), (40), выводим

$$\begin{gathered}\left(\frac{dE^M(t)}{dt}\right)^2\leqslant\int\limits_{I^M}\left((k-1)(u^M)^2+\varepsilon^M\frac{k}{2}\right)(\omega^M)^{(k-4)/2}(u_t^M)^2d\mathbf{x}\times\\ \times\int\limits_{I^M}\left((k-1)(\omega^M)^{k/2}+(2-k)\varepsilon^M\frac{k}{2}(\omega^M)^{(k-2)/2}\right)d\mathbf{x}\leqslant\\ \leqslant-\frac{1}{2}\frac{dH^M(t)}{dt}\left\{\int\limits_{I^M}\left((k-1)(\omega^M)^{k/2}-\varepsilon^M\frac{k^2}{2}(\omega^M)^{(k-2)/2}\right)d\mathbf{x}+k\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}(\varepsilon^M)^{k/4}\right\}=\\ =-\frac{k}{2}\frac{dH^M(t)}{dt}E(t).\end{gathered}\tag{62}$$

Из (62), (60), (59) следуют неравенства

$$\frac{k}{2}E^M(t)\frac{dH^M(t)}{dt}\leqslant\frac{dE^M(t)}{dt}G^M(t)\leqslant\frac{p_1}{2}\frac{dE^M(t)}{dt}H^M(t),$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dH^M(t)}{dt}/H^M(t)\leqslant\frac{p_1}{k}\frac{dE^M(t)}{dt}/E^M(t).$$

Решая дифференциальное неравенство, применяя (59), получаем оценки

$$\frac{1}{\widehat{b}}G^M(t)\leqslant H^M(t)\leqslant H^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k},\quad t>0.\tag{63}$$

Далее, соединяя (60), (63), (59), выводим соотношения

$$\begin{gathered}\frac{dE^M(t)}{dt}\geq-\widehat{b}H^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k}\geq\\ \geq-\frac{2\widehat{b}}{p_1}G^M(0)(E^M(t))^{p_1/k}/(E^M(0))^{p_1/k},\end{gathered}$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dE^M(t)}{dt}/(E^M(t))^{p_1/k}\geq-\frac{2\widehat{b}}{p_1}G^M(0)/(E^M(0))^{p_1/k}.$$

Решая дифференциальное неравенство, получаем оценку

$$E^M(t)\geq E^M(0)\left(t\frac{2(p_1-k)\widehat{b}}{kp_1}G^M(0)/E^M(0)+1\right)^{-k/(p_1-k)},\quad t>0.\tag{64}$$

Для фиксированного $t>0$ при $k\leq p_1$ в случае ограниченной области Ω последовательность $u^M(t,\mathbf{x})$ выборочно сильно сходится при $M\to\infty$ к $u(t,\mathbf{x})$ в пространстве $L_k(\Omega)$. Очевидно,

$$E^M(t)\leqslant\frac{k-1}{k}\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k+\left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}(\varepsilon^M)^{k/4},\quad M=\overline{1,\infty},$$

и, согласно (38), выполнено неравенство

$$\lim_{M\to\infty} E^M(t) \leqslant \frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k = E(t).$$

Кроме того, ввиду (40), справедливы неравенства

$$\lim_{M\to\infty} E^M(0) \geq \lim_{M\to\infty}\left(\frac{k-1}{k}\|u^M(0)\|_k^k + \left(\frac{2}{k}\right)^{1/2}\frac{2-k}{2}(\varepsilon^M)^{k/4}\right) = \frac{k-1}{k}\|\varphi\|_k^k,$$

$$\lim_{M\to\infty} G^M(0) \leqslant \lim_{M\to\infty}\widehat{a}\sum_{\alpha=1}^n \|u^M_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} = \widehat{a}\sum_{\alpha=1}^n \|\varphi_{x_\alpha}\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}.$$

После предельного перехода в (64) при $M\to\infty$ получим

$$\|u(t)\|_k^k \geq \|\varphi\|_k^k(1 + C(\|\varphi\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)})t)^{-k/(p_1-k)}. \tag{65}$$

Установим теперь оценку (65) для решения задачи (1)–(3) в неограниченной области Ω. Пусть $\Omega^{(l)}\subset\Omega$ — ограниченные подобласти такие, что $\Omega^{(l)}\subset\Omega^{(l+1)}$, $l=\overline{1,\infty}$, $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}\Omega^{(l)}=\Omega$. Через $u^{(l)}$ обозначим решения в $\Omega^{(l)}$ с финитной начальной функцией ($\operatorname{supp}\varphi\subset\Omega^{(1)}$), можно считать эти решения продолженными нулем вне $\Omega^{(l)}$. Сходимость последовательности $u^{(l)}(t,\mathbf{x})$ к $u(t,\mathbf{x})$ решению задачи (1)–(3) при $l\to\infty$ устанавливается практически также как в теореме 4.

Свойство (25) обеспечивает оценку

$$\|u^{(l)}\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\,1}(\Omega)} \leqslant C, \quad t>0, \quad l=\overline{1,\infty}.$$

Тогда при фиксированном $t>0$ можно считать, что $u^{(l)}(t,\mathbf{x}) \rightharpoonup u(t,\mathbf{x})$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_k(\Omega^r)$ при $l\to\infty$. Пользуясь компактностью вложения $W_k^1(\Omega^r)\subset L_k(\Omega^r)$, устанавливаем сильную сходимость $u^{(l)}(t,\mathbf{x})\to u(t,\mathbf{x})$ в $L_k(\Omega^r)$ при $l\to\infty$ для любого $r>0$. Благодаря оценке (7) для любого ε существует r такое, что выполнено неравенство

$$\|u^{(l)}(t)\|^k_{k,\Omega_r} \leqslant \varepsilon.$$

Для $u^{(l)}$ справедлива оценка (65), тогда

$$\|u^{(l)}(t)\|^k_{k,\Omega^r} \geq \|\varphi\|_k^k(1 + C(\|\varphi\|_{W^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)})t)^{-k/(p_1-k)} - \varepsilon.$$

Пользуясь сильной сходимостью в $L_k(\Omega^r)$, переходим к пределу при $l\to\infty$, затем по $r\to\infty$ ($\varepsilon\to 0$). Таким образом, оценка (8) установлена в неограниченной области Ω для произвольного $t\geq 0$. □

4. **Оценки сверху**

В этом параграфе будет доказана теоремы 1, 3 из введения.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\xi(x_s)$ липшицева неотрицательная срезающая функция. Положим в (55) $v=u\xi$, пользуясь (50), получим соотношение

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u|^k\xi\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^n\int\limits_{D^t} a_\alpha(u^2_{x_\alpha})u_{x_\alpha}(u\xi)_{x_\alpha}d\mathbf{x}d\tau = 0.$$

Далее, применяя (4), получаем (с учетом того, что $\xi\varphi=0$)

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\xi(x_s)d\mathbf{x} + \overline{a}\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_{D^t}\xi|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau \leqslant \tag{66}$$

$$\leqslant \widehat{a}\int\limits_{D^t}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}\xi'(x_s)d\mathbf{x}d\tau \equiv I^t.$$

Пусть $\theta(x),\ x>0,$ — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x \geq 1$, нулю при $x \leq 0$, линейная при $x\in[0,1]$. В (66) положим $\xi(x_s)=\theta((x_s-r)/\rho)$, очевидно

$$\xi'(x_s)=\frac{1}{\rho},\quad x\in(r,r+\rho),\quad \xi'(x_s)=0,\quad x\notin(r,r+\rho). \tag{67}$$

Оценим интеграл

$$I^t=\frac{\widehat{a}}{\rho}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}d\mathbf{x}d\tau.$$

Используя неравенство Юнга, применяя (58), для любого $\varepsilon>0$ выводим

$$I^t\leqslant\frac{\widehat{a}}{\varepsilon\rho}\left(\frac{p_s-1}{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+\frac{\varepsilon^{p_s}}{p_s}B^{p_s-k}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u|^k d\mathbf{x}d\tau\right). \tag{68}$$

Соединяя (66), (68), получаем неравенство

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega_{r+\rho}}|u(t,\mathbf{x})|^k d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{r+\rho}}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant \tag{69}$$

$$\leqslant\frac{C_1}{\varepsilon\rho}\left(\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u_{x_s}|^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+\varepsilon^{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r^{r+\rho}}|u|^k d\mathbf{x}d\tau\right).$$

Введем обозначение

$$F_r(t)=\int\limits_{\Omega_r}|u(t,\mathbf{x})|^k d\mathbf{x}+\sum_{\alpha=1}^n\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_r}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau,$$

тогда (69) можно переписать в виде

$$F_{r+\rho}(t)\leqslant\frac{C_2}{\varepsilon\rho}\left(F_r(t)+\varepsilon^{p_s}\int\limits_0^t F_r(\tau)d\tau\right). \tag{70}$$

Далее индукцией по l установим неравенство

$$F_{R_0+l\rho}(t)\leqslant C\left(\frac{2C_2}{\rho}\right)^l t^{l/p_s}\left\{\prod_{i=0}^{l-1}(1+i/p_s)\right\}^{-1/p_s}\|\varphi\|_k^k,\quad l=\overline{0,\infty}. \tag{71}$$

В качестве нулевого шага индукции из неравенства (28) для любых $t>0$ имеем неравенство $F_{R_0}(t)\leqslant C\|\varphi\|_k^k$. Предположим, что (71) справедливо для некоторого целого $l\geq 0$. Подставляя в (70) $\varepsilon=\left[\frac{(1+l/p_s)}{t}\right]^{1/p_s}$, $r=R_0+l\rho$, с учетом (71), получаем

$$F_{R_0+(l+1)\rho}(t)\leqslant C2^l\left(\frac{C_2}{\rho}\right)^{l+1}t^{1/p_s}\left\{\prod_{i=0}^{l}(1+i/p_s)\right\}^{-1/p_s}\|\varphi\|_k^k\times$$

$$\times\left\{t^{l/p_s}+\frac{1+l/p_s}{t}\int\limits_0^t\tau^{l/p_s}d\tau\right\}=C\left(\frac{2C_2}{\rho}\right)^{l+1}t^{(l+1)/p_s}\left\{\prod_{i=0}^{l}(1+i/p_s)\right\}^{-1/p_s}\|\varphi\|_k^k.$$

Неравенство (71) доказано.

Положим $\rho=(r-R_0)/l$. Используя неравенство Стирлинга, из (71) нетрудно получить

$$F_r(t)\leqslant C_3\exp\left(-\frac{l}{p_s}\ln\frac{(r-R_0)^{p_s}}{C_4tl^{p_s-1}}\right)\|\varphi\|_k^k. \tag{72}$$

Полагая l равным целой части выражения $\left[\dfrac{(r-R_0)^{p_s}}{eC_4t}\right]^{1/(p_s-1)}$, из неравенства (72) получим

$$F_r(t)\leqslant C_5\exp\left(-C_6\left[\frac{(r-R_0)^{p_s}}{t}\right]^{1/(p_s-1)}\right)\|\varphi\|_k^k. \tag{73}$$

В случае, когда $l=0$ неравенство (73) следует из соотношения (28). В итоге, при $r\geq 2R_0$ из (73) следует оценка (7). □

Доказательство теоремы 3 проводится на основе следующего утверждения.

Утверждение 1. *Пусть область расположена вдоль оси Ox_s, $s\in\overline{2,n}$ и выполнены условия* (13), (6). *Тогда найдутся положительные числа $\kappa(p_s,k)$, $\mathcal{M}(p_s,k)$ такие, что для построенного ограниченного решения $u(t,\mathbf{x})$ задачи* (1)–(3) *при всех $t\geq 0$, $r\geq 2R_0$ справедлива оценка*

$$\|u(t)\|_{k,\Omega_r}\leqslant\mathcal{M}\exp\left(-\kappa\int\limits_1^r\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k. \tag{74}$$

Доказательство. Пусть $\theta(x)$, $x>0$, — абсолютно непрерывная функция, равная единице при $x\geq r$, нулю при $x\leq R_0$, линейная при $x\in[R_0,2R_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(x)=\delta\nu^{p_1/p_s}(x)\theta(x),\quad x\in(2R_0,r), \tag{75}$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим, в частности, что

$$\theta'(x)=\frac{\theta(2R_0)}{R_0}=\frac{1}{R_0}\exp\left(-\delta\int\limits_{2R_0}^r\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right),\quad x\in(R_0,2R_0). \tag{76}$$

Для любой функции $v(\mathbf{x})\in C_0^\infty(\Omega)$ из определения функции $\nu(\rho)$ следует неравенство

$$\nu(\rho)\|v\|_{p_1,\gamma_\rho}\leq\|v_{x_1}\|_{p_1,\gamma_\rho},\quad \rho>0,$$

из которого следует соотношение

$$\int\limits_{2R_0}^r\theta^{p_s}(\rho)\nu^{p_1}(\rho)\|v\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho\leq\int\limits_{2R_0}^r\theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho. \tag{77}$$

Применяя (77) для любой функции $v\in C_0^\infty(\Omega)$ при $s\in\overline{2,n}$ выводим

$$\int\limits_{2R_0}^r\nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_s}_{p_s,\gamma_\rho}d\rho\leq\max_\Omega|v(\mathbf{x})|^{p_s-p_1}\int\limits_{2R_0}^r\nu^{p_1}(\rho)\theta^{p_s}(\rho)\|v\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho\leqslant$$

$$\leqslant\max_\Omega|v(\mathbf{x})|^{p_s-p_1}\int\limits_{2R_0}^r\theta^{p_s}(\rho)\|v_{x_1}\|^{p_1}_{p_1,\gamma_\rho}d\rho. \tag{78}$$

Отметим, что неравенства (78) справедливы для любой ограниченной функции $v\in\overset{\circ}{W}{}^1_{k,\mathbf{p}}(\Omega)$ (см. [6, следствие 1]).

В (66) положим $\xi(x_s)=\theta^{p_s}(x_s)$, получаем

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant \tag{79}$$

$$\leqslant\widehat{a}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|u||u_{x_s}|^{p_s-1}p_s\theta'(x_s)\theta^{p_s-1}(x_s)d\mathbf{x}d\tau\equiv\widehat{a}I^t.$$

Используя неравенство Юнга выводим

$$I^t\leqslant\varepsilon(p_s-1)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|u_{x_s}|^{p_s}\theta^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+\frac{1}{\varepsilon^{p_s-1}}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}d\tau. \tag{80}$$

Выберем $\varepsilon=\dfrac{\overline{a}}{\widehat{a}}\dfrac{1}{p_s-1}$, соединяя (79), (80), получаем неравенство

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1,\alpha\neq s}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant C_7\int\limits_{D^t}|u|^{p_s}(\theta'(x_s))^{p_s}d\mathbf{x}d\tau. \tag{81}$$

Пользуясь (75), (76), нетрудно привести (81) к виду

$$\frac{k-1}{k}\int\limits_{\Omega}|u(t,\mathbf{x})|^k\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}+\overline{a}\sum_{\alpha=1,\alpha\neq s}^{n}\int\limits_{D^t}\theta^{p_s}|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha}d\mathbf{x}d\tau\leqslant \tag{82}$$

$$\leqslant C_7\frac{1}{R_0^{p_s}}\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{R_0}^{2R_0}}|u|^{p_s}d\mathbf{x}d\tau+$$

$$+C_7\delta^{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2R_0}^{r}}|u|^{p_s}\nu^{p_1}(x_s)\theta^{p_s}(x_s)d\mathbf{x}d\tau=I_1^t+I_2^t.$$

Используя [6, неравенство (73)], применяя соотношение (28), выводим

$$I_1^t\leqslant C_8\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\int\limits_0^t\|u_{x_s}\|_{p_s}^{p_s}d\tau\leqslant C_9\exp\left(-\delta p_s\int\limits_{2R_0}^{r}\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k. \tag{83}$$

Применяя (78), получаем

$$I_2^t\leqslant C_{10}\delta^{p_s}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega_{2R_0}^{r}}|u_{x_1}|^{p_1}\theta^{p_s}d\mathbf{x}d\tau. \tag{84}$$

Выбирая $\delta=\left(\dfrac{\overline{a}}{C_{10}}\right)^{1/p_s}$, соединяя (82) – (84), выводим

$$\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_{k,\Omega_r}^k+\overline{a}\sum_{\alpha=2,\alpha\neq s}^{n}\int\limits_0^t\|u_{x_\alpha}(t)\|_{\Omega_r}^{p_\alpha}d\tau\leqslant C_9\exp\left(-C_{11}\int\limits_1^r\nu^{p_1/p_s}(\rho)d\rho\right)\|\varphi\|_k^k.$$

Неравенство (74) доказано. □

Далее, теорема 3 доказывается на основе оценки (74) аналогично доказательству [6, теоремы 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожевникова Л.М., Мукминов Ф.Х. *Оценки скорости стабилизации при* $t \to \infty$ *решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка* // Матем. сб. Т. 191, №2. 2000. С. 91–131.
2. Кожевникова Л.М. *Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения* // Матем. сб. Т. 196, №7. 2005. С. 67–100.
3. Каримов Р.Х., Кожевникова Л.М. *Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами* // Матем. сб. Т. 201, №9. 2010. С. 3–26.
4. Дегтярев С.П., Тедеев А.Ф. $L_1 - L_\infty$ *оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными* // Матем. сб. Т. 198, №5. 2007. С. 45—66.
5. Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х. *Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью*// Уфимск. матем. журн. Т. 3, №3. 2011. С.3-14.
6. Кожевникова Л.М., Леонтьев А.А. *Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью* // Уфимск. матем. журн. Т. 3, №4. 2011. С. 64—85.
7. Тедеев А.Ф. *Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений* // Укр. мат. журн. Т. 44, №10. 1992. С. 1441–1450.
8. N. Alikakos, R. Rostamian *Gradient estimates for degenerate diffusion equation. II* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. V. 91, №3-4. 1981/1982. P. 335–346.
9. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* М.: Наука. 1980. 496 с.
10. Лионс Ж.Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир. 1972. 596 с.
11. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: ИИЛ. Т. 2. 1954.

Лариса Михайловна Кожевникова,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: kosul@mail.ru

Алексей Александрович Леонтьев,
Стерлитамакская государственная педагогическая академия,
пр. Ленина, 37,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: axelerat@mail.ru

УДК 517.95

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ НА МОДЕЛЬНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.Г. ЛОСЕВ, Е.А. МАЗЕПА

Аннотация. В данной работе исследуется асимптотическое поведение положительных решений некоторых квазилинейных эллиптических неравенств на сферически-симметричных некомпактных (модельных) римановых многообразиях. В частности, найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля об отсутствии нетривиальных решений, а также условия существования и мощность множества положительных решений изучаемых неравенств на рассматриваемых римановых многообразиях. Данные результаты обобщают аналогичные утверждения, полученные ранее в работах Naito. Y. и Usami H. для евклидова пространства $\mathbf{R}^n$.

Ключевые слова: квазилинейные эллиптические неравенства, теоремы типа Лиувилля, модельные римановы многообразия.

1. Введение и основные результаты

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений неравенства

$$Lu \equiv \operatorname{div}(A(|\nabla u|)\nabla u) \geq f(u) \tag{1}$$

на модельных римановых многообразиях. В частности, найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля об отсутствии нетривиальных решений неравенства (1).

Одним из истоков указанной проблематики традиционно указывают классификационную теорию двумерных римановых поверхностей. Из теоремы об униформизации следует, что всякая односвязная риманова поверхность конформно эквивалентна одной из следующих модельных поверхностей:

1) сфере (поверхность эллиптического типа);

2) комплексной плоскости (поверхность параболического типа);

3) единичному диску, или, что то же самое, гиперболической плоскости с ее комплексно аналитической структурой (поверхность гиперболического типа).

Отличительным свойством двумерных поверхностей параболического (гиперболического) типа является выполнение (не выполнение) для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данной поверхности является тождественной постоянной. Именно данное свойство послужило основой для распространения понятия параболичности типа на произвольные римановы многообразия. А именно, многообразия, на которых всякая ограниченная снизу супергармоническая функция равна константе, называют многообразиями *параболического* типа.

За последние годы опубликован ряд работ, посвященных вопросам выполнения теорем типа Лиувилля для различных классов решений и субрешений линейных уравнений на

A.G. Losev, E.A. Mazepa, On asymptotic behavior of positive solutions of some quasilinear inequalities on model Riemannian manifolds.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-97004-р_поволжье_а).
Поступила 29 ноября 2011 г.

некомпактных римановых многообразиях. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из обзора А.А. Григорьяна (см. [1]).

В частности, точные условия выполнения теорем типа Лиувилля для решений некоторых уравнений и неравенств на сферически-симметричных, или модельных, римановых многообразиях, были получены в работах [2]–[4]. Опишем данные многообразия подробнее.

Фиксируем начало координат $O \in \mathbf{R}^n$ и некоторую гладкую функцию q на интервале $[0,\infty)$ такую, что $q(0)=0$ и $q'(0)=1$. Определим модельное риманово многообразие M_q следующим образом:

1) множеством точек M_q является все $\mathbf{R}^n$;

2) в полярных координатах (r,θ) (где $r \in (0,\infty)$ и $\theta \in S^{n-1}$) риманова метрика на $M_q \setminus \{O\}$ определяется как
$$ds^2 = dr^2 + q^2(r)d\theta^2, \tag{2}$$
где $d\theta$ — стандартная риманова метрика на сфере S^{n-1};

3) риманова метрика в точке O является гладким продолжением метрики (2).

