ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 130-138.

УДК 517.9

ОБ АВТОМОРФНЫХ СИСТЕМАХ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ГРУПП ЛИ

А.А. ТАЛЫШЕВ

Аннотация. В настоящей работе показано, что автоморфная система конечномерной группы Ли всегда вполне интегрируема.

Ключевые слова: симметрии Ли, автоморфные системы, дифференциальные инварианты.

Введение

Система дифференциальных уравнений называется автоморфной относительно группы Ли, если все её решения находятся на орбите одного из них. При обосновании структуры автоморфной системы в монографии [1, с. 329] используется утверждение о том, что многообразие U' может быть получено из многообразия U посредством действия некоторого преобразования группы, если $U' \subset h(U, O)$. Это утверждение, вообще говоря, неверно.

В настоящей работе показано, что для конечномерных групп Ли описанная в [1] структура (с небольшими уточнениями) действительно определяет автоморфную систему. Также показано, что всякая автоморфная система для конечномерной группы Ли всегда вполне интегрируема. Предложенный здесь подход существенно использует конечномерность группы Ли и потому неприменим для бесконечномерных групп.

1. Автоморфные системы

Определение. *Система дифференциальных уравнений называется автоморфной относительно группы G, если любое решение этой системы получается из одного фиксированного решения посредством действия преобразований группы G* [1, §25].

В дальнейшем используются следующие обозначения: $X = R^n$ — пространство независимых переменных, $Y = Y_0 = R^m$ — пространство зависимых переменных, $Z_k = X \times Y_0 \times \cdots \times Y_k$, $k = 0, 1 \ldots$, где $Y_k = R^m \otimes S^k R^n$, $k = 1, \ldots$ — продолженные пространства. Вектора пространств Y_k будут обозначаться через $\underset{k}{y}$, а их компоненты через y_α, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндексы и $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k$. Размерность пространства Z_k обозначается через ν_k, т.е.

$$\nu_k = \dim(Z_k) = n + m \binom{n+k}{n}.$$

Через ρ_k^{k+1} обозначается естественная проекция Z_{k+1} на Z_k:

$$\rho_k^{k+1}(x, y, \underset{1}{y}, \ldots, \underset{k}{y}, \underset{k+1}{y}) = (x, y, \underset{1}{y}, \ldots, \underset{k}{y}).$$

A.A. Talyshev, About automorphic systems of finite-dimensional Lie groups.

Поступила 8 октября 2012 г.

Операторы полного дифференцирования обозначаются через D_i, т.е.

$$D_i = \partial_{x_i} + \sum_{|\alpha|\geqslant 0} y_{\alpha+\gamma_i}\partial_{y_\alpha} \quad i = 1, \dots, n,$$

где $|\gamma_i| = 1$, причем единице равна компонента с номером i.

Рассматривается группа Ли $G^r(h)$ конечной размерности r, порожденная отображением $h : Z \times B \to Z$, где $B = R^r$. Для каждого $k > 0$ отображение h однозначно продолжается на пространство Z_k. Здесь это продолжение записывается в виде

$$\underset{k}{h} : Z_k \times B \to Z_k.$$

Начиная с некоторого k, общий ранг группы G^r на пространстве Z_k будет равен r. Здесь это значение k будет обозначаться через k_1.

Отображение $u : X \to Y$ для каждого $k \geqslant 0$ определяет в продолженном пространстве Z_k многообразие («график отображения»)

$$\underset{k}{U} = \left\{ y_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant k \right\}. \tag{1}$$

Результат действия группы G^r на многообразие (1) называется орбитой многообразия и обозначается через $\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O)$, где O окрестность 0 в пространстве B. Очевидно, существует такое $k_2 \geqslant k_1$ (k_2 зависит от отображения u), что при $k \geqslant k_2$ орбита является собственным многообразием пространства Z_k. Размерность орбиты d_k при $k \geqslant k_2$ удовлетворяет неравенствам

$$\max\{n, r\} \leqslant d_k = \dim \underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O) \leqslant n + r. \tag{2}$$

Очевидно, что для всех $k \geqslant 0$

$$\rho_k^{k+1}\left(\underset{k+1}{h}(\underset{k+1}{U}, O)\right) = \underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O). \tag{3}$$

При $k \geqslant k_2$ существуют такие отображения $\psi_k : Z_k \to R^{s_k}$, что

$$\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O) = \{z_k \in Z_k : \psi_k(z_k) = 0\},$$

где $s_k = \nu_k - d_k$. В силу (3) отображения ψ_k можно выбрать так, чтобы для каждого k множество отображений ψ_{k+1} было расширением множества отображений ψ_k.

