ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 79-90.

УДК 517.944 + 532.5

СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ МОРЯ

С.В. ГОЛОВИН, М.Ю. КАЗАКОВА

Аннотация. Рассматривается система уравнений динамической конвекции моря, задающая движения мелкой воды с переменной плотностью под действием силы Кориолиса. Модель применяется для описания океанических и атмосферных течений средних широт.

С теоретико-групповой точки зрения интерес представляет бесконечномерная группа, допускаемая уравнениями модели, содержащая пять произвольных функций времени. Целью работы является демонстрация физического смысла преобразований симметрии, а также построение оптимальной системы подалгебр малых размерностей и новых точных решений.

Ключевые слова: Уравнения динамической конвекции моря, оптимальная система подалгебр, частично-инвариантное решение.

1. Постановка задачи

Рассматривается система уравнений динамической конвекции моря [1, 2], задающая движения мелкой воды с переменной плотностью под действием силы Кориолиса:

$$\begin{aligned}
&u_t + uu_x + vu_y + wu_z - fv = -\rho^{-1}p_x,\\
&v_t + uv_x + vv_y + wv_z + fu = -\rho^{-1}p_y,\\
&0 = -\rho^{-1}p_z - g,\\
&\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z = 0,\\
&u_x + v_y + w_z = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Целью работы является исследование симметрий системы (1), а также построение некоторых новых частично-инвариантных точных решений.

Система координат выбирается как показано на рис. 1. Через N и S обозначены северный и южный полюсы, θ — географическая широта точки на сфере. Ось Ox направлена на восток, Oy — на север, сила тяжести действует в отрицательном направлении оси Oz. Соответствующим образом определяются компоненты скорости (u, v, w). Давление и плотность обозначаются буквами p и ρ; g — ускорение силы тяжести.

Уравнения модели выводятся при следующих предположениях [2]:

$$H/R \ll 1, \tag{2}$$

$$(L/R)^2 \ll 1, \tag{3}$$

S.V. Golovin, M.Yu. Kazakova, Symmetries and exact solutions of the model of dynamic convection of the sea.

Работа выполнена при поддержке Президентской программы поддержки ведущих научных школ (НШ-6706.2012.1) и молодых докторов наук (МД-168.2011.1), гранта РФФИ (11-01-0026-а) и программы ОЭММПУ РАН № 2.13.4.

Поступила 31 октября 2012 г.

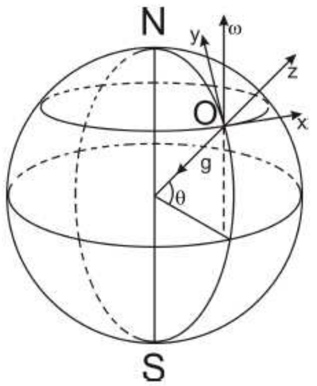

Рис. 1. Система координат

$$\operatorname{tg}\varphi_0(L/R) \ll 1, \tag{4}$$

здесь R — радиус Земли, L, H — характерные горизонтальные и вертикальные масштабы движения, φ_0 — широта; $f = 2\Omega\cos\varphi_0 = 1$ — параметр Кориолиса. Приближение (2) означает, что рассматривается тонкий слой жидкости в пренебрежении радиальным искажениям при перемещении от одного значения z к другому. Это соотношение хорошо согласуется с реальными отношениями глубины океана и радиуса Земли (численные оценки приведены в [2]). Согласно приближению (3) горизонтальные масштабы движения существенно меньше радиуса Земли. Последнее приближение (4) является наиболее строгим. Оно выполняется для средних или низких широт, для которых $\operatorname{tg}\varphi_0 \leqslant 1$. Это исключает применение модели к анализу течений в высоких широтах, то есть в полярных морях.

С теоретико-групповой точки зрения интерес представляет бесконечномерная группа G, допускаемая уравнениями модели [1], порождаемая следующими инфинитезимальными операторами:

$$\begin{array}{l}
X_1 = x\partial_x + y\partial_y + 2z\partial_z + u\partial_u + v\partial_v + 2w\partial_w + 2p\partial_p;\\
X_2 = -y\partial_x + x\partial_y - v\partial_u + u\partial_v;\\
X_3 = p\partial_p + \rho\partial_\rho;\\
\langle\tau\rangle_4 = 2\tau\partial_t + (\tau' x + \tau y)\partial_x - (\tau x - \tau' y)\partial_y - [(\tau' + \tau''')\frac{x^2+y^2}{2} + 2\tau' z]\partial_z +\\
\qquad +(-\tau' u + \tau v + \tau'' x + \tau' y)\partial_u - (\tau u + \tau' v + \tau' x - \tau'' y)\partial_v -\\
\qquad -[(\tau''' + \tau')(xu + yv) + 4\tau' w + (\tau'''' + \tau'')\frac{x^2+y^2}{2} + 2\tau'' z]\partial_w - 2\tau' p\partial_p;\\
\langle\alpha\rangle_5 = \alpha\partial_x - (\alpha'' x + \alpha' y)\partial_z + \alpha'\partial_u - (\alpha'' u + \alpha' v + \alpha''' x + \alpha'' y)\partial_w;\\
\langle\beta\rangle_6 = \beta\partial_y + (\beta' x - \beta'' y)\partial_z + \beta'\partial_v + (\beta' u - \beta'' v + \beta'' x - \beta''' y)\partial_w;\\
\langle\gamma\rangle_7 = \gamma\partial_z + \gamma'\partial_w;\\
\langle\delta\rangle_8 = \delta\partial_p.
\end{array} \tag{5}$$

Операторы алгебры L содержат пять произвольных гладких функции времени $\tau(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, $\delta(t)$. Штрихами обозначены производные от этих функций по t.

Конечные преобразования для операторов $\langle\alpha\rangle_5, \langle\beta\rangle_6, \langle\gamma\rangle_7$ имеют вид:

$$\begin{array}{l}
\langle\alpha\rangle_5 : \bar{x} = x + \alpha(t),\ \bar{u} = u + \alpha'(t),\\
\qquad \bar{z} = z + (\alpha''(t)x - \alpha'(t)y) + \frac{1}{2}\alpha(t)\alpha''(t),\\
\qquad \bar{w} = w + (\alpha''(t)u - \alpha'(t)v + \alpha'''(t)x - \alpha''(t)y) + \frac{1}{2}(\alpha(t)\alpha''(t))';
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\langle\beta\rangle_6 : \bar{y} &= y + \beta(t),\ \bar{v} = v + \beta'(t),\\
\bar{z} &= z + (\beta'(t)x + \beta''(t)y) + \tfrac{1}{2}\alpha(t)\alpha''(t),\\
\bar{w} &= w + (\beta'(t)u + \beta''(t)v + \beta'(t)x + \beta'''(t)y) + \tfrac{1}{2}(\beta(t)\beta''(t))';
\end{aligned}$$

$$\langle\gamma\rangle_7 : \bar{z} = z + \gamma(t),\ \bar{w} = w + \gamma'(t).$$

Указаны только нетривиальные преобразования, остальные величины преобразуются тождественно. Эти преобразования представляют собой обобщённые галилеевы переносы в направлении осей Ox, Oy, Oz соответственно. Применение данных преобразований к решениям, содержащим особенности (источник, сток, вихрь), позволяет получить решение с теми же особенностями, двигающимся по заданной траектории.

Непосредственное вычисление конечного преобразования, соответствующего оператору $\langle\tau\rangle_4$, приводит к неявной форме, неудобной для его дальнейшего применения. Для нахождения явного вида преобразование использовалась симметрия инфинитезимальных операторов алгебры L относительно преобразований допускаемой группы G. Действительно, поскольку преобразования группы G сохраняют систему уравнений (1), их действие на любой из операторов алгебры L даёт линейную комбинацию тех же операторов. Пользуясь этим соображением, а также информацией о виде допускаемого преобразования, следующим из неявного представления, можно получить искомое преобразование симметрии явно. Для удобства восприятия это преобразование записано в цилиндрических координатах (r, θ, z), $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; U и V — радиальная и окружная компоненты скорости в плоскости Oxy, W — компонента скорости вдоль оси Oz (рис. 1).

