ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 155-161.

УДК 517.91

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ФОРМАХ ПРОГИБА СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ПРОДОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Г.Г. ШАРАФУТДИНОВА

Аннотация. В работе рассматривается приближенное исследование задачи о бифуркационном поведении упругой пластины при изменении продольной сжимающей силы. Предлагается новая схема, позволяющая определить критические значения этой силы, при которых пластина принимает устойчивые криволинейные состояния равновесия. Разработанная схема также приводит к асимптотическим формулам, описывающим нелинейные прогибы пластины при переходе через критические силы.

Ключевые слова: прогиб пластины, приближенное исследование, критические силы, точки бифуркации, асимптотические формулы, состояние равновесия.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b\}$ — прямоугольная замкнутая область на плоскости $\mathbb{R}^2$. Рассматривается задача о прогибах прямоугольной пластины P длины a и ширины b. Согласно теории гибких пластинок [1] дифференциальные уравнения, связывающие функцию v напряжений (функцию Эйри) в срединной поверхности и функцию прогиба w для свободно опертой по контуру пластины, имеют вид

$$L_1 \equiv d \cdot \Delta^2 w - h \cdot L(w,v) = 0 \ , \tag{1}$$

$$L_2 \equiv \Delta^2 v + \frac{1}{2} E \cdot L(w,w) = 0 \ , \tag{2}$$

где Δ — оператор Лапласа, нелинейные операторы $L(w,v)$ и $L(w,w)$ определяются равенством

$$L(w,v) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\ \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \ , \tag{3}$$

d, h, E — известные положительные постоянные (d — жесткость на изгиб, h — толщина пластины, E — модуль упругости).

Граничные условия, относящиеся к деформации в срединной поверхности, выглядят следующим образом:

G.G. Sharafutdinova, The problem of deflection shapes of a simply supported plate under a longitudinal strain.

Поступила 24 октября 2011 г.

$$
\begin{aligned}
&\text{при} \quad x=0,a \qquad \sigma_x=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \qquad \tau_{xy}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad w=0, \qquad\qquad w_{xx}=0;\\
&\text{при} \quad y=0,b \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-N_y, \quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad w=0, \qquad\qquad w_{yy}=0.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где N_y — продольная сжимающая сила, приложенная к краям пластины вдоль оси OY, знак минус указывает на то, что сила N_y — сжимающая.

В работе рассматривается задача о бифуркационном поведении пластины при изменении параметра N_y. Предлагается новая схема, позволяющая определить критические значения этого параметра и получить приближенные формулы для функции прогиба. Предлагаемая схема основана на методах общей теории бифуркаций, изложенных в [2].

2. Определение критических сил

Задачу (1)-(4) удобно преобразовать к иному виду. Положим $c(x,y)=\dfrac{x^2}{2}$. Очевидно, функция $c(x,y)$ является решением краевой задачи:

$$\Delta^2 c=0\ , \quad 0<x<a\ , \quad 0<y<b,$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2}=0\ , \ \dfrac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}=0 \quad \text{при} \quad x=0,a;\\[2ex]
\dfrac{\partial^2 c}{\partial x^2}=1\ , \ \dfrac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}=0 \quad \text{при} \quad y=0,b.
\end{cases}
$$

Определим функцию $F(x,y)=v(x,y)+N_y c(x,y)$. Тогда

$$\Delta^2 v=\Delta^2 F\ ,$$

$$L(w,v)=L(w,F-N_y c)=L(w,F)-N_y L(w,c).$$

Следовательно, функции F и w являются решением следующей краевой задачи с однородными граничными условиями:

$$\widetilde{L_1}\equiv d\cdot\Delta^2 w-h\cdot L(w,F)+hN_y L(w,c)=0, \tag{5}$$

$$\widetilde{L_2}\equiv \Delta^2 F+\frac{1}{2}E\cdot L(w,w)=0; \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{при} \quad x=0,a \qquad \sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0\ , \quad \tau_{xy}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0\ , \quad w=0\ , \quad w_{xx}=0;\\
&\text{при} \quad y=0,b \qquad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=0\ , \quad \tau_{yx}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=0\ , \quad w=0\ , \quad w_{yy}=0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Здесь сила N_y рассматривается как вещественный параметр.

