ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 45-53.

УДК 517.4+519.71

ОБ ОДНОМ СПЕКТРАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ ИРРЕГУЛЯРНЫХ ПУЧКОВ

Н.Ф. ВАЛЕЕВ

Аннотация. В работе вводится понятие квазирегулярного собственного значения и квазирегулярного спектра пучка конечномерных пучков операторов. Показано, что у иррегулярных пучков квазирегулярные собственные значения непрерывны относительно возмущений пучка. Исследованы свойства квазирегулярных собственных значений и получены формулы для вычисления квазирегулярного спектра.

Ключевые слова: спектральная теория линейных операторов, иррегулярные пучки, обратные спектральные задачи, регулярный спектр пучка операторов.

Pacs: 05.45.-a Nonlinear dynamics and chaos

1. Введение, постановка задачи

В n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ рассматривается пучок операторов:

$$L(\mu,\varepsilon) = (A_0 + \varepsilon A_1) - \mu(B_0 + \varepsilon B_1) : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, \tag{1}$$

где $\mu \in \overline{\mathbb{C}}$ — спектральный параметр, $\varepsilon \in \mathbb{C}$ — параметр возмущений.

Далее всюду будем предполагать, что пучок операторов $L(\mu,\varepsilon)$ регулярен в некоторой окрестности точки $\varepsilon = 0$, а в самой точке $\varepsilon = 0$ иррегулярен. Данное предположение равносильно выполнению следующих условий:

$$\max_{\mu,\varepsilon\in\overline{\mathbb{C}}}\{rankL(\mu,\varepsilon)\} = n, \tag{2}$$

$$\max_{\mu\in\overline{\mathbb{C}}}\{rankL(\mu,0)\} = m < n. \tag{3}$$

В силу условия (2), у пучка $L(\mu,\varepsilon)$ имеется (с учетом кратности) n собственных значений:

$$\mu_1(\varepsilon), \mu_2(\varepsilon), \ldots, \mu_n(\varepsilon) \in \overline{\mathbb{C}}, \tag{4}$$

которые являются нулями характеристического полинома

$$\det L(\mu,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} l_k(\varepsilon)\mu^k. \tag{5}$$

Замечание. *Будем считать, что* $\mu = \infty$ *собственное значение некоторого пучка* $A - \mu B : E^n \to E^n$, *если* $det(B) = 0$.

Каждое собственное значение $\mu_k(\varepsilon)$ есть алгебраическая функция от $\varepsilon \in \mathbb{C}$, в то же время эти величины можно рассматривать как функционалы от матриц A_0, B_0, A_1, B_1, то есть

$$\mu_k(\varepsilon) = \mu_k(A_0, B_0, A_1, B_1, \varepsilon).$$

N.F. Valeev, On a spectral property of irregular pencils.

Работа выполнена при поддержке гранта ФЦП „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"N 14.B37.21.0358 .

Поступила 5 мая 2012 г.

Из общей теории возмущений конечномерных линейных операторов (например см. [2]) следует, что при условии
$$\max_{\mu\in\overline{\mathbb{C}}}\{rankL(\mu,0)\}=n$$
предельные значения $\mu_k(\varepsilon)$ не зависят от A_1, B_1 и являются функционалами только матриц A_0, B_0:
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_k(\varepsilon)=\mu_k(A_0,B_0).$$
Иначе говоря, собственные значения $\mu_k(\varepsilon)=\mu_k(A_0,B_0,A_1,B_1,\varepsilon)$ регулярного пучка непрерывные функционалы матриц A_0,B_0.

Пусть теперь предельный пучок $L_0(\mu)=L(\mu,0)$ иррегулярный, то есть $\det L(\mu,0)\equiv 0$. В этом случае ситуация меняется, в частности, уже нельзя утверждать, что пределы при $\varepsilon\to 0$ собственных значений $\mu_k(\varepsilon)=\mu_k(A_0,B_0,A_1,B_1,\varepsilon)$ будут зависимы только от A_0 и B_0. А именно, предельные значения $\mu_k(\varepsilon)=\mu_k(A_0,B_0,A_1,B_1,\varepsilon)$ могут зависеть и от того, по какому направлению пучок $L(\mu,\varepsilon)$ приближается к предельному пучку $L_0(\mu)$, то есть от пары матриц (A_1,B_1).

В связи с вышесказанным примем следующее определение.

Определение 1. *Пусть $\mu_k(A_0,B_0,A_1,B_1,\varepsilon)$ собственное значение пучка*
$$L(\mu,\varepsilon)=(A_0+\varepsilon A_1)-\mu(B_0+\varepsilon B_1):\mathbb{E}^n\to\mathbb{E}^n,$$
удовлетворяющего (2)–(3).

