ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 91-108.

УДК 517.958

ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ВЕБСТЕРА: ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕНОРМГРУППОВЫЕ СИММЕТРИИ, ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В.Ф. КОВАЛЕВ, Р.В. КУЛИКОВ

Аннотация. Найдена группа точных точечных симметрий для обобщенного уравнения типа Вебстера, описывающего нелинейные акустические волны в каналах произвольного переменного сечения с поглощением. Показано, что для профилей поперечного сечения S специального вида происходит расширение допускаемой трёхмерной группы точечных симметрий, и решена задача групповой классификации по различным типам S. Найдены оптимальные системы одномерных подалгебр допускаемой алгебры Ли и построены соответствующие им инвариантные решения. Построены группа приближённых ренормгрупповых симметрий и соответствующие ей приближенные аналитические решения, а также законы сохранения для обобщённого уравнения Вебстера при произвольных начальных условиях для каналов с плавно меняющимся, в том числе и неизменным, поперечным сечением.

Ключевые слова: уравнение Вебстера, точные и приближенные ренормгрупповые симметрии, инвариантные решения, законы сохранения.

Введение

Обобщённое уравнение типа Вебстера возникает в задачах распространения интенсивного звука [1, 2] в трубах, рупорах, концентраторах и других волноведущих системах с изменяющимся поперечным сечением $S(x)$:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = c^2\frac{\mathrm{d}\ln S(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\varepsilon}{c^2\rho}\frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} + \frac{b}{\rho}\frac{\partial^3 p}{\partial x\partial t^2}\,. \qquad (1)$$

Здесь t и x — время и координата, отсчитываемая вдоль оси системы, p — звуковое давление, c — скорость звука, ρ — плотность среды. Уравнение (1) применимо для трубок, характерная ширина которых мала по сравнению с длиной волны. Кроме того, сечение предполагается медленно изменяющимся вдоль x: площадь $S(x)$ должна мало измениться при увеличении x на величину порядка ширины трубки [3]. Обобщенное уравнение Вебстера (1) отличается от линейного уравнения Вебстера [4, 5] наличием двух дополнительных членов, описывающих нелинейные и диссипативные эффекты: ε, b — параметры нелинейности и диссипации (обозначения те же, что в книге [6]).

Полагая каждый из членов в правой части уравнения малым по сравнению с членами левой части, рассмотрим бегущую волну. Тогда, используя метод медленно изменяющегося

V.F. Kovalev, R.V. Kulikov, Generalized Webster equation: exact and approximate renormgroup symmetries, invariant solutions and conservation laws.

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО УГАТУ при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации, Постановление № 220, договор № 11.G34.31.0042. Один из авторов (В.Ф. Ковалев) также благодарен за финансовую поддержку РФФИ, проект № 12-01-00940а.

Поступила 29 октября 2012 г.

профиля [6] и следуя стандартной процедуре [7], придем к эволюционному уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{c^3\rho} p \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{b}{2c^3\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{p}{2}\frac{\mathrm{d}\ln S(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,, \tag{2}$$

в котором $\tau = t - x/c$ задаёт "медленное" время в бегущей со скоростью звука системе координат. Переходя в этом уравнении от физических переменных к более удобным нормированным переменным,

$$x \to \frac{c}{\omega}\,x\,, \quad \tau \to \frac{\tau}{\omega}\,, \quad p \to p_0 p\,,$$

перепишем обобщенное уравнение Вебстера (2) в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} - ap\frac{\partial p}{\partial \tau} - \nu\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + \frac{p}{2}\frac{\mathrm{d}\ln S(x)}{\mathrm{d}x} = 0\,, \quad p(0,\tau) = P(\tau)\,. \tag{3}$$

Здесь нормировочные константы ω, p_0 имеют смысл характерных значений частоты и амплитуды сигнала соответственно. Два параметра в уравнении (3) даются следующими безразмерными комбинациями констант:

$$a = \frac{\varepsilon p_0}{c^2\rho}\,, \quad \nu = \frac{b\omega}{2c^2\rho}\,.$$

Их отношение a/ν называют акустическим числом Рейнольдса [6]. Оно характеризует относительный вклад нелинейных и диссипативных эффектов в искажение профиля волны. При больших значениях a/ν преобладает нелинейность, при малых — диссипация. Без ограничения общности в уравнении (3) можно положить $S(0) = 1$.

От последнего слагаемого в (3) можно избавиться, совершив замену переменной x и вводя зависящее от координаты вдоль канала поглощение, задаваемое функцией μ,

$$z = \int \frac{1}{\sqrt{S(x)}}\,\mathrm{d}x\,, \quad p\sqrt{S} = u\,, \quad \mu = \nu\sqrt{S(x(z))}\,. \tag{4}$$

Тогда в новых переменных уравнение (3) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial z} - au\frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0\,, \quad u(0,\tau) = P(\tau)\,. \tag{5}$$

Вводя новую переменную q, связанную с u соотношением $u = 2(\partial q/\partial\tau)$, запишем вместо (3) модифицированное обобщённое уравнение Вебстера

$$F \equiv \frac{\partial q}{\partial z} - a\left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 - \mu\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = 0\,, \quad q(0,\tau) = Q(\tau)\,. \tag{6}$$

Обобщенные уравнения Вебстера в виде (5) и (6) используются не только как модель распространения волн в трубках [8], но также при расчётах акустического поля в неоднородных средах в приближении геометрической акустики [1, 9], играя при этом роль уравнения переноса, записанного в лучевых координатах. Осью лучевой трубки является геометрический луч, рассчитанный из уравнения эйконала, а функция $S(x)$ является сечением лучевой трубки. Использование уравнений (5) и (6), содержащих (в отличие от линейного уравнения Вебстера) дополнительные вклады, ответственные за нелинейные эффекты и поглощение, открывает возможности для исследования задач распространения звуковых волн конечной амплитуды в поглощающих средах, в частности для акустического зондирования сред, сквозь которые распространяются звуковые волны [10].

Одним из наиболее эффективных инструментов построения решений обобщенного уравнения Вебстера является использование методов современного группового анализа. Исследованию симметрий уравнений типа Вебстера, лежащих в основе такого подхода, и посвящена данная работа. Отметим, что подобная задача для уравнения (5), которое в литературе часто также называют обобщенным уравнением Бюргерса или уравнением

Бюргерса с переменной вязкостью, уже анализировалась в ряде работ, например в [11], где были найдены точечные симметрии, указаны случаи расширения допускаемой группы при различных значениях $S(x)$ и построены конечные преобразования группы. Для операторов, расширяющих допускаемую группу симметрий, найдена форма представления инвариантного решения и указан вид редукции обобщенного уравнения Бюргерса к обыкновенному дифференциальному уравнению. Конечные преобразования между обобщенными уравнениями Бюргерса (5) с различными видами $S(x)$ обсуждались в работах [12, 13]. Обсуждение более сложных вариантов (5), расширяющих это уравнение на случай S, зависящей от большего числа переменных, или на случай двумерной геометрии, можно найти, например, в [14, 15]. В данной работе мы сосредоточимся на исследовании уравнения Вебстера (6), которое не получается из (5) точечным преобразованием.

Работа разделена на пять разделов. Во втором разделе найдена группа точечных преобразований для модифицированного обобщенного уравнения Вебстера и показано, что для профилей сечения специального вида эта группа симметрий расширяется. Решена задача групповой классификации уравнения (6) по виду функции $S(x)$ и построены оптимальные системы одномерных подалгебр, а также найдены инвариантные решения, отвечающие указанным подалгебрам. Третий раздел работы посвящён построению приближённых симметрий и соответствующих им приближённых аналитических решений обобщенного уравнения Вебстера для произвольно изменяющихся сечений и произвольного начального условия. Малым параметром в этих построениях является медленность изменения профиля волноводного сечения $S(x)$. Четвертый раздел работы отведен выводу законов сохранения для уравнения Вебстера. В пятом разделе кратко сформулированы основные итоги работы.

1. Группа симметрии и инвариантные решения обобщенного уравнения Вебстера

1.1. Группа Ли преобразований обобщенного уравнения Вебстера.