Будем считать далее, что функция A в неравенстве (1) удовлетворяет следующим условиям:
$$\begin{cases} A \in C(0,\infty), \quad A(p) > 0 \quad \text{при} \ \ p > 0, \\ pA(|p|) \in C(\mathbf{R}) \cap C^1(0,\infty), \\ (pA(p))' > 0 \ \text{для} \ p > 0, \end{cases}$$
а функция $f \not\equiv 0$ такова, что
$$f \in C(0,\infty), \quad f(u) \geq 0 \ \text{при} \ u \geq 0 \ \text{и} \ f(0) = 0.$$
Нами будет использоваться также следующее предположение на функцию f:
$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \text{существует неубывающая функция } g \in C(0,\infty) \text{ такая, что} \\ 0 < g(u) \leqslant f(u) \text{ при } u > 0 \text{ и } g(0) = 0. \end{cases}$$

Уравнения подобного вида рассматривались многими авторами в евклидовых пространствах (см., например, [5]–[8]). Наиболее часто в исследованиях встречается функция $A(p)$ следующих видов:
$$A(p) = p^{m-2}, \quad m > 1; \tag{3}$$
$$A(p) = (1+p^2)^{-\frac{1}{2}}; \tag{4}$$
или, в более общем виде
$$A(p) = (1+p^2)^{-\alpha}, \quad \alpha \leqslant \frac{1}{2}. \tag{5}$$

В соответствии с этим, оператор L в неравенстве (1) называется *m-лапласианом* при выборе функции A в виде (3), *оператором средней кривизны* в случае (4) и *обобщенным оператором средней кривизны* в случае (5) при $0 < \alpha < 1/2$.

Целым решением неравенства (1) на римановом многообразии M будем называть функцию $u \in C^1(M)$ такую, что $A(|\nabla u|)\nabla u \in C^1(M)$, и удовлетворяющую неравенству (1) в каждой точке $x \in M$.

В простейшем случае $A(p) \equiv 1$, проблема существования целых решений неравенства (1) в $\mathbf{R}^n$ изучалась в ряде работ. В частности, если f — неубывающая функция, Keller J. и Osserman R. (см. [6] и [7]) показали, что неравенство $\Delta u \geq f(u)$ имеет положительные целые решения тогда и только тогда, когда
$$\int^{\infty} \left(\int^{s} f(t)dt \right)^{-\frac{1}{2}} ds = \infty.$$

Naito Y. и Usami H. в работе [5] обобщили их результат для неравенства (1) и получили критерий существования целых нетривиальных неотрицательных решений неравенства (1) в $\mathbf{R}^n$. Целью настоящей работы является получение аналогичных результатов на классе модельных римановых многообразий. При этом естественно рассматривать оператор L в неравенстве (1) в метрике (2) многообразия M.

Сначала рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$. Введем обозначение

$$I(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)} \int\limits_0^r q^{n-1}(s)\, ds.$$

Заметим, что из условий на метрику модельного риманова многообразия сразу следует, что $I(0) = \lim\limits_{r\to+0} I(r) = 0$.

Теорема 1. *Пусть $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) < \infty$ и многообразие M_q таково, что $\limsup\limits_{r\to\infty} I(r) = \infty$. Тогда если выполнено условие* (F)*, то на M_q не существует целых положительных решений неравенства* (1)*.*

Далее рассмотрим случай, когда $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$. Определим непрерывную функцию $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ в виде

$$\Psi(p) = p^2 A(p) - \int\limits_0^p tA(t)dt, \qquad p \geq 0.$$

Легко показать, что Ψ строго возрастающая и $\Psi(0) = 0$. Также заметим, что при $p \geq 1$ выполнено

$$\Psi(p) + \int\limits_0^1 tA(t)dt = p^2 A(p) - \int\limits_1^p tA(t)dt \geq pA(p),$$

откуда следует, что $\lim\limits_{p\to\infty} \Psi(p) = \infty$.

Таким образом, обратная к Ψ функция Φ определена на $[0,\infty)$. Ясно, что Φ строго возрастающая функция и $\lim\limits_{p\to\infty} \Phi(p) = \infty$.

Теорема 2. *Пусть $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$, и многообразие M_q таково, что $I'(r) \geq k > 0$. Тогда если выполнено условие* (F) *и, кроме того,*

$$\int\limits^{\infty} \left(\Phi \left(k \int\limits^{s} g(t)dt \right) \right)^{-1} ds < \infty, \tag{6}$$

то на M_q не существует целых положительных решений неравенства (1)*.*

Теорема 3. *Пусть $\lim\limits_{p\to\infty} pA(p) = \infty$, и многообразие M_q таково, что $q'(r) \geq 0$. Тогда если*

$$\int\limits^{\infty} \left(\Phi \left(\int\limits^{s} f(t)dt \right) \right)^{-1} ds = \infty, \tag{7}$$

то неравенство (1) *имеет континуум положительных целых решений.*

2. Радиальные решения

В начале данного параграфа сформулируем аналог принципа сравнения, полученный в работе [5], на котором основаны дальнейшие рассуждения.

Лемма 1. ([5]) *Пусть $\Omega \subset M$ ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а u — неотрицательное решение* (1) *в Ω и $v \in C(\overline{\Omega}) \bigcap C^1(\Omega)$ — положительная функция такая, что $A(|\nabla v|)\nabla v \in C^1(\Omega)$, $Lv \leqslant g(v)$ в Ω, и $u \leqslant v$ на границе $\partial\Omega$. Тогда если выполнено условие* (F)*, то $u \leqslant v$ в Ω.*

Основой доказываемых утверждений является изучение радиально-симметричных решений $v(r)$ рассматриваемых неравенств. Несложно показать, что на модельном многообразии M_q

$$Lv(r) \equiv \mathrm{div}(A(|\nabla v(r)|)\nabla v(r)) = q^{1-n}(r)\Big(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r)\Big)'.$$

Далее рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\Big(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r)\Big)' = q^{n-1}(r)g(v(r)), \quad r \geq 0, \tag{8}$$

где g — непрерывная положительная неубывающая на $(0,\infty)$ функция из условия (F).

Пусть $v(r)$ решение уравнения (8) с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$. Заметим, что если $v(r)$ определена для $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$, то $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$. Действительно, проинтегрировав равенство (8) по отрезку $[0,r], r < R$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) = q^{1-n}(r)\int\limits_0^r q^{n-1}(s)g(v(s))ds, \qquad 0 < r < R. \tag{9}$$

Следовательно, $A(|v'(r)|)v'(r) > 0$ для $0 < r < R$, откуда вытекает, что $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$.

Лемма 2. *Пусть условие* (F) *выполнено. Тогда, если неравенство* (1) *имеет положительное целое решение $u(r,\theta) > 0$ на M_q, то на $[0;\infty)$ существует положительное решение $v(r)$ уравнения* (8) *с условиями $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$.*

Доказательство леммы. Предположим противное, то есть указанного в формулировке леммы решения уравнения (8) $v(r)$ не существует, но при этом существует положительное целое решение $u(r,\theta)$ неравенства (1). Из положительности решения неравенства в частности следует, что $u(O) > 0$. Пусть $a \in (0, u(O))$, а $[0;R)$ – максимальный промежуток существования решения v уравнения (8), с условиями $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$. В силу предположения, выполнено $R < \infty$. Выше мы показали, что $v'(r) > 0$ для $0 < r < R$. Тогда мы имеем либо $v(r) \to \infty$ при $r \to R$, либо $v'(r) \to \infty$ при $r \to R$.

В случае $v(r) \to \infty$ при $r \to R$, выберем $R_1 \in (0,R)$ так, чтобы

$$v(R_1) > \max_{\Omega} u(r,\theta), \tag{10}$$

где $\Omega \equiv B_{R_1} = \{(r,\theta) : r \in [0,R_1]\}$. Тогда $Lv = g(v)$ в Ω и $v \geq u$ на $\partial\Omega$. Следовательно, по лемме 1, $u \leqslant v$ в Ω, что противоречит условию $v(0) = a < u(O)$.

Далее рассмотрим случай, когда $v'(r) \to \infty$ при $r \to R$. Если при этом найдется $R_1 \in (0;R)$ такое, что будет выполнено неравенство (10), мы получаем противоречие, аналогичное указанному выше. Пусть $v(r) \leqslant \max\limits_{\theta\in S^{n-1}} u(r,\theta)$ для всех $0 < r < R$. Выберем $R_1 \in (0;R)$ так, чтобы

$$v'(R_1) > \max_{\Omega}\left\{\frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta)\right\}, \tag{11}$$

где $\Omega \equiv B_{R_1} = \{(r,\theta) : r \in [0,R_1]\}$. Обозначим $\delta = \max\limits_{\theta\in S^{n-1}}(u(R_1,\theta) - v(R_1)) > 0$ и пусть $w(r) = v(r) + \delta$. Тогда $w(R_1) \geq u(R_1,\theta)$ для всех $\theta \in S^{n-1}$ и $w(R_1) = u(R_1,\theta^*)$ для некоторого $\theta^* \in S^{n-1}$. Тогда $Lw \leqslant g(w)$ в области Ω, $w \geq u$ на границе $\partial\Omega$ и по лемме получаем $w \geq u$ в Ω.

Далее, учитывая условия $w(R_1) = u(R_1, \theta^*)$, $w(r) \geq u(r,\theta)$ при $(r,\theta) \in B_{R_1}$, получаем

$$v'(R_1) = w'(R_1) \leqslant \frac{\partial u}{\partial r}(R_1, \theta^*),$$

что противоречит (11). Лемма доказана.

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Предположим противное, что неравенство (1) имеет целое решение $u(r,\theta) > 0$. Тогда из леммы 2 следует существование положительного решения $v(r)$ уравнения (8) с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$ на луче $[0;\infty)$.

Так как $g(v)$ и $v(r)$ неубывающие функции, то из (9) следует, что

$$A(|v'(r)|)v'(r) \leqslant g(v(r))I(r). \tag{12}$$

Заметим, что уравнение (8) может быть представлено в виде

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' + (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}A(|v'(r)|)v'(r) = g(v(r)). \tag{13}$$

Объединяя (12) и (13), получаем

$$(A(|v'|)v')' \geq g(v(r))\left[1 - (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}I(r)\right] = g(v(r))I'(r). \tag{14}$$

Напомним, что $I(0) = 0$. Интегрируя неравенство (14) по отрезку $[0;r]$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) \geq \int\limits_0^r g(v(s))I'(s)\,ds \geq g(v(0))I(r). \tag{15}$$

Из условий на функцию A следует, что

$$g(v(0))I(r) \leq A(|v'(r)|)v'(r) \leqslant \lim_{p\to\infty} pA(p) < \infty, \quad r > 0.$$

Устремляя $r \to \infty$ и переходя в левой части неравенства к верхнему пределу, получаем противоречие с конечностью правой части. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что неравенство (1) имеет целое решение $u(r,\theta) > 0$. Тогда, из леммы 2 следует, что на $[0,\infty)$ существует решение $v(r)$ уравнения (8) с начальными условиями $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$. Из (15) и условия теоремы 2 следует, что при $r \to \infty$ справедливо $\lim\limits_{r\to\infty} v'(r) = \infty$. Следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} v(r) = \infty$. Умножая неравенство (14) на $v' > 0$ и интегрируя по отрезку $[0;r]$, получим

$$\int\limits_0^r (A(|v'|)v')'v'\,ds \geq \int\limits_0^r g(v(s))I'(s)v'(s)ds \geq k\int\limits_0^r g(v(s))v'(s)ds = k\int\limits_{v(0)}^{v(r)} g(t)dt.$$

С другой стороны, применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int\limits_0^r (A(|v'|)v')'v'\,ds = \int\limits_0^r v'\,d(A(|v'|)v') = (v'(r))^2A(|v'(r)|) - \int\limits_0^{v'(r)} A(t)t\,dt = \Psi(v'(r)).$$

Следовательно,

$$\Psi(v'(r)) \geq k\int\limits_{v(0)}^{v(r)} g(t)\,dt.$$

Переходя к обратной функции Φ, из последнего неравенства получаем

$$\left(\Phi\left(k\int\limits_{v(0)}^{v(r)} g(s)ds\right)\right)^{-1} \cdot v'(r) \geq 1, \quad r > 0.$$

Интегрируя полученное неравенство по отрезку $[0;r]$, получаем

$$\int\limits_{v(0)}^{v(r)} \left(\Phi\left(k\int\limits_{v(0)}^{s} g(t)dt\right)\right)^{-1} ds \geq r. \tag{16}$$

Переходя к пределу при $r \to \infty$ в (16), имеем

$$\int\limits_{v(0)}^{\infty} \left(\Phi\left(k\int\limits_{v(0)}^{s} g(t)dt\right)\right)^{-1} ds = \infty,$$

что противоречит (6). Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Для доказательства теоремы нам достаточно показать существование положительного решения $v(r)$ уравнения

$$(q^{n-1}(r)A(|v'(r)|)v'(r))' = q^{n-1}(r)f(v(r)), \tag{17}$$

с начальными данными $v(0) > 0$ и $v'(0) = 0$ на интервале $[0;\infty)$, поскольку функция $v(r)$ является радиально-симметричным положительным целым решением неравенства (1).

Выберем $a > 0$ такое, что $f(a) > 0$, и пусть $v(r)$ — решение (17) с начальными условиями $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$. Интегрируя равенство (17) по $[0;r]$, $\quad r < R$, получим

$$A(|v'(r)|)v'(r) = \frac{1}{q^{n-1}(r)}\int\limits_{0}^{r} q^{n-1}(s)f(v(s))ds, \quad 0 < r < R. \tag{18}$$

Тогда $v'(r) \geq 0$ для $0 \leqslant r < R$, так как $A(v'(r))v'(r) \geq 0$. Покажем, что решение $v(r)$ существует на $[0;\infty)$. Предположим противное, что решение $v(r)$ определено на конечном интервале $[0;R)$, $\quad R < \infty$.

Так как $v'(r) \geq 0$ при $0 \leqslant r < R$, то $v(R-0)$ принимает значения в промежутке $(0;\infty]$. Рассмотрим случай, когда $v(R-0) < \infty$. Тогда из (18) следует, что $v'(R-0) < \infty$, и, следовательно, решение v может быть продолжено вправо за R (см. [9], стр. 58-62). Это противоречит выбору R. Следовательно, $v(R-0) = \infty$.

Представим (17) в следующем виде

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' + (n-1)\frac{q'(r)}{q(r)}A(|v'(r)|)v'(r) = f(v(r)).$$

Так как $v'(r) \geq 0$ при $0 \leqslant r < R$ и $q'(r) \geq 0$, то

$$(A(|v'(r)|)v'(r))' \leqslant f(v(r)).$$

Умножая последнее неравенство на $v'(r)$ и интегрируя его по отрезку $[0;r]$, $\quad r < R$, получим

$$\Psi(v'(r)) \leqslant \int\limits_{v(0)}^{v(r)} f(s)ds.$$

Откуда

$$\left(\Phi\left(\int\limits_{v(0)}^{v(r)} f(s)ds\right)\right)^{-1} v'(r) \leqslant 1, \quad r > 0.$$

Интегрируя еще раз по отрезку $[0; r]$, при $r < R$, имеем

$$\int\limits_{v(0)}^{v(r)} \left(\Phi\left(\int\limits_{v(0)}^{s} f(t)dt\right)\right)^{-1} ds \leqslant r, \quad r > 0.$$

Устремляя $r \to R$, получаем

$$\int\limits_{v(0)}^{\infty} \left(\Phi\left(\int\limits_{v(0)}^{s} f(t)dt\right)\right)^{-1} ds \leqslant R < \infty,$$

что противоречит (7). Следовательно, решение v уравнения (17) с начальными данными $v(0) = a$ и $v'(0) = 0$ существует на луче $[0, \infty)$. В силу произвольности выбора значения $a > 0$ получаем континуум различных положительных решений уравнения (17), и, следовательно, неравенства (1). Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Grigor‘yan *Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bull. Amer. Math. Soc. N 36. 1999. p. 135–249.
2. Лосев А.Г. *Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Матем. N 12. 1991. С. 15–24.
3. Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях* // Изв. вузов. Математика. N 6. 1999. С. 41–49.
4. Лосев А.Г., Федоренко Ю.С. *О положительных решениях квазилинейных эллиптических неравенств на некомпактных римановых многообразиях* // Мат. Заметки. Т. 81. Вып. 6. 2007. С. 867-878.
5. Naito Y., Usami H. *Entire solutions of the inequality div* $(A(|Du|)Du) \geq f(u)$ // Math. Z. N 255. 1997. P. 167-175.
6. Keller J.B. *On solutions of* $\Delta u = f(u)$ // Commun. Pure Appl. Math. N 10. 1957. P. 503-510.
7. Osserman R. *On the inequality* $\Delta u \geq f(u)$ // Pack. J. Math. N 7. 1957. P. 1641-1647.
8. Kusano T., Swanson C.A. *Radial entire solutions of a class of quasilinear elliptic equations* // Journal of diff. equation. N 83. 1990. P. 379-399.
9. Ю.Н. Бибиков *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.* Учебное пособие для университетов. Высшая школа. М.: 1991. 304 С.

Александр Георгиевич Лосев,
Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `alexander.losev@volsu.ru`

Елена Алексеевна Мазепа,
Волгоградский государственный университет,
пр. Университетский, 100,
400062, г. Волгоград, Россия
E-mail: `lmazepa@rambler.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 90-101.

УДК 519.65

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕТЧАТЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ n ПЕРЕМЕННЫХ МЕТОДОМ СОБОЛЕВА

Н.Х. МАМАТОВА, А.Р. ХАЁТОВ, Х.М. ШАДИМЕТОВ

Аннотация. В настоящей работе рассматривается задача построения решетчатых оптимальных интерполяционных формул в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических функций n переменных. Найдены коэффициенты решетчатых оптимальных интерполяционных формул.

Ключевые слова: пространство Соболева, оптимальная интерполяционная формула, свойства дискретного аналога оператора Δ^m, оптимальные коэффициенты.

1. Основные результаты

Напомним определение пространства Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических функций n переменных.

Пусть функция $\varphi(x)$ периодична с матрицей периодов H:

$$\varphi(x + H\gamma) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где γ — произвольный целочисленный вектор столбец, H — матрица размера $n \times n$ с единичным определителем.

Матрице H сопоставим ее фундаментальный параллелепипед Ω_0, положив

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x = Hy, \text{ где } 0 \leqslant y_j < 1, \quad j = 1, 2, ..., n\}.$$

Предположим, что $2m > n$, и конечен интеграл

$$\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx,$$

где α — мультииндекс, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$, $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Норма в $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ определяется формулой

$$\|\varphi(x)|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\| = \left[\int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha \varphi(x))^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

N.Kh. Mamatova, A.R. Hayotov, Kh.M. Shadimetov, Construction of optimal grid interpolation formulas in Sobolev space $\widetilde{L_2^{m}}(H)$ of periodic function of n variables by Sobolev method.

Поступила 20 декабря 2011 г.

Элементами пространства $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ служат функции, отличающиеся друг от друга на постоянное слагаемое.

Пространство $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ будет состоять из всех периодических функционалов, которые ортогональны единице, т.е.

$$(\ell(x), 1) = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим интерполяционную формулу вида

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} C_k(x)\varphi(x^{(k)}) \tag{2}$$

в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$, точки $x^{(k)} \in \Omega_0$ и параметры $C_k(x)$ называем соответственно *узлами* и *коэффициентами* интерполяционной формулы (2).

Одной из основных задач теории интерполирования является отыскание максимума погрешности интерполяционной формулы $\varphi(x) \cong P_\varphi(x)$ в функциональных пространствах. Погрешность в некоторой точке z есть значение функционала погрешности на функции φ:

$$(\ell(x), \varphi) \equiv \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z)\varphi(x^{(k)}) =$$

$$= \int_{\Omega_0} \left[\left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z)\delta(x - x^{(k)})\right) * \phi_0(H^{-1}x)\right] \varphi(x)dx, ^1$$

где $\delta(x)$ — известная дельта-функция Дирака, $\phi_0(H^{-1}x) = \sum\limits_{\beta} \delta(x - H\beta)$,

$$\ell(x) = \left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z)\delta(x - x^{(k)})\right) * \phi_0(H^{-1}x) \tag{3}$$

— *функционал погрешности* интерполяционной формулы.

Переменными параметрами интерполяционной формулы являются узлы $x^{(k)}$ и коэффициенты $C_k(z)$. *Оптимальной интерполяционной формулой* называем такую, функционал погрешности которой при заданных узлах имеет наименьшую по вариациям коэффициентов норму в $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$.

Если узлы $x^{(k)}$ являются точками решетки, т.е. расположены в точках вида $x^{(\gamma)} = hH\gamma$, то интерполяционную формулу называем *решетчатой*. Здесь h — малый параметр, называемый *шагом решетки*.