Если при этом предельное значение функционала
$$\mu^*:=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu_k(A_0,B_0,A_1,B_1,\varepsilon)\in\overline{\mathbb{C}}$$
не зависит от операторов A_1 и B_1, то будем его называть ***квазирегулярным*** *собственным значением пучка $L_0(\mu)=A_0-\mu B_0$. Множество всех квазирегулярных собственных значений μ_k^* будем называть квазиспектром пучка.*

Заметим, что если μ^* — квазирегулярное собственное значение пучка $L_0(\mu)$, то, в отличие от регулярного собственного значения, может оказаться, что $rankL_0(\mu^*)=\max_{\mu\in C} rankL_0(\mu)$.

Основной целью данной работы является исследование свойств квазиспектра сингулярного пучка $L_0(\mu)$. Мотивацией введения понятия квазиспектра пучка послужило то, что в теории многопараметрических обратных спектральных задач (МПОСЗ) естественным образом возникает вопрос о решениях МПОСЗ, устойчивых к возмущениям. Отметим, что аналогичные вопросы, в частности, понятие регулярного спектра пучков операторов расссматривались в ([4]–[7]).

Исходя из целей исследования (и не умаляя общности результатов), примем два следующих допущения.

Во-первых, будем считать, что
$$\mathrm{rank}B_0=\max_{\mu\in\overline{\mathbb{C}}}\mathrm{rank}(A_0-\mu B_0)=m. \tag{6}$$
Если же окажется, что $\mathrm{rank}B_0<\max_{\mu\in\overline{\mathbb{C}}}\mathrm{rank}(A_0-\mu B_0)$, то с помощью дробно-линейного преобразования спектрального параметра μ можно перейти к пучку, удовлетворяющему условию (6).

В самом деле, из (3) следует существование $\mu^*\in\mathbb{C}$ такого, что $\mathrm{rank}(A_0+\mu^*B_0)=m$. Тогда
$$(A_0+\varepsilon A_1)-\mu(B_0+\varepsilon B_1)=\frac{\mu^*-\mu}{\mu^*}\left[A_0+\varepsilon A_1-\frac{\mu}{\mu-\mu^*}\left(A_0+\varepsilon A_1-\mu^*(B_0+\varepsilon B_1)\right)\right].$$

Теперь, полагая
$$s=\frac{\mu}{\mu-\mu^*},\quad \hat{B}(\varepsilon)=A_0+\varepsilon A_1-\mu^*(B_0+\varepsilon B_1),\quad \hat{A}(\varepsilon)=A_0+\varepsilon A_1,$$

перейдем к исследованию эквивалентного пучка $\hat{L}(s,\varepsilon) = \hat{A}(\varepsilon) - s\hat{B}(\varepsilon)$, где $\mathrm{rank}\hat{B}(0) = m$. При этом преобразовании квазирегулярные спектры пучков $\hat{L}(s,\varepsilon)$ и $L(\mu,\varepsilon)$ будут связаны дробно-линейным преобразованием $s = \frac{\mu}{\mu-\mu^*}$.

Во-вторых, будем считать, что $B = B^* \geq 0$. Добиться выполнения этого условия можно, перейдя к строго эквивалентному пучку $\tilde{L}(\mu,\varepsilon) = UL(\mu,\varepsilon)V$, где $U, V : E^n \to E^n$ — унитарные матрицы, входящие в сингулярное разложение матрицы B, то есть $\tilde{B} = BUV$.

Теперь, дополнительно к условиям (2), (3), будем считать, что

$$\mathrm{rank}(A_0 - \mu B_0) = \mathrm{rank}(B_0) = m, \quad B_0^* = B_0 > 0. \tag{7}$$

2. Невозмущенный пучок

В данном пункте рассматривается иррегулярный невозмущенный пучок

$$L_0(\mu) = A - \mu B : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, \tag{8}$$

удовлетворяющий условиям

$$\max_{\mu\in\overline{\mathbb{C}}} \mathrm{rank}(A - \mu B) = \mathrm{rank}(B) = m < n, \quad B = B^* \geq 0. \tag{9}$$

Пусть P — самосопряженный проектор на подпространство $V_2 = KerB$, $V_1 = V_2^{\perp}$. Тогда пучок $L_0(\mu)$ в подходящем базисе можно представить в виде

$$L_0(\mu) = \begin{pmatrix} A_{11} - \mu B & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{10}$$

где $A_{11} = (I - P)A(I - P) : V_1 \to V_1$, $A_{12} = (I - P)AP : V_2 \to V_1$,
$A_{21} = PA(I - P) : V_1 \to V_2$ и $A_{22} = PAP : V_2 \to V_2$.

