ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 108-118.

УДК 517.5+517.9

О РАВНОМЕРНОЙ ПРИБЛИЖАЕМОСТИ РЕШЕНИЯМИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА ВЫШЕ ДВУХ

М.Я. МАЗАЛОВ

Аннотация. Рассматриваются задачи равномерного приближения на компактах в $\mathbb{R}^d$, $d > 2$, решениями однородных эллиптических уравнений порядка $n > 2$ с постоянными коэффициентами. Строится пример, показывающий, что для компактов с непустой внутренностью критерии равномерной приближаемости, аналогичные критерию А. Г. Витушкина, известному для аналитических функций в $\mathbb{C}$, в общем случае не имеют места. Напротив, в случае нигде не плотных компактов ситуация такая же, как для аналитических и гармонических функций, включая неустойчивость соответствующих емкостей.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, емкости, неустойчивость емкостей, равномерное приближение, схема Витушкина.

1. Введение

Пусть $L(x)$ — однородный эллиптический многочлен с комплексными коэффициентами (где $x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, $L(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$), $L = L(\nabla)$ — соответствующий дифференциальный оператор; далее рассматриваются только такие операторы L. Обозначим через n порядок оператора L; напомним [1, теорема 7.1.20], что L имеет фундаментальное решение вида

$$E(x) = E_0(x) - E_1(x)\log|x|, \tag{1.1}$$

где E_0 — вещественно аналитическая функция в $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, однородная степени $n-d$, E_1 — однородный многочлен степени $n-d$ (если $n < d$, то $E_1 \equiv 0$).

Пусть $X \subset \mathbb{R}^d$ — компакт, X^o — множество всех внутренних точек X,

$$h(X, L) = C(X) \cap \{Lf = 0 \text{ в } X^o\},$$

$H(X, L)$ — замыкание в $C(X)$ множества функций

$$\{f|_X : Lf = 0 \text{ в некоторой окрестности } X\}$$

(окрестность зависит от функции f).

Так как L — эллиптический оператор, то $H(X, L) \subset h(X, L)$. Критерии равенства классов $H(X, L) = h(X, L)$ были получены в случае аналитических функций ($d = 2$, L — оператор Коши–Римана) А. Г. Витушкиным [2], а в случае гармонических функций ($d > 2$, L — оператор Лапласа) — независимо Дж. Дени [3] и М. В. Келдышем [4]. Имеет место следующее утверждение (мы несколько упрощаем формулировки):

$$H(X, L) = h(X, L) \iff \mathrm{Cap}_L(B \setminus X^o) \leqslant A\mathrm{Cap}_L(kB \setminus X), \tag{1.2}$$

M.Ya. Mazalov, On uniform approximability by solutions of elliptic equations of order higher than two.

Работа выполнена при поддержке грантом РФФИ 12-01-00434 и грантом НШ-3476.2010.1 программы поддержки ведущих научных школ.

Поступила 1 октября 2011 г.

где под $\mathrm{Cap}_L(\cdot)$ понимается, соответственно, аналитическая или гармоническая емкость, B — произвольный открытый шар (круг при $d = 2$), $A > 0$ и $k \geqslant 1$ — фиксированные постоянные.

При изучении устранимых особенностей непрерывных решений уравнения $Lf = 0$ Р. Харви и Дж. Полкинг ввели [5] емкости, естественно обобщающие аналитическую и гармоническую емкости. В настоящей работе ограничимся случаем $n < d$. Следуя [5, определение 1.1], *емкостью* ограниченного множества U назовем

$$\sup_g\{|\langle Lg|1\rangle| : \|g\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 1,\ g \in C(\mathbb{R}^d),\ \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,\ \mathrm{Spt}(Lg) \subset U\} \tag{1.3}$$

и будем обозначать $\mathrm{Cap_L}(U)$ (здесь и далее $\|\cdot\|_{\mathrm{L}_\infty} = \|\cdot\|_{\mathrm{L}_\infty}(\mathbb{R}^d)$). В формуле (1.3) в угловых скобках записано действие распределения с компактным носителем на бесконечно гладкую функцию, $\mathrm{Spt}(\cdot)$ — замыкание носителя распределения. Именно,

$$\langle Lg|1\rangle = (-1)^n \int g(x)L\varphi(x)dm_x, \tag{1.4}$$

где φ — произвольная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, такая, что $\varphi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности $\mathrm{Spt}(Lg)$, интегрирование проводится по мере Лебега в $\mathbb{R}^d$. Функцию $g \in C(\mathbb{R}^d)$, такую, что $\mathrm{Spt}(Lg) \subset U$ и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, будем называть *допустимой для* U.

Так как емкость $\mathrm{Cap}_L(\cdot)$ характеризует "массивность" множества неустранимых особенностей непрерывных решений уравнения $Lf = 0$ [5, теорема 1.4], неравенство в правой части (1.2) имеет следующий естественный смысл: дополнение к компакту локально "не менее массивно чем его граница.

В настоящей работе установлено следующее.

1. Показано, что при $d > 2$ и $n < d$ для каждого соответствующего L неравенство в правой части (1.2) является необходимым для равенства $H(X, L) = h(X, L)$ (см. следствие 1 леммы 4), но не достаточным (см. пример 1 в §4).

Заметим, что в случае приближения в пространствах Липшица нецелого порядка и BMO (именно, когда используемая емкость, в отличие от (1.3), соизмерима с соответствующим обхватом по Хаусдорфу) подобные примеры построены в [6, §4]; конструкция примера 1 настоящей работы существенно проще, чем в [6].