Инфинитезимальный оператор группы точечных преобразований Ли обобщенного уравнения Вебстера (6) имеет вид

$$X = \xi^1(z,\tau,q)\frac{\partial}{\partial z} + \xi^2(z,\tau,q)\frac{\partial}{\partial \tau} + \eta(z,\tau,q)\frac{\partial}{\partial q}\,. \tag{7}$$

Для нахождения коэффициентов инфинитезимального оператора (7) используется стандартный подход [16, 17]: действие оператора (7) продолжается на производные

$$\tilde{X} = X + \zeta_1\frac{\partial}{\partial q_z} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial q_\tau} + \zeta_{22}\frac{\partial}{\partial q_{\tau\tau}} \tag{8}$$

и записывается условие инвариантности уравнения (6), рассматриваемого как дифференциальное многообразие, под действием оператора (8) на самом этом многообразии

$$\{\tilde{X}F\}_{\big|F=0} \equiv \left\{\zeta_1 - 2a\frac{\partial q}{\partial \tau}\,\zeta_2 - \mu\zeta_{22} - \frac{\mathrm{d}\mu(z)}{\mathrm{d}z}\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}\,\xi^1\right\}_{\big|F=0} = 0\,. \tag{9}$$

Коэффициенты ζ_1, ζ_2 и ζ_{22} в операторе (8) и в *определяющем уравнении* (9) находятся по формулам продолжения

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= D_z(\eta) - q_z D_z(\xi^1) - q_\tau D_z(\xi^2)\,,\\ \zeta_2 &= D_\tau(\eta) - q_z D_\tau(\xi^1) - q_\tau D_\tau(\xi^2)\,,\\ \zeta_{22} &= D_\tau(\zeta_2) - q_{z\tau} D_\tau(\xi^1) - q_{\tau\tau} D_\tau(\xi^2)\,, \end{aligned} \tag{10}$$

с использованием операторов полного дифференцирования

$$
\begin{aligned}
D_z &= \frac{\partial}{\partial z} + q_z \frac{\partial}{\partial q} + q_{zz} \frac{\partial}{\partial q_z} + q_{z\tau} \frac{\partial}{\partial q_\tau} + \ldots\,, \\
D_\tau &= \frac{\partial}{\partial \tau} + q_\tau \frac{\partial}{\partial q} + q_{z\tau} \frac{\partial}{\partial q_z} + q_{\tau\tau} \frac{\partial}{\partial q_\tau} + \ldots\,.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Подстановка (10) в определяющее уравнение (9) дает переопределенную систему линейных уравнений на коэффициенты ξ^1, ξ^2 и η, решение которой имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\xi^1 = b(z)\,, \quad b(z) = \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2\,, \quad \xi^2 = c_0 + c_1 z + \frac{\tau}{2}\left(M + \frac{\partial b}{\partial z}\right)\,, \\
&\eta = k(z,\tau)\exp\left(-\frac{aq}{\mu}\right)\delta_{M,0} + c_2 - \frac{\tau}{2a}c_1 + Mq - \frac{1}{4a}\frac{\partial^2 b}{\partial z^2}\left(\frac{\tau^2}{2} + \int \mu \,\mathrm{d}z\right)\,.
\end{aligned} \tag{12}
$$

В формулах (12) функции $b(z)$ и $\mu(z)$ и постоянная $M = \mathrm{const}$ связаны соотношением

$$
M\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(\mu(z))\right)^{-1} = b(z)\,, \quad M = \mathrm{const} \neq 0\,. \tag{13}
$$

Функция $k(z,\tau)$ отлична от нуля только в случае канала постоянного сечения с $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z = 0$, когда в (12) можно положить $M = 0$. При этом она подчиняется линейному параболическому уравнению,

$$
\frac{\partial k}{\partial z} - \mu\frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} = 0\,. \tag{14}
$$

Таким образом, группа точечных преобразований, допускаемых уравнением (6) при произвольном профиле неоднородности $\mu(z)$, задаётся тремя инфинитезимальными операторами:

$$
X_1 = \frac{\partial}{\partial \tau}\,, \quad X_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial q}\,, \quad X_3 = z\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\tau}{2a}\frac{\partial}{\partial q}\,. \tag{15}
$$

Первые два оператора в этом списке представляют собой очевидные с физической точки зрения операторы трансляций по переменным τ и q, а последний оператор соответствует группе галилеевских преобразований. Расширение группы преобразований (15) происходит для профилей сечения специального вида, подчиняющихся классифицирующему соотношению (13), а дополнительный оператор симметрии X_4 дается соотношением

$$
X_4 = b\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\tau}{2}\left(M + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}z}\right)\frac{\partial}{\partial \tau} + \left(Mq - \frac{(\tau^2 + 2\int \mu \,\mathrm{d}z)}{8a}\frac{\mathrm{d}^2 b}{\mathrm{d}z^2}\right)\frac{\partial}{\partial q}\,. \tag{16}
$$

Операторы (15), (16) замыкаются в четырехмерную алгебру Ли $L_4 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ с таблицей коммутаторов, представленной в табл. 1.

Таблица 1. Коммутаторы алгебры L_4

	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	0	0	$-X_2/2$	$(M+\beta_1)X_1/2 + \beta_2 X_3$
X_2	0	0	0	MX_2
X_3	$X_2/2$	0	0	$(M-\beta_1)X_3/2 - \beta_0 X_1$
X_4	$-(M+\beta_1)X_1/2 - \beta_2 X_3$	$-MX_2$	$(\beta_1 - M)X_3/2 + \beta_0 X_1$	0

Классифицирующее соотношение (13) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка на функцию $\mu(z)$, которое интегрируется в явном виде, задавая трёхпараметрическое (определяемое параметрами β_0, β_1 и β_2) семейство кривых в пространстве $\{z,\mu\}$,

$$\ln(\mu/\nu) = d(z) \equiv M \int\limits_0^z \frac{\mathrm{d}y}{b(y)}\,, \tag{17}$$

где вид функции $d(z)$ зависит от соотношения между параметрами β_i $(i=0,1,2)$,

$$d(z) = \begin{cases} \frac{2M}{\sqrt{4\beta_0\beta_2-\beta_1^2}}\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta_1+2\beta_2 z}{\sqrt{4\beta_0\beta_2-\beta_1^2}} - \operatorname{arctg}\frac{\beta_1}{\sqrt{4\beta_0\beta_2-\beta_1^2}}\right], & \beta_1^2 < 4\beta_0\beta_2\,, \\ \frac{M}{\sqrt{\beta_0\beta_2}}\frac{z}{z+\sqrt{\beta_0/\beta_2}}\,, & \beta_1^2 = 4\beta_0\beta_2\,, \\ \frac{M}{\sqrt{\beta_1^2-4\beta_0\beta_2}}\ln\frac{(\sqrt{\beta_1^2-4\beta_0\beta_2}-\beta_1-2\beta_2 z)(\sqrt{\beta_1^2-4\beta_0\beta_2}+\beta_1)}{(\sqrt{\beta_1^2-4\beta_0\beta_2}+\beta_1+2\beta_2 z)(\sqrt{\beta_1^2-4\beta_0\beta_2}-\beta_1)}\,, & \beta_1^2 > 4\beta_0\beta_2\,. \end{cases} \tag{18}$$

Выбор $M=0$ соответствует каналу с постоянным сечением с $\mathrm{d}\mu(z)/\mathrm{d}z = 0$, для которой классифицирующее соотношение (13) выполняется автоматически при любых β_i. При этом вместо оператора X_4 возникают три оператора,

$$X_{41} = \frac{\partial}{\partial z}\,, \quad X_{42} = z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial}{\partial \tau}\,, \quad X_{43} = z^2\frac{\partial}{\partial z} + \tau z\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{(\tau^2+2z\nu)}{4a}\frac{\partial}{\partial q}\,, \tag{19}$$

первый из которых, X_{41}, является оператором трансляций по оси z, второй, X_{42}, даёт преобразование растяжений, а последний оператор, X_{43}, соответствует группе проективных преобразований. Помимо операторов (19) для каналов постоянного сечения с $\mu\equiv\nu$ обобщенное уравнение Вебстера допускает также оператор бесконечной подгруппы

$$X_\infty = k(z,\tau)\exp\left(-\frac{aq}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial q}\,, \qquad \frac{\partial k}{\partial z} - \mu\frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} = 0\,. \tag{20}$$

Здесь линейное параболическое уравнение, которому удовлетворяет функция двух переменных $k(z,\tau)$, может быть переписано в переменных $\{x,\tau\}$, т.е.

$$\frac{\partial k}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} = 0\,.$$

Последний факт будет нами использован при построении приближённой точечной симметрии для уравнения (6). Отметим, что группа симметрий (15), (19) и (20) хорошо известна в теории модифицированного уравнения Бюргерса [17], к которому в этом случае сводится обобщенное уравнение Вебстера.