В настоящей работе построены решетчатые оптимальные интерполяционные формулы в пространстве Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$. Аналогичная задача впервые поставлена и рассмотрена Соболевым [1], где найдена экстремальная функция интерполяционной формулы в пространстве $W_2^{(m)}$ функций, у которых производные порядка m интегрируемы с квадратом.

Следует отметить, что решение при $p = 2$ (теорема Холлидея [2]) задачи о минимизации L_p-нормы m-й производной функций, интерполирующих заданные значения y_i в заданных точках x_i, привело к развитию теории сплайнов. В дальнейшем эта задача исследовалась во многих работах в более общей постановке как проблема минимизации функционала при ограничениях (см., например, [3–8]).

Центральным результатом данной работы является следующая

---

[1]Запись интеграла от функции Дирака есть историческая условность: $\int \delta(x-z)\varphi(x)dx \equiv (\delta_z, \varphi) \equiv \varphi(z)$; свертка δ-функций определена как $\delta(x-a)\delta(x-b) = \delta(x-(a+b))$.

Теорема. *В пространстве Соболева* $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ *существует единственная решетчатая оптимальная интерполяционная формула вида* (2) *с функционалом погрешности* (3). *Ее коэффициенты определяются формулой*

$$\overset{\circ}{C}([\beta];z) = h^n \left(1 + \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(2\pi i H^{-1}(Hh\beta^* - z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} \cdot K(\gamma)\right),$$

где $K(\gamma) = \left[\sum\limits_{\substack{t\\ t\neq h\gamma}} \frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t-\gamma)|^{2m}}\right]^{-1}.$

2. Экстремальная функция интерполяционной формулы

Для нахождения в явном виде нормы функционала погрешности $\ell(x)$ в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ будем использовать понятие экстремальной функции функционала. Функцию $u(x)$ из $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ называют *экстремальной* для данного функционала погрешности $\ell(x)$, если выполняется равенство

$$(\ell(x), u(x)) = \left\|\ell|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\right\| \left\|u|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\right\|.$$

Пространство $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ – гильбертово, со скалярным произведением

$$\langle\varphi,\psi\rangle_m = \int\limits_{\Omega_0} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha\varphi(x) D^\alpha\psi(x)dx.$$

По теореме Рисса любой ограниченный функционал $\ell(x)$ в гильбертовом пространстве представляется в виде скалярного произведения

$$(\ell,\varphi) = \langle\varphi,\psi_\ell\rangle_m \tag{4}$$

для любого $\varphi(x)$ из $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$. $\psi_\ell(x)$ — функция из $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$, определенная однозначно по функционалу $\ell(x)$ и экстремальная для него. Интегрируя по частям в смысле теории обобщенных функций выражение в правой части (4) и пользуясь периодичностью функций $\varphi(x)$ и $\psi_\ell(x)$, получим равенство

$$(\ell,\varphi) = (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} \Delta^m \overline{\psi_\ell(x)}\varphi(x)dx.$$

Таким образом, функция $\psi_\ell(x)$ является обобщенным решением уравнения

$$\Delta^m\psi_\ell(x) = (-1)^m\ell(x). \tag{5}$$

Справедлива следующая

Лемма 1. *Явное выражение экстремальной функции функционала погрешности* (3) *дается формулой*

$$\psi_l(x) = (-1)^m \left[B_{2m}(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) B_{2m}(x - x^{(k)}) + d_0\right], \tag{6}$$

где d_0 *постоянная,* $B_{2m}(x) = (-1)^m \sum\limits_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}x\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}}$ *— функция Бернулли-Соболева — периодическое фундаментальное решение оператора* Δ^m.

Доказательство. Найдем передическое решение уравнения (5). Применяя к обеим частям (5) преобразование Фурье и пользуясь известными формулами $F[\delta(x-z)] = e^{2\pi i p^* z}$, $F[\phi_0(H^{-1})x] = \phi_0(H^*p)$ (см. [9]), получим

$$\left[\sum_{j=1}^{n}(2\pi i p_j)^2\right]^m F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m[(e^{-2\pi i p^* z} - \sum_{k=1}^{N} C_k(z) e^{-2\pi i p^* x^{(k)}})\phi_0(H^*p)]. \qquad (7)$$

Здесь p^* — вектор-строка $(p_1, p_2, ..., p_n)$, сопряженная с вектором-столбцом p. В силу (1) правая часть (7) равна нулю в окрестности начала координат. Поэтому можно делить обе части (7) на $(2\pi i)^{2m}(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2)^m$. Функция $F[\psi_\ell(x)]$ определяется из уравнения (7) с точностью до слагаемого вида

$$(-1)^m d_0 \delta(p) + \sum_{0<|\alpha|\leqslant 2m} d_\alpha D^\alpha \delta(p).$$

Поскольку, однако, $F[\psi_\ell(x)]$ должна быть бороннообразной, то есть линейной комбинацией δ-функций, сосредоточенных в узлах целочисленной решетки, то все слагаемые, кроме $(-1)^m d_0 \delta(p)$, должны быть отброшены.

Следовательно,

$$F[\psi_\ell(x)] = (-1)^m d_0 \delta(p) + \frac{\exp(2\pi i p^* z)\phi_0(H^*p)}{(2\pi)^{2m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2\right)^m} -$$

$$- \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} C_k(z)\exp(2\pi i p^* x^{(k)})\phi_0(H^*p)}{(2\pi)^{2m}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2\right)^m}. \qquad (8)$$

Заменяя $\phi_0(H^*p)$ рядом по δ функциям и применяя обратное преобразование Фурье к обеим частям (8), получаем (6), что и доказывает лемму 1.

3. Норма функционала погрешности интерполяционной формулы

Норма функционала погрешности интерполяционной формулы выражается через билинейную форму от коэффициентов формулы и значений экстремальной функции $\psi_\ell(x)$. Поскольку пространство $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ гильбертово, то имеем

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\| \; \|\psi_\ell|\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\| = \|\ell|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2. \qquad (9)$$

Пользуясь формулами (3), (6), (9) после непосредственных вычислений, получим

$$\|\ell|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 = \int\limits_{\Omega_0} \ell(x)\psi_\ell(x)dx =$$

$$= (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} \left(\delta(x-z) - \sum_{k=1}^{N} C_k(z)\delta(x-x^{(k)})\right) * \phi_0(H^{-1}x)\Bigg(B_{2m}(x-z) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} C_k(z) B_{2m}(x - x^{(k)}) + d_0\Bigg)dx.$$

Отсюда, в силу (1) и по определению дельта-функции, имеем

$$\|\ell \mid \widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 =$$

$$= (-1)^m \int\limits_{\Omega_0} \left(\sum_\beta \delta(x - z - H\beta) - \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_\beta \delta(x - x^{(k)} - H\beta) \right) \times$$

$$\times \left(B_{2m}(x - z) - \sum_{k=1}^N C_k(z) B_{2m}(x - x^{(k)}) \right) dx.$$

Пользуясь характеристической функцией $\chi_{\Omega_0}(x)$ области Ω_0, последнее выражение, полученное для нормы функционала, перепишем в виде

$$\|\ell(x)|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 = (-1)^m \left(\sum_\beta \chi_{\Omega_0}(z + H\beta) B_{2m}(H\beta) - \right.$$

$$- \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_\beta \chi_{\Omega_0}(z + H\beta) B_{2m}(z + H\beta - x^{(k)}) -$$

$$- \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_\beta \chi_{\Omega_0}(x^{(k)} + H\beta) B_{2m}(x^{(k)} + H\beta - z) +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{k'=1}^N C_{k'}(z) \sum_\beta \chi_{\Omega_0}(x^{(k)} + H\beta) B_{2m}(x^{(k)} + H\beta - x^{(k')}) \right).$$

Так как $x^{(k)} \in \Omega_0$, $z \in \Omega_0$, $\sum\limits_\beta \chi_{\Omega_0}(y + H\beta) = 1$, $y \in \Omega_0$, используя четность функции Бернулли-Соболева $B_{2m}(y)$, т.е. $B_{2m}(y) = B_{2m}(-y)$, окончательно имеем

$$\|\ell(x)|\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 =$$

$$= (-1)^m \left(B_{2m}(0) - 2 \sum_{k=1}^N C_k(z) B_{2m}(z - x^{(k)}) + \sum_{k=1}^N C_k(z) \sum_{k'=1}^N C_{k'}(z) B_{2m}(x^{(k)} - x^{(k')}) \right). \quad (10)$$

Заметим, квадрат нормы функционала ℓ является неотрицательным многочленом второй степени от N вещественных переменных $C_1(z), \ldots, C_N(z)$. Этот многочлен рассматривается на линейном многообразии $\sum\limits_{k=1}^N C_k(z) = 1$. Очевидно, такая функция достигает минимума в некоторой точке $C^0(z) = \left(C_1^0(z), \ldots, C_N^0(z)\right)$. Благодаря строгой выпуклости нормы гильбертова пространства эта точка единственна.

Для нахождения точки минимума нормы (10) при условии (1) можно применить метод неопределенных множителей Лагранжа.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi(C(z), \lambda) = \|\ell\|^2 - 2(-1)^m \lambda(\ell, 1).$$

Приравнивая к нулю частные производные от $\Psi(C(z), \lambda)$ по $C_k(z)$ и λ, получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^N C_k^0(z) B_{2m}(x^{(k')} - x^{(k)}) + \lambda^0 = B_{2m}(z - x^{(k')}), \quad k' = 1, 2, ..., N, \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^N C_k(z) = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим систему на решетке, т.е. пусть узлы $x^{(\gamma)} = Hh\gamma$. Такую интерполяционную формулу будем называть *решетчатой*. Здесь h — малый параметр, *шаг решетки*. Тогда система примет вид

$$\sum_{hH\gamma\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}_{hH\gamma}(z)\ B_{2m}(hH(\beta-\gamma)) + \lambda^0 = B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0, \tag{13}$$

$$\sum_{hH\gamma\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}_{hH\gamma}(z) = 1. \tag{14}$$

Пользуясь сверткой двух функций дискретного аргумента, определяемой формулой (см. [9])

$$f[\beta] * g[\beta] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} f[\gamma]\cdot g[\beta-\gamma],$$

систему (13), (14) записываем в виде уравнений в свертках.

$$B_{2m}[\beta] * (\overset{\circ}{C}([\beta];z)\ \chi_{\Omega_0}[\beta]) + \lambda^0 = B_{2m}(z-[\beta]), \quad [\beta]\in\Omega_0, \tag{15}$$

$$\sum_{[\beta]\in\Omega_0} \overset{\circ}{C}([\beta];z) = 1, \tag{16}$$

где $[\beta] = hH\beta$.

Систему уравнений (15), (16) будем называть *системой Винера-Хопфа*, и теперь задача состоит в том, чтобы решить эту систему относительно $\overset{\circ}{C}([\beta];z)$ и λ^0.

Задача А. *Найти функцию* $\overset{\circ}{C}([\beta];z)$ *и* λ, *удовлетворяющие системе Винера-Хопфа.*

При решении задачи А важную роль играют некоторые свойства дискретного аналога $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ полигармонического оператора Δ^m, которые будут доказаны в следующем пункте.

Традиционно к дискретному аналогу полигармонического оператора приводит замена входящих в Δ^m производных на соответствующие конечные разности. Восходящая к С.Л. Соболеву [9] идея другого способа дискретизации дифференциального оператора заключается в следующем. В уравнении, определяющем фундаментальное решение дифференциального оператора (у нас это $\Delta^m B_{2m}(x) = \Phi_0(x)$ — в периодическом варианте), переходят к дискретным аргументам фундаментального решения и δ-функции, заменяя полигармонический оператор на некоторую функцию дискретных аргументов, действующую как дискретная свертка на дискретизированное фундаментальное решение.

Это записывается формулой

$$D_{hH}^m[\beta] * B_{2m}[\beta] = \sum_{\gamma} \delta[\beta - \gamma/h],$$

где $[\beta] = hH\beta,\ \beta\in\mathbb{Z}^n,\ 1/h$ — натуральное число, $\delta[\beta] \equiv \delta_0^{|\beta|}$ — символ Кронекера.

Определяемый этим равенством оператор дискретной свертки $D_{hH}^m[\beta]*$ и является дискретным аналогом полигармонического оператора.

4. Новые свойства оператора $D_{hH}^{(m)}[\beta]$

Займемся обоснованием новых свойств оператора свертки $D_{hH}^{(m)}[\beta]$. Отметим, что при $n=1$ дискретный аналог дифференциального оператора d^{2m}/dx^{2m} построен в работе [10].

С этой целью ищем такую функцию дискретного аргумента $D_{hH}^{(m)}[\beta]$, которая удовлетворяет равенству

$$h^n D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}[\beta] = \Phi[\beta] - h^n. \tag{17}$$

Здесь $B_{2m}[\beta]-$ функция Бернулли-Соболева, которая задается формулой

$$B_{2m}[\beta]=(-1)^m\sum_{\gamma\neq 0}\frac{\exp(-2\pi i\gamma^* h\beta)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}},$$

а $\Phi[\beta]-$ дискретная периодическая дельта-функция и

$$\Phi[\beta]=\sum_{\gamma}\delta[\beta-h^{-1}\gamma], \tag{18}$$

$[\beta]=hH\beta$, $h^{-1}-$ натуральное число, $\delta[\beta-h^{-1}\gamma]-$ дискретная дельта-функция, определяемая формулой

$$\delta[\beta-h^{-1}\gamma]=\begin{cases}1, \text{если} \ \ \beta-h^{-1}\gamma=0,\\ 0, \text{если} \ \ \beta-h^{-1}\gamma\neq 0,\end{cases} \tag{19}$$

$\beta=\uparrow(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)-$ вектор столбец, $\beta^*=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)-$ вектор строка, $\beta_j\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}-$ множество целых чисел.

Лемма 2. *Решение уравнения в свертках* (17) *определяется формулой*

$$D_{hH}^{(m)}[\beta]=\frac{1}{|\Omega_1|}\int\limits_{\Omega_1}\Gamma_{hH}^{(m)}(p)\exp(2\pi i\beta^* hH^* p)dp, \tag{20}$$

где Ω_1- *фундаментальный параллелепипед для матрицы* $h^{-1}H^{-1*}$, $|\Omega_1|-$ *объем области* Ω_1,

$$\Gamma_{hH}^{(m)}(p)=\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\gamma}\frac{1}{|p-h^{-1}H^{-1*}\gamma|^{2m}}\right]^{-1}, \quad p\neq h^{-1}H^{-1*}\gamma. \tag{21}$$

Доказательство. Для отыскания $D_{hH}^{(m)}[\beta]$ пользуемся оператором преобразования Фурье. Известно, что класс функций дискретного аргумента и класс функций боронообразных функций изоморфны (см. [9]). Используя это, от функций дискретного аргумента перейдем к боронообразным обобщенным функциям

$$\overleftarrow{\psi}(x)=\sum_{\beta}h^n\psi[\beta]\delta(x-hH\beta).$$

Для $\Phi[\beta]$, которая определена формулой (18), имеем

$$\overleftarrow{\Phi}(x)=\sum_{\beta}h^n\Phi[\beta]\delta(x-hH\beta)=h^n\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\delta[\beta-h^{-1}\gamma]\delta(x-hH\beta).$$

Отсюда, в силу (19), получим

$$\overleftarrow{\Phi}(x)=\sum_{\gamma}h^n\delta(x-H\gamma)=h^n\phi_0(H^{-1}x).$$

Уравнение (17) на классе боронообразных функций примет вид

$$h^n\ \overleftarrow{D}_{hH}^{(m)}(x)*\overleftarrow{B}_{2m}(x)=h^n\phi_0(H^{-1}x)-h^n\phi_0(h^{-1}H^{-1}x), \tag{22}$$

где $\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)=\sum\limits_{\beta}h^n\delta(x-hH\beta)$.

Преобразование Фурье функций $\phi_0(H^{-1}x)$ и $\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)$, как известно, соответсвенно задаются формулами

$$F[\phi_0(H^{-1}x)]=\int e^{2\pi i p^* x}\phi_0(H^{-1}x)dx=$$

$$=\int e^{2\pi i p^* x}\sum_{\beta}\delta(x-H\beta)dx=\sum_{\beta}\int e^{2\pi i p^* x}\delta(x-H\beta)dx=\sum_{\beta}e^{2\pi i p^* H\beta}, \tag{23}$$

$$F[\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)] = \int e^{2\pi i p^* x}\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)dx = \sum_\beta h^n e^{2\pi i p^* hH\beta}. \tag{24}$$

Пользуясь известной формулой Пуассона

$$h^n \sum_\beta e^{2\pi i p^* hH\beta} = \sum_\beta \delta(p - h^{-1}H^{-1*}\beta), \tag{25}$$

равенства (23) и (24) приводим к виду

$$F[\phi_0(H^{-1}x)] = \sum_\beta \delta(p - H^{-1*}\beta), \tag{26}$$

$$F[\phi_0(h^{-1}H^{-1}x)] = \sum_\beta \delta(p - h^{-1}H^{-1*}\beta). \tag{27}$$

Теперь вычислим преобразование Фурье функции

$$\overgroup{B}_{2m}(x) = h^n(-1)^m \sum_\beta \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(-2\pi i\gamma^* h\beta)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}}\delta(x - hH\beta).$$

По определению преобразования Фурье

$$F[\overgroup{B}_{2m}(x)] = \int e^{2\pi i p^* x}\ \overgroup{B}_{2m}(x)dx =$$

$$= \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta h^n \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(-2\pi i\gamma^* h\beta)\exp(2\pi i p^* hH\beta)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} =$$

$$= \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta h^n \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\exp(2\pi i(p^*H - \gamma^*)h\beta)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}}.$$

В силу (25) имеем

$$h^n \sum_\beta \exp(2\pi i(p^*H - \gamma^*)h\beta) = \sum_\beta h^n \exp(2\pi i(p^* - \gamma^* H^{-1})hH\beta) =$$

$$= \sum_\beta \delta(p - H^{-1*}\gamma - h^{-1}H^{-1*}\beta).$$

Тогда

$$F[\overgroup{B}_{2m}(x)] = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta \sum_{\gamma\neq 0} \frac{\delta(p - H^{-1*}(\gamma + h^{-1}\beta))}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}}.$$

Делая замену переменных $\gamma + h^{-1}\beta = k$, окончательно получим

$$F[\overgroup{B}_{2m}(x)] = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta \sum_{\substack{k \\ kh\notin\mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}k)}{|H^{-1*}(k - h^{-1}\beta)|^{2m}}. \tag{28}$$

Теперь применив к обеим частям (22) преобразование Фурье и пользуясь формулами (26), (27) и (28) и сокращая на $h^n > 0$ получим следующее уравнение:

$$F[\overgroup{D}^{(m)}_{hH}(x)] \cdot \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_\beta \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h\notin\mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|H^{-1*}(\gamma - h^{-1}\beta)|^{2m}} = \sum_{\substack{\gamma \\ h\gamma\notin\mathbb{Z}}} \delta(p - H^{-1*}\gamma). \tag{29}$$

Известно, что

$$\sum_\beta \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h\notin\mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|H^{-1*}(\gamma - h^{-1}\beta)|^{2m}} = \sum_\beta \sum_{\substack{\gamma \\ \gamma h\notin\mathbb{Z}}} \frac{\delta(p - H^{-1*}\gamma)}{|p - h^{-1}H^{-1*}\beta|^{2m}}. \tag{30}$$

В силу (30), уравнение (29) эквивалентно уравнению

$$F[\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)]\cdot(\Gamma^{(m)}_{hH}(p))^{-1}=1,\quad p\neq h^{-1}H^{-1*}\gamma, \tag{31}$$

где $\Gamma^{(m)}_{hH}(p)$ определяется формулой (21). Функция $\Gamma^{(m)}_{hH}(p)$ периодическая по p с матрицей периодов $h^{-1}H^{-1*}$, вещественная, аналитическая при всех $p\neq h^{-1}H^{-1*}\gamma$.

Из (31) имеем

$$F[\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)]=\Gamma^{(m)}_{hH}(p). \tag{32}$$

Применяя к обеим частям равенства (32) обратное преобразование Фурье и переходя от боронообразных обобщенных функкий к функциям дискретного аргумента, находим (20), что и доказывает лемму 2.

Лемма 3. *Оператор* $D^{(m)}_{hH}[\beta]$ *и функция* $\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)$ *связаны между собой соотношением*

$$D^{(m)}_{hH}[\beta]*\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)=$$
$$=(-1)^m(2\pi)^{2m}\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)\left[\sum_{\substack{\gamma\\ \gamma\neq hH^*\sigma}}\frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}\gamma-\sigma|^{2m}}\right]^{-1}.$$

Здесь $D^{(m)}_{hH}[\beta]$ *определяется формулой* (20).