Для равномерных приближений необходимо отметить особую роль размерности $d = 2$: в [7, теорема 1] доказано, что при $d = 2$ в случае локальной ограниченности E из (1.1) равенство $H(X, L) = h(X, L)$ имеет место для любых компакта X и оператора L; вместе с тем, при $d > 2$ для любого рассматриваемого оператора L (в том числе, и с локально ограниченным фундаментальным решением) существует компакт X, такой, что $H(X, L) \neq h(X, L)$ (например, [8, теорема 8.2]).

2. При $X^o = \emptyset$ (и соответственно, $h(X, L) = C(X)$) ситуация существенно проще, чем в общем случае: имеет место не только (1.2), но и неустойчивость емкости $\mathrm{Cap}_L(\cdot)$, аналогичная неустойчиости аналитической и гармонической емкостей (см. теорему 1 из [2, гл. 6, §2], теорему B из [9] и теорему B из [10]). Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $X^o = \emptyset$.*

(1) Если выполнено равенство $C(X) = H(X, L)$, то для любого открытого шара $B(x, r)$ (с центром x радиуса r) имеет место оценка

$$\mathrm{Cap}_L(B(x, r) \setminus X) \geqslant Ar^{d-n}, \tag{1.5}$$

где $A = A(L) > 0$.

(2) Пусть для почти всех $x \in X$ (по лебеговой мере пространства $\mathbb{R}^d$) выполнена оценка

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{Cap}_L(B(x, r) \setminus X)}{r^d} > 0, \tag{1.6}$$

тогда $C(X) = H(X, L)$.

Утверждение (1) теоремы 1 следует из определения емкости (см. следствие 2 леммы 4). Доказательство утверждения (2) состоит из двух частей.

1. Доказательство (1.5)⇒ $C(X) = H(X, L)$ проводится с помощью усовершенствованной схемы А.Г. Витушкина [2] разделения особенностей и приближения функции по частям и вытекает из лемм 5 и 8.

2. В доказательстве (1.6)⇒(1.5) (см. лемму 9) используются аргументы, аналогичные примененным в работах [2] А.Г. Витушкина, [9] А.А. Гончара и [10] Ю.А. Лысенко и Б.М. Писаревского.

Вопрос о (естественном) критерии равенства $H(X, L) = h(X, L)$ в случае $d > 2$, $n > 2$ и компактов X с непустой внутренностью остается открытым. Напомним, что Н.Н. Тархановым в [11] был доказан аналог теоремы А.Г. Витушкина для решений эллиптических систем. В частном случае равномерных приближений результат формулируется в терминах емкости, соответствующей (1.3), и нескольких емкостей, обобщающих (1.3), которые для классов аналитических и гармонических функций оказываются "избыточными". В связи с этим заметим, что, применяя теорему 2 из [7], можно в условии 3) леммы 3.8 из [11] (о приближении функции по частям) заменить $|x|^n$ на $|x|^{n-1}$ и тем самым для всех операторов L уменьшить количество используемых емкостей.

2. Подготовительные результаты.

Будем использовать элементарные свойства емкостей $\mathrm{Cap}_L(\cdot)$, вытекающие из (1.3).

(1) $\mathrm{Cap}_L(U) \leqslant \mathrm{Cap}_L(U')$ *при* $U \subset U'$.

(2) $\mathrm{Cap}_L(B(a, r)) = Ar^{d-n}$, *где* $A = A(L) > 0$.

(Напомним, что n — порядок оператора L, d — размерность пространства).

Будем считать, что каждая функция из $h(X, L)$ продолжена с X на все пространство $\mathbb{R}^d$ как непрерывная и финитная (это может быть сделано, например, по теореме Х. Уитни [12, гл. 6, п. 2.2]).

Зафиксируем фундаментальное решение E из (1.1). Пусть функция f непрерывна в $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{Spt}(Lf)$ компактен и $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Тогда (например, [7, лемма 1.3]) имеет место представление

$$f = E * (Lf), \tag{2.1}$$

понимаемое в обобщенном смысле.

Пусть $\{\varphi_j\}$ — конечное семейство неотрицательных функций $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, таких, что $\sum_j \varphi_j(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности $\mathrm{Spt}(Lf)$. Будем называть $\{\varphi_j\}$ *разбиением единицы* на $\mathrm{Spt}(Lf)$. Функция f представляется в виде суммы *локализаций*:

$$f = \sum_j f_j, \quad \text{где} \quad f_j = E * (\varphi_j Lf), \tag{2.2}$$

а соответствующий оператор V_φ:

$$V_\varphi \Psi = E * (\varphi L \Psi), \tag{2.3}$$

где $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^d)$, $\Psi \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^d))'$, называется *оператором локализации.*

Далее $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ — мультииндекс,

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^d \alpha_k, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}.$$

Всюду под *кубами* будем понимать замкнутые кубы с ребрами, параллельными осям координат. Для куба $Q = Q(a, s)$ с центром $a \in \mathbb{R}^d$ и ребром s через λQ обозначим куб с тем же центром и ребром λs. *Двоичными кубами* будем называть кубы вида

$$Q = Q_k^{m_1,\dots,m_d} = [m_1 2^{-k}, (m_1+1)2^{-k}] \times \dots \times [m_d 2^{-k}, (m_d+1)2^{-k}], \qquad (2.4)$$

где k, m_1, m_2,..., $m_d \in \mathbb{Z}$.

Рассматривая покрытия компактов конечными семействами двоичных кубов, всегда будем считать, что кубы раздельные (не имеют общих внутренних точек).

Далее положительные постоянные, которые могут зависеть только от L (в частности, от n или d), будем обозначать через A, A_0, A_1, ... Значения каждой из этих постоянных в разных соотношениях могут быть различными. Будем использовать разбиения единицы Р. Харви и Дж. Полкинга (см. [13, лемма 3.1], [7, лемма 1.1]).