Заметим, что пучок $L_{11}(\mu) = A_{11} - \mu B : V_1 \to V_1$ — регулярный.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (9), тогда в представлении (10) пучка $L_0(\mu)$ для любого $\mu \in \mathbb{C}$*

$$A_{22} - A_{12}(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{21} \equiv 0. \tag{11}$$

Доказательство. Матрица

$$F(\mu) = \begin{pmatrix} I & -(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{12}$$

в силу регулярности пучка $A_{11} - \mu B : V_1 \to V_1$, существует, ограничена и невырождена при всех $\mu \in \mathbb{C}$, за исключением нулей характеристического многочлена $\det(A_{11} - \mu B)$. Следовательно, $\mathrm{rank}L_0(\mu) = \mathrm{rank}(L_0(\mu)F(\mu))$. При этом

$$L_0(\mu)F(\mu) = \begin{pmatrix} A_{11} - \mu B & 0 \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12} \end{pmatrix}.$$

Теперь, используя блочно-диагональный вид матрицы $L_0(\mu)F(\mu)$, получаем

$$\mathrm{rank}(L_0(\mu)F(\mu)) = \mathrm{rank}(A_{11} - \mu B) + \mathrm{rank}[A_{22} - A_{21}(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12}].$$

Из (9)и (10) следует, что $\mathrm{rank}(A_{11} - \mu B) = m$, поэтому $\mathrm{rank}(A_{22} - A_{21}(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12}) \equiv 0$ при всех $\mu \in \mathbb{C}$ за исключением нулей характеристического многочлена $\det(A_{11} - \mu B)$. Последнее возможно только в том случае, когда $A_{22} - A_{21}(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12}) \equiv 0$, откуда и вытекает доказательство теоремы.

Доказанная теорема означает, что далее можно рассматривать пучки вида

$$L_0(\mu) = \begin{pmatrix} A_{11} - \mu B & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

блочные матрицы которого удовлетворяют тождеству $A_{22} - A_{12}(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{21} \equiv 0$.

Из этого тождества вытекает следующее свойство рассматриваемого пучка.

Теорема 2. *Пусть* $\mu^* \in \mathbb{C}$ — *произвольное простое собственное значение пучка* $L_{11}(\mu) = A_{11} - \mu B : V_1 \to V_1$ *и*

$$A_{11}\vec{x}^* = \mu^* B\vec{x}^*, \quad A_{11}^*\vec{y}^* = \mu^* B\vec{y}^*. \tag{14}$$

Тогда либо $A_{21}(\vec{x})^* = 0$ *либо* $A_{12}^*(\vec{y})^* = 0$.

Доказательство. Рассмотрим два взаимоисключающих случая:

- $\|(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12}\|$ — ограничен при $\mu \to \mu^*$;
- $\|(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12}\|$ — не ограничен при $\mu \to \mu^*$.

В первом случае все элементы матрицы $(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12}$ рациональные функции и ограничены в окрестности точки $\mu = \mu^*$, элементы матрицы $(A_{11} - \mu B)^{-1}A_{12}$ не имеют особенностей в точке $\mu = \mu^*$. Следовательно, и элементы матрицы $A_{12}^*(A_{11}^* - sB)^{-1}$ являются аналитическими функциями в окрестности точки $s = \bar{\mu}^*$.

С другой стороны, найдется такой вектор $\vec{e}$, что собственный вектор $\vec{y}^*$ пучка $A_{11}^* - \mu B$ можно представить в виде

$$\vec{y}^* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|S-\bar{\mu}^*|=\delta} (A_{11}^* - sB)^{-1}\vec{e}ds.$$

Но тогда

$$A_{12}^*\vec{y}^* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|S-\bar{\mu}^*|=\delta} A_{12}^*(A_{11}^* - sB)^{-1}\vec{e}ds = 0,$$

в силу того, что $A_{12}^*(A_{11}^* - sB)^{-1}$ в точке $S = \bar{\mu}^*$ аналитическая функция.

Во втором случае, из неограниченности оператора $(A_{11} - sB)^{-1}A_{12}$ следует, что любой ненулевой вектор

$$\vec{x}_* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|s-\mu^*|=\delta} (A_{11} - sB)^{-1}A_{12}\vec{\varphi}ds$$

является собственным вектором пучка $A_{11} - sB$. Далее, учитывая теорему 1, получим

$$A_{21}\vec{x}_* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|S-\mu^*|=\delta} A_{21}(A_{11} - sB)^{-1}A_{12}\vec{\varphi}ds = 0$$

для любого $\vec{\varphi} \in \mathbb{E}^n$. Из рассмотренных случаев вытекает доказательство теоремы.