1.2. Группа эквивалентности для обобщенного уравнения Вебстера. Для устранения произвола в выборе коэффициентов β_i и M при задании функции $\mu(z)$, определяющей вид генератора группы X_4, следует воспользоваться преобразованиями эквивалентности, т.е. преобразованиями, сохраняющими вид системы уравнений

$$\frac{\partial q}{\partial z} - a\left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 - \mu\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = 0\,, \quad \frac{\partial \mu}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial q} = 0\,. \tag{21}$$

Инфинитезимальный оператор группы эквивалентности для системы уравнений (21) имеет вид

$$E = \xi^1(z,\tau,q)\frac{\partial}{\partial z} + \xi^2(z,\tau,q)\frac{\partial}{\partial \tau} + \eta(z,\tau,q)\frac{\partial}{\partial q} + \vartheta(z,\tau,q,\mu)\frac{\partial}{\partial \mu}\,. \tag{22}$$

Коэффициенты оператора (22) вычисляются из условий инвариантности уравнений (21) при действии на них продолженного оператора

$$\tilde{E} = E + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial q_z} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial q_\tau} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial q_{\tau\tau}} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \mu_q} + \omega_1 \frac{\partial}{\partial \mu_z} + \omega_2 \frac{\partial}{\partial \mu_\tau} \,. \tag{23}$$

Координаты ζ_1, ζ_2 и ζ_{22} задаются формулами (10), а для координат ω_i возникают аналогичные соотношения, с тем, однако отличием, что переменные z, τ и q здесь считаются независимыми, а μ — зависимой (дифференциальной) переменной,

$$\begin{aligned} &\omega_0 = \tilde{D}_q(\vartheta) - \mu_z \tilde{D}_q(\xi^1) - \mu_\tau \tilde{D}_q(\xi^2) - \mu_q \tilde{D}_q(\eta)\,, \\ &\omega_1 = \tilde{D}_z(\vartheta) - \mu_z \tilde{D}_z(\xi^1) - \mu_\tau \tilde{D}_z(\xi^2) - \mu_q \tilde{D}_z(\eta)\,, \\ &\omega_2 = \tilde{D}_\tau(\vartheta) - \mu_z \tilde{D}_\tau(\xi^1) - \mu_\tau \tilde{D}_\tau(\xi^2) - \mu_q \tilde{D}_\tau(\eta)\,, \\ &\tilde{D}_z = \frac{\partial}{\partial z} + \mu_z \frac{\partial}{\partial \mu}\,,\ \tilde{D}_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} + \mu_\tau \frac{\partial}{\partial \mu}\,,\ \tilde{D}_q = \frac{\partial}{\partial q} + \mu_q \frac{\partial}{\partial \mu}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Действие (23) на (21) дает систему определяющих уравнений

$$\left\{ \zeta_1 - 2a\frac{\partial q}{\partial \tau}\,\zeta_2 - \mu\zeta_{22} - \vartheta\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} \right\}\Big|_{(21)} = 0\,, \quad \{\omega_0\}\Big|_{(21)} = 0\,, \quad \{\omega_2\}\Big|_{(21)} = 0\,, \tag{25}$$

решение которых приводит к следующему набору операторов группы эквивалентности:

$$\begin{aligned} &E_1 = \frac{\partial}{\partial \tau}\,, \quad E_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial q}\,, \quad E_3 = z\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\tau}{2a}\frac{\partial}{\partial q}\,, \\ &E_4 = \frac{\partial}{\partial z}\,, \quad E_5 = 2z\frac{\partial}{\partial z} + \tau\frac{\partial}{\partial \tau}\,, \quad E_6 = z\frac{\partial}{\partial z} - q\frac{\partial}{\partial q} - \mu\frac{\partial}{\partial \mu}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

Конечные преобразования группы эквивалентности, порождаемые шестимерной алгеброй Ли, натянутой на операторы (26), даются формулами

$$\begin{aligned} &\bar{z} = (z + b_4)\mathrm{e}^{2b_5 + b_6}\,, \quad \bar{\tau} = (\tau + b_1)\mathrm{e}^{b_5} + b_3(z + b_4)\mathrm{e}^{2b_5 + b_6}\,, \\ &\bar{q} = (q + ab_2)\mathrm{e}^{-b_6} - \frac{b_3^2}{4a}(z + b_4)\mathrm{e}^{2b_5 + b_6} - \frac{b_3}{2a}(\tau + b_1)\mathrm{e}^{b_5}\,, \quad \bar{\mu} = \mu\mathrm{e}^{-b_6}\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Использование преобразований (27) в классифицирующем соотношении (13) позволяет выделить следующие представленные в табл. 2 классы функций μ, к которым сводится все многообразие неоднородных профилей, для которых происходит расширение основной алгебры (15).

Таблица 2. Допускаемые значения функции μ/ν в соответствии с (13)

$\beta_2 = 0$	$\beta_1 = 0,\ \beta_0 \neq 0$	$\exp(\pm z)$
	$\beta_1 \neq 0,\ \beta_0 = \text{arbitrary}$	$(1+z)^{M/\beta_1}$
$\beta_2 \neq 0$	$\beta_1^2 < 4\beta_0\beta_2$	$\exp\left[\frac{4M\beta_2}{4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2}\,\mathrm{arctg}\,z\right]$
	$\beta_1^2 > 4\beta_0\beta_2$	$\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2M\beta_2/(4\beta_0\beta_2 - \beta_1^2)}$
	$\beta_1^2 = 4\beta_0\beta_2$	$\exp\left(\pm\frac{z}{1+z}\right)$

Отметим соответствие основных типов профилей акустических волноводов μ/ν (степенные, дробно-линейные и экспоненциальные зависимости трех видов), которые следуют из классифицирующего соотношения (13) при групповом анализе уравнения (6), с теми, которые получаются для обобщенного уравнения Бюргерса (5) в [11].

1.3. Оптимальные системы одномерных подалгебр для обобщенного уравнения Вебстера. Для построения оптимальной системы одномерных подалгебр $\Theta(L)$ алгебры L, заданной операторами (15), (16), следует вычислить группу внутренних автоморфизмов. Внутренний автоморфизм алгебры L, задаваемый любым из операторов X_i этой алгебры, строится как решение задачи Коши

$$\frac{\mathrm{d}\bar{X}}{\mathrm{d}a_i} = \left[X_i, \bar{X}\right], \quad \bar{X}\Big|_{a_i=0} = X\,, \tag{28}$$

в которой операторы $\bar{X}$ даются разложением по базисным операторам X_i,

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{4} \bar{k}_i X_i\,, \quad \bar{k}_i = \bar{k}_i(a_i, k_1, k_2, k_3, k_4)\,. \tag{29}$$

Используя уравнение (29) и табл. 1 коммутаторов, запишем внутренние автоморфизмы, задающие закон преобразования координат оператора $\bar{X}$ в виде табл. 3, где введены обозначения $\Omega = \sqrt{\beta_1^2 - 4\beta_0\beta_2}$.