Лемма 1. *Пусть $\{Q_j\}$ — конечное семейство раздельных двоичных кубов. Тогда существует $\{\varphi_j\}$ — разбиение единицы на $\bigcup_j Q_j$, такое, что*
(1) $\mathrm{Spt}\varphi_j \subset (3/2)Q_j$;
(2) $\|\partial^\alpha \varphi_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant As(Q_j)^{-|\alpha|}$ *при* $|\alpha| \leqslant n$.

В дальнейшем рассматриваем локализации (2.3) только относительно функций φ, удовлетворяющих условиям леммы 1. Следующая лемма доказывается стандартно (например, [7, лемма 1.2], [14, лемма 14.10]).

Лемма 2. *Пусть $f \in h(X, L)$, $\omega_f(s)$ — модуль непрерывности f в $\mathbb{R}^d$, $Q = Q(a, s)$ — куб (не обязательно двоичный), функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям (1)–(2) леммы 1 относительно куба Q, $V_\varphi f$ из (2.3). Тогда:*
(1) $V_\varphi f \in C(\mathbb{R}^d)$ *и* $\lim_{x\to\infty} V_\varphi f(x) = 0$;
(2) $\mathrm{Spt}(L(V_\varphi f)) \subset (\mathrm{Spt}\varphi \bigcap \mathrm{Spt} Lf)$;
(3) $\|V_\varphi f\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A\omega_f(s)$.

При этом всюду вне куба $A_1 Q$ функция $V_\varphi f$ разлагается в ряд Лорана, сходящийся в C^∞ (например, [7, §1] [14, §7, п. 2^o], [15, с. 163]):

$$V_\varphi f = \sum_{|\alpha|\geqslant 0} c_\alpha \partial^\alpha E(x-a), \qquad (2.5)$$

где

$$c_\alpha = c_\alpha(V_\varphi f, a) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \langle \varphi(y) Lf(y) | (y-a)^\alpha \rangle \qquad (2.6)$$

— лорановские коэффициенты. В частности,

$$c_0(V_\varphi f) = \langle \varphi Lf | 1 \rangle. \qquad (2.7)$$

Оценки лорановских коэффициентов локализаций вытекают из леммы 2 и (1.3)–(1.4). Так как функция $V_\varphi f$ является допустимой для $(3/2)Q \setminus X^o$, в силу определения емкости (1.3) имеем:

$$|c_0(V_\varphi f)| \leqslant A\omega_f(s)\mathrm{Cap}_L((3/2)Q \setminus X^o). \qquad (2.8)$$

Для оценки лорановских коэффициентов c_α, $|\alpha| > 0$, рассуждаем так же, как в доказательстве леммы 3.3 из [16]: ясно, что при достаточно малом $A_1 = A_1(n) > 0$ для функции $\psi(y) = A_1(2s)^{-|\alpha|}(y-a)^\alpha \varphi(y)$ выполнено условие (2) леммы 1; применив лемму 2 к локализации $V_\psi f$ и учитывая, что

$$c_0(V_\psi f) = \langle \psi Lf | 1 \rangle =$$
$$= A_1(2s)^{-|\alpha|}\langle \varphi(y) Lf(y) | (y-a)^\alpha \rangle = A_1(2s)^{-|\alpha|}\alpha!(-1)^{-|\alpha|} c_\alpha(V_\varphi f, a),$$

получим:

$$|c_\alpha(V_\varphi f, a)| \leqslant \frac{A_2}{\alpha!}\omega_f(s)(2s)^{|\alpha|}\mathrm{Cap}_L((3/2)Q \setminus X^o). \qquad (2.9)$$

С учетом неравенств

$$|\partial^\alpha E(x)| \leqslant \frac{\alpha! A_3^{|\alpha|}}{|x|^{d-n+|\alpha|}}$$

(например, [14, §7, лемма 7.3]), из (2.9) стандартным суммированием геометрической прогрессии получается, что вне достаточно большого куба $A_4 Q$ выполнена оценка

$$|V_\varphi f(x)| \leqslant A\omega_f(s)\frac{\mathrm{Cap}_L((3/2)Q\setminus X^o)}{|x-a|^{d-n}}. \tag{2.10}$$

Замечание 2.1. Используя дополнительное разбиение единицы на $(3/2)Q$, нетрудно показать (см., например, [17, лемма 1.5]), что оценка (2.10) имеет место для любого $\lambda > 0$ всюду вне куба $(3/2+\lambda)Q$ с (увеличенной) постоянной $A = A(\lambda)$. Аналогично, пусть $B = B(a,r)$ — шар, $\mathrm{Spt}\varphi \subset B$ и $\|\partial^\alpha\varphi\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant r^{-|\alpha|}$ при $|\alpha| \leqslant n$, $V_\varphi f$ — локализация. Тогда при $\lambda > 1$ всюду вне шара λB выполнена оценка

$$|V_\varphi f(x)| \leqslant A(\lambda)\omega_f(r)\frac{\mathrm{Cap}_L(B\setminus X^o)}{|x-a|^{d-n}}. \tag{2.11}$$

В силу леммы 2, равенства $\mathrm{Cap}_L(B(a,r)) = A(L)r^{d-n}$ и монотонности емкости получим следующее утверждение, являющееся несложным следствием (2.9).