Соотношения

$$\psi_k(z) = 0, \quad z \in Z_k \tag{4}$$

представляют из себя систему дифференциальных уравнений порядка k на m функций от n переменных, и отображение u является решением этой системы.

Система

$$p(\psi_k)(z) = \{\psi_k(\rho_k^{k+1}(z)), (D_1\psi_k)(z), \dots, (D_n\psi_k)(z)\} = 0, \quad z \in Z_{k+1}$$

называется первым продолжением системы (4). Соответственно многообразие

$$p(\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O)) = \{z \in Z_{k+1} : p(\psi_k)(z) = 0\}$$

называется первым продолжением орбиты $\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O)$.

Лемма 1. *Для каждого $k \geqslant k_2$ справедливо соотношение*

$$p(\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O)) \supseteq \underset{k+1}{h}(\underset{k+1}{U}, O). \tag{5}$$

Доказательство. Продолжение любой системы дифференциальных уравнений допускает каждую симметрию исходной системы [2], т.е. продолженная система $p(\psi_k(z)) = 0$ допускает группу G^r, и отображение u является ее решением. Поэтому орбита решения u в пространстве Z_{k+1} принадлежит продолжению орбиты u из пространства Z_k. ∎

Лемма 2. *Для каждого $k \geqslant k_2$ справедливо соотношение*

$$\rho_k^{k+1}(p(\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O))) = \underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O).$$

Доказательство. С одной стороны, справедливо очевидное включение

$$\rho_k^{k+1}(p(\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O)) \subseteq \underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O).$$

С другой стороны, применение проекции ρ_k^{k+1} к обоим частям соотношения (5) с учетом равенства (3) дает обратное включение. ∎

Ограничение системы Пфаффа

$$dy_\alpha - \sum_{j=1}^{n} y_{\alpha+\gamma_j} dx_j = 0, \quad 0 \leqslant |\alpha| < k$$

на многообразие $\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O))$ дает систему Пфаффа с предписанными независимыми переменными x, эквивалентную системе дифференциальных уравнений (4). Верно и обратное: каждой системе Пфаффа с предписанными независимыми переменными можно поставить в соответствие эквивалентную ей систему дифференциальных уравнений. Эквивалентность здесь понимается в том смысле, что между интегральными многообразиями системы внешних уравнений и решениями системы дифференциальных уравнений устанавливается взаимно однозначное соответствие. В рамках этой эквивалентности здесь система дифференциальных уравнений будет называться вполне интегрируемой, если эквивалентная ей система Пфаффа вполне интегрируема. Далее формы системы Пфаффа, эквивалентной системе (4), будут обозначаться через $\omega(\psi_k)$.

Лемма 3. *Существует такое $k_3 \geqslant k_2$, что для каждого $k \geqslant k_3$ система (4) вполне интегрируема.*

Доказательство. В силу правого из неравенств (2) найдется такое k_3, что

$$d_{k_3-1} = d_{k_3} < \nu_{k_3-1}.$$

Откуда следует, что

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \psi_{k_3}}{\partial \underset{k_3}{y}} = \nu_{k_3} - \nu_{k_3-1} = \dim Y_{k_3},$$

т.е. система дифференциальных уравнений $\psi_{k_3} = 0$ может быть разрешена относительно всех старших производных. Поэтому система $p(\psi_{k_3}) = 0$ также разрешима относительно всех старших производных и, следовательно,

$$\dim p(\underset{k_3}{h}(\underset{k_3}{U}, O)) = \dim \underset{k_3}{h}(\underset{k_3}{U}, O) = d_{k_3}. \tag{6}$$

Поэтому в силу леммы 1 $d_k = d_{k_3}$ для всех $k > k_3$.

