ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 147-154.

УДК 517.9

ОБОБЩЕНИЕ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

С.В. ХАБИРОВ

Аннотация. Найдены все частично инвариантные решения уравнений газовой динамики, построенные по конической подалгебре допускаемой моделью. Коническая подалгебра состоит из операторов вращения, переноса по времени и растяжения, а подмодель задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения образуют серию подмоделей, в основе которых лежит коническая подмодель по инвариантной переменной, зависящей от независимых переменных, с постоянными, зависящими от инвариантной функции. Для определения этой зависимости получены различные дополнительные переопределенные уравнения. Получены также две подмодели из системы уравнений с частными производными, расширяющие коническую подмодель. При этом определены все формулы, возвращающие решения в физическое пространство.

Ключевые слова: конические течения, частично инвариантные решения, газовая динамика.

Введение

Конические течения — это инвариантные решения, построенные на трехмерной подалгебре с базисными операторами вращения, переноса по времени и растяжения (коническая подалгебра). Подмодель конических течений задается квазилинейной неавтономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Без вращения эта подмодель — тема учебников [1, 2, 3], с вращением точные решения получены в [3, 4]. Обобщение конических течений можно производить двумя способами. Первое обобщение — это частично инвариантные решения на конической подалгебре. В статье рассмотрена нерегулярная частично инвариантная подмодель ранга 2 дефекта 1. Второе обобщение заключается в рассмотрении групповых решений надалгебры конической подалгебры. В последующих исследованиях будет рассмотрена дифференциально-инвариантная подмодель ранга $1+3$ пятимерной подалгебры [3], в которой к операторам конической подалгебры добавлены два оператора переноса, некоммутирующих с вращением. Эта подмодель совпадает с частично инвариантной подмоделью ранга 1 дефекта 2 [5]. В обоих случаях получены частные решения уравнений газовой динамики, отличные от решений конической подмодели. Почти все рассматриваемые решения редуцируются к коническим течениям. Это говорит об частичной устойчивости конических течений по отношению к возмущениям из рассматриваемых частично инвариантных подмоделей.

S.V. Khabirov, Extention of the canonic flows.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00026-а, 11-01-00047-а), Советом по грантам Президента РФ для государсвтенной поддержки научных школ (№НШ-2826.2008.1), грантом № 11.G34.31.0042 Правительства РФ (Постановление №220).

Поступила 20 декабря 2011 г.

1. Нерегулярная частично инвариантная подмодель ранга 2 дефекта 1 конической подалгебры

Базис конической подалгебры задан базисными операторами в цилиндрической системе координат: ∂_t — перенос по времени, ∂_θ — вращение, $t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r$ — растяжение. Инварианты подалгебры таковы: $s = xr^{-1}$; U, V, W — координаты скорости; ρ, S — плотность и энтропия. Давление определено уравнением состояния $p = f(\rho, S)$. Представление частично инвариантного решения ранга 2 дефекта 1 уравнений механики сплошных сред заключается в том, что все искомые функции зависят от s и $\alpha = \alpha(t, x, r, \theta)$ [5]. Функция α общего вида может быть любым инвариантом. В случае уравнений газовой динамики подстановка представления дает равенства

$$
\begin{aligned}
& r^{-1}(U - sV)S_s + S_\alpha(\alpha_t + \vec{u}\cdot\nabla\alpha) = 0,\\
& r^{-1}\left[(U - sV)\rho_s + \rho(U_s - sV_s + V)\right] + \rho_\alpha(\alpha_t + \vec{u}\cdot\nabla\alpha) + \rho\vec{u}_\alpha\cdot\nabla\alpha = 0,\\
& r^{-1}\left[(U - sV)U_s + \rho^{-1}p_s\right] + U_\alpha(\alpha_t + \vec{u}\cdot\nabla\alpha) + \rho^{-1}p_\alpha\alpha_x = 0, \qquad (1.1)\\
& r^{-1}\left[(U - sV)V_s - s\rho^{-1}p_s - W^2\right] + V_\alpha(\alpha_t + \vec{u}\cdot\nabla\alpha) + \rho^{-1}p_\alpha\alpha_r = 0,\\
& r^{-1}\left[(U - sV)W_s + VW\right] + W_\alpha(\alpha_t + \vec{u}\cdot\nabla\alpha) + \rho^{-1}\rho^{-1}p_\alpha\alpha_\theta = 0,
\end{aligned}
$$

где $\vec{u}$ — вектор с координатами U, V, W; ∇ — векторный градиент с координатами ∂_x, ∂_r, $r^{-1}\partial_\theta$. Если газодинамические функции не зависят от α, то получается коническая подмодель [3].