Доказательство. Для этого обозначим свертку двух боронообразных функкций $\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)$ и $\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)$ через $\overleftrightarrow{T}(x)$:

$$\overleftrightarrow{T}(x)=\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)*\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x).$$

Пользуясь формулой (32), вычислим преобразование Фурье функции $\overleftrightarrow{T}(x)$:

$$F[\overleftrightarrow{T}(x)]=F[\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)*\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)]=$$
$$=F[\overleftrightarrow{D}^{(m)}_{hH}(x)]\cdot F[\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)]=\Gamma^{(m)}_{hH}(p)\cdot F[\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)].$$

По определению боронообразных функций и преобразования Фурье от $\delta(x-hH\beta)$ имеем

$$F[\overleftrightarrow{\exp}\,(2\pi i\sigma^* x)]=F\left[\sum_\beta h^n\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)\delta(x-hH\beta)\right]=$$
$$=\sum_\beta h^n\exp(2\pi i\sigma^* hH\beta)\exp(2\pi i p^* hH\beta)=\sum_\beta h^n\exp(2\pi i(\sigma^*+p^*)hH\beta).$$

Отсюда в силу (25) находим

$$F[\overleftrightarrow{\exp}(2\pi i\sigma^* x)]=\sum_\beta\delta(\sigma+p-h^{-1}H^{-1*}\beta). \tag{33}$$

С помощью формул (21), (33) получим

$$F[\overleftrightarrow{T}(x)]=\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_\gamma\frac{1}{|p-h^{-1}H^{-1*}\gamma|^{2m}}\right]^{-1}\cdot\sum_\beta\delta(\sigma+p-h^{-1}H^{-1*}\beta)=$$
$$=\sum_\beta\delta(\sigma+p-h^{-1}H^{-1*}\beta)\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_\gamma\frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}\beta-\sigma-h^{-1}H^{-1*}\gamma|^{2m}}\right]^{-1}=$$
$$=\sum_\beta\delta(\sigma+p-h^{-1}H^{-1*}\beta)\left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}}\sum_\gamma\frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta-\gamma)-\sigma|^{2m}}\right]^{-1}, \tag{34}$$

$$p \neq h^{-1}H^{-1*}\gamma, \qquad \beta - \gamma \neq hH^*\gamma.$$

Пользуясь формулой (25), вычислим обратное преобразование Фурье функции $\sum\limits_{\beta} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta)$ и, имея в виду определение боронообразных функций, имеем

$$F^{-1}\left[\sum_{\beta} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta)\right] = \sum_{\beta} \int e^{-2\pi i x^* p} \delta(\sigma + p - h^{-1}H^{-1*}\beta) dp =$$

$$= e^{2\pi i x^* \sigma} \sum_{\beta} e^{-2\pi i x^* h^{-1} H^{-1*}\beta} = e^{2\pi i x^* \sigma} h^n \sum_{\beta} \delta(x - hH\beta) = e^{2\pi i \sigma^* x} \sum_{\beta} h^n \delta(x - hH\beta) =$$

$$= \sum_{\beta} h^n e^{2\pi i \sigma^* hH\beta} \delta(x - hH\beta) = \overset{\frown\frown}{\exp}\,(2\pi i \sigma^* x). \tag{35}$$

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье к обеим частья формулы (34) и учитывая (35), получим

$$\overset{\frown\frown}{T}(x) = \overset{\frown\frown}{\exp}(2\pi i \sigma^* x) \cdot \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta - \gamma) - \sigma|^{2m}}\right]^{-1}, \quad \beta - \gamma \neq hH^*\sigma.$$

Перейдя от боронобразных функций к обычным функциям дискретного аргумента, имеем

$$T[\beta] = \exp(2\pi i \sigma^* hH\beta) \cdot \left[\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\gamma} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}(\beta - \gamma) - \sigma|^{2m}}\right]^{-1}, \quad \beta - \gamma \neq hH^*\sigma.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

5. Решение задачи A

Справедлива следующая

Лемма 4. *Пусть $g[\beta]$ дискретная периодическая функция, т.е. $g[\beta] = g(hH\beta) = g(hH\beta + H\gamma)$, тогда справедливо следующее равенство*

$$g[\beta] = (g[\beta]\chi_{\Omega_0}[\beta]) * \Phi[\beta]. \tag{36}$$

Доказательство. Пользуясь формулами (18), (19), формулой

$$\sum_{\gamma} \chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = 1$$

и периодичностью дискретной функции $g[\beta]$, имеем

$$g[\beta] = g[\beta] \sum_{\gamma} \chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = \sum_{\gamma} g[\beta]\chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) =$$

$$= \sum_{\gamma} g(hH\beta + H\gamma)\chi_{\Omega_0}(hH\beta + H\gamma) = \sum_{\gamma} g(hH\beta - H\gamma)\chi_{\Omega_0}(hH\beta - H\gamma) =$$

$$= \sum_{\gamma} g[\beta - h^{-1}\gamma]\chi_{\Omega_0}[\beta - h^{-1}\gamma] = \sum_{\gamma}\sum_{k} g[k]\chi_{\Omega_0}[k]\delta[\beta - k - h^{-1}\gamma] =$$

$$= \sum_{k} g[k]\chi_{\Omega_0}[k] \sum_{\gamma} \delta[\beta - k - h^{-1}\gamma] = \sum_{k} g[k]\chi_{\Omega_0}[k]\Phi[\beta - k] =$$

$$= (g[\beta]\chi_{\Omega_0}[\beta]) * \Phi[\beta].$$

Лемма доказана.

Переходим к доказательству теоремы. Для этого пользуемся следующей известной формулой из [9]:

$$D_{hH}^{(m)}[\beta] * [\beta]^k = 0 \text{ при } k < 2m. \tag{37}$$

Применяя оператор $h^n D_{hH}^{(m)}[\beta]$ к обеим частьям уравнения (15), получаем

$$h^n D_{hH}^{(m)}[\beta] * \Big(B_{2m}[\beta] * (\overset{\circ}{C}([\beta]; z)\chi_{\Omega_0}[\beta]) + \lambda\Big) = h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0. \quad (38)$$

Пользуясь формулами (17), (36), (37) из (38), имеем

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) - h^n \sum_{hH\beta \in \Omega_0} \overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0.$$

В силу (16) находим

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n + h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * B_{2m}(z - hH\beta), \quad hH\beta \in \Omega_0.$$

Отсюда, учитывая, что функция $B_{2m}(z - hH\beta)$ является функцией Бернулли-Соболева, имеем

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n + h^n \cdot D_{hH}^{(m)}[\beta] * (-1)^m \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1}(z - hH\beta)\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} =$$

$$= h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1} z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} D_{hH}^{(m)}[\beta] * \exp(2\pi i h\beta^* \gamma) =$$

$$= h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1} z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} D_{hH}^{(m)}[\beta] * \exp(2\pi i \gamma^* H^{-1}(hH\beta)). \quad (39)$$

Теперь, пользуясь леммой 6 из (39), получим

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n + (-1)^m h^n \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(-2\pi i H^{-1} z\gamma)}{|2\pi H^{-1*}\gamma|^{2m}} (-1)^m (2\pi)^{2m} \exp(2\pi i \gamma^* H^{-1} hH\beta) \times$$

$$\times \left[\sum_{\substack{t \\ t \neq h\gamma}} \frac{1}{|h^{-1}H^{-1*}t - H^{-1*}\gamma|^{2m}}\right]^{-1}.$$

Отсюда, введя обозначение $K(\gamma) = \left[\sum_{\substack{t \\ t \neq h\gamma}} \frac{1}{|H^{-1*}(h^{-1}t - \gamma)|^{2m}}\right]^{-1}$, получим окончательный вид оптимальных коэффициентов, т.е.

$$\overset{\circ}{C}([\beta]; z) = h^n \left(1 + \sum_{\gamma \neq 0} \frac{\exp(2\pi i H^{-1}(Hh\beta^* - z)\gamma)}{|H^{-1*}\gamma|^{2m}} \cdot K(\gamma)\right).$$

Теорема доказана.

Благодарность. Мы искренне благодарны профессору М.Д. Рамазанову за обсуждения результатов настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. *О задаче интерполирования функций n переменных* // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, No 4, С. 778–781.
2. J.C. Holladay *Smoothest curve approximation* // Math. Tables Aids Comput. 1957. V. 11. P. 223–243.
3. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. *Теория сплайнов и ее приложения.* М.: Мир. 1972. 318 с.
4. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. *Сплайны в вычислительной математике.* М.: Наука, 1976. 248 с.
5. Лоран П.Ж. *Аппроксимация и оптимизация.* М.: Мир, 1975, 496 с.
6. Василенко В.А. *Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы.* Новосибирск: Наука, 1984.
7. Игнатов М.И., Певный А.Б. *Натуральные сплайны многих переменных.* Ленинград: Наука, 1991.
8. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* М. Наука, 1981, 424 с.
9. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука, 1974. 808 с.
10. Шадиметов Х.М. *Дискретный аналог оператора d^{2m}/dx^{2m} и его построение* // Вопросы вычислительной и прикладной математики. Ташкент, 1985, вып. 79, С. 22–35.

Нилуфар Хусеновна Маматова,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан

Абдулло Рахмонович Хаётов,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан
E-mail: hayotov@mail.ru

Холматвой Махкамбаевич Шадиметов,
Институт математики и информационных технологий АН РУз,
ул. Дурмон йули, 29,
100125, г. Ташкент, Узбекистан

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 102-111.

УДК 517.946

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЫСШЕГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.М. МАТЁКУБОВ, А.Б. ЯХШИМУРАТОВ

Аннотация. В этой работе обратная спектральная задача для оператора Штурма-Лиувилля применяется к интегрированию высшего уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, обратная спектральная задача, собственное значение, собственная функция, уравнение Кортевега-де Фриза.

1. Введение

В 1967 году в работе [1] американских ученых К. Гарднера, Дж. Грина, М. Крускала и Р. Миуры была установлена интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ), в классе "быстроубывающих" по x функций, с помощью метода обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля. В работе [2] П. Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния и обобщил уравнение КдФ, введя понятие высшего (общего) уравнения КдФ.

В работах [3–10] исследовано уравнение КдФ и высшее уравнение КдФ в классе конечнозонных и периодических функций.

В данной работе изучается высшее уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Отметим, что уравнение КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций было рассмотрено в работах [11–15] и др., а нелинейные уравнения с источником в классе периодических функций в различных постановках изучены в работах [16–19].

Пусть

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^3}{dx^3} + 2q\frac{d}{dx} + q',$$

где $q = q(x,t)$, а штрих означает производную по x. Согласно [20] существуют полиномы P_k (от q и производных q по x) такие, что

$$HP_k = P'_{k+1}.$$

Так, например,

$$P_0 = 1, \quad P_1 = q, \quad P_2 = -\frac{1}{2}q_{xx} + \frac{3}{2}q^2, \quad P_3 = \frac{1}{4}q_{xxxx} - \frac{5}{2}qq_{xx} - \frac{5}{4}q_x^2 + \frac{5}{2}q^3.$$

Легко доказываются следующие свойства оператора H (см. [20]).

M.M. Matyoqubov, A.B. Yakhshimuratov, Integration of higher Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in class of periodic functions.

Поступила 30 декабря 2011 г.

Лемма 1. *Если $y(x,t)$ решение уравнения Штурма-Лиувилля*
$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y, \quad x \in R^1,$$
то выполняется следующее равенство
$$H(y^2) = 2\lambda (y^2)'.$$

Лемма 2. *При любых $y(x),\ z(x) \in C^3[0,\ \pi]$ выполняется равенство*
$$\int\limits_0^\pi Hz \cdot y dx = \left(-\frac{1}{2}z''y + 2qzy + \frac{1}{2}z'y' - \frac{1}{2}zy''\right)\Bigg|_0^\pi - \int\limits_0^\pi z \cdot Hy dx.$$

Следующее уравнение
$$q_t = HP_N[q], \quad x \in R^1, \quad t > 0$$
называется высшим уравнением КдФ. Используя свойства оператора H, мы можем переписать это уравнение в виде
$$q_t = P'_{N+1}[q], \quad x \in R^1, \quad t > 0.$$
Например, при $N = 0,\ 1,\ 2$ соответственно имеем
$$q_t = q_x, \quad q_t = -\frac{1}{2}q_{xxx} + 3qq_x, \quad q_t = \frac{1}{4}q_{xxxxx} - 5q_x q_{xx} - \frac{5}{2}qq_{xxx} + \frac{15}{2}q^2 q_x.$$

2. Постановка задачи

В этой работе рассмотрим следующее высшее уравнение КдФ с самосогласованным источником
$$q_t = P'_{N+1}[q] + 2\int\limits_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda,\ t > 0,\ x \in R^1, \tag{1}$$
с начальным условием
$$q(x,t)|_{t=0} = q_0(x), \tag{2}$$
где $q_0(x) \in C^{2N+1}\left(R^1\right)$ — заданная действительная функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, которая π-периодическая по переменной x:
$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad t \geq 0, \quad x \in R^1 \tag{3}$$
и удовлетворяет условиям гладкости:
$$q(x,t) \in C_x^{2N+1}(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \tag{4}$$
Здесь $\beta(\lambda,t) \in C\left([0,\ \infty) \times [0,\ \infty)\right)$ — заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),\ \ \lambda \to \infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ — решения Флоке (нормированные условием $\psi_\pm(0,\lambda,t) = 1$) уравнения Штурма-Лиувилля
$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{5}$$
$s(x,\lambda,t)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$.

Замечание 1. Покажем равномерную сходимость интеграла, участвующего в уравнении (1). Для этого воспользуемся следующим тождеством
$$s(\pi,\lambda,t)\psi_+(\tau,\lambda,t)\psi_-(\tau,\lambda,t) = s(\pi,\lambda,t,\tau), \tag{6}$$
где $s(x,\lambda,t,\tau)$ — решение уравнения
$$-y'' + q(x+\tau,t)y = \lambda y\,, \quad x \in R^1,$$
удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t,\tau) = 0$, $s'(0,\lambda,t,\tau) = 1$.

Из асимптотических формул

$$c(x,\lambda,t)=\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad s(x,\lambda,t)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$c'(x,\lambda,t)=-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+O(1),\quad s'(x,\lambda,t)=\cos\sqrt{\lambda}x+O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad (\lambda\to\infty)$$

и равенства

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=c(\tau,\lambda,t)s(\pi+\tau,\lambda,t)-s(\tau,\lambda,t)c(\pi+\tau,\lambda,t)$$

следуют оценки

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad \frac{\partial s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\partial\tau}=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),\quad (\lambda\to\infty).$$

Эти оценки и равенство (6) обеспечивают равномерную сходимость интеграла, участвующего в уравнении (1).

Цель данной работы — дать процедуру построения решения $q(x,t)$, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ задачи (1)-(5), в рамках обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим коэффициентом.

3. Необходимые сведения

В этом пункте, для полноты изложения, приведем некоторые основные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом (см. [21–26]).

Рассмотрим следующий оператор Штурма-Лиувилля на всей прямой

$$Ly\equiv -y''+q(x)y=\lambda\, y,\qquad x\in R^1, \tag{7}$$

где $q(x)$ — действительная непрерывная π-периодическая функция.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (7), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ и $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$. Функция $\Delta(\lambda)=c(\pi,\,\lambda)+s'(\pi,\,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла.

Спектр оператора (7) чисто непрерывный и совпадает со следующим множеством

$$E=\{\lambda\in R^1:\ \ -2\le\Delta(\lambda)\le 2\ \}=[\lambda_0,\lambda_1]\cup[\lambda_2,\ \lambda_3]\cup...\cup[\lambda_{2n},\lambda_{2n+1}]\cup....$$

Интервалы $(-\infty,\ \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n=1,\ 2,\ ...$ называются лакунами. Здесь λ_0, λ_{4k-1}, λ_{4k} — собственные значения периодической задачи ($y(0)=y(\pi)$, $y'(0)=y'(\pi)$), а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} — собственные значения антипериодической задачи ($y(0)=-y(\pi)$, $y'(0)=-y'(\pi)$) для уравнения (7).

Пусть ξ_n, $n=1,2,...$ корни уравнения $s(\pi,\lambda)=0$. Отметим, что ξ_n, $n=1,2,...$ совпадают с собственными значениями задачи Дирихле ($y(0)=y(\pi)=0$) для уравнения (7), кроме того, выполняются следующие включения $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n=1,\ 2,\ ...$.

Числа ξ_n, $n=1,\ 2,\ ...$ вместе со знаками $\sigma_n=sign\{s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)\}$, $n=1,\ 2,\ ...$ называются спектральными параметрами задачи (7). Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n=1,\ 2,\ ...$ и границы λ_n, $n=0,\ 1,\ 2,\ ...$ спектра называют спектральными данными оператора (7). Восстановление коэффициента $q(x)$ по спектральным данным называется обратной спектральной задачей для оператора (7).

Спектр оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q(x+\tau)$ не зависит от действительного параметра τ, а спектральные параметры зависят от τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n=1,\ 2,\ ...$. Спектральные параметры удовлетворяют следующей системе уравнений Дубровина

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n\geq 1. \tag{8}$$

Система уравнений Дубровина и следующая формула следов

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t))$$

дают метод решения обратной задачи.

Имеются также другие формулы следов, так например, вторая и третья формулы следов имеют вид

$$q^2(\tau)-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau)=\lambda_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k^2(\tau)),$$

$$\frac{3}{16}q_{\tau\tau\tau\tau}(\tau)-\frac{3}{2}q(\tau)q_{\tau\tau}(\tau)-\frac{15}{16}q_\tau^2(\tau)+q^3(\tau)=$$

$$=\lambda_0^3+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^3+\lambda_{2k}^3-2\xi_k^3(\tau)).$$

Используя систему уравнений Дубровина и формулу первого следа, Е. Трубовицу [25] удалось доказать теоремы, связывающие аналитичность потенциала с убыванием длин лакун периодического потенциала оператора Штурма-Лиувилля (7): если $q(x)$ действительная, аналитическая, π-периодическая функция, то длины $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$ лакун стремятся к нулю экспоненциально, т.е. существуют постоянные $a>0$, $b>0$ такие, что $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}<ae^{-bn}$, $n\geq 1$; и наоборот, если $q(x)\in C^2(R^1)$ действительная π-периодическая функция и длины $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$ лакун стремятся к нулю экспоненциально, то $q(x)$ является аналитической функцией.

В 1946 году Г. Боргом была доказана следующая уникальная теорема (обратная теорема Борга) о периоде потенциала уравнения Хилла (см. [27]): для того чтобы число $\pi/2$ являлось периодом потенциала $q(x)$ уравнения Штурма-Лиувилля (7), необходимо и достаточно двукратность всех корней уравнения $\Delta(\lambda)+2=0$, т.е. необходимо и достаточно "исчезновение" всех лакун с нечетными номерами.

В 1977 году (см. [28]) Х.Хохштадтом дано краткое доказательство, а в 1984 году обобщение этой теоремы Борга (см. [29]): пусть $q(x)\in C^1(R^1)$ действительная π-периодическая функция. Для того чтобы число π/n являлось периодом потенциала $q(x)$ уравнения Штурма-Лиувилля (7), необходимо и достаточно "исчезновение" всех лакун, номера которых не делятся на n. Здесь $n\geq 2$ натуральное число.

4. Основная теорема

Основной результат настоящей работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $q(x,t)$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ — решение задачи (1)–(5). Тогда спектр оператора (5) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $n=1,\ 2,\ \dots$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:*

$$\dot{\xi}_n=2(-1)^{n-1}\sigma_n(t)\left\{\sum_{k=0}^{N}(2\xi_n)^{N-k}\cdot P_k[q(0,t)]+\int_0^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_n}d\lambda\right\}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n\geq 1, \tag{9}$$

где знак $\sigma_n(t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0\,, \quad n \geq 1,$$

где ξ_n^0, σ_n^0, $n \geq 1$ — спектральные параметры оператора Штурма-Лиувилля с коэффициентом $q_0(x)$.

Доказательство. Вводя обозначение

$$G(x,t) = 2\int\limits_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\left(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\right)_x d\lambda,$$

уравнение (1) можно переписать в виде

$$q_t = P'_{N+1}[q] + G(x,t). \tag{10}$$

Обозначим через $y_n(x,t)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$ ортонормированные собственные функции задачи Дирихле ($y(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$) для уравнения (5), с π-периодическим потенциалом $q(x,t)$, являющимся решением уравнения (10), соответствующие собственным значениям $\xi_n(t)$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$.

Дифференцируя по t тождество $(L(t)y_n, y_n) = \xi_n$, и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n = (L\dot{y}_n + q_t y_n, y_n) + (Ly_n, \dot{y}_n) = (\dot{y}_n, Ly_n) + (Ly_n, \dot{y}_n) + (q_t y_n, y_n) =$$

$$= \xi_n\dot{((y_n, y_n))} + (q_t y_n, y_n) = \int\limits_0^\pi q_t(x,t)y_n^2(x,t)dx. \tag{11}$$

Здесь $(\cdot\ ,\ \cdot)$ скалярное произведение пространства $L_2(0,\ \pi)$.