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= \varphi(t),\\
\bar{r} &= r\sqrt{\varphi'(t)},\\
\bar{\theta} &= \theta - \frac{1}{2}\left(\varphi(t) - t\right),\\
\bar{z} &= \frac{1}{\varphi'(t)}z + \frac{-\varphi'(t)^2 + \varphi'(t)^4 - 3\varphi''(t)^2 + 2\varphi'(t)\varphi^{(3)}(t)}{4\varphi'(t)^3}\frac{r^2}{2},\\
\bar{u} &= \frac{u_r}{\sqrt{\varphi'(t)}} + \frac{r}{2}\left(\frac{\varphi''(t)}{2\varphi'(t)^{3/2}}\right),\\
\bar{v} &= v_\theta\frac{1}{\sqrt{\varphi'(t)}} + \frac{r}{2}\frac{1-\varphi'(t)}{\varphi^{3/2}(t)},\\
\bar{w} &= \frac{1}{\varphi'(t)^2}w + \frac{1}{8(\varphi'(t))^5}\big(2ru_r\varphi'(t)(-\varphi'(t)^2 + \varphi'(t)^4 - 3\varphi''(t)^2) +\\
&\quad + r^2\varphi''(t)(\varphi'(t)^2 + \varphi'(t)^4 + 9\varphi''(t)^2) +\\
&\quad + 2r(2u_r\varphi'''(t) + r\varphi^{(IV)}(t)) - 10r^2\varphi'(t)\varphi''(t)\varphi'''(t)\big),\\
\bar{p} &= \frac{p}{\varphi'(t)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $\varphi(t)$ — произвольная функция. Данное преобразование позволяет генерировать нестационарные решении из решений, описывающих стационарные течения жидкости.

2. Оптимальная система подалгебр

Для систематического описания инвариантных и частично инвариантных решений системы (1) необходимо построить оптимальную систему подалгебр для алгебры L. Нетривиальность данной задачи заключается в бесконечномерности алгебры L. Первым шагом построения оптимальной системы подалгебр является вычисление группы внутренних автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, L$ [3]. Применение стандартного алгоритма [4] даёт следующий результат:

$$A_1 : \overline{\tau} = \tau, \overline{\alpha} = e^{-t_1}\alpha, \overline{\beta} = e^{-t_1}\beta, \overline{\gamma} = e^{-2t_1}\gamma, \overline{\delta} = e^{-2t_1}\delta;$$

$$A_2 : \overline{\alpha} = \alpha\cos t_2 - \beta\sin t_2, \overline{\beta} = \alpha\sin t_2 + \beta\cos t_2, \quad \overline{\tau} = \tau, \quad \overline{\gamma} = \gamma, \overline{\delta} = \delta;$$

$$A_3 : \overline{\tau} = \tau, \quad \overline{\alpha} = \alpha, \quad \overline{\beta} = \beta, \quad \overline{\gamma} = \gamma, \quad \overline{\delta} = e^{-t_3}\delta;$$

$$A_4 : \overline{\tau} = \frac{T(t_4+\chi(t))}{2\chi'(t)}, \text{ где } \tau(t) = \frac{T(\chi(t))}{2\chi'(t)},$$

$$\overline{\delta} = 2\chi'(t)D(t_4+\chi(t)), \text{ где } \delta(t) = 2\chi'(t)D(\chi(t)),$$

$$\overline{\gamma} = 2\chi'(t)\Gamma(t_4+\chi(t)), \gamma(t) = 2\chi'(t)\Gamma(\chi(t));$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_0(t_4+\chi(t))\cos\frac{t}{2} - \beta_0(t_4+\chi(t))\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{2\chi'(t)}}, \text{ где } \alpha(t) = \frac{\alpha_0(\chi(t))\cos\frac{t}{2} - \beta_0(\chi(t))\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{2\chi'(t)}}$$

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha_0(t_4+\chi(t))\sin\frac{t}{2} + \beta_0(t_4+\chi(t))\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{2\chi'(t)}}, \text{ где } \beta(t) = \frac{\alpha_0(\chi(t))\sin\frac{t}{2} + \beta_0(\chi(t))\cos\frac{t}{2}}{\sqrt{2\chi'(t)}}$$

$$A_5 : \overline{\tau} = \tau, \overline{\alpha} = \alpha + A_5 t_5, \overline{\beta} = \beta + B_5 t_5,$$

$$\overline{\gamma} = \gamma + \Gamma_{51}t_5 + \Gamma_{52}\frac{{t_5}^2}{2}, \overline{\delta} = \delta,$$

$$A_5 = [(x^1+\tau')\sigma - 2\tau\sigma'], B_5 = (\tau - x^2)\sigma,$$

$$\Gamma_{51} = \sigma\alpha'' - \alpha\sigma'' - \sigma'\beta - \sigma\beta', \Gamma_{52} = \sigma A_5'' - \sigma'' A_5 - \sigma' B_5 - \sigma B_5';$$