В уравнениях (1.1) все газодинамические функции зависят от s и α, поэтому удобно переменные s, α, t, θ взять в качестве новых независимых переменных. Замена задается равенствами $x = sr$, $r = r(t, \theta, \alpha, s)$, $r_\alpha \neq 0$. Выполнено тождество $\alpha \equiv \alpha\left(t, sr, r(t, \theta, \alpha, s), \theta\right)$. Производные функций r и α связаны равенствами

$$
\alpha_t = -\frac{r_t}{r_\alpha}, \quad \alpha_\theta = -\frac{r_\theta}{r_\alpha}, \quad \alpha_x = -\frac{r_s}{r r_\alpha}, \quad \alpha_r = -\frac{1}{r_\alpha}\left(1 + \frac{s r_s}{r}\right).
$$

Равенства (1.1) приводятся к виду

$$
\begin{gathered}
S_\alpha\left(r_t + (U - sV)r^{-1}r_s + Wr^{-1}r_\theta\right) - (U - sV)S_s r^{-1}r_\alpha = S_\alpha V,\\
\rho_\alpha r_t + \left(\rho(U - sV)\right)_\alpha r^{-1}r_s + (\rho W)_\alpha r^{-1}r_\theta -\\
-\left(\left(\rho(U - sV)\right)_s + 2\rho V\right) r^{-1}r_\alpha = (\rho V)_\alpha,\\
U_\alpha r_t + \left((U - sV)U_\alpha + \rho^{-1}p_\alpha\right) r^{-1}r_s + WU_\alpha r^{-1}r_\theta -\\
-\left((U - sV)U_s + \rho^{-1}p_s\right) r^{-1}r_\alpha = VU_\alpha, \qquad (1.2)\\
V_\alpha r_t + \left((U - sV)V_\alpha - s\rho^{-1}p_\alpha\right) r^{-1}r_s + WV_\alpha r^{-1}r_\theta -\\
-\left((U - sV)V_s - s\rho^{-1}p_s - W^2\right) r^{-1}r_\alpha = VV_\alpha + \rho^{-1}p_\alpha,\\
W_\alpha r_t + (U - sV)W_\alpha r^{-1}r_s + (WW_\alpha + \rho^{-1}p_\alpha)r^{-1}r_\theta -\\
-\Big((U - sV)W_s + VW\Big)r^{-1}r_\alpha = VW_\alpha.
\end{gathered}
$$

Получили пять линейных равенств для величин r_t, $r^{-1}r_s$, $r^{-1}r_\theta$, $r^{-1}r_\alpha$.

Лемма 1. *Если все производные функции r определяются из (1.2) как функции s, α, то происходит редукция к инвариантному решению двумерной подалгебры* [5].

Доказательство.

Пусть $r_t = A(\alpha, s)$, $r^{-1}r_s = B(\alpha, s)$, $r^{-1}r_\theta = C(\alpha, s)$, $r^{-1}r_\alpha = \mathcal{D}(\alpha, s)$. Условия совместимости дают $C_s = C_\alpha = 0 \Rightarrow C = C_0$ — постоянная; $A_s = BA$, $A_\alpha = \mathcal{D}A$, $AC_0 = 0$, $B_\alpha = \mathcal{D}_s \Rightarrow B = E_s$, $\mathcal{D} = E_\alpha$, $A = Ke^E$, K — постоянная, $KC_0 = 0$.

Если $C_0 = 0$, то $r = t\exp(E) \Rightarrow \alpha = \alpha(s, t^{-1}r)$ — инвариант подалгебры $\{\partial_\theta, t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r\}$.

Если $C_0 \neq 0$, то $K = 0$, $r = \exp(E + C_0\theta) \Rightarrow \alpha = \alpha(s, \ln r - C_0\theta)$ — инвариант подалгебры $\{\partial_\theta, t\partial_t + x\partial_x + r\partial_r + C_0^{-1}\partial_\theta\}$. Лемма 1 доказана.