Используя (10) и тождество $HP_k = P'_{k+1}$, равенство (11) перепишем в виде

$$\dot{\xi}_n = \int\limits_0^\pi y_n^2(x,t)HP_N dx + \int\limits_0^\pi y_n^2(x,t)G(x,t)dx. \tag{12}$$

Пользуясь леммой 1 и леммой 2, преобразуем следующий интеграл

$$J_k = \int\limits_0^\pi y_n^2(x,t)HP_k dx = \left(-\frac{1}{2}P''_k\cdot y_n^2 + 2qP_k\cdot y_n^2 + \frac{1}{2}P'_k\cdot(y_n^2)' - \frac{1}{2}P_k\cdot(y_n^2)''\right)\Bigg|_0^\pi -$$

$$-\int\limits_0^\pi P_k\cdot H(y_n^2)dx = -P_k[q(0,t)]\cdot[{y'_n}^2(\pi,t) - {y'_n}^2(0,t)] - \int\limits_0^\pi P_k\cdot 2\xi_n(y_n^2)'dx =$$

$$= -P_k[q(0,t)]\cdot[{y'_n}^2(\pi,t) - {y'_n}^2(0,t)] + 2\xi_n\int\limits_0^\pi P'_k\cdot y_n^2 dx,$$

т.е.

$$J_k - 2\xi_n\cdot J_{k-1} = -P_k[q(0,t)]\cdot[{y'_n}^2(\pi,t) - {y'_n}^2(0,t)].$$

Вычисляя следующую сумму

$$J_N - (2\xi_n)^N\cdot J_0 = \sum_{k=1}^N (2\xi_n)^{N-k}\cdot(J_k - 2\xi_n\cdot J_{k-1}) =$$

$$= -[{y'_n}^2(\pi,t) - {y'_n}^2(0,t)]\cdot\sum_{k=1}^N (2\xi_n)^{N-k}\cdot P_k[q(0,t)]$$

и интеграл

$$J_0 = \int\limits_0^\pi y_n^2(x,t) H P_0 dx = \int\limits_0^\pi y_n^2(x,t) q_x dx = -[{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)],$$

выводим равенство

$$J_N = -[{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)] \cdot \sum_{k=0}^{N} (2\xi_n)^{N-k} \cdot P_k[q(0,t)]. \qquad (13)$$

Теперь займемся вычислением второго интеграла в равенстве (12):

$$\int\limits_0^\pi G \cdot y_n^2 dx = \int\limits_0^\infty s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t) \left\{ 2\int\limits_0^\pi y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' dx \right\} d\lambda.$$

Интегрируя по частям, нетрудно видеть, что

$$I = 2\int\limits_0^\pi y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' dx = \int\limits_0^\pi \{ y_n^2 \cdot (\psi_+\psi_-)' - (y_n^2)' \cdot (\psi_+\psi_-) \} dx =$$

$$= \int\limits_0^\pi \{ y_n\psi_-(y_n\psi_+' - y_n'\psi_+) + y_n\psi_+(y_n\psi_-' - y_n'\psi_-) \} dx.$$

Отсюда выводим

$$I = \frac{1}{\xi_n - \lambda} \cdot [{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)].$$

Значит,

$$\int\limits_0^\pi G \cdot y_n^2 dx = [{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)] \cdot \int\limits_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda. \qquad (14)$$

Подставляя выражения (13) и (14) в (12), получим равенство

$$\dot{\xi}_n = [{y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t)] \times$$

$$\times \left\{ -\sum_{k=0}^{N} (2\xi_n)^{N-k} \cdot P_k[q(0,t)] + \int\limits_0^\infty \frac{s(\pi,\lambda,t)\beta(\lambda,t)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\}. \qquad (15)$$

Используя равенства

$$y_n(x,t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x,\xi_n(t),t),$$

$$c_n^2(t) \equiv \int\limits_0^\pi s^2(x,\xi_n(t),t) dx = s'(\pi,\xi_n(t),t) \frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda},$$

имеем

$${y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t) = \frac{1}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}} \left(s'(\pi,\xi_n(t),t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n(t),t)} \right).$$

Подставляя сюда выражение

$$s'(\pi,\xi_n,t) - \frac{1}{s'(\pi,\xi_n,t)} = \sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4},$$

получим

$${y_n'}^2(\pi,t) - {y_n'}^2(0,t) = \frac{\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{\frac{\partial s(\pi,\xi_n(t),t)}{\partial\lambda}}.$$

Здесь $\sigma_n(t) = sign\{s'(\pi, \xi_n(t), t) - c(\pi, \xi_n(t), t)\}$.

Из разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = 4\pi^2(\lambda_0 - \lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \lambda)(\lambda_{2k} - \lambda)}{k^4},$$

$$s(\pi, \lambda, t) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t) - \lambda}{k^2}$$

следует, что

$$y_n'^2(\pi, t) - y_n'^2(0, t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получим (9).

Теперь докажем независимость от t собственных значений λ_n, $n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ периодической и антипериодической задач для уравнения Штурма-Лиувилля (5). Аналогично формуле (15) можно показать, что

$$\dot{\lambda}_n(t) = \int_0^{\pi} G(x, t)v_n^2(x, t)dx,$$

где $v_n(x, t)$ — нормированная собственная функция периодической или антипериодической задачи для уравнения Штурма-Лиувилля (5). Учитывая вид функции $G(x, t)$, и действуя как прежде, получим $\dot{\lambda}_n(t) = 0$.

Теорема доказана.

5. Следствия из основной теоремы

Следствие 1. *Если вместо $q(x, t)$ рассмотрим $q(x+\tau, t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ и t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ и t: $\xi_n = \xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \geq 1$. В этом случае, система (9) примет вид*

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)\left\{\sum_{k=0}^{N}(2\xi_n)^{N-k}\cdot P_k[q(\tau, t)] + \int_0^{\infty}\frac{s(\pi, \lambda, t, \tau)\beta(\lambda, t)}{\lambda - \xi_n}d\lambda\right\}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}},\quad n \geq 1. \tag{17}$$

Здесь

$$s(\pi, \lambda, t, \tau) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t, \tau) - \lambda}{k^2}. \tag{18}$$

Следствие 2. *Рассмотрим случай $N = 2$. В этом случае дифференциальное уравнение (1) примет вид*

$$q_t = \frac{1}{4}q_{xxxxx} - 5q_xq_{xx} - \frac{5}{2}qq_{xxx} + \frac{15}{2}q^2q_x + G(x, t), \tag{19}$$

а система дифференциальных уравнений Дубровина (17) запишется в форме

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau, t)\left\{4\xi_n^2 + 2\xi_nq - \frac{1}{2}q_{\tau\tau} + \frac{3}{2}q^2 + \int_0^{\infty}\frac{s(\pi, \lambda, t, \tau)\beta(\lambda, t)}{\lambda - \xi_n}d\lambda\right\}\times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n\geq 1. \tag{20}$$

Используя следующие формулы следов

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)), \tag{21}$$

$$q^2(\tau,t)-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}(\tau,t)=\lambda_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2-2\xi_k^2(\tau,t)), \tag{22}$$

систему (20) можем переписать в замкнутом виде.

Следствие 3. *Эта теорема дает метод решения задачи (19), (2)-(5). Действительно, обозначим через λ_n, $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n=1,\ 2,\ \dots$, спектральные данные задачи*

$$-y''+q(x+\tau,t)y=\lambda\, y,\quad x\in R^1.$$

Найдём спектральные данные λ_n, $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,\ 2,\ \dots$ для уравнения

$$-y''+q_0(x+\tau)y=\lambda y,\quad x\in R^1.$$

Решаем задачу Коши $\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n=1,\ 2,\ \dots$ для системы уравнений Дубровина (20). По формуле следов (21) находим решение задачи (19), (2)–(5). После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi_\pm(x,\lambda,t)$.

Замечание 2. Покажем, что построенная функция $q(\tau,t)$ удовлетворяет уравнению (19). Для этого используем также следующую систему Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial\tau}=2(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},\quad n=1,\ 2,\ \dots, \tag{23}$$

и формулу следов (21), (22), а также (см. [26])

$$\frac{3}{16}q_{\tau\tau\tau\tau}(\tau,t)-\frac{3}{2}q(\tau,t)q_{\tau\tau}(\tau,t)-\frac{15}{16}q_\tau^2(\tau,t)+q^3(\tau,t)=$$
$$=\lambda_0^3+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}^3+\lambda_{2k}^3-2\xi_k^3(\tau,t)). \tag{24}$$

Из систем Дубровина (20) и (23) имеем

$$\frac{\partial\xi_k}{\partial t}=\left\{4\xi_k^2+2\xi_k q-\frac{1}{2}q_{\tau\tau}+\frac{3}{2}q^2+\int_0^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\lambda-\xi_k}d\lambda\right\}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau},\quad k\geq 1. \tag{25}$$

Из формулы первого следа (21), учитывая (25), находим

$$q_t=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial t}=(q_{\tau\tau}-3q^2)\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}-4q\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}-8\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}+$$
$$+2\int_0^{\infty}\beta(\lambda,t)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_k-\lambda}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}\right\}d\lambda. \tag{26}$$

Дифференцируя по τ формулы следов (21), (22) и (24), получим

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=-q_\tau,\quad 4\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=\frac{1}{2}q_{\tau\tau\tau}-2qq_\tau,$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k^2\frac{\partial\xi_k}{\partial\tau}=\frac{1}{16}q_{\tau\tau\tau\tau\tau}-\frac{1}{2}qq_{\tau\tau\tau}-\frac{9}{8}q_\tau q_{\tau\tau}+q^2q_\tau.$$

Используя эти равенства и разложение (18) из (26) выводим

$$q_t=\frac{1}{4}q_{\tau\tau\tau\tau\tau}-5q_\tau q_{\tau\tau}-\frac{5}{2}qq_{\tau\tau\tau}+\frac{15}{2}q^2q_\tau+2\int\limits_0^\infty\beta(\lambda,t)\frac{\partial s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\partial\tau}d\lambda.$$

Из равенства (6) следует, что

$$q_t=\frac{1}{4}q_{\tau\tau\tau\tau\tau}-5q_\tau q_{\tau\tau}-\frac{5}{2}qq_{\tau\tau\tau}+\frac{15}{2}q^2q_\tau+$$

$$+2\int\limits_0^\infty\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\psi_+(\tau,\lambda,t)\cdot\psi_-(\tau,\lambda,t)\right)d\lambda.$$

Следствие 4. *Из результатов работы [25] выводим, что если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то длины $\lambda_{2n}-\lambda_{2n-1}$ лакун, соответствующие этому коэффициенту, убывают экспоненциально. Так как длины лакун, соответствующие коэффициенту $q(x,t)$, не зависят от t, значит, $q(x,t)$ — является аналитической функцией по x.*

Следствие 5. *Из обобщенной обратной теоремы Г. Борга (см. [29]) следует, что если $q_0(x)$ имеет период $\frac{\pi}{n}$, то решение задачи (19), (2)–(5) $q(x,t)$ является $\frac{\pi}{n}$-периодическим по x.*

Пользуясь случаем, авторы выражают благодарность проф. А.Б. Хасанову (Ургенчский государственный университет, Узбекистан) за постановку задачи и обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura *Method for solving the Korteweg-de Vries equation* // Phys. Rev. Lett., 1967. V. 19, № 19, P. 1095–1097.
2. P.D. Lax *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves* // Comm. Pure and Appl. Math., 1968. V. 21. P. 467–490.
3. Новиков С.П. *Периодическая задача Кортевега-де Фриза I* // Функц. анализ и прил. 1974. Т. 8, № 3. С. 54–66.
4. Дубровин Б.А., Новиков С.П. *Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега-де Фриза* // ЖЭТФ, 1974. Т. 67, № 12. С. 2131–2143.
5. Марченко В.А. *Периодическая задача Кортевега-де Фриза* // Мат. сб. 1974. Т. 95, № 3. С. 331–356.
6. Дубровин Б.А. *Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов* // Функц. анализ и прил., 1975. Т. 9, № 3. С. 41–51.
7. Итс А.Р., Матвеев В.Б. *Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза* // Теорет. мат. физ., 1975. Т. 23, № 1. С. 51–68.
8. P. Lax *Periodic solutions of the KdV equations* // Lecture in Appl. Math. AMS, 1974. V. 15. P. 85–96.
9. P. Lax *Periodic Solutions of the KdV equation* // Comm. Pure and Appl. Math., 1975. V. 28. P. 141–188.
10. H.P. McKean, E. Trubowitz *Hill's operator and Hyperelliptic Function Theory in the Presence of infinitely Many Branch Points* // Comm. Pure and Appl. Math., 1976. V. 29. P. 143–226.

11. Мельников В.К. *Метод интегрирования уравнения Кортевега-де Вриса с самосогласованным источником.* Препринт. Дубна, 1988.
12. V.K. Mel'nikov *Integration of the nonlinear Schrödinger equation with a source* // Inverse Problems, 1992, V. 8. P. 133–147.
13. J. Leon, A. Latifi *Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves* // J.Phys. A: Math. Gen., 1990. V. 23. P. 1385–1403.
14. Уразбоев Г.У., Хасанов А.Б. *Интегрирование уравнения Кортевега- де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа "ступеньки"* // Теорет. мат. физ., 2001. Т. 129, № 1. С. 38–54.
15. Хасанов А.Б., Уразбоев Г.У. *Интегрирование общего уравнения КдФ с правой частью в классе быстроубывающих функций* // Узб. матем. журнал., 2003, № 2. С. 53–59.
16. P.G. Grinevich, I.A. Taimanov *Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type* // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 2008. V. 224. P. 125–138.
17. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. *Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций* // Теорет. мат. физ. 2010. Т. 164, № 2. С. 214–221.
18. A. Yakhshimuratov *The Nonlinear Schrödinger Equation with a Self-consistent Source in the Class of Periodic Functions* // Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 2011, V. 14. P. 153–169.
19. Яхшимуратов А.Б. *Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза со специальным свободным членом в классе периодических функций* // Уфимский мат. журнал. 2011. Т. 3, № 4. С. 144–150.
20. Левитан Б.М. *Обратные задачи Штурма-Лиувилля.* М.: "Наука", 1984, 240 с.
21. Титчмарш Э.Ч. *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка.* В 2-х т. М.: ИЛ, 1961, Т. 2, 556 с.
22. W. Magnus, W. Winkler *Hill's equation.* New York: Interscience Wiley, 1966.
23. Станкевич И.В. *Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла* // ДАН СССР, 1970, Т. 192, № 1. С. 34–37.
24. Марченко В.А., Островский И.В. *Характеристика спектра оператора Хилла* // Мат. сб., 1975. Т. 97, вып. 4. С. 540–606.
25. E. Trubowitz *The inverse problem for periodic potentials* // Comm. Pure and Appl. Math., 1977. V. 30. P. 321–337.
26. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.* М.: "Наука". 1988. 432 с.
27. G. Borg *Eine Umkehrung der Sturm-Liouvillschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte* // Acta Math., 1946. 78. № 2. P. 1–96.
28. H. Hochstadt*On a Hill's equation with double eigenvalues* // Proc. Amer. Math. Soc., 1977. V. 65. P. 343–374.
29. H. Hochstadt *A Generalization of Borg's Inverse Theorem for Hill's Equations* // Journal of math. analysis and applications, 102, 1984. P. 599–605.

Мухаммад Махсудович Матёкубов,
Ургенчский государственный университет,
ул. Х. Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: `mmm2210410@mail.ru`

Алишер Бекчанович Яхшимуратов,
Ургенчский государственный университет,
ул. Х. Алимджана, 14,
220100, г. Ургенч, Узбекистан
E-mail: `albaron@mail.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 112-124.

УДК 517.98+517.53

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ РОСТА ОПЕРАТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

С.Н. МИШИН

Аннотация. В работе обобщаются теорема Лиувилля и понятия порядка и типа роста целой функции на случай операторнозначных функций со значением в пространстве $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства $\mathbf{H}_1$ в локально выпуклое пространство $\mathbf{H}$, наделенном равностепенно непрерывной борнологией. Найдены формулы, выражающие порядок и тип операторнозначной функции через характеристики последовательности коэффициентов. Установлены некоторые свойства порядка и типа операторнозначной функции.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, порядок и тип последовательности операторов, порядок и тип целой функции, равностепенно непрерывная борнология, борнологическая сходимость, операторнозначная функция.

Введение

Известно [3, 4], что если целая скалярная функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ не многочлен, то ее максимум модуля $M_f(r) = \max\limits_{|z|\le r} |f(z)|$ растет быстрее любой положительной степени r при $r \to \infty$ (теорема Лиувилля). Для оценки роста таких функций обычно используются характеристики (порядок и тип):

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}, \ \sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}. \tag{1}$$

При этом известны формулы, выражающие эти характеристики через коэффициенты:

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{-\ln|a_n|}, \ (\rho e \sigma)^{\frac{1}{\rho}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|}. \tag{2}$$

Данная работа посвящена обобщению этих формул и теоремы Лиувилля на случай целой операторнозначной функции $F(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ со значениями в пространстве $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства $\mathbf{H}_1$ в локально выпуклое пространство $\mathbf{H}$. Пространства $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$, вообще говоря, ненормируемы.

1. Целые операторнозначные функции и аналог теоремы Лиувилля

$\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$ — отделимые локально выпуклые пространства над полем комплексных чисел с топологиями, задаваемыми соответственно мультинормами $\{\|\cdot\|'_q\}$, $q \in \mathcal{Q}$ и $\{\|\cdot\|_p\}$, $p \in \mathcal{P}$. Без ограничения общности можно считать мультинормы в $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$ мажорантными [2]. Обозначим $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность линейных непрерывых операторов, действующих из локально выпуклого пространства $\mathbf{H}_1$ в локально выпуклое пространство $\mathbf{H}$.

S.N. Mishin, On growth characteristics of operator-valued functions.

Поступила 16 августа 2012 г.

Последовательность $\mathcal{A}$ называется имеющей порядок [1, 5], если найдется последовательность положительных чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, такая что

$$\forall p \in \mathcal{P}\ \exists C_p > 0\ \exists q(p) \in \mathcal{Q}\ \forall x \in \mathbf{H}_1\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \|c_n A_n(x)\|_p \le C_p \|x\|'_q, \tag{3}$$

то есть семейство операторов $\{c_n A_n\}$ будет равностепенно непрерывным.

Пусть

$$\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n) = \sup_{\|x\|'_q \neq 0} \left\{ \frac{\|A_n(x)\|_p}{\|x\|'_q} \right\},\ n = 0, 1, 2, \cdots$$

(случай $\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n) = +\infty$ не исключается). Обозначим

$$\beta_{p,q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln \theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)}{n \ln n}.$$

Определение 1. *Число $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_{q\in\mathcal{Q}} \beta_{p,q}(\mathcal{A})$, $(p \in \mathcal{P})$ называется p-порядком последовательности операторов $\mathcal{A}$, а число $\beta(\mathcal{A}) = \sup\limits_{p\in\mathcal{P}}\{\beta_p(\mathcal{A})\}$ — ее порядком.*

Если $\beta(\mathcal{A}) = \pm\infty$ и при этом последовательность $\mathcal{A}$ имеет порядок, то она называется последовательностью *бесконечного* порядка.

Замечание. Отметим, что между последовательностями, имеющими порядок $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$, и последовательностями, не имеющими порядка (несмотря на то, что для них формально также $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$), есть существенное отличие. Если $\beta(\mathcal{A}) = +\infty$, но при этом последовательность $\mathcal{A} = \{A_n\}$ имеет порядок, то для нее можно подобрать последовательность положительных чисел $\{c_n\}$, такую что будет выполнено условие (3). Для последовательностей, не имеющих порядка, такой последовательности подобрать нельзя.

Если последовательность операторов $\mathcal{A}$ имеет p-порядок $\beta_p(\mathcal{A}) \neq \pm\infty$, то для нее вводится более тонкая характеристика. Обозначим

$$\alpha_{p,q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\beta_p(\mathcal{A})}\ \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)}.$$

Определение 2. *Число $\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_{q\in\mathcal{Q}} \alpha_{p,q}(\mathcal{A})$, $(p \in \mathcal{P})$ называется p-типом последовательности операторов $\mathcal{A}$ при p-порядке $\beta_p(\mathcal{A})$.*

Очевидно $\beta_p(\mathcal{A}) \le \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$. Можно показать [7], что случай, когда равенство $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$ справедливо не для всех p, а лишь для некоторых, сводится к случаю, когда $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$ заменой мультинормы на эквивалентную. Эта замена не изменяет ни порядка, ни типа последовательности операторов. Поэтому (не ограничивая общности) будем рассматривать два случая: либо $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$, либо $\beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$.

Определение 3. *Пусть последовательность операторов $\mathcal{A}$ имеет p-порядки $\beta_p(\mathcal{A})$ и порядок $\beta(\mathcal{A}) \neq \pm\infty$. Число*

$$\alpha(\mathcal{A}) = \begin{cases} \sup\limits_{p\in\mathcal{P}}\{\alpha_p(\mathcal{A})\} & ,\ \ \beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A}),\ \forall p \\ \qquad 0 & ,\ \ \beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A}),\ \forall p \end{cases}$$

называется типом последовательности операторов $\mathcal{A}$ при порядке $\beta(\mathcal{A})$.

Последовательность операторов $\mathcal{A}$ называется принадлежащей классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}}[b,a]$, (см. [1, 5]) если ее порядок меньше b, либо равен b, но тогда тип не превосходит a.

Пусть $\mathbf{H}$ — полное пространство. Известно [8], что в этом случае пространство $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathbf{H}_1$ в $\mathbf{H}$, наделенное равностепенно непрерывной борнологией, является полным борнологическим векторным выпуклым пространством.

Определение 4. *Операторнозначная функция $F : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ называется дифференцируемой в точке $t_0 \in \mathbb{C}$, если существует предел (по борнологии пространства $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$)*

$$\lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0}. \tag{4}$$

Этот предел называется производной операторнозначной функции F в точке t_0 и обозначается $F'(t_0)$.