Из леммы 2 следует, что для $k \geqslant k_3$ идеал, порожденный системой $\omega(\psi_k) = 0$, будет замкнут относительно операции внешнего дифференцирования. Откуда в силу теоремы Фробениуса [3] следует утверждение леммы. ∎

Лемма 4. *Для каждого $k \geqslant k_3$ система (4) является автоморфной.*

Доказательство. Система внешних уравнений $\omega(\psi_k)$ при $k \geqslant k_3$ вполне интегрируема, т.е. через каждую точку орбиты $\underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O)$ проходит единственное интегральное многообразие [3]. С другой стороны, для любой точки $z' \in \underset{k}{h}(\underset{k}{U}, O)$ существует преобразование $g \in G^r$ и точка $z \in \underset{k}{U}$ такие, что преобразование g переводит точку z в точку z'. И таким образом, это единственное интегральное многообразие совпадает с образом многообразия $\underset{k}{U}$ под действием преобразования g. ∎

Замечание 1. *Из соотношения (6), в частности, следует, что для каждого $k \geqslant k_3$ система $\psi_{k+1}(z) = 0$ является первым продолжением системы $\psi_k(z) = 0$. Следовательно, все системы $\psi_k(z) = 0$ при $k > k_3$ являются продолжениями системы $\psi_{k_3}(z) = 0$. Система $\psi_{k_3}(z) = 0$, как показывает пример 1 (вариант 7), не всегда является продолжением системы $\psi_{k_3-1}(z) = 0$.*

Замечание 2. *Леммы 1 и 2 справедливы и для бесконечномерных групп Ли, если существует конечное k_2. Если отображение и является решением системы дифференциальных уравнений, допускающей группу, то конечное k_2 существует и не превышает порядка системы.*

Из доказательства леммы 3 следует, что если $d_{k-1} = d_k$ для некоторого k, то и в случае бесконечномерной группы Ли система (4) для этого и бóльших значений k будет вполне интегрируемой и автоморфной.

2. Построение автоморфных систем

Для построения автоморфных систем используется, следуя [1, §25], теорема о представлении неособого инвариантного многообразия. В силу этой теоремы в качестве ψ_{k_3} можно выбрать инвариант группы G^r подходящей размерности. Этот инвариант будет выражаться через универсальный инвариант группы $\underset{k_3}{J}$ порядка k_3, т.е.

$$\psi_{k_3}(z) = \Psi(\underset{k_3}{J}(z)) = 0. \tag{7}$$

Требование полной интегрируемости этой системы накладывает условия на отображение Ψ. Эти условия являются системой дифференциальных уравнений на отображение Ψ, которая называется «разрешающей системой» [1, §25].

Алгоритм построения всех автоморфных систем данной группы заключается в исследовании всех возможных размерностей орбит, определяемых неравенствами (2). Причем одна и та же размерность орбиты, по крайней мере с точки зрения неравенств (2), может достигаться при различных значениях k_3. И этих различных значений конечное число. Таким образом, с точностью до операции продолжения имеется конечное число различных автоморфных систем. Причем не все варианты, допускаемые неравенствами (2), реализуются.

В монографии [1, §25, п. 4] утверждается, что при заданных n, m и r тип автоморфной системы вполне определяется одним параметром: рангом, дефектом или размерностью орбиты (эти три величины однозначно друг через друга выражаются). Как демонстрирует пример 1 (варианты 6 и 7), кроме дефекта важна еще величина k_3, т.е. порядок автоморфной системы.

Систему (7), как правило, записывают в разрешенном виде относительно части инвариантов. Соотношение (3) позволяет записать систему (7) в виде

$$J'' = \varphi(J'), \tag{8}$$
$$J''' = \psi(J'), \tag{9}$$

где порядок инвариантов J' и J'' меньше k_3, а через J''' обозначены все инварианты порядка k_3. Разделение инвариантов на J' и J'' не всегда однозначно и здесь возможно «ветвление» процесса исследования. «Ветвление» возможно и при дальнейших вычислениях.