Все производные $S_\alpha, \rho_\alpha, U_\alpha, V_\alpha, W_\alpha$ не равны нулю, иначе будет редукция к канонической инвариантной подмодели [3]. Значит, $r_t = R(\alpha, s) \Rightarrow r = tR(\alpha, s) + r_1(\alpha, s\theta)$, $r_1 \neq 0$. Подстановка выражения для r в (1.2), приравнивание нулю коэффициентов при свободной переменной t дает две системы: первая для r_1

$$
\begin{gathered}
S_\alpha(U - sV)r_{1s} + S_\alpha W r_{1\theta} - S_s(U - sV)r_{1\alpha} = S_\alpha(V - R)r_1, \\
\big(\rho(U - sV)\big)_\alpha r_{1s} + (\rho W)_\alpha r_{1\theta} - \\
-\big(2\rho V + \big(\rho(U - sV)\big)_s\big) r_{1\alpha} = \big((\rho V)_\alpha - \rho_\alpha R\big) r_1, \\
\left((U - sV)U_\alpha + \rho^{-1}p_\alpha\right) r_{1s} + WU_\alpha r_{1\theta} - \\
-\left((U - sV)U_s + \rho^{-1}p_s\right) r_{1\alpha} = U_\alpha(V - R)r_1, \\
\left((U - sV)V_\alpha - s\rho^{-1}p_\alpha\right) r_{1s} + WV_\alpha r_{1\theta} - \\
-\left((U - sV)V_s - s\rho^{-1}p_s - W^2\right) r_{1\alpha} = \left(V_\alpha(V - R) + \rho^{-1}p_\alpha\right) r_1, \\
(U - sV)W_\alpha r_{1s} + \left(WW_\alpha + \rho^{-1}p_\alpha\right) r_{1\theta} - \left((U - sV)W_s + VW\right) r_{1\alpha} = \\
= W_\alpha(V - R)r_1;
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

вторая система получается из (1.3) заменой r_1 на R. Если все производные функции r_1 определяются из (1.3), то аналогично определяются производные функции R. Произойдет редукция к инвариантному решению по двумерной подалгебре.

2. Случай, когда производная $r_{1\theta}$ не определяется из (1.3)

Пусть $r_{1\theta}$ не определяется из (1.3):

$$
WS_\alpha = 0, \quad (\rho W)_\alpha = 0, \quad WU_\alpha = 0, \quad WV_\alpha = 0, \quad WW_\alpha + \rho^{-1}p_\alpha = 0. \tag{2.1}
$$

Случай $W \neq 0$. Из (2.1) следует $S(s)$, $U(s)$, $V(s)$, $\rho W = C(s)$, $C(s)W + p = K(s)$. Подстановка в уравнение состояния приводит к равенству

$$
K(s) - C^2(s)s^{-1} = f\left(\rho, S(s)\right),
$$

которое возможно только для газа Чаплыгина

$$
p = f(\rho, S) = N(S) - \rho^{-1}\mathcal{D}^2(S), \quad K(s) = N\left(S(s)\right), \quad C(s) = \mathcal{D}\left(S(s)\right).
$$

Из (1.3) следуют равенства

$$
\begin{aligned}
&(U-sV)S'r_{1\alpha}=0,\\
&\mathcal{D}W^{-2}W_\alpha(U-sV)r_{1s}+\left[2\mathcal{D}VW^{-1}+\left(\mathcal{D}W^{-1}(U-sV)\right)_s\right]r_{1\alpha}=\\
&=\mathcal{D}W^{-2}W_\alpha(V-R)r_1,\\
&WW_\alpha r_{1s}+\left[(U-sV)U'+\rho^{-1}p_s\right]r_{1\alpha}=0,\\
&sWW_\alpha r_{1s}-\left[(U-sV)V'-s\rho^{-1}p_s-W^2\right]r_{1\alpha}=-WW_\alpha r_1,\\
&(U-sV)W_\alpha r_{1s}-\left[(U-sV)W_s+VW\right]r_{1\alpha}=W_\alpha(V-R)r_1.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Выполняются такие же равенства, если вместо r_1 подставить R. Если $(U-sV)S'\neq 0$, то $r_{1\alpha}=0=R_\alpha$, $r_\alpha=0$ — противоречие. Значит, $(U-sV)S'=0$, и следует альтернатива: $U-sV=0$ или $U-sV\neq 0$.