Задача (5)–(7) изучалась во многих работах, в частности, в [3] доказывалась ее разрешимость (с. 352–354), исследовалась структура множества решений (с. 361–364).

При любом значении параметра N_y задача (5)–(7) имеет тривиальное решение $w(x,y)\equiv 0, \quad F(x,y)\equiv 0$, однако нулевое решение не всегда единственно. Это соответствует хорошо известному экспериментальному факту: пластина может иметь при одной и той же нагрузке несколько различных форм равновесия. Как правило, лишь одна из форм равновесия является желательной. Переход в другие формы может вызвать разрушение конструкции. В связи с этим возникает необходимость в предсказании такого перехода, что сводится к отысканию критических значений сил N_y, или точек бифуркации задачи (5)–(7).

Строго говоря, с точки зрения общей теории бифуркаций, наличие критических значений сил N_y еще не означает качественного изменения формы равновесия пластины при переходе нагрузки через такие критические значения. Другими словами, в задачах о точках бифуркации обычно присутствуют необходимое и достаточное условия бифуркации. Необходимое условие связано с тем, что соответствущие линеаризованные уравнения имеют ненулевые решения, а достаточное условие связано с трансверсальным поведением соответствующих собственных значений линейной задачи. Однако в задаче о прогибах пластин необходимое условие одновременно является и достаточным.

Наряду с (5)–(7) будем рассматривать также линейную краевую задачу

$$d\cdot\Delta^2 w=-N_y h\cdot L(w,c), \tag{8}$$

$$\begin{array}{lll} \text{при} & x=0,a & w=w_{xx}=0; \\ \text{при} & y=0,b & w=w_{yy}=0. \end{array} \tag{9}$$

В соответствии с [3] будем говорить, что λ_0 является точкой бифуркации задачи (5)–(7), если при $N_y=\lambda_0$ линейная задача (8)–(9) имеет ненулевое решение.

Решение задачи (8)–(9) можно представить в виде

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}B_{km}\sin\frac{\pi kx}{a}\sin\frac{\pi my}{b}.$$

Тогда критические значения силы N_y определяются из уравнений $\dfrac{hm^2N_y}{\pi^2b^2d}=\left[\dfrac{k^2}{a^2}+\dfrac{m^2}{b^2}\right]^2$; поэтому каждой паре k и m соответствует некоторая точка бифуркации. Наименьшее значение N_y достигается, когда $k=1, m=1$, при этом

$$N_y^*=\frac{\pi^2 d}{h}\cdot\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4b^2}.$$

Число N_y^* является наименьшей точкой бифуркации задачи (5)–(7). Аналогичный результат был получен, например, в [1].

3. Вспомогательные сведения из теории бифуркаций операторных уравнений

С целью изучения задачи о приближенном построении функций прогиба при переходе параметра N_y через точки бифуркации, приведем в удобной для нас форме некоторые результаты из работы [2]. Рассмотрим операторное уравнение

$$x=A(\lambda)x+a(x,\lambda), \tag{10}$$

где $A(\lambda)$ — действующий в гильбертовом пространстве H линейный вполне непрерывный оператор, $\|a(x,\lambda)\|=o(\|x\|)$, $\|x\|\to 0$.

Число λ_0 называют точкой бифуркации малых решений уравнения (10), если существует последовательность $\lambda_n\to\lambda_0$ такая, что при $\lambda=\lambda_n$ уравнение (10) имеет ненулевые решения x_n такие, что $x_n\to 0$ при $n\to\infty$. Точки бифуркации уравнения (10) следует искать лишь среди тех λ_0, для которых оператор $A(\lambda_0)$ имеет собственное значение 1.

Пусть выполняется условие:

U1. Число 1 — простое собственное значение оператора $A(\lambda_0)$.