Лемма 3. *Имеют место оценки*

$$|c_\alpha(V_\varphi f, a)| \leqslant \frac{A}{\alpha!}\omega_f(s)(2s)^{d-n+|\alpha|}. \tag{2.12}$$

Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \leqslant n+1$; если $c_\alpha(V_\varphi f, a) = 0$ при $|\alpha| < m$, то

$$|V_\varphi f(x)| \leqslant A\omega_f(s)\min\left(1, \frac{s^{d-n+m}}{|x-a|^{d-n+m}}\right). \tag{2.13}$$

То, что оценка $\mathrm{Cap}_L(B\setminus X^o) \leqslant A\mathrm{Cap}_L(kB\setminus X)$ необходима для равенства $h(X,L) = H(X,L)$, вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть $f \in H(X,L)$. Тогда для любой локализации $V_\varphi f$, удовлетворяющей условиям леммы 2, имеет место оценка*

$$|c_0(V_\varphi f)| \leqslant A\omega_f(s)\mathrm{Cap}_L((3/2)Q\setminus X). \tag{2.14}$$

Доказательство. Пусть $f \in H(X,L)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $F \in C(\mathbb{R}^d)$, такая, что в некоторой окрестности X выполнены условия $LF = 0$ и $|f(x) - F(x)| < \varepsilon \leqslant \omega_f(s)$ (продолжив разность $f - F$ по теореме Уитни [12, гл. 6, п. 2.2], будем считать, что это неравенство выполняется всюду в $\mathbb{R}^d$).

В силу (1.4), (2.7), $|f(x) - F(x)| < \varepsilon$ и произвольности ε для доказательства (2.14) достаточно установить, что

$$|c_0(V_\varphi F)| \leqslant A\omega_f(s)\mathrm{Cap}_L((3/2)Q\setminus X).$$

Но последнее неравенство следует из определения емкости. Действительно, оценив с помощью леммы 2 локализации $V_\varphi f = E*(\varphi Lf)$ и $V_\varphi(f-F) = E*(\varphi L(f-F))$, получим, что $\|V_\varphi F\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A\omega_f(s)$, причем $V_\varphi F$ является допустимой для $(3/2)Q\setminus X$. Лемма доказана.

Рассмотрим два следствия леммы 4.

Следствие 1. *Пусть имеет место равенство $H(X,L) = h(X,L)$. Тогда для произвольного куба Q выполнена оценка $\mathrm{Cap}_L(Q\setminus X^o) \leqslant A\mathrm{Cap}_L((3/2)Q\setminus X)$, равносильная правой части (1.2).*

Доказательство. Очевидно, можем считать, что $\mathrm{Cap}_L(Q\setminus X^o) > 0$. В силу определения емкости существует функция g, допустимая для $Q\setminus X^o$ (и следовательно, по условию, $g \in H(X,L)$), такая, что $\|g\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 2$ и $\langle Lg|1\rangle = \mathrm{Cap}_L(Q\setminus X^o)$. В силу (2.1) и леммы 1 имеет место равенство $g = V_\varphi g$, где φ удовлетворяет условиям (1)–(2) леммы 1, и $\varphi \equiv 1$ в некоторой окрестности Q. Так как $\langle Lg|1\rangle = c_0(V_\varphi g) = \mathrm{Cap}_L(Q \setminus X^o)$, осталось применить (2.14). Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть $X^o = \emptyset$, и выполнено равенство $C(X) = H(X, L)$. Тогда для произвольного куба Q выполнена оценка $\mathrm{Cap}_L(Q \setminus X) \geqslant A_1 s^{d-n}$, равносильная (1.5).*

Доказательство вытекает из следствия 1 и равенства $\mathrm{Cap}_L(Q) = A_2 s^{d-n}$.

Теперь рассмотрим вопрос о необходимой точности приближения локализаций. Имеет место следующее утверждение (см. [7, теорема 2]).

Лемма 5. *Пусть для любого двоичного куба $Q = Q(a, s)$ и соответствующей локализации $V_\varphi f$, удовлетворяющей условиям леммы 2, существует функция F_Q, такая,что:*
(1) $\mathrm{Spt}(LF_Q) \subset (10Q \setminus X)$;
(2) выполнена оценка

$$|V_\varphi f(x) - F_Q(x)| \leqslant A\omega_f(s) \min\left(1, \frac{s^d}{|x-a|^d}\right). \tag{2.15}$$

Тогда $f \in H(X, L)$.

В силу (2.13) для выполнения оценки (2.15) у лорановских разложений функций $V_\varphi f$ и F_Q должны совпадать все коэффициенты при $|\alpha| \leqslant n-1$. Заметим, что копирование рассуждений леммы 1 из [2, гл. 2, §4] потребовало бы выполнения более жесткого условия — замены в (2.15) степени d на $d+1$.

3. Доказательство теоремы 1

Напомним, что утверждение (1) теоремы 1 установлено в силу следствия 2 леммы 4. Докажем следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть для компакта X с $X^o = \emptyset$ выполнена оценка (1.5). Тогда имеет место равенство $C(X) = H(X, L)$.*

Доказательство. Покажем, что в случае выполнения (1.5) можно не только получить оценку (2.15), откуда следует лемма 6, но также получить оценку (3.2) с любым наперед заданным $m \in \mathbb{N}$. Следующее утверждение элементарно.

Лемма 7. *Пусть $\mathbf{Q} = [0, 1]^d$. Тогда для любого мультииндекса α, $|\alpha| \geqslant 0$, существует функция*

$$F^\alpha = \sum_j \lambda_j E(x - a_j), \tag{3.1}$$

где сумма конечна, число индексов j не превосходит $A(\alpha)$, $a_j \in \mathbf{Q}$, $|\lambda_j| \leqslant A(\alpha)$, $\min_{j,j'} |a_j - a_{j'}| > A_1(\alpha) > 0$, и имеет место асимптотика

$$F^\alpha(x) = \partial^\alpha E(x) + o(|x|^{n-d-|\alpha|}).$$

Для доказательства леммы 7 достаточно заметить, что функции F^α получаются из стандартных формул численного дифференцирования и нетрудно строятся по индукции: если вектор a направлен по оси x_k, то

$$F^\alpha(x-a) - F^\alpha(x) = |a| \frac{\partial}{\partial x_k}(\partial^\alpha E(x)) + o(|x|^{n-d-|\alpha|-1}).$$

Следствие леммы 7. *Пусть $Q = Q(a, s)$ — куб, $m \in \mathbb{Z}_+$, и при $|\alpha| \leqslant m$ заданы произвольные числа $b_\alpha \in \mathbb{C}$, $|b_\alpha| \leqslant s^{d-n+|\alpha|}$. Тогда существует функция F_m, такая, что:*
(1) $F_m = \sum_j \lambda'_j E(x - a_j)$, где $a_j \in Q$, $|\lambda'_j| \leqslant A(m)s^{d-n}$, число индексов j не превосходит $A(m)$, $\min_{j,j'} |a_j - a_{j'}| > A_1(m)s$, где $A_1(m) > 0$;
(2) при $|\alpha| \leqslant m$ выполнены равенства $c_\alpha(F_m, a) = b_\alpha$.