В первом случае $U=sV$ из (2.1) следует решение $V=U=R=0$, $N=N_0$ — постоянная, $p=N_0-\mathcal{D}^2(S)\rho^{-1}$ — уравнение состояния, $W=m(\theta)r^{-1}\left[\mathcal{D}\left(S(s)\right)\right]^{-1}$, $m(\theta)$ — произвольная функция. Это решение описывает произвольное движение частиц по окружностям.

Во втором случае движение изэнтропическое $S=S_0$, $\rho=\mathcal{D}_0W^{-1}$, $p=N_0-\mathcal{D}_0W$. Из (2.1) следуют равенства

$$
R=0,\quad U^2+V^2=C_0^2,\quad r=m(\theta)\left|2V(U-sV)^2(V+sU)^{-1}-W^2\right|^{-1/2},
$$

где C_0 — постоянная, и уравнения

$$
\begin{gathered}
\frac{ds}{dV}=\frac{s}{2V}+\frac{1}{2\sqrt{C_0^2-V^2}},\\
V\left[-4V(V+sU)^2+U(U-sV)(V+sU)-2V(U-sV)^2\right]=0.
\end{gathered}
\tag{2.3}
$$

Если $V\neq 0$, то из последнего равенства следует, что s иррационально выражается через V, а из (2.3) следует, что s трансцендентная функция V. Значит, $V=0$, $U=C_0$, $W=m(\theta)/r$, получаем произвольное спиралевидное движение частиц по цилиндрам, которое задается инвариантным решением уравнений газовой динамики на двумерной подалгебре $\{\partial_t,\partial_x\}$.

Случай $W=0\Rightarrow p(s)$, $r_{1\theta}$ — любое. Из (1.3) следуют равенства

$$
\begin{gathered}
(U-sV)(S_\alpha r_{1s}-S_s r_{1\alpha})=S_\alpha(V-R)r_1,\\
\big(\rho(U-sV)\big)_\alpha r_{1s}-\Big(2\rho V+\big(\rho(U-sV)\big)_s\Big)r_{1\alpha}=\big(\rho_\alpha(V-R)+\rho V_\alpha\big)r_1,\\
(U-sV)U_\alpha r_{1s}-\left((U-sV)U_s+\rho^{-1}p'\right)r_{1\alpha}=U_\alpha(V-R)r_1,\\
(U-sV)V_\alpha r_{1s}-\left((U-sV)V_s-s\rho^{-1}p'\right)r_{1\alpha}=V_\alpha(V-R)r_1,
\end{gathered}
\tag{2.4}
$$

а также уравнения, где вместо r_1 стоит R.

Пусть все коэффициенты при r_{1s} в (2.4) равны нулю (r_{1s} не определяется). Тогда $U=sV$ (иначе редукция к конической модели), и из (2.4) следует $U=V=W=0$, $p=p_0$ — покой.

Пусть из (2.4) определяется $r_1^{-1}r_{1s}=R^{-1}R_\alpha$ и $R\neq 0\Rightarrow r_1=Rk(\alpha,\theta)\neq 0$. Тогда из (2.4) следуют равенства

$$
\begin{gathered}
S_s(U-sV)k_\alpha=0,\quad \left[2\rho V+\left(\rho(U-sV)\right)_s\right]k_\alpha=0,\\
\left[(U-sV)U_s+\rho^{-1}p'\right]k_\alpha=0,\quad \left[(U-sV)V_s-s\rho^{-1}p'\right]k_\alpha=0.
\end{gathered}
$$

Если $k_\alpha \neq 0$, то при $U = sV$ следует покой: $U = V = W = 0$, $p = p_0$; а при $U \neq sV$ следуют уравнения конической модели без вращения

$$V_s + sU_s = 0, \quad \rho(U - sV)U_s + p' = 0,$$

$$(U - sV)\rho_s + \rho\left(V + (1 + s^2)U_s\right) = 0,$$

$$p(s) = f\bigl(\rho(\alpha, s), S(\alpha)\bigr).$$

Уравнения (2.4) для $r_1 = R$ принимают вид

$$(U - sV)R_s R^{-1} = V - R, \quad R(U_\alpha - sV_\alpha) = VU_\alpha - UV_\alpha.$$

Отсюда следует интеграл $U_s = (U - sV)d(s)$. Из уравнений конической модели следует, что $V = n(\alpha)V_1(s)$, $U = n(\alpha)U_1(s) \Rightarrow R = 0$ — противоречие.