Основное утверждение данного пункта сформулируем для пучков вида

$$C_0(\mu) = \begin{pmatrix} C_{11} - \mu I_1 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n, \tag{15}$$

где $\mathrm{rank} C_0(\mu) = \mathrm{rank}(C_{11} - \mu I_1) = m < n$, $V_2 = Ker I_1$, $V_1 = V_2^{\perp}$.

Пучки $L_0(\mu)$ и $C_0(\mu)$ эквивалентны в силу того, что

$$C_0(\mu) = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} - \mu B & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$C_{11} = B^{-1}A_{11}$, $C_{12} = B^{-1}A_{12}$, $C_{21} = A_{21}$, а I_1 и I_2 — единичные операторы в подпространствах V_1 и V_2 соответственно.

Теорема 3. *Пусть ранг пучка* $C_0(\mu)$ *вида (15) равен* $m < n$, *и все собственные значения матрицы* C_{11} *простые. Тогда*

$$q(\mu) = det(C_{11} - \mu I) \tag{17}$$

общий делитель всех миноров m*-го порядка пучка* $(C_0(\mu))^2$.

Доказательство. Пусть μ^* — произвольное простое собственное значение матрицы C_{11} и

$$C_{11}\vec{x}^* = \mu^*\vec{x}^*, \quad C_{11}^*\vec{y}^* = \bar{\mu}^*\vec{y}^* \tag{18}$$

Согласно утверждению теоремы 2 имеем $\|C_{11}\vec{x}^*\| \cdot \|C_{11}^*\vec{y}^*\| = 0$. Рассмотрим все возможные случаи для собственных векторов $\vec{x}^*$ и $\vec{y}^*$, приводящие к указанному равенству.

Предположим, что $C_{21}\vec{x}^* = 0$ и $C_{12}^*\vec{y}^* = 0$. Поскольку μ^* — простое собственное значение матрицы C_{11}, то для любого $\vec{\varphi} \in \mathbb{E}^m$

$$\vec{x}^* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu-\mu^*|=\delta} (C_{11} - \mu I)^{-1}\vec{\varphi} d\mu$$

— собственный вектор матрицы C_{11}. Тогда в силу предположения $C_{21}\vec{x}^* = 0$ имеем

$$C_{21}\vec{x}^* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu-\mu^*|=\delta} C_{21}(C_{11} - \mu I)^{-1}\vec{\varphi} d\mu = 0$$

для любого $\vec{\varphi} \in \mathbb{E}^m$. А это означает, что $C_{21}(C_{11}-\mu I)^{-1}$ в окрестности $\mu = \mu^*$ ограничена, и точка $\mu = \mu^*$ — особая точка устранимого типа. Отсюда следует, что $(C_{11}^* - \mu I)^{-1}C_{21}^*$ тоже аналитична в окрестности точки $\mu = \bar{\mu}^*$. Теперь покажем, что $Ker(C_0(\mu^*))^*$ содержит не менее $n - m + 1$ линейно-независимых векторов.

Рассмотрим векторы

$$\vec{\varphi}_0 = \begin{pmatrix} \vec{y}^* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\varphi}_k = \begin{pmatrix} -(C_{11}^* - \mu I)^{-1}C_{21}^*\vec{e}_k \\ \vec{e}_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n-m},$$

где $\vec{e}_k$ — составляют единичный базис пространства V_2, а $\vec{y}^*$ по условию собственный вектор матрицы C_{11}^*, соответствующий простому собственному значению $\bar{\mu}^*$.

Учитывая, что $C_{11}\vec{y}^* = \bar{\mu}^*\vec{y}^*$, $C_{12}^*\vec{y}^* = 0$, $C_{12}^*(C_{11}^* - \mu I)^{-1}C_{21}^* \equiv 0$, легко показать, что $(C_0(\mu_*))^*\vec{\varphi}_k = 0$ для всех $k = \overline{0, n-m}$.

Поскольку $dimKer(C_0^*(\mu_*)) \geq n - m + 1$, то $rankC_0(\mu_*) \leqslant m - 1$.

Итак, $rankC_0(\mu) = m$ при $\mu \neq \mu_*$ и $rankC_0(\mu_*) = m$, это возможно лишь при условии что $\mu - \mu_*$ — делитель всех миноров m-го матрицы $C_0(\mu)$.