Таблица 3. Внутренние автоморфизмы L_4

	$\bar{k}_1$	$\bar{k}_2$	$\bar{k}_3$	$\bar{k}_4$
A_1	$k_1 + (M+\beta_1)k_4 a_1$	$k_2 - k_3 a_1 - \beta_2 k_4 a_1^2$	$k_3 + 2\beta_2 k_4 a_1$	k_4
A_2	k_1	$k_2 + M k_4 a_2$	k_3	k_4
A_3	$k_1 - 2\beta_0 k_4 a_3$	$k_2 + k_1 a_3 - \beta_0 k_4 a_3^2$	$k_3 + k_4(M-\beta_1)a_3$	k_4
A_4	$(1/\Omega)\mathrm{e}^{-Ma_4}\,[k_1\Omega\cosh(\Omega a_4)$ $+ (2k_3\beta_0 - k_1\beta_1)\sinh(\Omega a_4)]$	$k_2\mathrm{e}^{-2Ma_4}$	$(1/\Omega)\mathrm{e}^{-Ma_4}\,[k_3\Omega\cosh(\Omega a_4)$ $+ (k_3\beta_1 - 2k_1\beta_2)\sinh(\Omega a_4)]$	k_4

Знание внутренних автоморфизмов позволяет построить оптимальные системы одномерных подалгебр $\Theta_1(L_4)$, приведенные в табл. 4

1.4. Инвариантные решения обобщенного уравнения Вебстера. В данном разделе мы рассмотрим некоторые виды инвариантных решений для обобщенного модифицированого уравнения Вебстера, которые получены на одномерных подалгебрах из списка, указанного в табл. 4. Наиболее интересными и нетривиальными являются инвариантные решения, полученные с использованием оператора X_4, а также его линейных комбинаций с операторами X_1 и X_3. Используя стандартную процедуру [16] представления инвариантного решения через инварианты оператора допускаемой группы, приведем вид инвариантных решений для этих комбинаций.

1. Инвариантное решение для оператора X_4:

$$q = \mu U(\lambda) - \frac{\beta_2}{2aM}\left(z\mu - \int \mu\,\mathrm{d}z\right) - \mu\frac{\beta_2}{4a}\lambda^2 z\,, \quad \lambda = \frac{\tau}{\sqrt{b\mu}}\,. \tag{30}$$

Таблица 4. Оптимальные одномерные подалгебры $\Theta_1(L_4)$ алгебры L_4

$\beta_2 = 0$	$\beta_1 = 0$	$\beta_0 \neq 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_4 + \alpha X_3\}, \alpha = \text{arbitrary}$
	$\beta_1/M = -1$	$\beta_0 \neq 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4 + \alpha X_3\}, \alpha = \text{arbitrary}$
		$\beta_0 = 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4\}, \{X_4 \pm X_1\}$
	$\beta_1/M = 1$	$\beta_0 \neq 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4 + \alpha X_3\}, \alpha = \text{arbitrary}$
		$\beta_0 = 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4\}, \{X_4 \pm X_3\}$
	$\beta_1/M \neq \pm 1$	$\beta_0 = \text{arbitrary}$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4\}$
$\beta_2 \neq 0$	$\beta_1 = 0$	$\beta_0 = 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4\}$
	$\beta_1 = 0$	$\beta_0 \neq 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4 + \alpha X_3\}, \alpha = \text{arbitrary}$
	$\beta_1/M = 1$	$\beta_0 = 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4 + \alpha X_1\}, \alpha = \text{arbitrary}$
	$\beta_1/M = -1$	$\beta_0 = 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4\}, \{X_4 \pm X_1\}$
	$\beta_1/M \neq \pm 1$	$\beta_0 = 0$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4\}$
	$\beta_1 \beta_0 \neq 0$	$\beta_1/M = \pm 1$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4 + \alpha X_3\}, \alpha = \text{arbitrary}$
	$\beta_1 \beta_0 \neq 0$	$\beta_1/M \neq \pm 1$	$\{X_1\}, \{X_2\}, \{X_3\}, \{X_3 \pm X_1\}, \{X_4\}$

2. Инвариантное решение для оператора $X_4 + \alpha X_1$:

$$
\begin{aligned}
& q = \mu U(\lambda) - \frac{\beta_2}{2aM}\left(z\mu - \int \mu \, \mathrm{d}z\right) - \mu \frac{\beta_2}{4a}\left(\lambda^2 z - 2\lambda \int \lambda_1 \mathrm{d}z + \int \lambda_1^2 \mathrm{d}z\right), \\
& \lambda = \frac{\tau}{\sqrt{b\mu}} + \lambda_1(z), \quad \lambda_1(z) = -\alpha \int \frac{1}{b\sqrt{b\mu}} \, \mathrm{d}z \, .
\end{aligned}
\tag{31}
$$

3. Инвариантное решение для оператора $X_4 + \alpha X_3$:

$$
\begin{aligned}
q = \mu U(\lambda) - \alpha \frac{\mu}{2a}\left(\lambda \int \frac{1}{\sqrt{b\mu}} \, \mathrm{d}z - \int \frac{\lambda_3}{\sqrt{b\mu}} \, \mathrm{d}z\right) - \mu \frac{\beta_2}{4a}\left(\lambda^2 z - 2\lambda \int \lambda_3 \, \mathrm{d}z + \int \lambda_3^2 \, \mathrm{d}z\right) - \\
- \frac{\beta_2}{2aM}\left(z\mu - \int \mu \, \mathrm{d}z\right), \quad \lambda = \frac{\tau}{\sqrt{b\mu}} + \lambda_3(z), \quad \lambda_3(z) = -\alpha \int \frac{z}{b\sqrt{b\mu}} \, \mathrm{d}z \, .
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Использование представлений (30), (31) и (32) в исходном уравнении (6) дает для всех трех случаев единое фактор-уравнение для функции $U(\lambda)$ — обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка,

$$
\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}\lambda^2} + a\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + (M + \beta_1)\frac{\lambda}{2}\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\lambda}\right) - MU + \frac{\beta_0 \beta_2}{4a}\lambda^2 = 0 \, .
\tag{33}
$$

Групповой анализ уравнения (33) показывает, что при произвольном соотношении между коэффициентами этого уравнения оно не обладает ни одной симметрией. Однако если коэффициенты уравнения связаны определенным соотношением, то уравнение (33) допускает группу точечных преобразований с оператором

$$
X = \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{M + \beta_1}{4a}\frac{\partial}{\partial U}, \quad 4\beta_0 \beta_2 = \beta_1^2 - M^2 \, .
\tag{34}
$$

Выбирая инвариант этого оператора в качестве новой зависимой переменной $V(\lambda)$, получим для нее автономное уравнение

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}\lambda^2} + a\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 - MV = 0\,, \quad V = U + \frac{M+\beta_1}{8a}\lambda^2 + \frac{M+\beta_1}{4a}\,, \tag{35}$$

решение которого записывается в квадратурах,

$$\lambda = \int \left(C_0 \exp\left(-2aV\right) + (M/2a^2)(2aV-1)\right)^{-1/2} \mathrm{d}V + C_1\,, \quad C_0, C_1 = \mathrm{const}\,. \tag{36}$$

2. Группа приближенных симметрий и приближенные инвариантно-групповые решения обобщенного уравнения Вебстера

Построенные в предыдущем разделе инвариантные решения модифицированного обобщенного уравнения Вебстера (6) описывают распространение акустических возмущений в волноводах переменного сечения с $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z \neq 0$. Закон изменения сечения вдоль оси волновода, однако, не является произвольным, а удовлетворяет дополнительному ограничению, следующему из классифицирующего соотношения (13). Также не является произвольным выбор вида начального возмущения $Q(\tau)$ (краевое или начальное условие) в уравнении (6) — оно следует из решения фактор-уравнения (33), возникающего при отыскании инвариантно-группового решения. Избавиться от ограничений на вид зависимости профиля сечения акустического канала от координаты вдоль его оси и на выбор начальных условий можно при использовании приближенных симметрий, построению которых и посвящен данный раздел. Побудительным мотивом для использования приближенных симметрий в данной задаче является то обстоятельство, что в канале постоянного сечения, $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z = 0$, краевая задача (6) имеет точное аналитическое решение при *произвольных* гладких краевых условиях. Это решение можно построить с использованием симметрий *ренормгруппового* типа, для которых орбита группы совпадает с решением краевой задачи (6), т.е. под действием группы решение краевой задачи переходит снова в решение этой задачи с такими же краевыми данными. Общее описание алгоритма построения ренормгрупповых симметрий и его обоснование можно найти в [18, 19] (см., также, [16, §29]), а подробности вычислений на примере решения краевой задачи для модифицированного уравнения Бюргерса приведены в [20]. Возможность построения ренормгрупповых симметрий для произвольных краевых условий в канале постоянного сечения обусловлена наличием бесконечномерной подалгебры Ли с оператором (20). В рассматриваемом здесь случае акустического канала переменного сечения, $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z \neq 0$, эта симметрия отсутствует. Целью данного раздела является построение группы приближенных симметрий, условием существования которой является наличие в системе малого параметра, связанного со сравнительной плавностью изменения площади поперечного сечения вдоль оси волноводной системы, т.е. малость производной $\mathrm{d}(\ln\mu(z))/\mathrm{d}z \equiv \mu_z/\mu \ll 1$ (здесь нижний индекс обозначает производную по соответствующему аргументу).