Кроме неравенств (2) имеется еще одно ограничение на размерность орбиты, которое связано с тем, что рассматриваются орбиты «графиков» отображений $u : X \to Y$. Потому уравнения орбит не должны накладывать ограничения на переменные пространства X, т.е. должно выполняться неравенство

$$\nu_k - \operatorname{rank}\left(\partial_v \underset{k}{J}\right) \leqslant d_k, \quad \text{где} \quad v = (y, \underset{1}{y}, \ldots, \underset{k}{y}), \quad k = k_3 - 1. \tag{10}$$

Набор инвариантов J'' следует выбирать так, чтобы $\partial_v J'' \geqslant \nu_{k3-1} - d_{k3-1}$.

Если u не произвольное отображение, а решение системы дифференциальных уравнений E, допускающей группу G^r, то на функции φ и ψ из (8), (9) налагается дополнительное требование: система E должна быть дифференциально-алгебраическим следствием уравнений (8), (9). Если порядок системы E не превышает k_3, то целесообразно систему E, записанную через инварианты группы, включить в состав системы (8), (9).

3. Инвариантные и частично инвариантные решения

Инвариантные и частично инвариантные решения [1, §19, §22] являются решениями соответствующих автоморфных систем. Для инвариантных решений $k_3 = 1$.

Инвариантные решения существуют при выполнении неравенства (10). При этом уравнения (8) разрешимы относительно переменных y, а уравнения (9), в силу лемм 2 и 3, просто дают выражения для функций ψ. Поэтому нет надобности вычислять инварианты первого порядка, а разрешающая система будет получена после подстановки выражений переменных y в исходную систему дифференциальных уравнений. Т.е. технология построения инвариантных решений с использованием понятия автоморфных систем ничем не отличается от описанной в [1, §19].

Для построения частично инвариантных решений с использованием автоморфных систем потребуются дифференциальные инварианты первого и, возможно, более высокого порядка. И этим этот алгоритм сложнее алгоритма, описанного в [1, §22]. Но здесь отпадает надобность в понятии «лишних» функций.

4. О «простых» решениях

При $r \geqslant n$ минимально возможная размерность орбиты равна r, и при этой минимальной размерности $s_{k_3} = \nu_{k_3} - r$, т.е. совпадает с размерностью пространства инвариантов. Поэтому множество инвариантов J' из (8), (9) здесь пустое, и функции φ, ψ являются константами, а разрешающая система будет системой алгебраических уравнений на эти константы. Для случая $r = n$ такие автоморфные системы дают инвариантные решения, которые в работе [4] названы «простыми». По аналогии и при $r > n$ решения таких автоморфных систем, видимо, можно называть «простыми». До конца этого раздела будет использоваться этот термин.

Если H является подгруппой группы G^r, то каждое «простое» решение относительно подгруппы H будет «простым» решением относительно группы G^r. Действительно, каждый дифференциальный инвариант группы G^r является дифференциальным инвариантом подгруппы H, и подгруппа H имеет еще другие инварианты. Поэтому система (8), (9) для подгруппы H будет расширением аналогичной системы для группы G^r.

5. Пример 1

Уравнения одномерной динамики политропного газа

$$u_t + uu_x + \rho^{-1}p_x = 0, \quad \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad p_t + up_x + \gamma p u_x = 0, \tag{11}$$

допускают группу с алгеброй Ли

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_x + \partial_u, \quad t\partial_t + x\partial_x, \quad t\partial_t - u\partial_u + 2\rho\partial_\rho, \quad p\partial_p + \rho\partial_\rho.$$

Дифференциальные инварианты первого порядка можно выбрать в виде

$$J_1 = \frac{\rho(u_t + uu_x)}{p_x}, \quad J_2 = \frac{\rho_t + u\rho_x}{\rho u_x}, \quad J_3 = \frac{p_t + up_x}{pu_x},$$
$$J_4 = \frac{p_x}{u_x\sqrt{\rho p}}, \quad J_5 = \frac{\rho_x\sqrt{p}}{u_x\sqrt{\rho^3}}.$$