(Следствие очевидно: для $Q = [0,1]^d$ функция F_m — подходящая линейная комбинация функций F^α из леммы 7, причем ее коэффициенты находятся из системы линейных уравнений с треугольной матрицей; общий случай получается изменением масштаба).

Вернемся к доказательству леммы 6. Несколько модифицируем функции F_α из (3.1) в предположении (1.5).

Пусть для фиксированного $c > 0$ и некоторого множества K равномерно по всем $x \in \mathbf{Q}$ и $r \leqslant 1$ имеем $\mathrm{Cap}_L(B(x,r) \cap K) \geqslant cr^{d-n}$. Для $r \in (0,1]$ в сумме из правой части (3.1) заменим каждую функцию $E(x-a_j)$ на $r^{n-d}g_j$, где $\|g_j\|_{L_\infty} \leqslant 2c^{-1}$, $\mathrm{Spt}(Lg_j) \subset (B(a_j,r) \cap K)$, $\lim_{x\to\infty} g_j(x) = 0$ и $c_0(g_j) = r^{d-n}$. В силу (2.12) имеем (независимо от K) $|c_\alpha(r^{n-d}g_j, a_j)| \leqslant Ac^{-1}r^{|\alpha|}$ при $|\alpha| \geqslant 0$, причем $c_0(r^{n-d}g_j) = c_0(E(x-a_j)) = 1$.

Отсюда и из (2.6) следует, что для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ и всех β, $|\beta| \leqslant m$, выполнена оценка $|c_\beta(E(x-a_j), 0) - c_\beta(r^{n-d}g_j, 0)| \leqslant A(m,L)r$. Следовательно, для любых $\epsilon > 0$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ существует $r_0 = r_0(\epsilon, m, L)$, такое, что для всех $r \leqslant r_0$ выполнено неравенство

$$\sum_{\{\beta : |\beta| \leqslant m\}} |c_\beta(\widetilde{F}_\alpha, 0) - c_\beta(F_\alpha, 0)| < \epsilon,$$

где через $\widetilde{F}_\alpha$ обозначена сумма, полученная из (3.1) при замене $E(x-a_j)$ на $r^{n-d}g_j$.

Так же, как и в следствии леммы 7, в силу (2.12) существует функция $\widetilde{F}_m$ — подходящая линейная комбинация функций $\widetilde{F}_\alpha$, такая, что имеет место следующее утверждение (матрица системы линейных уравнений, из которой находятся коэффициенты, соответствующие $\widetilde{F}_\alpha$, при малых r/s близка к треугольной).

Лемма 8. *Пусть $Q = Q(a,s)$ — куб, $f \in h(X,L)$, $V_\varphi f$ — локализация из леммы 2. Пусть существует $c > 0$, такое, что для всех $r \leqslant s/10$ и $x \in Q'$, где Q' — куб, $Q' \subset 10Q$, $s(Q') \geqslant (1/10)s$, выполнено неравенство $\mathrm{Cap}_L(B(x,r) \setminus X) \geqslant cr^{d-n}$. Тогда для любого $m \geqslant 0$ существует функция $\widetilde{F}_m$, такая, что $\mathrm{Spt}(L\widetilde{F}_m) \subset (10Q \setminus X)$, и имеет место оценка*

$$|V_\varphi f(x) - \widetilde{F}_m(x)| \leqslant A(c,m)\omega_f(s) \min\left(1, \frac{s^{d-n+m}}{|x-a|^{d-n+m}}\right). \tag{3.2}$$

В силу лемм 5 и 8 лемма 6 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось доказать следующее утверждение о неустойчивости емкости.

Лемма 9. *Пусть X — компакт с $X^o = \emptyset$. Если для почти всех $x \in X$ выполнена оценка (1.6), то для любого шара $B(x,r)$ с центром $x \in \mathbb{R}^d$ выполнена оценка (1.5).*

Доказательство. Лемма 9 вытекает из следующих трех лемм.

Лемма 10. *Пусть K — подмножество шара $B = B(a,r)$, $a_0 \in B$, причем для некоторого $c > 0$ и любого шара $B(a_0,\delta)$ с $\delta \leqslant 2r$ выполнена оценка $\mathrm{Cap}_L(B(a_0,\delta) \cap K) \leqslant c\delta^d$. Пусть $g \in C(\mathbb{R}^d)$ — функция, такая, что $\mathrm{Spt}(Lg) \subset K$, $\|g\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 1$ и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Тогда выполнена оценка $|g(a_0)| \leqslant Acr^n$.*

Доказательство леммы 10. В силу (2.1) имеем $g = E * (Lg)$. Пусть $B_0 = B(a_0, 2r)$, а для $m \in \mathbb{N}$ положим $B_m = B(a_0, 2r/2^m)$; ясно, что кольца $D_m = (3/2)B_m \setminus (1/4)B_m$ покрывают B_0. Разложив пространство $\mathbb{R}^d$ на двоичные кубы, длины сторон которых "примерно равны" расстояниям до a_0, и применив лемму 1, для произвольного $m_0 \in \mathbb{N}$ представим g в виде суммы локализаций:

$$g = \sum_{m=0}^{m_0} E * (\varphi_m Lg) + E * (\psi Lg),$$

где $\varphi_m = \sum_{j=1}^{p_m} \varphi_{m,j}$, причем $\mathrm{Spt}\varphi_{m,j} \subset D_m$, $\varphi_{m,j}$ удовлетворяют условиям леммы 1 для соответствующих кубов, содержащихся в D_m, $p_m \leqslant A(d)$, $\mathrm{Spt}\psi \subset (3/2)B_{m_0}$, и ψ удовлетворяет условиям леммы 1 для куба, соизмеримого с B_{m_0}.