Значит, $k_\alpha = 0 \Rightarrow r = R(s, \alpha)\bigl(t - k(\theta)\bigr) \Rightarrow \alpha = A\left(s, r\bigl(t - k(\theta)\bigr)^{-1}\right)$. Так как все газодинамические функции зависят от s и α, то можно считать $A_s = 0$ или $R_s = 0$, $R = \alpha$. В этом случае система (2.4) для R принимает вид

$$\begin{gathered} S_s(U - sV) + S_\alpha \alpha(V - \alpha) = 0, \\ 2\rho V + \bigl(\rho(U - sV)\bigr)_s + \alpha\left[\rho_\alpha(V - \alpha) + \rho V_\alpha\right] = 0, \\ (U - sV)U_s + \rho^{-1}p' + U_\alpha \alpha(V - \alpha) = 0, \\ (U - sV)V_s - s\rho^{-1}p' + V_\alpha \alpha(V - \alpha) = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Уравнение состояния можно записать в виде $S = G\bigl(p(s), \rho\bigr)$. Если функция G задана, то система (2.5) из четырех уравнений для четырех функций U, V, ρ, p, но давление p зависит только от s. Система (2.5) переопределена. Если задать $p(s)$, то из (2.5) найдутся функция S и уравнение состояния.

Например, пусть $p = p_0$ — постоянная. Тогда $U(s)$, $V(\rho)$, $\alpha(U - sV) = F(\rho)(V - \alpha)$ — интеграл, $(U' - sV')\rho_s + \alpha V'\rho_\alpha + V = 0$. Совместность уравнений для ρ дает

$$V\left[2\alpha(U' - sV') - 2FV' - (V - \alpha)F'\right] = 0.$$

Возможно только следующее решение: $V = 0$; $U(\alpha)$, $\rho(\alpha)$ — произвольные функции $\alpha = r\bigl(t - k(\theta)\bigr)^{-1}$.

В случае $W = 0$ есть еще одна возможность: r_{1s} определяется из (2.4), но $R = 0$. Тогда можно считать $r = r_1(\alpha, \theta)$, и система (2.4) принимает вид

$$\begin{gathered} S_s(U - sV)r_\alpha + S_\alpha V r = 0, \\ \left[2\rho V + \bigl(\rho(U - sV)\bigr)_s\right] r_\alpha + (V\rho)_\alpha r = 0, \\ \left[(U - sV)U_s + \rho^{-1}p'\right] r_\alpha + VU_\alpha r = 0, \\ \left[(U - sV)V_s - s\rho^{-1}p'\right] r_\alpha + VV_\alpha r = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Если все коэффициенты при r_α равны нулю, то решение редуцируется к инвариантной подмодели ранга 2 или 1. В противном случае можно считать $r = \alpha k(\theta)$, и система (2.6) упрощается

$$
\begin{gathered}
S_s(U-sV)+\alpha VS_\alpha=0,\\
2\rho V+\big(\rho(U-sV)\big)_s+\alpha(V\rho)_\alpha=0,\\
(U-sV)U_s+\rho^{-1}p'+\alpha VU_\alpha=0,\\
(U-sV)V_s-s\rho^{-1}p'+\alpha VV_\alpha=0.
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

Для системы (2.7) справедливы те же замечания, что и для системы (2.5). Изобарические движения редуцируются к плоским установившимся течениям.

3. Случай, когда производная $r_{1\theta}$ определена

Пусть $r_1^{-1}r_{1\theta}=E(\alpha,s)\Rightarrow r_1=r_2(s,\alpha)\exp\big(\theta E(s,\alpha)\big)$. Система (1.3) после подстановки r_1 и расщепления по θ сводится к двум системам. Первая однородная система для E:

$$
\begin{gathered}
(U-sV)(E_sS_\alpha-E_\alpha S_s)=0,\\
\big(\rho(U-sV)\big)_\alpha E_s-\big[2\rho V+\big(\rho(U-sV)\big)_s\big]\,E_\alpha=0,\\
[(U-sV)U_\alpha+\rho^{-1}p_\alpha]\,E_s-[(U-sV)V_s-s\rho^{-1}p_s-W^2]\,E_\alpha=0,\\
[(U-sV)V_\alpha-s\rho^{-1}p_\alpha]\,E_s-[(U-sV)V_s-s\rho^{-1}p_s-W^2]\,E_\alpha=0,\\
(U-sV)W_\alpha E_s-[(U-sV)W_s+VW]\,E_\alpha=0.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