Тогда существует ненулевой вектор e_0 такой, что $A(\lambda_0)e_0 = e_0$. Сопряженный оператор $A^*(\lambda_0)$ также имеет простое собственное значение 1, которому соответствует собственный вектор g_0. Векторы e_0 и g_0 можно выбрать из условия: $\|e_0\| = 1, (e_0, g_0) = 1$. Пусть наряду с U1 выполняется также условие

U2. $(A'(\lambda_0)e_0, g_0) \neq 0$, где $A'(\lambda)$ — это производная оператора $A(\lambda)$ по параметру λ.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия U1 и U2. Тогда λ_0 является точкой бифуркации уравнения (10).*

Бифурцирующие решения уравнения (10) обычно образуют непрерывные ветви $x = x(\lambda)$, где $x(\lambda)$ – непрерывная функция, причем $x(\lambda) \neq 0$ при $\lambda \neq \lambda_0$ и $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \lambda_0$. Часто функцию $x = x(\lambda)$ удобно искать в параметрическом виде $x = x(\varepsilon)$ и $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, где ε — вспомогательный малый параметр. Функции $x(\varepsilon)$ и $\lambda(\varepsilon)$ будем называть асимптотическими формулами для бифурцирующих решений уравнения (10).

Теорема 2. *Пусть нелинейность $a(x,\lambda)$ имеет вид $a(x,\lambda) = a_3(x,\lambda) + \varphi(x,\lambda)$, где $a_3(kx,\lambda) = k^3 a(x,\lambda)$, $\quad \varphi(x,\lambda) = o(\|x\|^3)$. Тогда асимптотические формулы принимают вид:*

$$\begin{cases} x(\varepsilon) = \varepsilon e_0 + \varepsilon^3 e_1 + o(\varepsilon^3), \\ \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \varepsilon^2 \lambda_1 + o(\varepsilon^2), \end{cases}$$

$$e_1 = \Gamma_0 a_3(e_0,\lambda_0), \quad \lambda_1 = -\frac{\big(a_3(e_0,\lambda_0), g_0\big)}{(A'e_0, g_0)} \ .$$

Здесь $A' = A'(\lambda_0)$, а линейный оператор Γ_0 является обратным к оператору $Bh = h - \lambda_0(h, g_0)A'(\lambda_0)e_0 - A(\lambda_0)h$.

4. Основные утверждения

Пусть $W_2^2(\Omega)$ — пространство Соболева, $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ — подпространство пространства $W_2^2(\Omega)$, полученное замыканием множества всех бесконечно дифференцируемых функций с носителями в Ω (т. е. подпространство соболевского пространства $W_2^2(\Omega)$ с элементами, удовлетворяющими соотвествующим однородным граничным условиям).

Для изучения вопроса об асимптотических формулах, описывающих нелинейные прогибы задачи (5)–(7) при переходе через критические силы, предлагается следующая схема.

Обозначим через $A_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega) \to \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ оператор, ставящий в соответствие функции w решение краевой задачи

$$\Delta^2 F = -\frac{1}{2} E \cdot L(w,w), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\text{при} \ \ x = 0, a \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \ , \ \ \tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \ ; \\ &\text{при} \ \ y = 0, b \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \ , \ \ \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим определенный на $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$ функционал

$$f(w) = \int_0^a \int_0^b \left(d \cdot (\Delta w)^2 - \frac{h}{2} L(w,w) A_0(w) \right) dxdy \ .$$

Этот функционал непрерывно дифференцируем по Фреше на $\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)$, и его градиент $\nabla f : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$ определяется (см. [3]) равенством

$$\Big(\nabla f(w), \varphi\Big) = 2\int\limits_0^a\int\limits_0^b \Big(d\cdot\Delta w\Delta\varphi - hL(w, A_0(w))\varphi\Big)dxdy\ ,$$

где $\varphi = \varphi(x,y)$ — произвольная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^2$.