Применив лемму 2 и (2.11), получим:

$$|g(a_0)| \leqslant A\left(\sum_{m=0}^{m_0} \frac{\mathrm{Cap}_L((3/2)B_m \cap K)}{(r(B_m))^{d-n}} + \omega_g(r(B_{m_0}))\right).$$

По условию воспользовавшись оценкой $\mathrm{Cap}_L((3/2)B_m \cap K) \leqslant A_1 c(r(B_m))^d$ и устремив m_0 к бесконечности, получим оценку $|g(a_0)| \leqslant Acr^n$. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. *Пусть $t_1 > 0$, $t_2 \geqslant t_1$, $K_0 = K_0(t_1, t_2)$ — множество точек x, таких, что $\limsup\limits_{r\to 0} \dfrac{\mathrm{Cap}_L(B(x,r)\cap K_0)}{r^d} \geqslant t_1$ и $\mathrm{Cap}_L(B(x,r)\cap K_0) \leqslant t_2 r^d$ для всех r, $r \leqslant r_0$. Тогда $mes(K_0) = 0$, где $mes(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство леммы 11. Лемма 11 доказывается аналогично лемме 1.7 из [10]. Рассуждая от противного, предположим, что $mes(K_0) > 0$; пусть x_0 — точка плотности K_0, тогда существует $r_1 < r_0$, такое, что при всех $r \leqslant r_1$ выполнено неравенство $mes(B(x_0, r) \cap K_0) > (1/2)mes(B(x_0, r))$. Докажем, что это влечет

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\mathrm{Cap}_L(B(x_0,r)\cap K_0)}{r^{d-n}} > 0, \tag{3.3}$$

следовательно, в силу определения K_0 имеем $x_0 \notin K_0$, и полученное противоречие доказывает лемму.

Докажем оценку (3.3). Зафиксируем шар $B = B(x_0, r)$, $r \leqslant r_1$. В силу леммы Витали о покрытии [9, §3], [12, гл. 1, §1.6] существует конечное семейство шаров $B_j = B(a_j, \delta_j)$, содержащихся в B, с $a_j \in K_0$, таких, что выполнены следующие условия (1)–(3):

(1) $\mathrm{Cap}_L(B(a_j, \delta_j) \cap K_0) \geqslant (1/2)t_1(\delta_j)^d$;

(2) $\sum_j (\delta_j)^d \geqslant Ar^d$;

(3) шары $2B_j$ попарно не пересекаются.

В силу условия (1) возьмем для каждого шара B_j функцию g_j, допустимую для $B(a_j, \delta_j) \cap K_0$, такую, что $\|g_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 1$ и $c_0(g_j) = (1/4)t_1(\delta_j)^d$. Пусть $g = \sum_j g_j$; ясно, что $\mathrm{Spt}(Lg) \subset (B(x_0, r) \cap K_0)$, причем в силу условия (2) имеем $c_0(g) \geqslant At_1 r^d$.

Нетрудно заметить, что из оценки $\mathrm{Cap}_L(B(x, r) \cap K_0) \leqslant t_2 r^d$ для $x \in K_0$, следует, что $\mathrm{Cap}_L(B(x, r/2) \cap K_0) \leqslant t_2 r^d$ для $x \in \mathbb{R}^d$. В силу леммы 10, условия (3) для $\{B_j\}$ и (2.11) получим для $x \in \mathbb{R}^d$:

$$|g(x)| \leqslant At_2\left(r^n + \int_B \frac{dm_y}{|x-y|^{d-n}}\right) \leqslant A_1 t_2 r^n.$$

Из определения емкости получили, что $\mathrm{Cap}_L(B(x_0, r) \cap K_0) \geqslant A(t_1/t_2)r^{d-n}$, и следовательно, получили (3.3). Лемма 11 доказана.

Следующее утверждение очевидно.

Следствие леммы 11. Пусть для почти всех $x \in X$ выполнена оценка (1.6). Тогда для почти всех $x \in X$:

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathrm{Cap}_L(B(x,r)\setminus X)}{r^d} = \infty. \tag{3.4}$$

Для завершения доказательства леммы 9 и теоремы 1 осталось установить следующее утверждение.

Лемма 12. *Пусть для почти всех $x \in X$ выполнена оценка (3.4), тогда для любого шара $B(x, r)$ с центром $x \in \mathbb{R}^d$ выполнена оценка (1.5).*

Доказательство леммы 12. Лемма 12 доказывается аналогично лемме 11, а также теореме 1 из [9]. Заметим, что оценка (3.4), очевидно, выполняется для всех $x \notin X$. Зафиксируем произвольный шар $B(x_0, r)$. По лемме Витали о покрытии (см. [9, §3]) существует конечное семейство шаров $B_j = B(a_j, \delta_j)$, содержащихся в B, таких, что выполнены следующие условия (1)–(3):

(1) $\mathrm{Cap}_L(B(a_j, \delta_j) \setminus X) \geqslant (\delta_j)^d / r^n$;

(2) $\sum_j (\delta_j)^d \geqslant A r^d$;

(3) шары $2B_j$ попарно не пересекаются.