Пусть теперь $C_{21}\vec{x}_* \neq 0$, а $C_{12}^*\vec{y}_* = 0$. Сначала покажем, что в этом случае $(C_{11}-\mu I)^{-1}C_{12}$ — ограничена при $\mu \to \mu_*$.

В самом деле, в противном случае, найдется вектор $\vec{\varphi}$ такой, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu-\mu_*|=\delta} (C_{11} - \mu I)^{-1}C_{12}\vec{\varphi} d\mu = \vec{\psi} \neq 0.$$

Поскольку $\vec{\psi}$ — собственный вектор, соответствующий простому собственному значению μ_*, то можно считать, что $\vec{x}^* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu-\mu_*|=\delta} (C_{11} - \mu I)^{-1}C_{12}\vec{\varphi} d\mu$. Из теоремы 1 следует, что

$$C_{21}\vec{x}^* = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu-\mu_*|=\delta} C_{21}(C_{11} - \mu I)^{-1}C_{12}\vec{\varphi} d\mu = 0,$$

а это противоречит условию $C_{21}\vec{x}^* \neq 0$. Следовательно, $(C_{11} - \mu I_1)^{-1}C_{12}$ ограничена в окрестности точки $\mu = \mu^*$.

Введем в рассмотрение матрицу

$$D(\mu) = \begin{pmatrix} I & -(C_{11} - \mu I)^{-1}C_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{19}$$

в силу ограниченности $(C_{11} - \mu I)^{-1}C_{12}$, матрица $D(\mu)$ определена и невырождена в точке $\mu = \mu^*$ и ее окрестности.

Определим матрицу $G(\mu) = (C_0(\mu))^2 D(\mu)$. Очевидно, что в точке $\mu = \mu^*$ и в некоторой ее окрестности $rankG(\mu) = rank(C_0(\mu))^2$. Согласно утверждению теоремы 1 при всех μ, когда $det(C_{11} - \mu I) \neq 0$, справедливо тождество $C_{21}(C_{11} - \mu I)^{-1} C_{12} \equiv 0$. Учитывая это, легко получить, что

$$G(\mu) = \begin{pmatrix} (C_{11} - \mu I)^2 + C_{12}C_{21} & 0 \\ C_{21}(C_{11} - \mu I) & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Поскольку $(C_{11}^* - \bar{\mu_*} I)\vec{y_*} = 0$, $C_{12}^* \vec{y} = 0$, то

$$[(C_{11} - \mu^* I)^2 + C_{12}C_{21}]^* \vec{y_*} = 0,$$

следовательно, $rank((C_{11} - \mu I)^2 + C_{12}C_{21}) \leqslant m - 1$.

Последнее означает, что найдется вектор $\vec{\varphi}^* \neq 0$ такой, что $(C_{11} - \mu I)^2 \vec{\varphi}^* = -C_{12}C_{21}\vec{\varphi}^*$. Учитывая ограниченность $(C_{11} - \mu I)^{-1} C_{12}$ в точке $\mu = \mu_*$, имеем $(C_{11} - \mu^* I)\vec{\varphi}^* = -(C_{11} - \mu^* I)^{-1} C_{12} C_{21} \vec{\varphi}^*$. Откуда получим

$$C_{21}(C_{11} - \mu^* I)\vec{\varphi}^* = -C_{21}(C_{11} - \mu^* I)^{-1} C_{12} C_{21} \vec{\varphi}^* = 0.$$

Таким образом, векторы

$$\begin{pmatrix} \vec{\varphi}^* \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{e}_k \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, n - m},$$

где $\vec{e}_k$, $k = \overline{1, n - m}$ — базисные векторы пространства V_2, содержатся в $kerG(\mu^*)$.

Следовательно, $rank[C_0(\mu)]^2 = m$ при $\mu \neq \mu^*$ и $rank[C_0(\mu)]^2 \leqslant m - 1$ при $\mu = \mu^*$. Из последнего снова вытекает, что $\mu - \mu^*$ — делитель всех миноров m-го порядка матрицы $[C_0(\mu)]^2$.

Третий возможный случай, вытекающий из $\|C_{21}\vec{x}_*\| \cdot \|C_{12}^* \vec{y}_*\| = 0$, а именно $C_{12}^* \vec{y}_* \neq 0$, $C_{21}\vec{x}_* = 0$, исследуется аналогично случаю $C_{21}\vec{x}_* \neq 0$, а $C_{12}^* \vec{y}_* = 0$.