Задача отыскания решений системы (5)–(7) эквивалентна (см. [3]) задаче отыскания решений уравнения

$$\nabla f(w) = -N_y\nabla g(w)\ , \tag{13}$$

где функционал $g(w)$ определяется равенством

$$g(w) = h\int\limits_0^a\int\limits_0^b L(w,c)wdxdy.$$

Обозначим далее через $B : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$ и $D : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$ — операторы, определенные равенствами

$$(Bw,\varphi) = 2\int\limits_0^a\int\limits_0^b d\cdot\Delta w\Delta\varphi dxdy\ ,\quad (Dw,\varphi) = -2h\int\limits_0^a\int\limits_0^b L(w,c)\varphi dxdy\ .$$

Теорема 3. *Уравнение $(B-\lambda D)w = 0$ при $\lambda = \lambda_0 = N_y^*$ имеет ненулевое решение $w = C\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{b}$, где C — произвольная постоянная.*

Справедливость этой теоремы следует из того, что функция $w = C\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{b}$ является решением задачи (8)–(9).

Уравнение (13) перепишем в следующем виде

$$w = A(\lambda)w + a_3(w)\ ,\quad w\in\overset{\circ}{W}{}_2^2\ ,\quad \lambda\in\mathbb{R}\ , \tag{14}$$

где $A(\lambda) = I + B - \lambda D$, $a_3(w) = -b(w)$; здесь $b(w)$ — нелинейный оператор, определенный равенством

$$\big(b(w),\varphi\big) = 2h\int\limits_0^a\int\limits_0^b L\big(w, A_0(w)\big)\varphi\, dxdy\ .$$

Теорема 4. *Значение $\lambda_0 = N_y^* = \dfrac{\pi^2 d}{h}\cdot\dfrac{(a^2+b^2)^2}{a^4b^2}$ является точкой бифуркации уравнения (14).*

Доказательство. Критические силы задачи (5)–(7) совпадают с точками бифуркации операторного уравнения (14). В свою очередь, уравнение (14) является аналогом уравнения (10). Поэтому для доказательства теоремы 4 достаточно установить, что для операторного уравнения (14) выполняются все условия теоремы 1.

Проверим выполнение условия U1.

Так как задача (8)–(9) при некотором $\lambda = \lambda_0 = N_y^*$ имеет единственное (с точностью до сомножителя) ненулевое решение $w = C\sin\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{\pi y}{b}$, то оператор $A(\lambda)w$ при $\lambda = \lambda_0 = N_y^*$ имеет простое собственное значение 1, которому соответствует функция w. Положим

$w = e_0$; постоянную C можно выбрать из условия $(e_0, e_0) = 1$, откуда $C = \dfrac{2\sqrt{a^3b^3}}{\pi^2(a^2+b^2)}$. Таким образом, условие U1 выполнено.

Проверим условие U2. Оператор $A(\lambda)w$ является самосопряженным в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^2$, поэтому в качестве собственного вектора сопряженного оператора можно выбрать функцию $g_0(x,y) = e_0(x,y)$. Поэтому имеем

$$A'e_0 = -De_0 = -h\frac{\pi^2}{b^2}e_0,$$

$$(A'(\lambda_0)e_0, g_0) = (-De_0, e_0) = -h\frac{\pi^2}{b^2} \neq 0 \ .$$

Таким образом, условие U2 также выполнено. Следовательно, $\lambda_0 = N_y^*$ является критической силой задачи (5)–(7) или уравнения (14). Теорема доказана.

Теорема 5. *Бифурцирующие решения w_ε уравнения* (14) *и соответствующие значения параметра $\lambda_\varepsilon = \lambda(w_\varepsilon)$ представимы в виде*

$$w_\varepsilon = \varepsilon e_0 + \varepsilon^3 e_1 + o(\varepsilon^3) \ , \quad \lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon^2\lambda_1 + o(\varepsilon^2) \ ,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр,

$$e_1 = \Gamma_0 a_3(e_0) \ , \quad \lambda_1 = \frac{\big(a_3(e_0), e_0\big)b^2}{h\pi^2} \ ,$$

оператор $\Gamma_0 : \overset{\circ}{W}{}_2^2 \to \overset{\circ}{W}{}_2^2$ при любом $y \in: \overset{\circ}{W}{}_2^2$ вычисляется (см. [2]*) по формуле $\Gamma_0 y = h_0 + h^0$, где*

$$h_0 = \frac{(y, e_0)e_0}{\lambda_0(De_0, e_0)} \ , \quad h^0 = (I - A(\lambda_0))^{-1}\left[y - \frac{(y, e_0)De_0}{(De_0, e_0)}\right] \ .$$

Справедливость этого утверждения следует из теоремы 2.