В силу условия (1) возьмем функции g_j, допустимые для $B(a_j, \delta_j) \setminus X$, такие, что $\|g_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \dfrac{(\delta_j)^d}{r^n \mathrm{Cap}_L(B(a_j, \delta_j) \setminus X)} \leqslant 1$ и $c_0(g_j) = (1/2)(\delta_j)^d / r^n$. Пусть $g = \sum_j g_j$, тогда в силу условия (2) имеем $c_0(g) \geqslant A r^{d-n}$. В силу леммы 2, условия (3) и (2.11) получим для $x \in \mathbb{R}^d$:

$$|g(x)| \leqslant A + r^{-n} \int_B \frac{dm_y}{|x-y|^{d-n}} \leqslant A_1.$$

Таким образом, $c_0(g)/\|g\|_{\mathrm{L}_\infty} \geqslant A_2 r^{d-n}$. В силу определения емкости получили, что $\mathrm{Cap}_L(B(x_0, r) \setminus X) \geqslant A_2 r^{d-n}$. Лемма 12 доказана. Доказательство теоремы 1 завершено.

4. Построение примера 1

Пример 1. *Пусть $d > 2$ и $2 < n < d$ (где d — размерность пространства, n — порядок оператора L). Тогда существуют компакт X, такой, что для любого куба Q выполнена оценка $\mathrm{Cap}_L(Q \setminus X^o) \leqslant A \mathrm{Cap}_L(2Q \setminus X)$, и функция $f \in h(X, L)$, такая, что $f \notin H(X, L)$.*

Построение примера. Начнем со вспомогательного построения. Для $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим $d-1$-мерный куб D_N: $D_N = [0,1]^d \cap \{x_d = 10^{-N}\}$ и множество открытых шаров B_j с центрами $a_j \in D_N$, причем координаты x_m точек a_j при $m = 1, \ldots, d-1$ имеют вид $k10^{-N}$, где $k = 0, 1, \ldots, 10^N$, и $r(B_j) = 10^{-N(d-1)/(d-n)}$.

Ясно, что шары $2B_j$ попарно не пересекаются; возьмем функции g_j, такие, что g_j — допустимая для B_j, $\|g_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 2$ и $c_0(g_j) = \mathrm{Cap}_L(B_j) = A10^{-N(d-1)}$. Пусть $Q = Q(a, s)$ — произвольный куб, такой, что $a \in D_N$ и $10^{-N+1} \leqslant s \leqslant 1$. Тогда, как нетрудно убедиться, в силу "равномерности" расположения точек a_j на D_N имеют место следующие свойства функций g_j.

(1) При суммировании по всем индексам j кубов $B_j \subset Q$ сумма $c_0(g_j)$ не меньше $A_1 s^{d-1}$, где $A_1 > 0$.

(2) Для произвольного $x \in \mathbb{R}^d$ сумма $|g_j(x)|$ по всем индексам j, таким, что $B_j \subset Q$ и $|a_j - x| \geqslant 10^{-N}$, не превосходит $A_2 \displaystyle\int_{Q \cap D_N} \frac{dx_1 \ldots dx_{d-1}}{|x-y|^{d-n}} \leqslant A_3 s^{n-1}$.

Лемма 13. *Пусть $\mathbf{B}$ — объединение шаров B_j, построенных для всех D_N, где $N = 1, 2, \ldots$; $Q_0 = Q_0(a, s)$ — куб с центром $a \in D_0$, где $D_0 = [0,1]^d \cap \{x_d = 0\}$, и $s \leqslant 1$ (напомним, что мы рассматриваем кубы с ребрами, параллельными осям координат). Тогда имеет место оценка $\mathrm{Cap}(Q_0 \cap \mathbf{B}) \geqslant A s^{d-n}$.*

Доказательство. Куб Q_0 пересекает все D_N, начиная с некоторого D_{N_0}. Пусть g^N — сумма функций g_j, таких, что B_j содержатся в Q_0, и центры B_j принадлежат D_N. В силу свойств (1) и (2) функций g_j, при всех достаточно больших m функция

$$g = \frac{1}{m} \sum_{N=N_0}^{N_0+m-1} g^N$$

обладает следующими двумя свойствами:

(1) $c_0(g) \geqslant A_1 s^{d-1}$; (2) $\|g\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_3 s^{n-1}$. В силу определения емкости отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Вернемся к построению примера 1. Возьмем $X = Q(0,10) \setminus \mathbf{B}$. Ясно, что внутренняя граница X совпадает с D_0.

Пусть куб Q не пересекает D_0, тогда оценка $\mathrm{Cap}_L(Q \setminus X^o) \leqslant A\mathrm{Cap}_L(2Q \setminus X)$ следует из возможности равномерного приближения с любой степенью точности функции h, допустимой для $Q \setminus X^o$, допустимыми функциями для $2Q \setminus X$ (этот факт стандартен, так как Q пересекает лишь конечное число шаров B_j: h представляется в виде суммы локализаций А. Г. Витушкина [2, гл. 2, §1] в масштабе $\min r(B_j)$, и применяются леммы 5 и 8).

Пусть Q пересекает D_0; если Q также пересекает границу $Q(0,10)$, то, очевидно, что $\mathrm{Cap}_L(2Q \setminus X) \geqslant A_1(s(Q))^{d-n}$, и следовательно, $\mathrm{Cap}_L(Q \setminus X^o) \leqslant A\mathrm{Cap}_L(2Q \setminus X)$.

Наконец, в случае, когда Q пересекает D_0 и содержится внутри $Q(0,10)$, из леммы 13 легко следует оценка $\mathrm{Cap}_L(2Q \setminus X) \geqslant A_1(s(Q))^{d-n}$.