Вычисление приближенной группы для задачи (6) несколько отличается от стандартного подхода [21, 22] в том смысле, что само исходное уравнение не содержит малого параметра, этот параметр возникает при построении и решении определяющего уравнения группы. Следуя схеме, использованной для модифицированного уравнения Бюргерса, будем искать инфинитезимальный оператор приближенной группы в расширенном пространстве переменных $\{z, \tau, a, q\}$,

$$X^a = \xi^1(z,\tau,a,q)\frac{\partial}{\partial z} + \xi^2(z,\tau,a,q)\frac{\partial}{\partial \tau} + \xi^3(z,\tau,a,q)\frac{\partial}{\partial a} + \eta(z,\tau,a,q)\frac{\partial}{\partial q}\,. \tag{37}$$

Продолжение действия инфинитезимального оператора (37) на производные записывается аналогично (8)

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}^a &= X^a + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial q_z} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial q_\tau} + \zeta_{22} \frac{\partial}{\partial q_{\tau\tau}}\,,\\
\zeta_1 &= D_z(\eta) - q_z D_z(\xi^1) - q_\tau D_z(\xi^2) - q_a D_z(\xi^3)\,,\\
\zeta_2 &= D_\tau(\eta) - q_z D_\tau(\xi^1) - q_\tau D_\tau(\xi^2) - q_a D_\tau(\xi^3)\,,\\
\zeta_{22} &= D_\tau(\zeta_2) - q_{z\tau} D_\tau(\xi^1) - q_{\tau\tau} D_\tau(\xi^2) - q_{a\tau} D_\tau(\xi^3)\,,
\end{aligned} \tag{38}
$$

с использованием дополненных операторов полного дифференцирования

$$
\begin{aligned}
D_z &= \frac{\partial}{\partial z} + q_z \frac{\partial}{\partial q} + q_{zz} \frac{\partial}{\partial q_z} + q_{\tau z} \frac{\partial}{\partial q_\tau} + q_{az} \frac{\partial}{\partial q_a} + \ldots\,,\\
D_\tau &= \frac{\partial}{\partial \tau} + q_\tau \frac{\partial}{\partial q} + q_{z\tau} \frac{\partial}{\partial q_z} + q_{\tau\tau} \frac{\partial}{\partial q_\tau} + q_{a\tau} \frac{\partial}{\partial q_a} + \ldots\,.
\end{aligned} \tag{39}
$$

Действие оператора (38) на (6) дает определяющее уравнение

$$
\{\tilde{X}^a F\}\Big|_{F=0} \equiv \left\{ \zeta_1 - 2a \frac{\partial q}{\partial \tau}\, \zeta_2 - \mu \zeta_{22} - \frac{\mathrm{d}\mu(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}\, \xi^1 - \left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 \xi^3 \right\}\Big|_{F=0} = 0\,, \tag{40}
$$

которое после упрощения сводится к следующей системе уравнений на координаты оператора (37)

$$\eta_z - \mu \eta_{\tau\tau} = 0\,, \tag{41}$$

$$\xi^1_z - 2\xi^2_\tau + (\mu_z/\mu)\xi^1 = 0\,, \tag{42}$$

$$\xi^2_z - \mu \xi^2_{\tau\tau} + 2(a\eta_\tau + \mu \eta_{q\tau}) = 0\,, \tag{43}$$

$$a(\xi^1_z - 2\xi^2_\tau) + \xi^3 + a\eta_q + \mu \eta_{qq} = 0\,, \tag{44}$$

$$\xi^1 = \xi^1(z, a)\,, \quad \xi^2 = \xi^2(z, \tau, a)\,, \quad \xi^3 = \xi^3(a)\,. \tag{45}$$

Решение двух последних уравнений, (43) и (44), с учетом (41) конкретизирует вид координат ξ^1, ξ^2 и ξ^3, и, частично, η

$$
\begin{aligned}
\xi^1 &= \beta_0(a) + \beta_1(a) z + \beta_2(a) z^2\,, \quad \xi^3 = \xi^3(a)\,,\\
\xi^2 &= c_0(a) + c_1(a) z + \frac{\tau}{2}\left(M(a) + \frac{\partial \xi^1}{\partial z}\right)\,,\\
\eta &= k(z, \tau, a) \exp\left(-\frac{aq}{\mu}\right) + c_2(a) - \frac{\tau}{2a} c_1(a) +\\
&\quad + \left(M(a) - \frac{\xi^3}{a}\right) q - \frac{1}{4a} \frac{\partial^2 \xi^1}{\partial z^2} \left(\frac{\tau^2}{2} + \int \mu\, \mathrm{d}z\right)\,,
\end{aligned} \tag{46}
$$

причем должны быть выполнены еще два условия

$$\frac{\partial k}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} + \frac{aq}{\mu^2} \mu_z k = 0\,, \tag{47}$$

$$(\mu_z/\mu)\xi^1 = M\,, \quad M = \mathrm{const}\,. \tag{48}$$

Для канала постоянного сечения, $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z = 0$, первое из этих ограничений приводит к линейному параболическому уравнению для функции $k(z, \tau, a)$, а второе ограничение дает $M = 0$, и в результате получаем бесконечномерную группу симметрии (15), (19) и (20).

Для каналов произвольного переменного сечения, $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z \neq 0$, дифференцирование первого ограничения (47) по q дает $k(z, \tau, a) = 0$, а второе ограничение совпадает с уравнением (13). В результате получаем группу симметрии (15), (16).

В анализируемом ниже случае акустического канала с медленно меняющимся профилем поперечного сечения $\mu_z/\mu \ll 1$ ограничения (47), (48) можно рассматривать как приближенные, пренебрегая в них в нулевом порядке вкладами, пропорциональными μ_z/μ. Тогда *в нулевом порядке* по этому параметру получаем группу приближенных симметрий с оператором (37), координаты которого даются соотношениями (46) с $M = 0$ и $k(z, \tau, a) = k^{(0)}$, где $k^{(0)}$ подчиняется линейному уравнению

$$\frac{\partial k^{(0)}}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 k^{(0)}}{\partial \tau^2} = 0\,, \tag{49}$$

а $\mu(z)$ — *произвольная* плавно меняющаяся функция z.

В следующем, *первом порядке* по μ_z/μ, второе ограничение (48) совпадает с классифицирующим соотношением (13), а первое ограничение (47) записывается в виде

$$\frac{\partial k^{(1)}}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 k^{(1)}}{\partial \tau^2} = -\frac{aq}{\mu^2}\mu_z k^{(0)}\,. \tag{50}$$

Здесь функции $k^{(0)}$ и $k^{(1)}$ зависят от z, τ и a, но не зависят от q. Поэтому, дифференцируя (47) по q, получаем $k^{(0)} = 0$, т.е. приближение *первого* порядка разрушает симметрию *нулевого* приближения, иными словами, бесконечномерная группа, задаваемая оператором (37) с координатой $k^{(0)}$, не наследуется (в классическом смысле [21, 22]) уже в следующем порядке по параметру μ_z/μ. Для сохранения бесконечномерной подгруппы воспользуемся тем обстоятельством, что симметрия нулевого и последующих приближений служит инструментом для построения решения краевой задачи (6), т.е. при выбранной функции $k^{(0)}$ можно построить решение $q^{(0)}$. Далее, заменяя в правой части уравнения (50) переменную q на решение нулевого приближения $q^{(0)}(z, \tau, a)$, получим для $k^{(1)}$ неоднородное параболическое уравнение с источником. Построенная таким образом бесконечномерная подгруппа (37) с $k = k^{(1)}$ уже не является симметрией исходного *уравнения*, но является симметрией *решения* исходной задачи с выбранным, использованным для построения $q^{(0)}$, краевым (начальным) условием. Найденную симметрию первого приближения можно использовать для построения *улучшенного* решения первого приближения $q^{(1)}(z, \tau, a)$, а затем продолжить описанную процедуру для получения функции k в заданном порядке по параметру μ_z/μ,

$$\frac{\partial k^{(i+1)}}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 k^{(i+1)}}{\partial \tau^2} = -A^i\,, \quad A^i = \frac{aq^{(i)}(z, \tau, a)}{\mu^2}\mu_z k^{(i)}\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{51}$$