Непосредственные вычисления показывают, что значение λ_1 представляется в виде дроби

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}} \ ,$$

в которой

$$\lambda_{11} = 8192 \cdot Eab^3\pi^2(\widetilde{\lambda}^4 - 32\pi^4)\times$$
$$\times\left(2(1 + \sin\widetilde{\lambda}\,\mathrm{sh}\,\widetilde{\lambda})\Big(8\pi^4(a^2-b^2)^2 + \widetilde{\lambda}^4(a^4+b^4)\Big) - (16\pi^4 + \widetilde{\lambda}^4)(3b^4 + 3a^4 - 2a^2b^2)\right) ,$$

$$\lambda_{12} = \widetilde{\lambda}^4(a^2+b^2)^4(16\pi^4 - \widetilde{\lambda}^4)^3\left[\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)\left(\alpha - \frac{2}{\widetilde{\widetilde{\lambda}}}\right)^2\alpha^2 + 2\left(1 - \frac{\alpha}{\widetilde{\widetilde{\lambda}}}\right)^2\right] \ .$$

Постоянные α и $\widetilde{\lambda}$ определяются из соотношений

$$\cos\widetilde{\lambda}\cdot\mathrm{ch}\widetilde{\lambda} = 1 \ , \quad \alpha = \frac{\sin\widetilde{\lambda} - \mathrm{sh}\widetilde{\lambda}}{\cos\widetilde{\lambda} - \mathrm{ch}\widetilde{\lambda}} \ .$$

Такой выбор значений α и $\widetilde{\lambda}$ определяется необходимостью удовлетворения граничным условиям задачи (11)-(12).

Значение e_1 также можно вычислить, однако это требует существенно более громоздких расчетов. Приведем лишь схему вычисления e_1.

Так как $e_1 = \Gamma_0 a_3(e_0, \lambda_0)$, где Γ_0 – обратный к оператору $Bh = h - \lambda_0(h, g_0)A'(\lambda_0)e_0 - A(\lambda_0)h$, то $Be_1 = a_3(e_0, \lambda_0)$. По теореме 5 имеем $e_1 = h = h_0 + h^0$. В результате придем к уравнению

$$a_3(e_0,\lambda_0) = h_0 + h^0 - \lambda_0(h_0 + h^0, e_0)A'(\lambda_0)e_0 - A(\lambda_0)(h_0 + h^0),$$

которое, в свою очередь, упрощается, если учесть, что

$$(h^0, e_0) = 0, \quad Ah_0 = h_0, \quad A'(\lambda_0)e_0 = -De_0, \quad \lambda_0 = N_y^*, \quad h_0 = \frac{(a_3, e_0)b^2 e_0}{N_y^* h\pi^2}.$$

Остается вычислить функцию h^0, решив методом неопределенных коэффициентов уравнение

$$a_3(e_0,\lambda_0) = h^0 + (a_3, e_0)e_0 - Ah^0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки.* М.: Наука. 1966. 636 с.
2. Юмагулов М.Г., Ибрагимова Л.С. *Функционализация параметра и ее приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем* // Автоматика и телемеханика. 2007, № 4. С. 3–12.
3. Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. *Геометрические методы в вариационных задачах.* М.: Магистр. 1998. 658 с.

Гюзель Гафуровна Шарафутдинова,
Стерлитамакская государственная
педагогическая академия им. Зайнаб Биишевой,
проспект Ленина, 49,
453103, г. Стерлитамак, Россия
E-mail: guzelbas@mail.ru