Таким образом, в общем случае имеем $\mathrm{Cap}_L(Q \setminus X^o) \leqslant A\mathrm{Cap}_L(2Q \setminus X)$.

Для E из (1.1) возьмем $f = \dfrac{\partial E}{\partial x_d} * \chi_{D_0}$, где $\chi_{(\cdot)}$ — характеристическая функция. Так как n (порядок оператора L) больше двух, то $f \in C(\mathbb{R}^d)$; ясно, что $f \in h(X, L)$.

Осталось показать, что $f \notin H(X,L)$. Возьмем функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, такую, что $\mathrm{Spt}\varphi \subset Q(0,5)$, $\varphi \equiv 1$ на $Q(0,2)$ и $\|\partial^\alpha \varphi\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A$ при $|\alpha| \leqslant n$. Аналогично, для каждого шара B_j возьмем функцию $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mathrm{Spt}\varphi_j \subset 2B_j$, $\varphi \equiv 1$ на $(3/2)B_j$ и $\|\partial^\alpha \varphi\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A(r(B_j))^{-|\alpha|}$ при $|\alpha| \leqslant n$.

Рассмотрим функцию $\mu = L(x_d\varphi) - \sum_{\{j: B_j \subset \mathbf{B}\}} L(x_d\varphi_j)$. Ясно, что

$$\int_{Q(0,5)} |\mu(x)| dm_x \leqslant A_1 + A_2 \sum_{N=1}^{\infty} 10^{-N} \sum_{\{j: a_j \in D_N\}} (r(B_j))^{d-n} \leqslant A_1 + A_3 \sum_{N=1}^{\infty} 10^{-N} < \infty.$$

В силу построения имеем равенство $\mu \equiv 0$ на объединении $(3/2)B_j$ и всюду вне $Q(0,5)$. Поэтому для любой функции $F \in H(X,L)$ выполнено равенство $\displaystyle\int_{Q(0,5)} F(x)\mu(x) dm_x = 0$.

Чтобы убедиться, что $f \notin H(X,L)$, осталось показать, что $\displaystyle\int_{Q(0,5)} f(x)\mu(x) dm_x \neq 0$.

Так как $f = \dfrac{\partial E}{\partial x_d} * \chi_{D_0}$, то для всех j имеем:

$$\int_{Q(0,5)} f(x) L(x_d \varphi_j(x)) dm_x = (-1)^n \langle Lf | x_d \varphi_j \rangle = 0,$$

следовательно, $\displaystyle\int_{Q(0,5)} f(x)\mu(x) dm_x = (-1)^n \langle Lf | x_d\varphi \rangle$. Так как $\varphi \equiv 1$ на $Q(0,2)$, в силу (2.5) и (2.6) имеем: $-\langle Lf | x_d\varphi \rangle = \displaystyle\int_{D_0} \chi_{D_0}(x) dx_1 \dots dx_{d-1} = 1$.

Таким образом, $\left| \displaystyle\int_{Q(0,5)} f(x)\mu(x) dm_x \right| = 1$. Построение примера 1 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хёрмандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 1. Теория распределений и анализ Фурье.* М.: Мир, 1986.
2. Витушкин А.Г. *Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений* // УМН. 1967. Т. 22. No. 6, С. 141–199.
3. J. Deny *Systèmes totaux de functions harmoniques* // Ann. Inst. Fourier. 1949. V. 1, P. 103–113.

4. Келдыш М.В. *О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле* // УМН. 1941. No. 8, С. 171–231.
5. R. Harvey, J. Polking *A notion of capacity which characterizes removable singularities* // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 169, P. 183–195.
6. J. Mateu, Y. Netrusov, J. Orobitg, J. Verdera *BMO and Lipschitz approximation by solutions of elliptic equations* // Ann. Inst. Fourier. 1996. V. 46. No. 4, P. 1057–1081.
7. Мазалов М.Я. *Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений* // Матем. сборник. 2008. Т. 199. No. 1, С. 15–46.
8. P. Gauthier, N.N. Tarkhanov *Degenerate cases of uniform approximation by systems with surjective symbols* // Canadian Journ. Math. 1993. V. 45. No. 4., P. 740–757.
9. Гончар А.А. *О равномерном приближении непрерывных функций гармоническими* // Изв. АН СССР (Сер. матем.). 1963. No. 27, С. 1239–1250.
10. Лысенко Ю.А., Писаревский Б.М. *Неустойчивость гармонической емкости* // Матем. сборник. 1968. Т. 76 (118). No. 1, С. 52–71.
11. Тарханов Н.Н. *Равномерная аппроксимация решениями эллиптических систем* // Матем. сборник. 1987. Т. 133 (175). No. 3, С. 356–381.
12. Стейн И.М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* М.: Мир, 1973.
13. R. Harvey, J. Polking *Removable singularities of solutions of linear partial differential equations* // Acta Math. 1970. V. 125, P. 39–56.
14. Тарханов Н.Н. *Ряд Лорана для решений эллиптических систем.* Новосибирск: Наука, 1991.
15. J. Verdera C^m *approximation by solutions of elliptic equations, and Calderon-Zygmund operators* // Duke Math. J. 1987. V. 55, P. 157–187.
16. Парамонов П.В. *О гармонических приближениях в* C^1*-норме* // Матем. сборник. 1990. Т. 181. No. 10, С. 1341–1365.
17. Мазалов М.Я. *О задаче равномерного приближения гармонических функций* // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. No. 4, С. 136–178.

Максим Яковлевич Мазалов,
Национальный исследовательский университет
"Московский энергетический институт
Смоленский филиал,
Энергетический проезд, 1,
214013, г. Смоленск, Россия
E-mail: maksimmazalov@yandex.ru