Проиллюстрируем данную процедуру на примере построения решения с использованием нескольких первых приближений для функции k. Искомый для нахождения решения краевой задачи (6) оператор ренормгрупповой симметрии построим, как и в [20], из линейной комбинации операторов с координатами (46), где отличными от нуля считаем лишь вклады, порождающие преобразования параметра нелинейности a с $\xi^3(a) = 1$, и вклад от оператора бесконечной подгруппы с отличной от нуля функцией k, которую мы полагаем известной

$$R = \frac{\partial}{\partial a} + \left(k(z, \tau, a) \exp\left(-\frac{aq}{\mu}\right) - \frac{q}{a} \right) \frac{\partial}{\partial q}\,. \tag{52}$$

Здесь функция $k(z, \tau, a)$ в нулевом приближении $k = k^{(0)}$ подчиняется линейному параболическому уравнению (49) с начальным условием $k^{(0)}(0, \tau, a) = Q(\tau)/a$, которое возникает из условия инвариантности решения по теории возмущений при $a \to 0$ относительно оператора ренормгрупповой симметрии (52). В результате приходим к соотношению

$$k^{(0)} = \frac{\nu}{a} K_a\,,\ K(a, x, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{aQ(\xi)}{\nu}} G(x, \tau - \xi)\, \mathrm{d}\xi\,, \quad G(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu x}} \mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{4\nu x}}\,. \tag{53}$$

Здесь нижний индекс у функции K означает частную производную по соответствующему аргументу, $K_a \equiv \partial K/\partial a$.

Конечные преобразования группы с оператором (52), в котором используется функция (53) для k, приводят к следующему приближенному аналитическому решению начальной задачи (6)

$$q^{(0)} = \frac{\mu}{a} \ln \left[1 + \frac{\nu}{\mu} (K - 1) \right] , \tag{54}$$

которое справедливо в среде с плавно изменяющимся сечением $\mu_z/\mu \ll 1$. Фактически, отличие (54) от решения в каналах постоянного сечения проявляется в наличии не равного единице множителя ν/μ.

Достоинством ренормгруппового подхода в целом и решения на основе оператора (52), в частности, является возможность последовательного улучшения полученных аналитических приближений. Применительно к рассматриваемой задаче такое улучшение в следующем, *первом порядке* по μ_z/μ, достигается использованием в операторе (52) для функции $k(z, \tau, a)$ решения неоднородного параболического уравнения (51) с $i = 0$, правая часть которого пропорциональна градиенту поперечного сечения канала μ_z/μ и линейно зависит от функции $q^{(0)}$ нулевого по этому градиенту приближения,

$$A^0 = (\mu_z/\mu)(\nu/a) K_a \ln \left[1 + (\nu/\mu)(K - 1) \right] . \tag{55}$$

Решение уравнения (51) с учетом (55) даёт модифицированное (за счёт вклада с градиентом поперечного сечения) выражение для функции $k(a, x, \tau)$ в (52), т.е. для $k^{(1)}(a, x, \tau)$

$$\begin{aligned} k^{(1)} &= \frac{\nu}{a} K_a - \int\limits_0^x \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x - x', \tau - \tau') \frac{\nu \mu'_{x'}}{a \mu'} K'_a \ln \left(1 + \frac{\nu}{\mu'} (K' - 1) \right) \mathrm{d}\tau' , \\ \mu' &\equiv \mu(x') , \quad K' \equiv K(a, x', \tau') , \end{aligned} \tag{56}$$

а подстановка $k^{(1)}$ вместо k в инфинитезимальный оператор (52) и последующее решение уравнений Ли приводит к улучшенному приближению для искомого решения,

$$\begin{aligned} q^{(1)} = \frac{\mu}{a} \ln \Bigg\{ & 1 + \frac{\nu}{\mu} (K - 1) - \frac{\nu}{\mu} \int\limits_0^x \frac{\mu'_{x'}}{\mu'} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x - x', \tau - \tau') \times \\ & \times \left[1 - K' + \left(K' - 1 + \frac{\mu'}{\nu} \right) \ln \left(1 + \frac{\nu}{\mu'} (K' - 1) \right) \right] \mathrm{d}\tau' \Bigg\} . \end{aligned} \tag{57}$$

Эту процедуру можно продолжать, используя $k^{(1)}$ и $q^{(1)}$ для вычисления A^1 в правой части уравнения (51) и последующей подстановки решения уравнения для $k^{(1)}$ вместо k в оператор (52) для нахождения решения следующего, второго приближения. Результат таких вычислений, однако, имеет громоздкий вид и здесь опущен.

Поскольку построенное решение является приближенным, то возникает естественный вопрос о его точности при различных значениях параметра μ_z/μ. Ответ на этот вопрос также зависит от величины отношения a/ν : при малых значениях a/ν первые два члена разложения решения (57) в ряд по степеням параметра нелинейности a имеют вид:

$$\begin{aligned} q^{pt} = \nu K_a^{(0)} + \frac{\nu a}{2} \Bigg[& K_{aa}^{(0)} - \frac{\nu}{\mu} (K_a^{(0)})^2 - \\ & - \int\limits_0^x \frac{\nu \mu'_{x'}}{(\mu')^2} \mathrm{d}x' \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x - x', \tau - \tau') ((K')_a^{(0)})^2 \mathrm{d}\tau' \Bigg] + O(a^2) , \end{aligned} \tag{58}$$

где $K_a^{(0)}$ и $K_{aa}^{(0)}$ означают значения частных производных функции K, вычисленные в пределе $a \to 0$. Непосредственной подстановкой в (53) периодического начального условия $Q(\xi) = \cos\xi$, для которого функция K задана соотношением

$$K = I_0(a/\nu) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(a/\nu)\cos k\tau\, \mathrm{e}^{-\nu k^2 x}\,, \tag{59}$$

и вычислением возникающих интегралов можно убедиться, что выражение для q^{pt} согласуется с результатом, полученным в [10] для гармонического начального возмущения без дополнительного предположения о величине μ_z/μ.

Для немалых значений a/ν сравнение приближенного решения первого приближения (57) с численным [23] показывает хорошее совпадение результатов (с точностью до нескольких процентов) даже для больших значений акустического числа Рейнольдса $a/\nu = 10$.

3. Законы сохранения для обобщенного уравнения Вебстера

В этом разделе обсуждается возможность построения законов сохранения для уравнения (6) на основе метода, развитого в работах [24, 25]. Согласно этому методу, каждой симметрии уравнения (или системы дифференциальных уравнений) можно поставить в соответствие некий закон сохранения, при условии, что исследуемое уравнение (система дифференциальных уравнений) является нелинейно самосопряженным в смысле [24, 25]. Проверка выполнения условия нелинейной самосопряженности для (6) сводится к введению формального лагранжиана

$$\mathcal{L} = wF \equiv w\left(\frac{\partial q}{\partial z} - a\left(\frac{\partial q}{\partial \tau}\right)^2 - \mu\frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}\right)\,, \tag{60}$$

вычислению сопряженного к (6) уравнения по формуле

$$F^* \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q} = 0\,, \quad \frac{\delta}{\delta q} = \frac{\partial}{\partial q} + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s D_{i_1}\ldots D_{i_s}\frac{\partial}{\partial q_{i_1\ldots i_s}}\,, \tag{61}$$

и проверке условия нелинейной самосопряженности

$$F^*\Big|_{w=\varphi(z,\tau,q)} = \lambda F\,, \tag{62}$$

где w и λ — дополнительная зависимая переменная и неизвестный, подлежащий определению коэффициент. Замена $w = \varphi(z,\tau,q)$ в уравнении (62) и решение возникающей переопеределенной системы уравнений на φ конкретизирует вид w и λ.