Данный набор инвариантов образует базис, т.е. любой инвариант может быть получен из этого набора посредством алгебраических операций и действия операторов инвариантного дифференцирования

$$\Lambda_1 = \frac{1}{u_x}D_t + \frac{u}{u_x}D_x, \quad \Lambda_2 = \frac{u_t + uu_x}{u_x^2}D_x.$$

Ниже используется следующий набор дифференциальных инвариантов второго порядка:

$$J_{21} = \frac{p_{tt} + 2up_{tx} + u^2p_{xx}}{pu_x^2}, \quad J_{22} = \frac{(p_{tx} + up_{xx})p_x}{\rho p u_x^3}, \quad J_{23} = \frac{p_{xx}p_x^2}{\rho^2 p u_x^4},$$
$$J_{24} = \frac{(\rho_{tt} + 2u\rho_{tx} + u^2\rho_{xx})p_x^2}{\rho^2 p u_x^4}, \quad J_{25} = \frac{(\rho_{tx} + u\rho_{xx})p_x^3}{\rho^3 p u_x^5}, \quad J_{26} = \frac{\rho_{xx}p_x^4}{\rho^4 p u_x^6},$$
$$J_{27} = \frac{(u_{tt} + 2uu_{tx} + u^2u_{xx})\rho}{p_x u_x}, \quad J_{28} = \frac{u_{tx} + uu_{xx}}{u_x^2}, \quad J_{29} = \frac{u_{xx}p_x}{\rho u_x^3}.$$

Система (11) в пространстве инвариантов записывается в виде

$$J_1 = -1, \quad J_2 = -1, \quad J_3 = -\gamma. \tag{12}$$

Неравенства (2) допускают следующие варианты автоморфных систем для уравнений (11):

№	d_1	d_2	d_3	d_4	k_3	δ
1	6	6	6	6	2	4
2	6	7	7	7	3	5
3	6	7	8	8	4	6
4	6	8	8	8	3	6

№	d_1	d_2	d_3	d_4	k_3	δ
5	7	7	7	7	2	5
6	7	8	8	8	3	6
7	8	8	8	8	2	6

Здесь $\delta = d_{k_3} - n$ — дефект инвариантности. Далее для каждого из вариантов таблицы строится система (8), (9) и для части из них исследуется разрешающая система.

Для вариантов 1–4 размерность $d_1 = 6$, т.е. $s_1 = \nu_1 - d_1 = 5$ совпадает с количеством инвариантов первого порядка. Поэтому все инварианты первого порядка должны быть равны константам, т.е. уравнения (12) следует дополнить уравнениями

$$J_4 = c_4, \quad J_5 = c_5, \tag{13}$$

где c_4, c_5 — некоторые константы.

Так как полный набор инвариантов более высокого порядка может быть получен действием операторов инвариантного дифференцирования на инварианты первого порядка, то эти инварианты более высокого порядка должны быть нулевыми. Таким образом, произвол при построении системы (8), (9) для вариантов 1–4 не превышает двух констант.

Система (12), (13) совместна, если $c_5 = (c_4^2 - \gamma + 1)/c_4$, а первое продолжение этих уравнений будет вполне интегрируемо при условии $c_4^2 \neq \gamma$. При этих условиях и при $\gamma \neq 1$ решение системы (12), (13) имеет вид

$$u = ax + u_1(t), \quad \rho = \rho_1 p^\alpha, \quad p = (p_1(t) + 0.5(1-\alpha)c_4 a\sqrt{\rho_1}x)^{2/(1-\alpha)},$$

где

$$\alpha = (c_4^2 - \gamma + 1)/c_4^2, \quad a = 1/(c_6 + 0.5(1+\gamma)t), \quad \rho_1 = c_7(c_6 + 0.5(1+\gamma)t)^{2/(1+\gamma)},$$

c_6, c_7 — константы, а функции $u_1(t)$ и $p_1(t)$ удовлетворяют линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = -a\left(u_1 + \frac{c_4}{\sqrt{\rho_1}}p_1\right), \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\gamma-1}{2c_4^2}a(c_4\sqrt{\rho_1}u_1 + \gamma p_1).$$

Если $c_4^2 = \gamma$, то система (12), (13) будет инволютивна, и никакое ее продолжение полностью интегрируемым не будет. Отсюда, в частности, следует, что автоморфных систем вариантов 2, 3, 4 для системы (11) не существует.