Определение 5. *Операторнозначная функция $F : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ называется целой, если она определена и дифференцируема в каждой точке $t \in \mathbb{C}$.*

Целая операторнозначная функция, очевидно, непрерывна всюду $\big($по борнологии пространства $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})\big)$.

Пусть

$$\theta_F(p, q, t) = \sup_{\|x\|'_q \neq 0} \left\{ \frac{\|F(t)(x)\|_p}{\|x\|'_q} \right\}, \ t \in \mathbb{C}$$

(случай $\theta_F(p, q, t) = +\infty$ не исключается).

Теорема 1. *Целая операторнозначная функция $F(t)$ ограничена на любом замкнутом круге, то есть семейство операторов $\{F(t)\}_{|t| \le r}$ равностепенно непрерывно для всякого $r > 0$.*

Доказательство.

☐ Зафиксируем произвольное $r > 0$. Предположим, что функция $F(t)$ целая, а семейство $\{F(t)\}_{|t| \le r}$ не является равностепенно непрерывным, то есть найдется $p_0 \in \mathcal{P}$, такое что для всякого $C > 0$ и для всякого $q \in \mathcal{Q}$ найдется $t_C = t_C(q)$, такое что $|t_C| \le r$ и $\theta_F(p_0, q, t_C) > C$. Зафиксируем произвольное $q \in \mathcal{Q}$ и возьмем $C = n$, $n \in \mathbb{N}$. Получим последовательность комплексных чисел $t_n = t_n(q)$, целиком лежащую в круге $|t| \le r$. При этом

$$\theta_F(p_0, q, t_n) > n, \ \forall n. \tag{5}$$

В силу ограниченности последовательности $\{t_n\}$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$. Из (5) следует $\theta_F(p_0, q, t_{n_k}) > n_k, \ \forall k$, то есть последовательность $\{F(t_{n_k})\}$ не является равностепенно непрерывной, а следовательно расходится. Но в силу непрерывности функции F, она должна сходиться. Получаем противоречие.■

Если функция $F(t)$ целая, то для всякого фиксированного $x \in \mathbf{H}_1$, $F(t)(x)$ — целая вектор-функция со значениями в $\mathbf{H}$. Такая функция представляется степенным рядом [9]

$$F(t)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n, \ x \in \mathbf{H}_1, \ \{x_n\} \subset \mathbf{H}$$

(для каждого x последовательность $\{x_n\}$ своя). Положим по определению

$$M_F(p, q, r) = \sup_{|t| \le r} \theta_F(p, q, t).$$

Определим последовательность операторов $A_n : \mathbf{H}_1 \to \mathbf{H}$ следующим образом: $A_n(x) = x_n, \ \forall x \in \mathbf{H}_1$. Получим разложение функции $F(t)$ в степенной ряд:

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n. \tag{6}$$

При этом ряд (6) сходится всюду к функции $F(t)$ поточечно $\big($при любом фиксированном $x \in \mathbf{H}_1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x) t^n$ сходится всюду к функции $F(t)(x)\big)$. Покажем, что $\{A_n\} \subset \mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ и ряд (6) сходится всюду по борнологии к функции $F(t)$. Для начала докажем следующую теорему.

Теорема 2 (*аналог неравенства Коши*)**.** *Справедливо неравенство*

$$\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n) \le \frac{M_F(p,q,r)}{r^n}, \ \forall p \ \forall q \ \forall n \ \forall r > 0. \tag{7}$$

Доказательство.

□ Пусть $p \in \mathcal{P}$, $q \in \mathcal{Q}$, $r > 0$. Если $M_F(p,q,r) = \infty$, то неравенство (7) выполнено. Пусть $M_F(p,q,r) < \infty$. Так как при любом фиксированном x вектор-функция $F(t)(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(x)t^n$ целая, то (см., например, [9])

$$A_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi|=r} \frac{F(\xi)(x)d\xi}{\xi^{n+1}}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $\forall p \in \mathcal{P}\ \forall x \in \mathbf{H}_1\ \forall r > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|A_n(x)\|_p \le \frac{\sup\limits_{|\xi|\le r} \|F(\xi)(x)\|_p}{r^n} \le \frac{\sup\limits_{|\xi|\le r} \theta_F(p,q,\xi)}{r^n} \|x\|'_q = \frac{M_F(p,q,r)}{r^n}\|x\|'_q,$$

что влечет неравенство (7).■

Так как функция $F(t)$ целая, то по теореме 1 для всякого $r > 0$ семейство $\{F(t)\}_{|t|\le r}$ равностепенно непрерывно, то есть

$$\forall p \in \mathcal{P}\ \exists C_p > 0\ \exists q_p \in \mathcal{Q}\ \forall x \in \mathbf{H}_1\ \forall t\ |t| \le r \Rightarrow \|F(t)(x)\|_p \le C_p\|x\|'_{q_p}.$$

Для каждого p выберем $q_0 = q_0(p)$ такое, что $\|x\|'_{q_0} \ge \|x\|'_{q_p}$, $\forall x \in \mathbf{H}_1$ (это всегда можно сделать, так как мультинорма мажорантная). Тогда

$$\theta_F(p,q_0,t) = \sup_{\|x\|'_{q_0}\ne 0} \left\{ \frac{\|F(t)(x)\|_p}{\|x\|'_{q_0}} \right\} \le \sup_{\|x\|'_{q_0}\ne 0} \left\{ \frac{C_p\|x\|'_{q_p}}{\|x\|'_{q_0}} \right\} = \tilde{C}_p(q_0), \ |t| \le r.$$

Таким образом, для всякого $r > 0$ и для всякого $p \in \mathcal{P}$ найдется $q_0 \in \mathcal{Q}$, такое что $\theta_F(p,q_0,t)$ (как функции t) ограничены в круге $|t| \le r$. А это значит, что

$$\forall r\ \forall p\ \exists q_0(p,r):\ M_F(p,q_0,r) < \infty.$$

То есть по теореме 2

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_0,n)} \le \frac{1}{r}, \ r > 0. \tag{8}$$

Из (8) следут либо $\beta_p(\mathcal{A}) < 0$, либо $\beta_p(\mathcal{A}) = 0$, но тогда в силу произвольности r

$$\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf_{q\in\mathcal{Q}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)} = 0.$$

Таким образом, последовательность $\{A_n\}$ принадлежит классу $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}}[0,0]$ и, следовательно, ряд (6) сходится всюду по борнологии к функции $F(t)$ (см. [1, 5]).

Теорема 3 (*аналог теоремы Лиувилля*)**.** *Пусть функция (6) целая и удовлетворяет условию:*

$$\exists k\ \forall p\ \exists K_p > 0\ \exists q(p)\ \forall r > 0:\ M_F(p,q,r) \le K_p r^k. \tag{9}$$

Тогда F — операторнозначный многочлен, степень которого не превышает k, то есть

$$F(t) = \sum_{n=0}^{[k]} A_n t^n.$$

Доказательство.

□ Из неравенств (7), (9) и определения чисел $\theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)$ имеем:

$$\|A_n(x)\|_p \le \theta_{\mathcal{A}}(p,q,n)\|x\|'_q \le K_p r^{k-n}\|x\|'_q, \ \forall p\ \forall x \in \mathbf{H}_1\ \forall r > 0\ \forall n, \ q = q(p).$$

В силу произвольности r,

$$\|A_n(x)\|_p = 0,\ \forall n > k\ \forall p\ \forall x \in \mathbf{H}_1,$$

следовательно, $A_n = 0,\ \forall n > k$. ■

Теорема 3 показывает, что если F — целая трансцендентная функция, то величины $M_F(p,q,r)$ растут при $r \to \infty$ быстрее любой положительной степени.

2. Характеристики роста целой операторнозначной функции и формулы их вычисления

Определение 6. *Пусть $F : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ — целая трансцендентная функция. Число $\rho_p(F) = \inf\limits_{q \in \mathcal{Q}} \rho_{p,q}(F)$, где*

$$\rho_{p,q}(F) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_F(p,q,r)}{\ln r}$$

назовем p-порядком функции F, а число $\rho(F) = \sup\limits_{p\in\mathcal{P}}\{\rho_p(F)\}$ — ее порядком.

Если $0 < \rho_p(F) < \infty$, то число $\sigma_p(F) = \inf\limits_{q\in\mathcal{Q}} \sigma_{p,q}(F)$, где

$$\sigma_{p,q}(F) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_F(p,q,r)}{r^{\rho_p(F)}},$$

назовем p-типом функции f при p-порядке $\rho(F)$.

Можно показать, что случай, когда для одних p, $\rho_p(F) < \rho(F)$, а для других $\rho_p(F) = \rho(F)$, сводится к случаю $\rho_p(F) = \rho(F),\ \forall p$ заменой мультинормы на эквивалентную. Поэтому (не ограничивая общности) будем рассматривать два случая: либо $\rho_p(F) < \rho(F),\ \forall p$, либо $\rho_p(F) = \rho(F),\ \forall p$.

Определение 7. *Пусть функция $F(t)$ имеет p-порядки $\rho_p(F)$ и порядок $0 < \rho(F) < \infty$. Число*

$$\sigma(F) = \begin{cases} 0 & ,\quad \rho_p(F) < \rho(F),\ \forall p \\ \sup\limits_{p\in\mathcal{P}}\{\sigma_p(F)\} & ,\quad \rho_p(F) = \rho(F),\ \forall p \end{cases}$$

назовем типом функции f при порядке $\rho(F)$.

Лемма 1. *Пусть*

$$\forall p\ \exists q_p\ \exists a_p, b_p > 0\ \exists r_0(p)\ \forall r > r_0 :\ M_F(p,q_p,r) < e^{a_p r^{b_p}}. \tag{10}$$

Тогда

$$\forall p\ \exists n_0(p)\ \forall n > n_0 :\ \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)} < \left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}}. \tag{11}$$

Доказательство.

□ Пусть выполнено неравенство (10), тогда в силу (7) имеем

$$\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n) < \frac{e^{a_p r^{b_p}}}{r^n};\ \forall p\ \forall r > r_0(p)\ \forall n. \tag{12}$$

Обозначим $\mu_p(r) = e^{a_p r^{k_p}} r^{-n}$. Очевидно,

$$\forall p :\ \mu_p(0) = \mu_p(+\infty) = +\infty.$$

Найдем $\min\limits_{r>0}\{\mu_p(r)\}$.

$$\mu_p'(r) = \mu_p(r)\ln'\mu_p(r)$$

$$\mu_p'(r) = \mu_p(r)\left(a_p r^{b_p} - n\ln r\right)'$$

$$\mu_p'(r) = \mu_p(r)\left(a_p b_p r^{b_p-1} - \frac{n}{r}\right)$$

$\mu_p'(r) = 0$ при $r = r_1 = \left(\frac{n}{a_p b_p}\right)^{\frac{1}{b_p}}$. Подставляя r_1 в неравенство (12), получим (11). ■

Лемма 2. *Пусть*

$$\forall p\ \exists q_p\ \exists a_p, b_p > 0\ \exists n_0(p)\ \forall n > n_0 :\ \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}}. \tag{13}$$

Тогда

$$\forall p\ \forall \varepsilon > 0\ \exists r_0(p, \varepsilon)\ \forall r > r_0 :\ M_F(p, q_p, r) < e^{(a_p+\varepsilon) r^{b_p}}. \tag{14}$$

Доказательство.

□ В силу условия (13) $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}}[0, 0]$, следовательно, F — целая операторнозначная функция. Зафиксируем произвольное p (тем самым зафиксируем зависящие от него q_p, a_p, b_p) и рассмотрим неравенство:

$$\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n < \left(\left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} r\right)^n.$$

Для достаточно больших n

$$\left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} r < \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Обозначим $N_p(r)$ — наименьшее из натуральных n, при которых выполняется неравенство (15).

Найдем зависимость $N_p(r)$ от r. Имеем:

$$2r\left(\frac{a_p b_p e}{n}\right)^{\frac{1}{b_p}} < 1,\ \text{при } n > (2r)^{b_p}(a_p b_p e).$$

Следовательно, можно положить $N_p(r) = \left[(2r)^{b_p}(a_p b_p e)\right] + 1$.

Далее, для любых фиксированных $p \in \mathcal{P}$, $t \in \mathbb{C}$ и $x \in \mathbf{H}_1$ имеем:

$$\|F(t)(x)\|_p \le \sum_{n=0}^{\infty} \|A_n(x)\|_p |t|^n \le \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) |t|^n \|x\|'_{q_p},$$

следовательно,

$$\theta_F(p, q_p, t) \le \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) |t|^n,$$

то есть

$$\forall p\ \forall r > 0 :\ M_F(p, q_p, r) \le \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n = \sum_{n=0}^{N_p(r)-1} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n + \sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n.$$

Для $n \ge N_p(r)$ выполняется неравенство: $\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$, поэтому

$$\sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n < \sum_{n=N_p(r)}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2.$$

Так как при любых фиксированных p и r

$$\lim_{n \to \infty} \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n = 0,$$

то последовательность $\{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n\}$ имеет максимальный член. Пусть

$$m_p(r) = \max_{n \ge 0} \{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) r^n\},$$

тогда

$$\sum_{n=0}^{N_p(r)-1} \theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)r^n \le m_p(r)N_p(r).$$

Оценим $m_p(r)$. Пусть $\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,s)r^s$ — максимальный член. При неограниченном увеличении r номер s максимального члена также начнет неограниченно увеличиваться, то есть $s\to\infty$ при $r\to\infty$. Если r — достаточно большое, то $s>n_0$, где n_0 — число из (13).

Поэтому

$$m_p(r)=\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,s)r^s < \left(\frac{a_pb_pe}{s}\right)^{\frac{s}{b_p}} r^s \le \max_{\xi\ge 0}\left\{\left(\frac{a_pb_pe}{\xi}\right)^{\frac{\xi}{b_p}} r^{\xi}\right\}.$$

Обозначим

$$\nu_p(\xi)=\left(\frac{a_pb_pe}{\xi}\right)^{\frac{\xi}{b_p}} r^{\xi}.$$

Очевидно,

$$\forall p:\ \nu_p(0)=1,\ \nu_p(+\infty)=0.$$

Найдем $\max\limits_{\xi\ge 0}\{\nu_p(\xi)\}$. Имеем:

$$\nu_p'(\xi)=\nu_p(\xi)\left(\frac{\ln(a_pb_pe)}{b_p}-\frac{\ln\xi}{b_p}-\frac{1}{b_p}+\ln r\right).$$

$\nu_p'(\xi)=0$ при $\xi=\xi_1=(a_pb_p)r^{b_p}$.

$$\nu_p(\xi_1)=e^{a_pr^{b_p}}.$$

Следовательно (при достаточно больших r), $m_p(r)<e^{a_pr^{b_p}}$.

Итак

$$M_F(p,q_p,r)\le N_p(r)m_p(r)+2\le ((2r)^{b_p}(a_pb_pe)+1)e^{a_pr^{b_p}}+2<e^{(a_p+\varepsilon)r^{b_p}}.$$

■

Теорема 4. *Характеристики роста функции (6) вычисляются по формулам*

$$\rho_p(F)=-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})},\ \forall p, \tag{16}$$

$$\sigma_p(F)=-\frac{\beta_p(\mathcal{A})}{e}(\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}},\ \forall p, \tag{17}$$

$$\rho(F)=-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}, \tag{18}$$

$$\sigma(F)=\begin{cases} 0 & ,\ \beta_p(\mathcal{A})<\beta(\mathcal{A}),\ \forall p\\ -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e}(\alpha(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}} & ,\ \beta_p(\mathcal{A})=\beta(\mathcal{A}),\ \forall p.\end{cases} \tag{19}$$

Доказательство.

□ Зафиксируем произвольное p. Пусть p-порядок функции F равен $\rho_p(F)$. Тогда

$$\forall p\ \forall\varepsilon>0\ \exists q_p(\varepsilon)\ \exists r_0(p,\varepsilon)\ \forall r>r_0:\ M_F(p,q_p,r)\le\exp\left\{r^{\rho_p(F)+\varepsilon}\right\}.$$

По лемме 1 ($b_p=\rho_p(F)+\varepsilon,\ a_p=1$)

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)}<\left(\frac{(\rho_p(F)+\varepsilon)\,e}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_p(F)+\varepsilon}},\ \forall n>n_0.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\frac{1}{n}\ln\theta_{\mathcal{A}}(p,q_p,n)<\left(\frac{1}{\rho_p(F)+\varepsilon}\right)\ln\big((\rho_p(F)+\varepsilon)\,e\big)-\frac{\ln n}{\rho_p(F)+\varepsilon}=C_p(\varepsilon)-\frac{\ln n}{\rho_p(F)+\varepsilon},$$

$$\ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n) < C_p(\varepsilon)n - \frac{n \ln n}{\rho_p(F) + \varepsilon},$$

$$\ln \frac{1}{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} > \frac{n \ln n}{\rho_p(F) + \varepsilon} - C_p(\varepsilon)n = n \ln n \left(\frac{1}{\rho_p(F) + \varepsilon} - \frac{C_p(\varepsilon)}{\ln n} \right), \ \forall n > n_0. \tag{20}$$

При $n \to \infty$ выражение в скобках в (20) стремится к $\frac{1}{\rho_p(F)+\varepsilon}$, поэтому при больших n

$$\ln \frac{1}{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} > \frac{n \ln n}{\rho_p(F) + 2\varepsilon},$$

то есть

$$\rho_p(F) + 2\varepsilon > \frac{n \ln n}{- \ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)}.$$

В силу произвольности ε,

$$-\frac{1}{\beta_{p,q_p}(\mathcal{A})} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{- \ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} \le \rho_p(F).$$

Так как $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_q \{\beta_{p,q}(\mathcal{A})\}$, то

$$-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} \le -\frac{1}{\beta_{p,q_p}(\mathcal{A})} \le \rho_p(F).$$

Таким образом, $\rho_p(F) \ge -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}, \ \forall p$.

Обратно, поскольку

$$-\frac{1}{\beta_{p,q}(\mathcal{A})} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{- \ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)},$$

то

$$\frac{n \ln n}{- \ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)} < -\frac{1}{\beta_{p,q}(\mathcal{A})} + \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall p \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall q \ \forall n > n_0(p, q, \varepsilon).$$

Так как $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_q \{\beta_{p,q}(\mathcal{A})\}$, то

$$\forall p \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists q_p(\varepsilon) : \ -\frac{1}{\beta_{p,q_p}(\mathcal{A})} \le -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом,

$$\forall p \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists q_p(\varepsilon) \ \exists n_0(p, \varepsilon) \ \forall n > n_0 : \ \frac{n \ln n}{- \ln \theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon,$$

следовательно,

$$\forall p \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists q_p(\varepsilon) \ \exists n_0(p, \varepsilon) \ \forall n > n_0 : \ \sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < n^{-\frac{1}{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon}}.$$

По лемме 2 $\left(b_p = -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon, \ a_p = \frac{1}{e\left(-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon\right)} \right)$

$$\forall p \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists q_p(\varepsilon) \ \exists r_0(p, \varepsilon) \ \forall r > r_0 : \ M_F(p, q_p, r) \le \exp\left\{ (a_p + \varepsilon) r^{\left(-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})} + \varepsilon\right)} \right\}.$$

А это означает, что $\rho_p(F) \le -\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}, \ \forall p$.

Таким образом равенство (16) доказано. Равенство (18) непосредственно следует из (16).

Докажем равенство (17).

Пусть функция F имеет p-порядок $0 < \rho_p(F) < \infty$ и p-тип $\sigma_p(F)$. Тогда

$$\forall p \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists q_p(\varepsilon) \ \exists r_0(p, \varepsilon) \ \forall r > r_0 : \ M_F(p, q_p, r) < \exp\left\{ (\sigma_p(F) + \varepsilon) r^{\rho_p(F)} \right\}.$$

По лемме 1 $\big(a_p = \sigma_p(F) + \varepsilon,\ b_p = \rho_p(F)\big)$ имеем:

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \left(\frac{(\sigma_p(F) + \varepsilon)\,\rho_p(F)e}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},\ \forall n > n_0,$$

$$n^{\frac{1}{\rho_p(F)}}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} < \big(\,(\sigma_p(F) + \varepsilon)\,\rho_p(F)e\big)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},\ \forall n > n_0.$$

В силу произвольности ε

$$\alpha_{p,q_p}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\beta_p(\mathcal{A})}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho_p(F)}}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q_p, n)} \le (\sigma_p(F)\rho_p(F)e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}}$$

Так как $\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_q\{\alpha_{p,q}(\mathcal{A})\}$, то

$$\alpha_p(\mathcal{A}) \le \alpha_{p,q_p}(\mathcal{A}) \le (\sigma_p(F)\rho_p(F)e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},\ \forall p.$$

Обратно, поскольку

$$\alpha_{p,q}(\mathcal{A}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-\beta_p(\mathcal{A})}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho_p(F)}}\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)},\ \forall p,\ \forall q,$$

то

$\forall\varepsilon > 0\ \forall p\ \exists q(p,\varepsilon)\ \exists n_0(p,\varepsilon)\ \forall n > n_0,$

$$\sqrt[n]{\theta_{\mathcal{A}}(p, q, n)} < \left(\frac{(\alpha_{p,q}(\mathcal{A}) + \varepsilon)^{\rho_p(F)}}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}} < \left(\frac{(\alpha_p(\mathcal{A}) + 2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{n}\right)^{\frac{1}{\rho_p(F)}}.$$

По лемме 2 $\left(b_p = \rho_p(F),\ a_p = \frac{(\alpha_p(\mathcal{A})+2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{\rho_p(F)e}\right)$ получаем:

$$\forall p\ \forall\varepsilon > 0\ \exists q_p(\varepsilon)\ \exists r_0(p,\varepsilon)\ \forall r > r_0:\ M_F(p, q_p, r) < \exp\left\{(a_p + \varepsilon)r^{\rho_p(F)}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_p(F) \le a_p = \frac{(\alpha_p(\mathcal{A}) + 2\varepsilon)^{\rho_p(F)}}{\rho_p(F)e}.$$

В силу произвольности ε

$$\sigma_p(F)\rho_p(F)e \le (\alpha_p(\mathcal{A}))^{\rho_p(F)},$$

следовательно,

$$\alpha_p(\mathcal{A}) \ge (\sigma_p(F)\rho_p(F)e)^{\frac{1}{\rho_p(F)}},$$

то есть

$$\sigma_p(F) = -\frac{\beta_p(\mathcal{A})}{e}(\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta_p(\mathcal{A})}},\ \forall p.$$

Таким образом равенство (17) доказано.