Вторая система для r_2:

$$
\begin{gathered}
(U-sV)\,[S_\alpha(\ln r_2)_s-S_s(\ln r_2)_\alpha]=S_\alpha(V-R-WE),\\
\big(\rho(U-sV)\big)_\alpha(\ln r_2)_s-\big[2\rho V+\big(\rho(U-sV)\big)_s\big]\,(\ln r_2)_\alpha=\\
=\rho_\alpha(V-R)+\rho V_\alpha-(\rho W)_\alpha E,\\
[(U-sV)U_\alpha+\rho^{-1}p_\alpha]\,(\ln r_2)_s-[(U-sV)U_s+\rho^{-1}p_s]\,(\ln r_2)_\alpha=\\
=U_\alpha(V-R-WE),\\
[(U-sV)V_\alpha+\rho^{-1}p_\alpha]\,(\ln r_2)_s-[(U-sV)V_s-s\rho^{-1}p_s-W^2]\,(\ln r_2)_\alpha=\\
=V_\alpha(V-R-WE)+\rho^{-1}p_\alpha,\\
(U-sV)W_\alpha(\ln r_2)_s-[(U-sV)W_s+VW]\,(\ln r_2)_\alpha=\\
=W_\alpha(V-R-WE)-\rho^{-1}p_\alpha E.
\end{gathered}
\tag{3.2}
$$

Кроме этих систем есть еще одна система (1.3) для R. Если положить $E=0$, то система (3.2) совпадает с (1.3) для R. Можно показать, что в случае $U=sV$ новых решений не получается. Далее считаем $U\neq sV$. При этом в силу леммы 1 из системы (3.2) не определено либо а) $(\ln r_2)_s$, либо б) $(\ln r_2)_\alpha$.

Случай а). Коэффициенты при $(\ln r_2)_s$ в системе (3.2) равны нулю. Из этого следуют равенста

$$
S=S(s),\quad W=W(s),\quad V+sU=c(s),\quad \rho(U-sV)=b(s),\quad p=l(s)-b(s)U.
$$

Есть только одна функция $U(s,\alpha)$, которая существенно зависит от α, через которую все остальные V,ρ,p выражаются. Уравнение совместности переопределяет решение. Решение возможно лишь для газа Чаплыгина. Из системы (3.1) следует $E=E(s)$, а из системы (1.3) для R следует $R=0$. Из системы (3.2) следует $U_\alpha=0$ — противоречие.

Случай б). Коэффициенты при $(\ln r_2)_\alpha$ в системе (3.2) равны нулю. Из этого следуют уравнения конической подмодели [4], в которой все постоянные интегралов и общего решения зависят от параметра α:

$$S=S(\alpha),\quad W^2=\rho(U-sV)\mathcal{D}(\alpha),$$

$$U^2+V^2+W^2+2\int\rho^{-1}dp=B^2(\alpha), \tag{3.3}$$

$$V_s+sU_s=\rho\mathcal{D}(\alpha),\quad U_s\left((U-sV)^2-f_\rho\right)+sV_s=V,$$

где $p=f(\rho,S)$ — уравнение состояния.

Из (3.1) следует $E_s=0$ (иначе редукция), и система (3.1) выполняется тождественно. Уравнения (1.3) для R принимают вид

$$QS_\alpha=0,\quad QW_\alpha=0,\quad QV_\alpha=\rho^{-1}p_\alpha(R+sR_s),$$
$$QU_\alpha=-\rho^{-1}p_\alpha R_s,\quad Q(\ln\rho)_\alpha=RV_\alpha-(U_\alpha-sV_\alpha)R_s, \tag{3.4}$$

где $Q=(U-sV)R_s-R(V-R)$.

Если $Q\neq0$, то $S=S_0$ — постоянная, $W=W(s)$, и из (3.2) следует $E=0$, $r_2=RK(\alpha)$. Из совместности (3.4) и (3.3) следует $W=0$, $R=BB'(V_\alpha+sV_\alpha)^{-1}$. Условия переопределенной подмодели имеют вид:

$$f_\rho(\ln\rho)^2_\alpha=U^2_\alpha+V^2_\alpha,\quad U^2+V^2+2\int f_\rho d\ln\rho=B^2,$$
$$V_s+sU_s=0,\quad U_s\left[(U-sV)^2-s^2-f_\rho\right]=V. \tag{3.5}$$