Для обобщенного уравнения Вебстера (6) сопряженное уравнение (61) имеет вид:

$$F^* = -w_z + 2a(w_\tau q_\tau + w q_{\tau\tau}) - \mu w_{\tau\tau}\,. \tag{63}$$

Подстановка (63) в (62) с заменой $w = \varphi$, $w_z = D_z(\varphi)$, $w_\tau = D_\tau^2(\varphi)$ и $w_{\tau\tau} = D_\tau(\varphi)$ дает экспоненциальную зависимость переменной w от q,

$$\lambda = -\frac{\partial\varphi}{\partial q}\,, \quad \varphi \equiv w = \Phi(z,\tau)\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right)\,, \tag{64}$$

где функция Φ двух переменных z и τ подчиняется дополнительному уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} - aq\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\Phi}{\mu^2} = 0\,. \tag{65}$$

При произвольной зависимости $\mu(z)$ это уравнение может быть выполнено только при нулевых значениях Φ. Для каналов постоянного сечения, $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z = 0$, получаем линейное параболическое уравнение для Φ. При малых градиентах $(1/\mu)\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z \ll 0$, это уравнение может рассматриваться как приближенное, решение которого можно строить методом последовательных приближений (см. ниже раздел 3.2).

Согласно [24, 25] закон сохранения для (6) записывается в виде

$$D_z(C^1) + D_\tau(C^2) = 0\,, \tag{66}$$

где компоненты сохраняющегося вектора выражаются через (60), (64) и координаты (12) оператора допускаемой группы симметрии

$$C^i = W\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} - D_j\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{ij}}\right)\right] + D_j(W)\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_{ij}}\,, \quad W = \eta - \xi^j q_j\,, \quad i,j = 1,2\,. \tag{67}$$

Уравнение (66) должно выполняться на решениях уравнения (6). В этом можно убедиться непосредственной подстановкой выражений для C^1 и C^2, следующих из (67) с учетом (64),

$$\begin{aligned} &C^1 = W\Phi\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right)\,, \quad W = \eta - \xi^1 q_z - \xi^2 q_\tau\,,\\ &C^2 = \mu W\frac{\partial\Phi}{\partial x}\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right) - \mu\Phi D_x\left(W\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right)\right)\,, \end{aligned} \tag{68}$$

в уравнение (66), которое принимает вид:

$$\begin{aligned} D_z(C^1) + D_\tau(C^2) = {}& \Phi\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right)\left[\left(D_z - \mu D_\tau^2 - 2aq_\tau D_\tau\right)W\right] +\\ &+ W\frac{a\Phi}{\mu}\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right)\left[q_z - aq_\tau^2 - \mu q_{\tau\tau}\right] +\\ &+ W\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right)\left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2} - aq\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\Phi}{\mu^2}\right] = 0\,. \end{aligned} \tag{69}$$

Равенство нулю здесь очевидно, поскольку выражение в первой квадратной скобке совпадает с определяющим уравнением группы для (6), выражение во второй квадратной скобке совпадает с самим уравнением (6), и, наконец, выражение в третьей квадратной скобке обращается в нуль в силу уравнения (65).

3.1. Законы сохранения в случае $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z = 0$**.** В этом разделе в табл. 5 для каждого из операторов группы (15), (19), (14) представлены явные выражения для компонент C^1 и C^2 сохраняющегося вектора, в случае канала постоянного сечения с $\mu = \nu = \mathrm{const}$, т.е. при $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z = 0$, когда функция $\Phi(z,\tau)$ подчиняется линейному параболическому уравнению. Ввиду произвола в выборе $\Phi(z,\tau)$ при построении табл. 5 было выбрано значение $\Phi = 1$. Отметим, что здесь указаны только симметрии, дающие "нетривиальные" законы сохранения с $C^i \neq 0$.

Заметим, что из (69) и табл. 5 следует, что уравнение Вебстера (6) с произвольным коэффициентом $\mu(z)$ не имеет вида закона сохранения. Потенциальное уравнение Бюргерса (уравнение (6) при $\mu = \nu = \mathrm{const}$) тоже формально не имеет вид закона сохранения. Однако его можно переписать в виде закона сохранения бесконечным числом способов. Например, используя данные второй строки табл. 5, получим

$$D_z\left(\mathrm{e}^{aq/\nu}\right) + D_\tau\left(-aq_\tau\mathrm{e}^{aq/\nu}\right) = 0\,. \tag{70}$$

3.2. Приближенные законы сохранения в случае $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z \neq 0$**.** Для каналов переменного сечения с $\mu(z) \neq \mathrm{const}$, из уравнения (65) следует $\Phi = 0$, и, значит, не существует отличной от нуля функции w, зависящей от z, τ и q, для которой бы выполнялось условие нелинейной самосопряженности для уравнения (6). Оставляя в стороне вопрос о более сложном виде w, например, зависящей не только от зависимых и независимых переменных, но и от дифференциальных переменных высоких порядков и/или от нелокальных переменных, укажем на возможность построения *приближенного* закона сохранения для уравнения (6). Будем считать, что площадь поперечного сечения медленно меняется при изменении координаты z оси волновода, $(1/\mu)\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z \ll 1$. Тогда, как и для приближенных симметрий, при построении нулевого приближения $\Phi^{(0)}$ последний вклад в уравнении для функции Φ в (65) несущественен, а при вычислении следующего приближения $\Phi^{(1)}$ он рассматривается уже как известный источник в правой части параболического уравнения (как в уравнении (51)),

$$\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial\tau^2} = 0\,, \quad \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial\tau^2} - aq^{(0)}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\Phi^{(0)}}{\mu^2} = 0\,. \tag{71}$$

Таблица 5. Компоненты C^1, C^2 для симметрий (12) при $\mathrm{d}\mu/\mathrm{d}z = 0$

	C^1	C^2
X_∞	k	$-\nu k_\tau$
X_2	$\exp(aq/\nu)$	$-aq_\tau\exp(aq/\nu)$
X_3	$-\tau/(2a)\exp(aq/\nu)$	$(\tau q_\tau/2 - \nu/(2a))\exp(aq/\nu)$
X_{42}	$(-z(aq_\tau^2 + \nu q_{\tau\tau}) + \nu/(2a))\exp(aq/\nu)$	$(z\,(3a\nu q_\tau q_{\tau\tau} + \nu^2 q_{\tau\tau\tau} + a^2 q_\tau^3) + \nu q_\tau/2)\exp(aq/\nu)$
X_{43}	$(-(\tau^2 - 2\nu z)/(4a)$ $-z^2\,(aq_\tau^2 + \nu q_{\tau\tau}))\exp(aq/\nu)$	$(\tau^2 q_\tau/4 - \nu\tau/(2a) + 3\nu z q_\tau/2$ $+z^2\,(3a\nu q_\tau q_{\tau\tau} + \nu^2 q_{\tau\tau\tau} + a^2 q_\tau^3))\exp(aq/\nu)$

В качестве примера запишем приближенный закон сохранения, отвечающий ренормгрупповой симметрии с генератором (52). Несмотря на то, что эта симметрия действует в расширенном пространстве независимых переменных $\{z, \tau, a\}$, закон сохранения и в этом случае записывается в виде (66), сопряженное уравнение по-прежнему имеет вид (63), а формулы для w даются (64). Отличие проявляется лишь в формуле для W, которая в этом случае имеет вид $W = \eta - \xi^1 q_z - \xi^1 q_\tau - \xi^3 q_a$. Для оператора (52) с $\xi^3 = 1$, $\xi^1 = \xi^2 = 0$ и $\eta = k\exp(-aq/\mu) - q/a$ это дает следующие выражения для C^i

$$\begin{aligned} &C^1 = \Phi\left[k - \left(q_a + \frac{q}{a}\right)\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right)\right]\,,\\ &C^2 = \mu\left(k\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - \Phi\frac{\partial k}{\partial\tau}\right) + \left[\left(q_a + \frac{q}{a}\right)\left(aq_\tau\Phi - \mu\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\right) + \mu\Phi\left(q_{a\tau} + \frac{q_\tau}{a}\right)\right]\exp\left(\frac{aq}{\mu}\right)\,,\\ &C^3 = 0\,. \end{aligned} \tag{72}$$

Точность выполнения закона сохранения определяется точностью уравнений (71).