Итак, мы доказали, что для произвольного собственного значения μ_* матрицы C_{11} все миноры m-го порядка пучка $(C_0(\mu))^2$ делятся на $\mu - \mu_*$. Поскольку все собственные значения C_{11} простые, а μ_* — произвольное собственное значение, то $det(C_{11} - \mu I_1)$ является делителем всех миноров m-го порядка матрицы $(C_0(\mu))^2$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда если $\mu - \mu_0$ является общим делителем всех миноров m-го порядка пучка $(C_0(\mu))^2$, то $q(\mu_0) = det(C_{11} - \mu_0 I) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $q(\mu_0) = det(C_{11} - \mu_0 I) \neq 0$. Как и при доказательстве теоремы (3), рассмотрим матрицу $D(\mu)$, заданную в (19), и матрицу $G(\mu) = (C_0(\mu))^2 D(\mu)$. Согласно (19) и (20) имеем

$$G(\mu) = \begin{pmatrix} (C_{11} - \mu I)^2 + C_{12}C_{21} & 0 \\ C_{21}(C_{11} - \mu I) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку μ_0 является нулем всех миноров порядка m, то найдется $\vec{x}_0 \neq 0$ такой, что $((C_{11} - \mu_0 I)^2 + C_{12}C_{21})\vec{x}_0 = 0$.

Из предположения, что $q(\mu_0) \neq 0$, следует $\vec{x}_0 = -(C_{11} - \mu_0 I)^{-2} C_{12} C_{21}$. Поскольку из теоремы 1 следует, что $C_{21}(C_{11} - \mu I)^{-2} C_{12} \equiv 0$, то $C_{21}\vec{x}_0 = 0$. А это означает, что $(C_{11} - \mu_0 I)^2 \vec{x}_0 = 0$. Т.е. μ_0 — собственное значение C_{11}. Полученное противоречие доказывает теорему.

Таким образом, $(C_0(\mu))^2$ обладает "настоящими в следующем смысле, собственными значениями. А именно, если μ_* — собственное значение матрицы C_{11}, а $\mu \notin \sigma(C_{11})$, тогда

$$rank(C_0(\mu)) = rank(C_0(\mu))^2 = m,$$

и в то же время $rank(C_0(\mu_*))^2 \leqslant m - 1$. Иначе говоря, все собственные значения матрицы C_{11} являются регулярными собственными значениями для пучка $[C_0(\mu)]^2$.

В качестве примера рассмотрим пучок

$$C_0(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 - \mu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 - \mu & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При всех $\mu \in \bar{\mathbb{C}}$ легко вычислить, что $rankC_0(\mu) \equiv 3$. Выпишем квадрат пучка $C_0(\mu)$,

$$C_0^2(\mu) = \begin{pmatrix} (\mu_1 - \mu)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\mu_2 - \mu)^2 & 0 & \mu_2 - \mu & 0 \\ 0 & 0 & (\mu_3 - \mu)^2 & 0 & \mu_3 - \mu \\ \mu_1 - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь $rankC_0^2(\mu) = 3$ при всех $\mu \neq \mu_k$, но $rankC_0^2(\mu_k) = 2$ для $k = 1, 2, 3$.

Заметим, что наибольшим общим делителем всех миноров m-го порядка матрицы $C_0(\mu)$ является 1, а соответствующие миноры матрицы $C_0^2(\mu)$ делятся на $(\mu_1 - \mu)(\mu_2 - \mu)(\mu_3 - \mu) = detC_0(\mu)$.

3. Возмущенный иррегулярный пучок.

Теперь перейдем к рассмотрению возмущенного пучка

$$L(\mu, \varepsilon) = A_0 - \mu B_0 + \varepsilon(A_1 - \mu B_1) : E^n \to E^n,$$

где

$$rankB_0 = \max_{\mu \in \mathbb{C}} rank(A_0 - \mu B_0) = m < n$$

и

$$\max_{\mu\varepsilon \in \mathbb{C}} rankL(\mu, \varepsilon) = n.$$

В силу регулярности пучка $L(\mu, \varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ собственные значения этого пучка $\mu_1(\varepsilon), \ldots, \mu_n(\varepsilon)$ являются нулями характеристического уравнения

$$detL(\mu, \varepsilon) = 0. \tag{21}$$

Как было показано выше (16) существуют невырожденные матрицы S_1 и S_2, не зависящие от μ и ε, такие, что

$$C(\mu, \varepsilon) := S_1 L(\mu, \varepsilon) S_2 = C_0(\mu) + \varepsilon C_1(\mu) \tag{22}$$

$$C_1(\mu) = S_1 A_1 S_2 - \mu S_1 B_1 S_2 = C_1^{(1)} - \mu C_1^{(2)}, \tag{23}$$

а $C_0(\mu)$, как и выше в (15) и (16), имеет вид:

$$C_0(\mu) = \begin{pmatrix} C_{11} - \mu I_1 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{E}^n \to \mathbb{E}^n.$$

Поскольку пучки $C(\mu, \varepsilon)$ и $L(\mu, \varepsilon)$ имеют одинаковые собственные значения $\mu_k(\varepsilon)$, перейдем к исследованию собственных значений пучка $C(\mu, \varepsilon)$.