Докажем равенство (19).

Если $\beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$, то из равенства (16) следует $\rho_p(F) < \rho(F)$, $\forall p$ и по определению $\sigma(F) = 0$.

Если же $\beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A})$, $\forall p$, то из равенства (16) следует $\rho_p(F) = \rho(F)$, $\forall p$ и по определению

$$\sigma(F) = \sup_p\{\sigma_p(F)\} = -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e}\sup_p\{(\alpha_p(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}}\} = -\frac{\beta(\mathcal{A})}{e}(\alpha(\mathcal{A}))^{-\frac{1}{\beta(\mathcal{A})}}.$$

■

Замечание. Отметим, что соотношение (16) верно и для $\rho_p(F) = \infty$. Так как, если предположить, что $\rho_p(F) = \infty$ и $\beta_p(\mathcal{A}) < 0$, то должно быть (по доказанному) $\rho_p(F) < \infty$, что не так. Аналогично равенство (17) верно и для $\sigma_p(F) = \infty$.

Замечание. Формулы (16) и (17) показывают, что p-порядки и p-типы целой операторнозначной функции полностью определяются характеристиками последовательности ее коэффициентов.

Примеры.

1. Пусть $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|x(z)\|_p = \max_{|z|\le p} |x(z)|,\ p > 0.$$

Найдем характеристики функции

$$F(t) = e^{t\frac{d}{dz}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}(\mathbb{C})).$$

Последовательность $\mathcal{A} = \left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\right\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_p(\mathcal{A}) = \alpha_p(\mathcal{A}) = 0,\ \forall p.$$

Следовательно, $\rho_p(F) = \infty,\ \forall p$.

2. Пусть $\mathbf{H}_1 = [\rho, \sigma],\ \mathbf{H} = [\rho, \theta], \theta \ge \sigma$. Топологии на этих пространствах определяются мультинормами

$$\|x(z)\|_\varepsilon = \sup_{p>0} \left\{ \max_{|z|\le p} |x(z)| e^{-(\sigma+\varepsilon)p^\rho} \right\},\ \varepsilon > 0,\ x \in [\rho, \sigma].$$

$$\|y(z)\|_\varepsilon = \sup_{p>0} \left\{ \max_{|z|\le p} |y(z)| e^{-(\theta+\varepsilon)p^\rho} \right\},\ \varepsilon > 0,\ y \in [\rho, \theta].$$

Найдем характеристики функции

$$F(t) = e^{t\frac{d}{dz}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}([\rho, \sigma], [\rho, \theta]).$$

Последовательность $\mathcal{A} = \left\{\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\right\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_\varepsilon(\mathcal{A}) = -\frac{1}{\rho},\ \alpha_\varepsilon(\mathcal{A}) = (\rho e \sigma \Omega_\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}},\ \forall \varepsilon,$$

где

$$\Omega_\varepsilon = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\theta+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}\right)^{1-\rho} & ,\ \rho > 1 \\ 1 & ,\ \rho \le 1 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\rho_\varepsilon(F) = \rho,\ \sigma_\varepsilon(F) = \sigma\Omega_\varepsilon,\ \forall \varepsilon.$$

3. Пусть $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbb{C})$ — пространство всех целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах:

$$\|x(z)\|_p = \max_{|z|\le p} |x(z)|,\ p > 0.$$

Найдем характеристики функции

$$F(t)(x) = x(z) + t\int_0^z e^{(z-\xi)t} x(\xi) d\xi =$$

$$= x(z) + t\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z \frac{(z-\xi)^n t^n}{n!} x(\xi) d\xi,$$

$$F(t) : \mathbb{C} \to \mathrm{Lec}(\mathbf{H}(\mathbb{C})).$$

Здесь

$$A_n(x)=\int\limits_0^z \frac{(z-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}x(\xi)d\xi,\ n=1,2,\dots,\ A_0=E.$$

Последовательность $\mathcal{A}=\{A_n\}$ имеет следующие характеристики [1]:

$$\beta_p(\mathcal{A})=-1,\ \alpha_p(\mathcal{A})=p,\ \forall p.$$

Следовательно, $\rho_p(F)=1,\ \sigma_p(F)=\frac{p}{e},\ \forall p.$

3. Свойства характеристик роста операторнозначных функций

Отметим некоторые свойства характеристик роста операторнозначных функций, следующие из теоремы 4.

1^0. *Целая функция F и ее k-я производная $F^{(k)}$ имеют одинаковые p-порядки и p-типы роста.*

Справедливость следует из того, что последовательности $\{A_n\}$ и $\left\{\frac{(n+k)!}{n!}A_{n+k}\right\}$ имеют одинаковые характеристики при любом фиксированном k.

2^0. *Если функция F_1 имеет p-порядки $\rho_p(F_1)$ и p-типы $\sigma_p(F_1)$, а функция F_2 имеет p-порядки $\rho_p(F_2)>\rho_p(F_1),\ \forall p$ и p-типы $\sigma_p(F_2)$, то функция $F=F_1+F_2$ имеет p-порядки $\rho_p(F)=\rho_p(F_2),\ \forall p$ и p-типы $\sigma_p(F)=\sigma_p(F_2),\ \forall p$.*

Справедливость следует из того, что характеристики суммы последовательностей операторов равны характеристикам того слагаемого, у которого порядок больше.

3^0. *Если функция F_1 имеет p-порядки $\rho_p(F_1)$ и p-типы $\sigma_p(F_1)$, а функция F_2 имеет p-порядки $\rho_p(F_2)=\rho_p(F_1),\ \forall p$ и p-типы $\sigma_p(F_2)>\sigma_p(F_1),\ \forall p$, то функция $F=F_1+F_2$ имеет p-порядки $\rho_p(F)=\rho_p(F_2),\ \forall p$ и p-типы $\sigma_p(F)=\sigma_p(F_2),\ \forall p$.*

Справедливость следует из того, что характеристики суммы последовательностей операторов с одинаковыми порядками равны характеристикам того слагаемого, у которого тип больше.

4^0. (Для случая $\mathbf{H}_1=\mathbf{H}$.) *Пусть функция F_1 имеет порядок $\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_1)$, а функция F_2 имеет порядок $\rho(F_2)>\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_2)$. Тогда функция $F=F_1F_2$ имеет порядок $\rho(F)\le\rho(F_2)$ и тип $\sigma(F)$. Если $\rho(F)=\rho(F_2)$, то $\sigma(F)\le\sigma(F_2)$. Аналогично для функции $\tilde{F}=F_2F_1$.*

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть последовательность операторов $\mathcal{A}=\{A_n\}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{A})$, а последовательность операторов $\mathcal{B}=\{B_n\}$ — порядок $\beta(\mathcal{B})>\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{B})$. Тогда последовательность операторов $\mathcal{C}=\{C_n\}$, где $C_n=\sum\limits_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{C})\le\beta(\mathcal{B})$ и тип $\alpha(\mathcal{C})$. Если $\beta(\mathcal{C})=\beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C})\le\alpha(\mathcal{B})$.*

Доказательство.
□ Обозначим $a=\alpha(\mathcal{A})e^{\beta(\mathcal{A})},\ b=\alpha(\mathcal{B})e^{\beta(\mathcal{B})}$.

Из определения порядка и типа последовательности операторов имеем [1]

$$\forall\varepsilon,\varepsilon_1>0,\ \forall p,\ \exists M_p,\ \exists q,\ \forall n,\ \forall x\in\mathbf{H}:$$

$$\|C_n(x)\|_p\le M_p\Bigg((b+\varepsilon)^n n!^{\beta(\mathcal{B})}+(a+\varepsilon_1)(b+\varepsilon)^{n-1}1!^{\beta(\mathcal{A})}(n-1)!^{\beta(\mathcal{B})}+\dots+$$

$$+(a+\varepsilon_1)^{n-1}(b+\varepsilon)(n-1)!^{\beta(\mathcal{A})}1!^{\beta(\mathcal{B})}+(a+\varepsilon_1)^n n!^{\beta(\mathcal{A})}\Bigg)\|x\|_q\le$$

$$\le M_p(b+\varepsilon)^n n!^{\beta(\mathcal{B})}\left[1+\binom{n}{1}^{-\beta(\mathcal{B})}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{b+\varepsilon}\right)1!^{\nu}+\binom{n}{2}^{-\beta(\mathcal{B})}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{b+\varepsilon}\right)^2 2!^{\nu}+\dots+\right.$$

$$\left.+\binom{n}{n}^{-\beta(\mathcal{B})}\left(\frac{a+\varepsilon_1}{b+\varepsilon}\right)^n n!^{\nu}\right]\|x\|_q,\quad(21)$$

где $\nu=\beta(\mathcal{A})-\beta(\mathcal{B})$.

Если $\beta(\mathcal{B})>\beta(\mathcal{A})$ ($\nu<0$), то при больших n выражение в квадратных скобках в (21) не превосходит $(1+\varepsilon_2)^n$, $\forall\varepsilon_2>0$ и следовательно $\beta(\mathcal{C})\le\beta(\mathcal{B})$, причем, если $\beta(\mathcal{C})=\beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C})\le\alpha(\mathcal{B})$. ■

5^0. (Для случая $\mathbf{H}_1=\mathbf{H}$.) *Пусть функция F_1 имеет порядок $\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_1)$, а функция F_2 имеет порядок $\rho(F_2)=\rho(F_1)$ и тип $\sigma(F_2)\ge\sigma(F_1)$. Тогда функция $F=F_1F_2$ имеет порядок $\rho(F)\le\rho(F_2)$ и тип $\sigma(F)$. Если $\rho(F)=\rho(F_2)$, то $\sigma(F)\le 2\sigma(F_2)$. Аналогично для функции $\tilde F=F_2F_1$.*

Доказательство основано на следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть последовательность операторов $\mathcal{A}=\{A_n\}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{A})$, а последовательность операторов $\mathcal{B}=\{B_n\}$ — порядок $\beta(\mathcal{B})=\beta(\mathcal{A})$ и тип $\alpha(\mathcal{B})\ge\alpha(\mathcal{A})$. Тогда последовательность операторов $\mathcal{C}=\{C_n\}$, где $C_n=\sum\limits_{k=0}^{n}A_kB_{n-k}$ имеет порядок $\beta(\mathcal{C})\le\beta(\mathcal{B})$ и тип $\alpha(\mathcal{C})$. Если $\beta(\mathcal{C})=\beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C})\le 2^{-\beta(\mathcal{B})}\alpha(\mathcal{B})$.*

Доказательство.

□ В условиях леммы выражение в квадратных скобках в (21) не превосходит $2^{-\beta(\mathcal{B})n}n$ и следовательно $\beta(\mathcal{C})\le\beta(\mathcal{B})$, причем если $\beta(\mathcal{C})=\beta(\mathcal{B})$, то $\alpha(\mathcal{C})\le 2^{-\beta(\mathcal{B})}\alpha(\mathcal{B})$. ■

Замечание. Как известно, для скалярного случая справедлива теорема о категориях [3, Теорема 12]. В случае операторнозначных функций этот вопрос пока открыт.

6^0. (Инвариантность). Пусть $\mathbf{H}_1$, $\widetilde{\mathbf{H}}_1$, $\mathbf{H}$ и $\widetilde{\mathbf{H}}$ — четыре л.в.п. с топологиями, задаваемыми соответственно мультинормами $\|\cdot\|'_q$, $q\in\mathcal{Q}$, $\|\cdot\|'_{\widetilde q}$, $\widetilde q\in\widetilde{\mathcal{Q}}$, $\|\cdot\|_p$, $p\in\mathcal{P}$, $\|\cdot\|_{\widetilde p}$, $\widetilde p\in\widetilde{\mathcal{P}}$ и пусть $T_1:\mathbf{H}_1\to\widetilde{\mathbf{H}}_1$, $T:\mathbf{H}\to\widetilde{\mathbf{H}}$ — два топологических изоморфизма. Тогда:

1) для всякой операторнозначной функции

$$F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nt^n:\mathbb{C}\to\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1,\mathbf{H})$$

ее порядок и тип совпадает с порядком и типом функции

$$\tilde F(t)=\sum_{n=0}^{\infty}TA_nT_1^{-1}t^n:\mathbb{C}\to\mathrm{Lec}(\widetilde{\mathbf{H}}_1,\widetilde{\mathbf{H}});$$

2) если все p-порядки функции F строго меньше ее порядка, то все $\widetilde p$-порядки функции $\tilde F$ строго меньше ее порядка;

3) если хотя бы один p-порядок функции F равен ее порядку, то хотя бы один $\widetilde p$-порядок функции $\tilde F$ равен ее порядку;

4) если функция F имеет p-порядки $\rho_p(F)$, порядок $\rho(F)$, p-типы $\sigma_p(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\mathcal{P}_F = \{p \in \mathcal{P} : \ \rho_p(F) = \rho(F)\}$$

не пусто и $\forall p \in \mathcal{P}_F : \ \sigma_p(F) < \sigma(F)$, то функция $\tilde{F}$ имеет $\widetilde{p}$-порядки $\rho_{\widetilde{p}}(\tilde{F})$, порядок $\rho(\tilde{F})$, $\widetilde{p}$-типы $\sigma_{\widetilde{p}}(\tilde{F})$ и тип $\sigma(\tilde{F})$, причем множество

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} = \{\widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}} : \ \rho_{\widetilde{p}}(\tilde{F}) = \rho(\tilde{F})\}$$

не пусто и $\forall \widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} : \ \sigma_{\widetilde{p}}(\tilde{F}) < \sigma(\tilde{F})$;

5) если в условиях п. 4) $\exists p \in \mathcal{P}_F : \ \sigma_p(F) = \sigma(F)$, то $\exists \widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}_{\tilde{F}} : \ \sigma_{\widetilde{p}}(\tilde{F}) = \sigma(\tilde{F})$.

Справедливость свойства 6^0 следует из аналогичных свойств для характеристик последовательности операторов [1, 6].

Из свойства инвариантности следует, что при любых заменах мультинорм в $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}$ на эквивалентные (T_1 и T — тождественные операторы):

1) порядок и тип операторнозначной функции F не меняются;

2) если все p-порядки функции F были строго меньше ее порядка до замены мультинорм, то после замены мультинорм все ее $\widetilde{p}$-порядки будут также строго меньше порядка;

3) если хотя бы один p-порядок функции F был равен ее порядку до замены мультинорм, то после замены мультинорм хотя бы один ее $\widetilde{p}$-порядок (не обязательно тот же самый) также будет равен ее порядку;

4) если функция F до замены мультинорм имела p-порядки $\rho_p(F)$, порядок $\rho(F)$, p-типы $\sigma_p(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\mathcal{P}_F = \{p \in \mathcal{P} : \ \rho_p(F) = \rho(F)\}$$

было не пусто и $\forall p \in \mathcal{P}_F : \ \sigma_p(F) < \sigma(F)$, то после замены мультинорм эта функция будет иметь $\widetilde{p}$-порядки $\rho_{\widetilde{p}}(F)$, порядок $\rho(F)$, $\widetilde{p}$-типы $\sigma_{\widetilde{p}}(F)$ и тип $\sigma(F)$, причем множество

$$\widetilde{\mathcal{P}}_F = \{\widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}} : \ \rho_{\widetilde{p}}(F) = \rho(F)\}$$

будет не пусто и $\forall \widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}_F : \ \sigma_{\widetilde{p}}(F) < \sigma(F)$;

5) если в условиях п. 4) $\exists p \in \mathcal{P}_F : \ \sigma_p(F) = \sigma(F)$, то $\exists \widetilde{p} \in \widetilde{\mathcal{P}}_F : \ \sigma_{\widetilde{p}}(F) = \sigma(F)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громов В.П., Мишин С.Н., Панюшкин С.В. *Операторы конечного порядка и дифференциально-операторные уравнения.* Орел: ОГУ, 2009.
2. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* М., Физматгиз, 1959.
3. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* М.: ГИТТЛ, 1956.
4. Леонтьев А.Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* М.: Наука, 1983.
5. Мишин С.Н. *Связь характеристик последовательности операторов с борнологической сходимостью* // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. 2010. №4. С. 26–34.
6. Мишин С.Н. *Инвариантность характеристик последовательности операторов и операторных характеристик вектора* // Ученые записки ОГУ (лаб. ТФФА). №7. Орел. 2010. С. 32–35.
7. Мишин С.Н. Операторы конечного порядка в локально выпуклых пространствах и их применение: Дисс. ... к. ф.-м. н. Орел, 2002.
8. Радыно Я.В. *Линейные уравнения и борнология.* Мн.: Изд-во БГУ, 1982.
9. Garrett P. *Holomorphic vector-valued functions.* [Электронный ресурс] URL: `http://www.math.umn.edu/~garrett/m/fun/Notes/09_vv_holo.pdf`

Сергей Николаевич Мишин,
ГОУ ВПО "Орловский государственный университет",
ул. Комсомольская, 95,
302026, г. Орел, Россия
E-mail: `sergeymishin@rambler.ru`

ISSN 2074-1863 Уфимский математический журнал. Том 5. № 1 (2013). С. 125-129.

УДК 517.3

РЕДУКЦИИ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ РАНГА 1 ДЕФЕКТА 2 ПЯТИМЕРНОЙ НАДАЛГЕБРЫ КОНИЧЕСКОЙ ПОДАЛГЕБРЫ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Конические течения — инвариантные решения ранга 1 уравнений газовой динамики на трехмерной подалгебре, заданной операторами вращения, переноса по времени и равномерным растяжением. Обобщение конических течений — частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 2 пятимерной надалгебры конической подалгебры, расширенной операторами переносов по пространству, не коммутирующих с вращением. Доказано, что обобщения конических течений редуцируются либо к функционально-инвариантным плоским стационарным решениям, либо к двойной волне изобарических движений, либо к простой волне.

Ключевые слова: газовая динамика, конические течения, частично инвариантные решения.

Введение

Уравнения газовой динамики допускают 11-мерную алгебру Ли операторов. Оптимальная система подалгебр построена [1]. Трехмерная подалгебра из оптимальной системы с базисными операторами $X_7 = \partial_\theta$, $X_{10} = \partial_t$, $X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r$ в цилиндрической системе кординат (x, r, θ) порождает инвариантную подмодель ранга 1 конических течений [2]. Пятимерная подалгебра имеет дополнительные операторы переносов по декартовым переменным y, z:

$$X_2 = \partial_y = \cos\theta\partial_r - r^{-1}\sin\theta(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W),$$

$$X_3 = \partial_z = \sin\theta\partial_r - r^{-1}\cos\theta(\partial_\theta + W\partial_V - V\partial_W).$$

Обобщения конических течений по пятимерной надалгебре есть частично инвариантные решения ранга 1 дефекта 2. Цилиндрические координаты скорости $\vec{u}$ удобно предстваить в виде U, $V = Q\cos\vartheta$, $W = Q\sin\vartheta$ ($Q \neq 0$, иначе получается одномерное движение). Инварианты подалгебры таковы: U, Q, ρ — плотность, S — энтропия, давление определяется из уравнения состояния $p = f(\rho, S)$.

S.V. Khabirov, Reductions of partially invariant solutions of rank 1 defect 2 five-dimensional overalgebra of conical subalgebra.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00026-а, 11-01-00047-а), Советом по грантам Президента РФ для государсвтенной поддержки научных школ (№НШ-2826.2008.1), грантом № 11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.

Поступила 10 января 2012 г.