Для варианта 5 уравнения (8), (9) состоят из уравнений (12) и одной из следующих систем уравнений

$$J_4 = \varphi(J_5), \quad J_{2i} = \psi_i(J_5), \quad i = 1, \ldots, 9,$$

$$J_5 = c_5, \quad J_{2i} = \psi_i(J_4), \quad i = 1, \ldots, 9.$$

Для варианта 6 уравнения (8), (9) состоят из уравнений (12) и одной из следующих систем уравнений

$$J_4 = \varphi_0(J_5), \quad J_{2i} = \varphi_i(J_5, J_{26}), \quad i \in \{1, \ldots, 9\},\ i \neq 6, \quad \Lambda_2 J_{26} = \psi(J_5, J_{26}),$$

$$J_5 = c_5, \quad J_{2i} = \varphi_i(J_4, J_{23}), \quad i \in \{1, \ldots, 9\},\ i \neq 3, \quad \Lambda_2 J_{23} = \psi(J_4, J_{23}). \tag{14}$$

Из условия полной интегрируемости системы (12), (14) функции φ_i определяются равенствами

$$\varphi_{21} = (\gamma^2 J_4^2 + \gamma J_{23} + \gamma J_4^2 + J_4^4)/J_4^2, \quad \varphi_{22} = -J_4^2(\gamma+1), \quad \varphi_{24} = J_{23} + 2J_4^2,$$

$$\varphi_{25} = \varphi_{26} = \varphi_{29} = 0, \quad \varphi_{27} = \gamma + 1, \quad \varphi_{28} = -(J_{23} + J_4^2)/J_4^2,$$

$c_5 = 0$ и $\psi = \theta(J_{23}/J_4^4)J_4^6$, где θ — произвольная функция одного аргумента.

Для варианта 7 уравнения (8) совпадают с уравнениями (12), а уравнения (9) записываются в виде

$$J_{2i} = \psi_i(J_4, J_5), \quad i = 1, \ldots, 9. \tag{15}$$

Из условия полной интегрируемости системы (12), (15) шесть из функций ψ_i определяются равенствами

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= (\gamma^2 J_4^2 - \gamma J_4^3 J_5 + \gamma J_4^2 + \gamma\psi_3 + J_4^4)J_4^{-2},\\
\psi_2 &= -(\gamma J_4^2 + \gamma\psi_9 + J_4^2),\\
\psi_4 &= 2J_4^2 + \psi_3,\\
\psi_5 &= -J_4^2(2J_4J_5 + \psi_9),\\
\psi_7 &= (\gamma J_4^2 + \gamma\psi_9 + J_4^2)J_4^{-2},\\
\psi_8 &= (J_4^3 J_5 - J_4^2 - \psi_3)J_4^{-2},
\end{aligned}$$