Теорема 5. *Пусть спектр матрицы C_{11} состоит из простых собственных значений $\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*$. Тогда у пучка $C(\mu, \varepsilon)$ найдутся ровно m собственных значений $\mu_{j_1}(\varepsilon), \ldots, \mu_{j_m}(\varepsilon)$ (при соответствующей нумерации) такие, что для всех $k = \overline{1, m}$*

$$\mu_{j_k}(0) = \mu_k^*.$$

Доказательство. Пусть $G_1(\mu)$, $G_2(\mu)$ — невырожденные (точнее $detG_1(\mu) \equiv 1$, $detG_2(\mu) \equiv 1$) матрицы, приводящие пучок $(C_0(\mu))^2$ к нормальной форме Смита (см. [3]).

Поскольку $rank(C_0(\mu))^2 = m$, то матрицы $G_1(\mu)$ и $G_2(\mu)$ можно выбрать так, чтобы

$$G_1(\mu)C_0^2(\mu)G_2(\mu) = \begin{pmatrix} \Lambda(\mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $\Lambda(\mu)$ — диагональная матрица размера $m\times m$. Из теорем 3 и 4 вытекает, что $det[\Lambda(\mu)] = 0$ тогда и только тогда, когда $det(C_{11} - \mu I) = 0$.

Положим

$$D(\mu,\varepsilon) = G_1(\mu)C_0^2(\mu,\varepsilon)G_2(\mu) = D_0(\mu) + \varepsilon D_1(\mu,\varepsilon), \tag{25}$$

далее, учитывая представление (24), получим

$$D(\mu,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \Lambda(\mu) + \varepsilon D_{11}(\mu,\varepsilon) & \varepsilon D_{12}(\mu,\varepsilon) \\ \varepsilon D_{21}(\mu,\varepsilon) & \varepsilon D_{22}(\mu,\varepsilon) \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Заметим, что из (25) следует

$$g(\mu,\varepsilon) = detD(\mu,\varepsilon) = [detC_0(\mu,\varepsilon)]^2. \tag{27}$$

Так как $detD(\mu,0) \equiv 0$, то $g(\mu,\varepsilon)$ как многочлен от μ и ε можно представить в виде

$$g(\mu,\varepsilon) = \varepsilon^\alpha g_0(\mu,\varepsilon), \tag{28}$$

где $\alpha \in \mathbb{N}$, $g_0(\mu,\varepsilon)$ многочлен от ε и μ, причем $g_0(\mu,0) \not\equiv 0$.

Теперь покажем, что $g_0(\mu,\varepsilon)$ делится на $det\Lambda(\mu)$.

Для этого вычислим определитель матрицы $D(\mu,\varepsilon)$ как произведение нулей $\sigma_k(\mu,\varepsilon)$ многочлена $det(D(\mu,\varepsilon) - \sigma I) = 0$.

Обозначим $\lambda_1(\mu,\varepsilon),\dots,\lambda_m(\mu,\varepsilon)$ диагональные элементы матрицы $\Lambda(\mu) + \varepsilon D_{11}(\mu,\varepsilon)$, а через $d_1(\mu,\varepsilon),\dots,d_{n-m}(\mu,\varepsilon)$ диагональные элементы матрицы $D_{22}(\mu,\varepsilon)$. Раскладывая $detD(\mu,\varepsilon)$ по строкам, получим

$$det(D(\mu,\varepsilon) - \sigma I) = (\lambda_1(\mu,\varepsilon) - \sigma)\cdots(\lambda_m(\mu,\varepsilon) - \sigma)(\varepsilon d_1(\mu,\varepsilon) - \sigma)\cdots$$
$$\cdots(\varepsilon d_{n-m}(\mu,\varepsilon) - \sigma) + \varepsilon h(\mu,\varepsilon,\sigma),$$

где $h(\mu,\varepsilon,\sigma)$ — некоторый многочлен от σ, μ и ε.