Уравнения газовой динамики в заявленных переменных принимают вид

$$U_t + UU_x + Q(U_r\cos\vartheta + r^{-1}U_\theta\sin\vartheta) + \rho^{-1}p_x = 0,$$

$$Q_t + UQ_x + Q(Q_r\cos\vartheta + r^{-1}Q_\theta\sin\vartheta) + \rho^{-1}(p_r\cos\vartheta + r^{-1}p_\theta\sin\vartheta) = 0,$$

$$\vartheta_t + U\vartheta_x + Q(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\sin\vartheta) + \\ +\rho^{-1}Q^{-1}(-p_r\sin\vartheta + r^{-1}p_\theta\cos\vartheta) = 0,$$

$$\rho_t + U\rho_x + Q(\rho_r\cos\vartheta + r^{-1}\rho_\theta\sin\vartheta) + \\ +\rho\left[U_x + Q_r\cos\vartheta + r^{-1}Q_\theta\sin\vartheta + Q\big(-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\cos\vartheta\big)\right] = 0,$$

$$S_t + US_x + Q(S_r\cos\vartheta + r^{-1}S_\theta\sin\vartheta) = 0.$$

Представление частично инвариантного решения ранга 1 дефекта 2 таково: функции U, Q, ρ, S, p зависят от одного непостоянного параметра α; функции α, ϑ — общего вида, т.е. зависят от t, x, r, θ.

Подстановка представления решения в уравнения газовой динамики дает переопределенную систему уравнений (основные уравнения подмодели):

$$S_\alpha Y\alpha = 0, \quad U_\alpha Y\alpha + \rho^{-1}p_\alpha\alpha_x = 0,$$

$$Q_\alpha Y\alpha + \rho^{-1}p_\alpha(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta) = 0,$$

$$\rho^{-1}\rho_\alpha Y\alpha + U_\alpha\alpha_x + Q_\alpha\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) + \\ +Q\left(-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\cos\vartheta\right) = 0,$$

$$\vartheta_t + U\vartheta_x + Q\left(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\sin\vartheta\right) + \\ +\rho^{-1}Q^{-1}p_\alpha\left(-\alpha_r\sin\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\cos\vartheta\right) = 0,$$

где $Y\alpha = \alpha_t + U\alpha_x + Q\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right)$.

1. Неизэнтропическое движение

Если $S_\alpha \neq 0$, то основные уравнения подмодели принимают вид

$$\begin{gathered} Y\alpha = 0, \quad p_\alpha\alpha_x = 0, \quad p_\alpha\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) = 0, \\ U_\alpha\alpha_x + Q_\alpha\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) + \\ +Q\left(-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\cos\vartheta\right) = 0, \\ \vartheta_t + U\vartheta_x + Q\left(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta+1)\sin\vartheta\right) + \\ +\rho^{-1}Q^{-1}p_\alpha\left(-\alpha_r\sin\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\cos\vartheta\right) = 0. \end{gathered} \tag{1.1}$$

1.1. Неизобарическое движение. Если $p_\alpha \neq 0$, то из (1.1) следует

$$\alpha_t = \alpha_x = 0, \quad \alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(-\alpha_r\sin\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\cos\vartheta\right)\vartheta_\lambda = 0, \quad \lambda = t, x.$$

Отсюда следует $\vartheta_t = \vartheta_x = 0$, так как функция α непостоянна. Происходит редукция к плоскому стационарному решению — инвариантному решению на подалгебре $\{\partial_t, \partial_x\}$. От системы (1.1) остается три уравнения

$$\vartheta_\theta + 1 = \operatorname{tg}\vartheta\vartheta_\tau, \quad n_\tau = \operatorname{tg}\vartheta\vartheta_\tau, \quad n_\tau + \operatorname{tg}\vartheta n_\theta = 0,$$

где $n(\alpha) = \int p_\alpha \rho^{-1} Q^{-2}\,d\alpha$, $\tau = \ln r$. Одно из уравнений интегрируется

$$n = -\ln|\cos\vartheta| + k(\theta),$$

два других принимают вид

$$\cos^{-2}\vartheta\vartheta_\tau = -k' + \operatorname{tg}\vartheta, \quad \cos^{-2}\vartheta\vartheta_\theta = -1 - \operatorname{tg}\vartheta k'. \tag{1.2}$$

Условия совместности дают уравнение на функцию $k(\theta)$: $k'' + k'^2 + 1 = 0$, решение которого $k = \ln|\cos\theta| + k_0$ определено с точностью до переноса по θ, допускаемого системой (1.1), k_0 — постоянная.

Интегрирование системы (1.2) дает семейство функционально-инвариантных решений

$$\operatorname{tg}\vartheta + \operatorname{tg}\theta = \mu_0 r\cos^{-1}\theta, \quad n(\alpha) = k_0 + \ln\left|\frac{\cos\theta}{\cos\vartheta}\right|,$$

зависящее от двух постоянных μ_0, k_0, и трех произвольных функций $S(\alpha)$, $\rho(\alpha)$, $Q(\alpha)$.

1.2. Неизобарическое движение. Пусть $p_\alpha = 0$, т.е. $f(\rho, S) = p_0$ — постоянная. Тогда система (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} &\alpha_t + U\alpha_x + Q\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) = 0,\\ &\vartheta_t + U\vartheta_x + Q\left(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\sin\vartheta\right) = 0,\\ &U\alpha_x + Q_\alpha\left(\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta\right) +\\ &\qquad + Q\left(-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\cos\vartheta\right) = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Последнее уравнение равносильно следующему

$$\operatorname{div}\vec{u} = 0. \tag{1.4}$$

Удобны лагранжевы переменные

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = U(\alpha), \quad \frac{dr}{dt} = Q(\alpha)\cos\vartheta, \quad r\frac{d\theta}{dt} = Q(\alpha)\sin\vartheta,\\ x\big|_{t=0} = x_0, \quad r\big|_{t=0} = r_0, \quad \theta\big|_{t=0} = \theta_0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Любое решение системы (1.3) можно записать с помощью решения задачи Коши (1.5) в виде $\alpha(t, x, r, \theta) = \beta(t, x_0, r_0, \theta_0)$, $\vartheta(t, x, r, \theta) = \sigma(t, x_0, r_0, \theta_0)$.

В силу (1.3) следуют равенства

$$\beta_t = 0, \quad \sigma_t + \theta_t = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \beta(x_0, r_0, \theta_0), \quad \sigma + \theta = \gamma(x_0, r_0, \theta_0).$$

С помощью этих равенств решение задачи (1.5) имеет вид

$$x = U(\beta)t + x_0, \quad r\cos(\gamma - \theta) = Q(\beta)t\cos(\gamma - \theta_0), \quad r\sin(\gamma - \theta) = r_0\sin(\gamma - \theta_0).$$

В декартовых координатах последние два равенства записывается в виде

$$y = r\cos\theta = Q(\beta)t\cos\gamma + y_0, \quad z = r\sin\theta = Q(\beta)t\sin\gamma + z_0, \tag{1.6}$$

где $y_0 = r_0\cos\theta_0$, $z_0 = r_0\sin\theta_0$.

Таким образом, мировые линии — прямые. Скорости в декартовых координатах представляются формулами

$$u = U(\beta) = u_0,$$

$$v = V\cos\theta - W\sin\theta = Q(\beta)\cos\gamma = v_0, \tag{1.7}$$

$$w = V\sin\theta + W\cos\theta = Q(\beta)\sin\gamma = w_0.$$

В силу формулы Эйлера $J_t = J\mathrm{div}\,\vec{u}$ и равенства (1.4) якобиан перехода от лагранжевых координат к эйлеровым равен еденице $J = 1$ или в силу (1.6), (1.7)

$$1 = \left| I + t\frac{\partial\vec{u}_0}{\partial\vec{x}_0} \right|,$$

где I — еденичная матрица, $\partial\vec{u}_0/\partial\vec{x}_0$ — матрица частных производных, переменная t свободная.

Отсюда следует, что все инварианты матрицы $\partial\vec{u}_0/\partial\vec{x}_0$ равны нулю:

$$u_{0x_0} + v_{0y_0} + w_{0z_0},$$

$$\begin{vmatrix} u_{0x_0} & u_{0y_0} \\ v_{0x_0} & v_{0y_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{0x_0} & u_{0z_0} \\ w_{0x_0} & w_{0z_0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{0y_0} & v_{0z_0} \\ w_{0y_0} & w_{0z_0} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.8}$$

$$\det\tfrac{\partial\vec{u}_0}{\partial\vec{x}_0} = 0.$$

Общее решение этой системы получено в [3]. В нашем случае получаются частные решения, а именно, решения типа двойной волны:

$$\big(\vec{a}\cdot\nabla\beta\big)\big(\vec{b}\cdot\nabla\gamma\big) = \big(\vec{b}\cdot\nabla\beta\big)\big(\vec{a}\cdot\nabla\gamma\big), \quad \vec{a}\cdot\nabla\beta = \vec{b}\cdot\nabla\gamma,$$

где $\vec{a} = (U', Q'\cos\gamma, Q'\sin\gamma)$, $\vec{b} = (0, -Q\sin\gamma, Q\cos\gamma)$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Как следует из [3], линии уровня двойной волны есть плоские кривые второго порядка.

2. Изэнтропические движения

Пусть $S = S_0$ — постоянная. Тогда основные уравнения можно записать в виде

$$\begin{gathered}\vartheta_t + U\vartheta_x + Q\left(\vartheta_r\cos\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\sin\vartheta\right) + \\ +\rho^{-1}Q^{-1}p'\left(-\alpha_r\sin\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\cos\vartheta\right) = 0,\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$-\vartheta_r\sin\vartheta + r^{-1}(\vartheta_\theta + 1)\cos\vartheta = c(\alpha)\alpha_x, \tag{2.2}$$

$$\alpha_r\cos\vartheta + r^{-1}\alpha_\theta\sin\vartheta = Q'U'^{-1}\alpha_x, \tag{2.3}$$

$$\alpha_t + b(\alpha)\alpha_x = 0, \tag{2.4}$$

где $b(\alpha) = U + \rho^{-1}U'^{-1}p' + QQ'U'^{-1}$, $c(\alpha) = \rho^{-2}Q^{-1}U'^{-1}\left(p'\rho' - \rho^2\big(U'^2 + Q'^2\big)\right)$.

Общее решение уравнения (2.4) можно записать в неявном виде

$$x - b(\alpha)t = g(\alpha, r, \theta), \tag{2.5}$$

где g — произвольная функция. Вводятся новые независимые переменные α, r, θ, x. Производные по старым переменным выражаются через производные функций g и $\bar{\vartheta}(\alpha, t, r, \theta) = \vartheta(t, x, r, \theta)$ по формулам

$$\alpha_t = -\frac{b}{g_\alpha + tb'}, \quad \alpha_x = \frac{1}{g_\alpha + tb'}, \quad \alpha_r = -\frac{g_r}{g_\alpha + tb'}, \quad \alpha_\theta = -\frac{g_\theta}{g_\alpha + tb'};$$

$$\vartheta_x = \bar{\vartheta}_\alpha\alpha_x, \quad \vartheta_\lambda = \bar{\vartheta}_\lambda + \bar{\vartheta}_\alpha\alpha_\lambda, \quad \lambda = t, r, \theta,$$

где $t = (x - g)b^{-1}$.

Уравнение (2.3) принимает вид

$$g_r \cos\bar\vartheta + r^{-1} g_\theta \sin\bar\vartheta = -Q' U'^{-1}. \tag{2.6}$$

Отсюда следует $\bar\vartheta_t = 0$.

Уравнение (2.2) в новых переменных

$$\left[-\bar\vartheta_r(g_\alpha + tb' + \bar v_\alpha g_r)\right]\sin\bar\vartheta + r^{-1}\cos\bar\vartheta\left[(\bar\vartheta_\theta + 1)(g_\alpha + tb') - g_\theta\bar\vartheta_\alpha\right] = c(\alpha)$$

содержит свободную переменную t. Приравнивание нулю коэффициента при свободной переменной дает равенства

$$-\bar\vartheta_r \sin\bar\vartheta + r^{-1}(\bar\vartheta_\theta + 1)\cos\bar\vartheta = 0, \tag{2.7}$$

$$g_r \sin\bar\vartheta - r^{-1} g_\theta \cos\bar\vartheta = c(\alpha)\bar\vartheta_\alpha^{-1}. \tag{2.8}$$

Аналогичные действия с уравнением (2.1) дают равенства

$$\bar\vartheta_r \cos\bar\vartheta + r^{-1}(\bar\vartheta_\theta + 1)\sin\bar\vartheta = 0, \tag{2.9}$$

$$\bar\vartheta_\alpha = k'(\alpha) = \left(\frac{cp'U'}{\rho Q(bU' - UU' - QQ')}\right)^{1/2}. \tag{2.10}$$

Из равенств (2.7), (2.9), (2.10) следует $\bar\vartheta_r = 0$, $\bar\vartheta_\theta = -1 \Rightarrow \bar\vartheta = k(\alpha) - \theta$. С учетом полученного равенства уравнения (2.8), (2.6) интегрируются

$$g = h(\alpha) + r\left(ck'^{-1}\sin(k-\theta) - Q'U'^{-1}\cos(k-\theta)\right),$$

и общее решение (2.6) принимает вид

$$x - b(\alpha)t = h(\alpha) + y\left(ck'^{-1}\sin k - Q'U'^{-1}\cos k\right) + z\left(-ck'^{-1}\cos k - Q'U'^{-1}\sin k\right).$$

Отсюда следует, что поверхность уровня ($\alpha = \mathrm{const}$) есть плоскость как в простой волне [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Программа подмодели. Газовая динамика* // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
2. Хабиров С.В. *Аналитические методы в газовой динамике.* Уфа: Гилем, 2003. 192 с.
3. Овсянников Л.В. *Изобарические движения газа* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.

Салават Валеевич Хабиров,
Институт механики УНЦ РАН,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: `habirov@anrb.ru`

ABSTRACTS

A.M. Abylayeva, A.O. Baiarystanov

Compactness criterion for fractional integration operator of infinitesimal order

Abstract. We obtain necessary and sufficient conditions of compactness for the operator

$$Kf(x) = \int_0^x \ln \frac{x}{x-s} \frac{f(s)}{s} ds$$

from $L_{p,v}$ in $L_{q,u}$ at $1 < p \leqslant q < \infty$ and $v(x) = x^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, where $L_{q,u}$ is the set of all measurable on $(0, \infty)$ functions f with finite norm $\|uf\|_q$.

Keywords: compactness, fractional integration operator, Riemann-Liouville operator, singular operator, adjoint operator, Holder inequality, weighted inequalities.

A.K. Bazzaev

Finite-difference schemes for diffusion equation of fractional order with third type boundary conditions in multidimensional domain

Abstract. We consider finite difference schemes for diffusion equation of fractional order in a multidimensional field with third type boundary conditions. We prove the stability and convergence of difference schemes for considered problem.

Keywords: finite-difference schemes, diffusion equation of fractional order, apriori estimate, maximum principle, third type boundary conditions, stability and convergence of finite-difference scheme

Yu.N. Drozhzhinov, B.I. Zavialov

Generalized functions asymptotically homogeneous with respect to one–parametric group at origin

Abstract. In the work we obtain a complete description of generalized functions asymptotically homogeneous at origin w.r.t. a multiplicative one–parametric group of transformations so that the real parts of all the eigenvalues of infinitesimal matrix are positive including the case of critical orders. The obtained results are applied for constructing homogeneous solutions to differential equations whose symbols are quasi-homogeneous polynomials w.r.t. this group in a non-critical case.

Keywords: generalized functions, homogeneous functions, quasi-asymptotics, partial differential equations.

Kh.K. Ishkin

On analytic properties of Weyl function of Sturm – Liouville operator with a decaying complex potential

Abstract. We study the spectral properties of the operator L_β associated with the quadratic form $\mathcal{L}_\beta = \int\limits_0^\infty (|y'|^2 - \beta x^{-\gamma}|y|^2)dx$ with the domain $Q_0 = \{y \in W_2^1(0,+\infty) : y(0) = 0\}$, $0 < \gamma < 2$, $\beta \in \mathbf{C}$, as well as of the perturbed operator $M_\beta = L_\beta + W$. Under the assumption $(1 + x^{\gamma/2})W \in L^1(0,+\infty)$ we prove the existence of finite quantum defect of the discrete spectrum that was established earlier by L.A. Sakhnovich as $\beta > 0$, $\gamma = 1$ and for real W satisfying a more strict decaying condition at infinity. The main result of the paper is the proof of necessity (with some reservations) of the sufficient conditions for $W(x)$ obtained earlier by Kh.Kh. Murtazin under which the Weyl function of the operator M_β possesses an analytic continuation on some angle from non-physical sheet.

Keywords: spectral instability, localization of spectrum, quantum defect, Weyl function, Darboux transformation.

K.A. Kirillov, M.V. Noskov

A version of discrete Haar transform with nodes of Π_0-grids

Abstract. A version of the two-dimensional discrete Haar transform with 2^D nodes forming Π_0-grid associated with the triangular partial sums of Fourier – Haar series of a given function is proposed. Due to the structure the of Π_0-grids, the computation of coefficients of this discrete transform is based on a cubature formula with 2^D nodes being exact for Haar polynomials of degree at most D, owing to that all the coefficients $A^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ of the constructed transform coincide with the Fourier – Haar coefficients $c^{(j_1,j_2)}_{m_1,m_2}$ for Haar polynomials of degree at most $D - \max\{m_1, m_2\}$ $(0 \leqslant m_1 + m_2 \leqslant d$, where $d \leqslant D)$. The standard two-dimensional discrete Haar transform with 2^D nodes does not possess this property.
Keywords: cubature formulas exact for Haar polynomials, discrete Haar transform, Π_0-grids

L.M. Kozhevnikova, A.A. Leontiev

Decay of solution of anisotropic doubly nonlinear parabolic equation in unbounded domains

Abstract. This work is devoted to a class of parabolic equations with double nonlinearity whose representative is a model equation

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^{n} (|u_{x_\alpha}|^{p_\alpha - 2}u_{x_\alpha})_{x_\alpha}, \quad p_n \geqslant \ldots \geqslant p_1 > k, \quad k \in (1, 2).$$

For the solution of the first mixed problem in a cylindrical domain $D = (0,\infty) \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, $n \geqslant 2$ with homogeneous Dirichlet boundary condition and compactly supported initial function precise estimates the rate of decay as $t \to \infty$ are established. Earlier these results were obtained by the authors for $k \geqslant 2$. The case $k \in (1, 2)$ differs by the method of constructing Galerkin's approximations that for an isotropic model equation was proposed by E.R. Andriyanova and F.Kh. Mukminov.

Keywords: anisotropic equation, doubly nonlinear parabolic equations, existence of strong solution, decay rate of solution.

A.G. Losev, E.A. Mazepa

On asymptotic behavior of positive solutions of some quasilinear inequalities on model Riemannian manifolds

Abstract. In the paper we study asymptotic behavior of positive solutions to some quasilinear elliptic inequalities on spherically symmetric noncompact (model) Riemannian manifolds. In particular, we find conditions under which Liouville type theorems on absence of nontrivial solutions hold true, as well as the conditions of existence and cardinality of the set of positive solutions of the studied inequalities on the Riemannian manifolds. The results generalize similar results obtained previously by Y. Naito and H. Usami for the Euclidean space $\mathbf{R}^n$.

Keywords: quasilinear elliptic inequality, Liouville type theorem, model Riemannian manifolds

N.Kh. Mamatova, A.R. Hayotov, Kh.M. Shadimetov

Construction of optimal grid interpolation formulas in Sobolev space $\widetilde{L_2^m}(H)$ of periodic function of n variables by Sobolev method

Abstract. In the present work we consider the problem of constructing optimal grid interpolation formulas in the space $\widetilde{L_2^m}(H)$ of periodic function of n variables. We find the coefficients of grid interpolation formulas.

Keywords: Sobolev space, optimal interpolation formula, properties of the discrete analogue of the operator Δ^m, optimal coefficients.

M.M. Matyoqubov, A.B. Yakhshimuratov

Integration of higher Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in class of periodic functions

Abstract. In the present the inverse spectral problem of Sturm-Liouville operator is applied for integrating higher Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in class of periodic functions

Keywords: Sturm-Liouville operator, inverse spectral problem, eigenvalue, eigenfunction, Korteweg-de Vries equation.

S.N. Mishin

On growth characteristics of operator-valued functions

Abstract. In the work Liouville theorem and the concept of order and type of entire function are generalized to the case of operator-valued function with values in the space $\mathrm{Lec}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H})$ of all linear continuous operators acting from a locally convex space $\mathbf{H}_1$ to a locally convex space $\mathbf{H}$ with equicontinuous bornology. We find the formulae expressing the order and type of operator-valued function in terms of characteristics of the sequence of coefficients. Some properties of order and type of operator-valued function are established.

Keywords: locally convex space, order and type of sequence of operators, order and type of entire function, equicontinuous bornology, convergence by bornology, operator-valued function.

S.V. Khabirov

Reductions of partially invariant solutions of rank 1 defect 2 five-dimensional overalgebra of conical subalgebra

Abstract. Conic flows are the invariant rank 1 solutions of the gasdynamics equations on the three-dimensional subalgebra defined by the rotation operators, translation by time and uniform dilatation. The generalization of the conic flows are partially invariant solutions of rank 1 defect 2 on the five-dimensional overalgebra of conic subalgebra extended by the operators of space translations noncommuting with rotation. We prove that that the extensions of conic flows are reduced either to function-invariant plane stationary solutions or to a double wave of isobaric motions or to the simple wave.

Keywords: gas dynamics, conic flows, partially invariant solutions.

CONTENTS