а остальные удовлетворяют системе квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned}
&J_4^3 A\psi_9 + B\psi_3 + 2J_4(\gamma J_4^4\psi_9 + \gamma J_4^2\psi_9^2 + 2J_4^6 J_5^2 + 3J_4^5 J_5\psi_9 + \\
&+J_4^4\psi_3 + J_4^2\psi_9\psi_3 - J_4^2\psi_6 - 2\psi_3^2) = 0, \\
&\gamma B\psi_9 + J_4 A\psi_3 + 2J_4(2\gamma J_4^4\psi_9 + \gamma J_4^3 J_5\psi_9 + 3\gamma J_4^2\psi_9^2 + 2\gamma J_4^2\psi_3 + \\
&+\gamma\psi_9\psi_3 + J_4^4\psi_9 + 4J_4^3 J_5\psi_3 - 2J_4^2\psi_3 - 4\psi_3^2) = 0, \\
&J_4 B\psi_9 + A\psi_6 + 2(3\gamma J_4^2\psi_6 + 4\gamma\psi_9\psi_6 + 4J_4^5 J_5\psi_9 + 3J_4^4\psi_9^2 + \\
&+6J_4^3 J_5\psi_6 - J_4^2\psi_9\psi_3 - 3J_4^2\psi_6 - 6\psi_6\psi_3) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$A = J_4\alpha_1\frac{\partial}{\partial J_4} + \alpha_2\frac{\partial}{\partial J_5}, \quad B = J_4^2\alpha_3\frac{\partial}{\partial J_4} + \alpha_4\frac{\partial}{\partial J_5},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\gamma J_4^2 - 2\gamma\psi_9 - 2J_4^3 J_5 + J_4^2 + 2\psi_3, \\
\alpha_2 &= -\gamma J_4^2 J_5 - 2J_4^3 J_5^2 + J_4^2 J_5 - 2J_4\psi_9 + 2J_5\psi_3, \\
\alpha_3 &= -J_4^4 - J_4^3 J_5 - 2J_4^2\psi_9 + 2\psi_3, \\
\alpha_4 &= J_4^5 J_5 - 3J_4^4 J_5^2 - 2J_4^3 J_5\psi_9 + 2\psi_6.
\end{aligned}$$

6. Пример 2

Пример данного раздела демонстрирует, что автоморфная система бесконечномерной группы Ли не обязана быть вполне интегрируемой.

В работе [5] построено групповое расслоение для уравнения Кармана-Гудерлея

$$-\varphi_x\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0 \tag{16}$$

относительно бесконечномерной группы с инфинитезимальным оператором $f(y,z)\partial_\varphi$, где $f(y,z)$ — произвольная гармоническая функция. Этот оператор определяет преобразование $\varphi \to \varphi + f(y,z)$.

Групповое расслоение уравнения (16) задается, как показано в работе [5], автоморфной системой

$$\varphi_x = a, \quad \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = aa_x \tag{17}$$

и разрешающим уравнением

$$-aa_{xx} - a_x^2 + a_{yy} + a_{zz} = 0.$$

Разность любых двух решений системы (17) является гармонической функцией переменных y, z и не зависит от переменной x, поэтому система (17) действительно автоморфна. При этом система (17), когда a удовлетворяет разрешающему уравнению, инволютивна, но не вполне интегрируема.

Заключение

Если система дифференциальных уравнений E допускает конечномерную группу Ли G^r, то всякое решение системы E является решением какой-нибудь автоморфной системы группы G^r. Автоморфная система относительно просто интегрируется, но разрешающая система может быть значительно сложнее исходной системы E. Пример 1 (вариант 7) демонстрирует это. Исключение составляют автоморфные системы минимального дефекта. В этом случае разрешающая система является системой алгебраических уравнений на совокупность констант.

Тот факт, что автоморфная система обязана быть вполне интегрируемой, позволяет сразу написать представление системы данного типа (или несколько представлений, как в вариантах 5 и 6 примера 1). При конкретных вычислениях нет необходимости выписывать все уравнения системы (9).

При проведении объемных вычислений использовалась система аналитических вычислений «Reduce 3.8» (http://reduce-algebra.sourceforge.net).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. 400 с.
2. Талышев А.А. *О симметриях неинволютивных систем.* Труды Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко (Новосибирск, Россия, 30 мая – 4 июня 2011 г.) № гос. Регистр. 0321101160, ФГУП НТЦ «Информрегистр». — Новосибирск, 2011. 6 с. (`http://conf.nsc.ru/files/conferences/niknik-90/fulltext/39591/46771/talyshev_2011.pdf`)
3. Рашевский П.К. *Геометрическая теория уравнений с частными производными.* М.: Гостехиздат, 1947. 354 с.
4. Овсянников Л.В. *О «простых» решениях уравнений динамики политропного газа* // ПМТФ. 1999, Т. 40, № 2. С. 5–12.
5. Головин С.В. *Групповое расслоение и точные решения уравнений трансзвукового движения газа* // ПМТФ. 2003, Т. 44, № 3. С. 51–63.

Александр Алексеевич Талышев,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: `tal@academ.org`