Теперь, применяя теорему Руше для нулей $\sigma_k(\mu,\varepsilon)$ этого многочлена $det(D(\mu,\varepsilon) - \sigma I)$ по переменной σ, при $\varepsilon \to 0$ и $|\mu| < R_0 < \infty$, получим $\sigma_k(\mu,\varepsilon) = \lambda_k(\mu,0) + \varepsilon\alpha_k(\mu,\varepsilon)$ для всех $k = \overline{1,m}$, где $\alpha_k(\mu,\varepsilon)$ — ограниченные функции, и $\sigma_k(\mu,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ для всех $k = \overline{m+1,n}$.

Поскольку опеделитель матрицы $g(\mu,\varepsilon) = D(\mu,\varepsilon)$ равен произведению всех ее собственных значений $\sigma_k(\mu,\varepsilon)$, то получим

$$g(\mu,\varepsilon) = \sigma_1(\mu,\varepsilon)\cdots\sigma_m(\mu,\varepsilon)\sigma_{m+1}(\mu,\varepsilon)\cdots\sigma_n(\mu,\varepsilon).$$

Из вышесказанного следует, что $\sigma_1(\mu,\varepsilon)\cdots\sigma_m(\mu,\varepsilon) = det[\Lambda(\mu)] + O(\varepsilon)$ и $\sigma_{m+1}(\mu,\varepsilon)\cdots\sigma_n(\mu,\varepsilon) = \varepsilon^\beta d(\mu,\varepsilon)$, где $d(\mu,\varepsilon)$ — некоторая алгебраическая функция, причем $d(\mu,0) \not\equiv 0$. Отсюда получим

$$g(\mu,\varepsilon) = \varepsilon^\beta(det\Lambda(\mu) + O(\varepsilon))d(\mu,\varepsilon). \tag{29}$$

Теперь, сравнивая (28) с (29), приходим к выводу, что

$$g_0(\mu,0) = det\Lambda(\mu)d(\mu,0), \tag{30}$$

где $d(\mu,0)$ — многочлен от μ.

Из представления многочлена $det(D(\mu,\varepsilon))$ в виде (30) с учетом (27) и (28) следует, что каждый нуль многочлена $det[C_{11} - \mu I_1]$ аналитически (как алгебраическая функция) продолжается по ε. Отсюда вытекает доказательство теоремы.

Из последнего утверждения вытекает, что у пучка вида

$$C(\mu,\varepsilon)=\begin{pmatrix} C_{11}-\mu I_1 & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix}+\varepsilon(C_1-\mu C_2):\mathbb{E}^n\to\mathbb{E}^n$$

ровно m собственных значений $\mu_{j_1}(\varepsilon),\dots,\mu_{j_m}(\varepsilon)$ при $\varepsilon\to 0$ имеют пределы, равные собственным значениям $\mu_1,\dots,\mu_m$ матрицы C_{11} вне зависимости от матриц C_1 и C_2. В то же время легко показать, что пределы остальных собственых значений пучка $C(\mu,\varepsilon)$ зависят от C_1 и C_2.

Поэтому, согласно определению 1, квазиспектр пучка $C_0(\mu)$ состоит из собственных значений $\mu_1,\dots,\mu_m$ матрицы C_{11}.

Теперь, возвращаясь к иррегулярному пучку общего вида (1)–(3), заметим следующее. Для того чтобы вычислить квазирегулярный спектр пучка $L_0(\mu)=A_0-\mu B_0$, его сначала необходимо привести к виду, удовлетворяющему условию (7).

А затем с помощью строго эквивалентного преобразования (16) получить пучок вида $C(\mu,\varepsilon)$ и найти спектр матрицы C_{11}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц. 5-е изд.* М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. 560 с.
2. Халмош П. *Конечномерные векторные пространства.* М.: Физматгиз. 1963. 263 с.
3. Маркус М., Минк Х. *Обзор по теории матриц и матричных неравенств.* М.: Наука. 1972. 232 с.
4. M.E. Hochstenbach, A. Muhic, B. Plestenjak *On linearizations of the quadratic two-parameter eigenvalue problems* // Linear Algebra Appl. 436 (2012). P. 2725–2743.
5. A. Muhic, B. Plestenjak *On the singular two-parameter eigenvalue problem* // Electron. J. Linear Algebra 18 (2009). P. 420–437.
6. Кублановская В.Н. *К решению многопараметрических задач алгебры. 11. Вычисление регулярного спектра полиномиальной матрицы* // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2007. Т. 346. С. 131–148.
7. Валеев Н.Ф. *Регулярные решения многопараметрической обратной спектральной задачи* // Матем. заметки. 2009. Т. 85. Вып. 6. С. 940–943.

Нурмухамет Фуатович Валеев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: valeevnf@mail.ru