Пусть $Q=0$, тогда из (3.4) следует

$$Rp_\alpha=0,\quad RV_\alpha=R_s(U_\alpha-sV_\alpha),\quad (U-sV)R_s=R(V-R). \tag{3.6}$$

Если $p_\alpha\neq0$, то $R=0$, и уравнения (3.6) выполнены. Из уравнений (3.2) получим $(\ln r_2)_s=-U_\alpha(V_\alpha+sU_\alpha)^{-1}$, $E=-W_\alpha(V_\alpha+sU_\alpha)^{-1}$, B, S — постоянные,

$$f_\rho(\ln\rho)^2_\alpha=U^2_\alpha+V^2_\alpha+W^2_\alpha. \tag{3.7}$$

Уравнения (3.4), (3.7) задают переопределенную подмодель, обобщающую коническую подмодель.

Если $p_\alpha=0$, то от (3.4) остаются два уравнения

$$R_s(U_\alpha-sV_\alpha)=RV_\alpha,\quad (U-sV)R_s=R(V-R). \tag{3.8}$$

Система (3.2) для нередуцируемых решений сводится к двум равенствам

$$(U-sV)(\ln r_2)_s=V-R-WE(\alpha),\quad (U_\alpha-sV_\alpha)(\ln r_2)_s=V_\alpha-EW_\alpha. \tag{3.9}$$

Отсюда следует равенство при $R\neq0$

$$E\big(W_\alpha(U-sV)-W(U_\alpha-sV_\alpha)\big)=0,\quad R=\frac{VU_\alpha-UV_\alpha}{U_\alpha-sV_\alpha}. \tag{3.10}$$

Если $E\neq0$, то справедлив интеграл $W=n(s)(U-sV)$ и $r_2=R\exp\left(-E(\alpha)n(s)\right)$, а из (3.8) следует

$$(V_\alpha+sU_\alpha)\left[U_{s\alpha}(U-sV)-U_s(U_\alpha-sV_\alpha)\right]=0.$$

Если первый сомножитель равен нулю, то из (3.3) следует, что все функции не зависят от α (редукция к конической подмодели). Приравнивание нулю второго сомножителя дает интеграл $U(s) = m(s)(U - sV)$. Изучение совместности с системой (3.3) дает $R = 0$ — противоречие.

Пусть $E = 0$, $R \neq 0$. Тогда $r_2 = RK(\alpha)$, функция R определяется формулой (3.10). Из (3.8) получим дополнительное уравнение к системе (3.3):

$$\frac{U_\alpha - sV_\alpha}{U - sV} = \frac{U_\alpha V_{\alpha s} - V_\alpha U_{\alpha s}}{U_\alpha V_s - V_\alpha U_s}. \tag{3.11}$$

Переопределенная система (3.3), (3.11) задает подмодель, обобщающую коническую подмодель.

Последний случай $R = 0$, $E \neq 0$ приводит к подмодели, состоящей из системы (3.3) и дополнительного уравнения

$$\frac{U_\alpha - sV_\alpha}{U - sV} = \frac{V_\alpha - EW_\alpha}{V - EW}$$

с произвольной функцией $E(\alpha)$.

Итак, все возможности решения переопределенной системы (1.3) перечислены. Они сводятся к решению конической подмодели по переменной s с постоянными зависящими от α. Для определения зависимости от α имеются различные дополнительные переопределяющие уравнения. Кроме того, имеются еще две подмодели (2.5) и (2.7), заданные переопределенными системами уравнений с частными производными, обобщающие коническую подмодель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Лекции по основам газовой динамики.* Москва-Ижевск. 2003. 336 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. *Теоретическая гидромеханика.* М.-Л.: Гостехиздат. 1948.
3. Хабиров С.В. *Аналитические методы в газовой динамике.* Уфа: Гилем, 2003. 192 с.
4. Хабиров С.В. *Конические закрученные течения* // Труды Всероссийской научной конференции 27-30 июня 2011 г. Стерлитамак «Дифференциальные уравнения и их приложения». Уфа: Гилем, 2011. С. 116–118.
5. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978. 400 с.

Салават Валеевич Хабиров,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
Лаборатория „Групповой анализ математических моделей
естествознания, техники и технологий“,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН,
Лаборатория „Дифференциальные уравнения механики“,
Проспект Октября, 71,
450054, г. Уфа, Россия
E-mail: habirov@anrb.ru