Заключение

Подводя итог, отметим, что в настоящей работе найдена трехмерная группа точечных симметрий для обобщенного уравнения типа Вебстера (6), описывающего нелинейные акустические волны в каналах произвольного переменного сечения с поглощением. Показано, что для профилей поперечного сечения специального вида происходит расширение допускаемой трехпараметрической группы точечных преобразований, и решена задача групповой классификации по различным типам S. Построены оптимальные системы одномерных подалгебр допускаемой алгебры Ли и приведены примеры инвариантных решений. Сформулирован алгоритм нахождения группы приближённых ренормгрупповых симметрий решения краевой задачи для обобщённого уравнения Вебстера для каналов с произвольным плавно меняющимся поперечным сечением и при произвольных начальных условиях и построены приближенные аналитические решения. Построены законы сохранения для обобщенного уравнения Вебстера для случая акустического волновода с неизменным поперечным сечением, а также для случая волновода с медленно меняющимся поперечным сечением.

Полученные результаты помимо традиционных приложений в акустике могут найти также применение в других областях знаний, например, в медицинских исследованиях при описании нелинейных пульсовых волн [26]. Исследование условий распространения звуковых волн на основе уравнения типа Вебстера с переменной функцией $S(x)$ также может быть использовано для построения классического аналога процессов распространения возмущений на многообразиях различной топологической размерности с помощью уравнений типа Клейна-Гордона [27].

Авторы благодарны проф. Н.Х. Ибрагимову за плодотворное обсуждение вопросов, связанных с исследованием нелинейной самосопряженности уравнения Вебстера, и помощь в построении законов сохранения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руденко О.В. *Нелинейные пилообразные волны* // УФН. 1995. Т. 165(9). С. 1011–1036; English translation: Rudenko O.V. *Nonlinear sawtooth-shaped waves* // Physics-Uspekhi (Adv.Phys.Sci). 1995. V.38, P. 965–989.
2. B.O. Enflo, O.V. Rudenko *To the theory of generalizied Burgers' equation* // Acta Acustica unified with Acustica. 2002. V. 88. P. 155–162.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Курс теоретической физики*, т.6: *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986; English translation: L.D. Landau, and E.M. Lifshitz *Fluid Mechanics.* Oxford, Pergamon Press, 1986.
4. A.G. Webster *Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph* // Proc.Nat.Acad.Sci. 5, 1919. P. 275–282; Reprinted in J. Audio Eng.Soc. 1977. V. 25(1-2). P. 24–28.
5. E. Eisner *Resonant oscillation system design* // Physical Acoustics (Ed. W.P. Mason). V. 1. Pt. B. Ch. 6. NY, Academic Press, 1964.
6. Руденко О.В., Солуян С.И. *Теоретические основы нелинейной акустики.* М.: Наука, 1975, 288 с.; English translation: O.V. Rudenko, and S.I. Soluyan *Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics.* Plenum, Consultants Bureau, 1977.
7. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн (2-е изд.).* М.: Наука, 1990.
8. O.V. Rudenko, A.B. Shvartsburg *Nonlinear and linear phenomena in narrow pipes* // Acoustical Physics. 2010. V. 56(4). P. 429–434.
9. Руденко О.В., Сухорукова А.К., Сухоруков А.П. *Уравнения высокочастотной нелинейной акустики неоднородных сред* // Акуст. журн. 1994. Т. 40(2), С. 290–294; English translation: O.V. Rudenko, A.K. Sukhorukova, and A.P. Sukhorukov *Equations of high-frequency nonlinear acoustics for inhomogeneous media* // Acoustical Physics. 1994. V. 40. P. 264–268.
10. Лапидус Ю.Р., Руденко О.В. *Нелинейная генерация высших гармоник как способ профилирования каналов* // Акуст. журн. 1990. Т. 36(6). С. 1055–1058.
11. J. Doyle, M.J. Englefield *Similarity solutions of a generalized Burgers equation* // IMA Journal of Applied Mathematics. 1990. V. 44. P. 145–153.
12. J.G. Kingston and C. Sophocleous *On point transformations of a generalised Burgers equation* // Phys. Lett. A. 1991. V. 155. P. 15—19.
13. A.T. Cates *A point transformation between forms of the generalised Burgers equation* // Phys. Lett. A. 1989. V. 137. P. 113—114.
14. N. Ivanova, C. Sophocleous, R. Traciná *Lie group analysis of two-dimensional variable-coefficient Burgers Equation* // ZAMP-Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik. 2010. V. 31. P. 793–809.
15. O.A. Pocheketa, R.O. Popovych *Reduction operators and exact solutions of generalized Burgers equations* // 2011. arXiv:1112.6394v1 [math-ph].
16. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.

17. N.H. Ibragimov, ed. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations.* Vol.1: Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws. 1994, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA.
18. Ширков Д.В., Ковалев В.Ф. *Ренормгрупповые симметрии для решений нелинейных краевых задач* // УФН. 2008. Т. 178(8). С. 849–865. English translation: V.F. Kovalev, D.V. Shirkov *Renormalization-group symmetries for solutions of nonlinear boundary value problems* // Physics-Uspekhi. 2008. V. 51(8). P. 815–830.
19. N.H. Ibragimov, V.F. Kovalev *Approximate and Renormgroup Symmetries* // ISBN 978-3-642-00227-4, Springer Berlin Heidelberg New York, 2009. 160 p.
20. V.F. Kovalev, V.V. Pustovalov *Lie algebra of renormalization group admitted by initial value problem for Burgers equation* // Lie Groups and their Applications. 1994. V. 1. № 2. P. 104–120; Ковалев В.Ф., Пустовалов В.В. *Функциональная автомодельность точного решения уравнения Бюргерса* // Препринт ФИАН СССР им. П.Н. Лебедева, № 116. 1991. 29 с.;
Ковалев В.Ф., Пустовалов В.В. *Восьмимерная алгебра Ли ренормгруппы, допускаемой начальной задачей для уравнения Бюргерса* // Препринт ФИАН СССР им. П.Н. Лебедева, № 53. 1992. 14 с.
21. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Методы возмущений в групповом анализе* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики, Т. 34, М.: ВИНИТИ, 1989, С. 85–147; English translation: V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N.H. Ibragimov *Perturbation methods in group analysis* // J. Sov. Math. 1991. V. 55(1). P. 1450.
22. Байков В.А., Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Приближенные симметрии* // Матем. сб. 1988. Т. 136. ВЫП. 4. С. 435–450; English translation: V.A. Baikov, R.K. Gazizov, N. H. Ibragimov *Approximate symmetries* // Math. USSR-Sbornik. 1989. V. 64. P. 427.
23. Ковалев В.Ф., Руденко О.В. *Нелинейные акустические волны в каналах переменного сечения* // Акустический журнал. 2012. Т. 58. № 3. С. 296–303; Vladimir F. Kovalev, Oleg V. Rudenko *Nonlinear Acoustic Waves in Channels with Variable Cross Sections,* 2012. arXiv:1208.1360.
24. N.H. Ibragimov *A new conservation theorem* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 333. №. 1. P. 311—328.
25. N.H. Ibragimov *Nonlinear self-adjointness in constructing conservation laws* // Archives of ALGA. 2010/2011. № 7/8. P. 1—99.
26. Розанов В.В., Руденко В.О., Сысоев Н.Н. *Гемодинамика и нелинейная акустика: общие подходы и решения* // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 4–5. С. 602–612.
27. D.V. Shirkov *Coupling running through the looking-glass of dimensional reduction* // Particles and Nuclei (PEPAN), Letters. 2010. V. 7. No. 6. P. 162—168; arViv:1004.1510.

Владимир Федорович Ковалев,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
Лаборатория „Групповой анализ математических моделей
естествознания, техники и технологий“,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
Миусская пл., 4,
125047, г. Москва, Россия
E-mail: vfkvvfkv@gmail.com

Роман Валерьевич Куликов,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
Лаборатория „Групповой анализ математических моделей
естествознания, техники и технологий“,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: kulroman@rambler.ru