$$A_6 : \overline{\tau} = \tau, \overline{\alpha} = \alpha + A_6 t_6, \overline{\beta} = \beta + B_6 t_6,$$

$$\overline{\gamma} = \gamma + \Gamma_{61}t_6 + \Gamma_{62}\frac{{t_6}^2}{2}, \overline{\delta} = \delta,$$

$$A_6 = (x^2 - \tau)\sigma, B_6 = [(x^1+\tau')\sigma - 2\tau\sigma'],$$

$$\Gamma_{61} = \sigma\beta'' - \sigma''\beta + \alpha\sigma' + \sigma\alpha', \Gamma_{62} = \sigma B_6'' - \sigma'' B_6 + \sigma' A_6 + \sigma A_6';$$

$$A_7 : \overline{\tau} = \tau, \overline{\alpha} = \alpha, \overline{\beta} = \beta, \overline{\gamma} = \gamma + \Gamma_{71}t_7, \overline{\delta} = \delta,$$

$$\Gamma_{71} = 2x^1\sigma - (\tau\sigma)';$$

$$A_8 : \overline{\tau} = \tau, \overline{\alpha} = \alpha, \overline{\beta} = \beta, \overline{\gamma} = \gamma, \overline{\delta} = \delta + \Delta_{81}t_8,$$

$$\Delta_{81} = 2x^1\sigma + x^3\sigma - 2(\tau\sigma' + \sigma\tau').$$

В приведённых формулах указаны преобразованные координаты инфинитезимального оператора

$$X = aX_1 + bX_2 + cX_3 + \langle\tau\rangle_4 + \langle\alpha\rangle_5 + \langle\beta\rangle_6 + \langle\gamma\rangle_7 + \langle\delta\rangle_8 \qquad (7)$$

под действием каждого из автоморфизмов. Вместо неявного представления внутреннего автоморфизма A_4 удобно использовать его явную запись, получаемую действием преобразования (6) на каждый из операторов алгебры L, записанный в координатном виде (5).

Рассматриваемую алгебру L можно разложить в полупрямую сумму $L = L_4 \dot{\oplus} L_\infty$, где $L_4 = \{X_1, X_2, X_3, \langle\tau\rangle_4\}$. Будем строить оптимальную систему подалгебр с помощью двухшагового алгоритма [3]. Сначала построим оптимальную систему для подалгебры L_4, которая, в свою очередь, допускает разложение в прямую сумму конечномерной и бесконечномерной частей. Для $L_3 = \{X_1, X_2, X_3\}$ оптимальная система строится просто, в силу абелевости подалгебры. Она состоит из одного трехмерного представителя

$\{X_1, X_2, X_3\}$, трех двумерных $\{aX_1 + X_2, bX_2 + X_3\}$, $\{X_1, cX_2 + X_3\}$, $\{X_1, X_2\}$, трех одномерных $\{aX_1 + bX_2 + X_3\}$, $\{aX_1 + X_2\}, \{X_1\}$ и нулевой подалгебры.

Одномерные подалгебры из L_4, имеющие ненулевую координату $\langle\tau\rangle_4$, действием автоморфизма A_4 можно привести к виду с $\tau = 1$. Действительно, под действием замены (6) инфинитезимальный оператор $\langle\tau\rangle_4$ изменится следующим образом:

$$\langle\tau\rangle_4 = \tau(t)\partial_t + \dots \quad \to \quad \langle\bar{\tau}\rangle_4 = \tau(t)\varphi'(t)\partial_{\bar{t}} + \dots .$$

Выбор $\varphi = \int 1/\tau(t)dt$ приводит оператор $\langle\tau\rangle_4$ к оператору переноса ∂_t. Таким образом, в оптимальную систему войдет одномерная подалгебра $\{aX_1 + bX_2 + cX_3 + \langle 1\rangle_4\}$.

Перейдем к построению одномерных представителей оптимальной системы для алгебры L. В общем виде оператор записывается в виде (7). Вначале рассмотрим случай $\tau \neq 0$. Как и выше, при помощи действия автоморфизма A_4 всегда можно добиться $\tau = 1$. Использование автоморфизмов A_5, A_6 позволяет сделать $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Автоморфизмы A_7, A_8 позволяют занулить координаты γ и δ. Таким образом, в оптимальную систему включается подалгебра $\{aX_1 + bX_2 + cX_3 + \langle 1\rangle_4\}$.

Если же $\tau = 0$, в случае $a \neq 0$, то по-прежнему с помощью A_5, A_6 делается $\alpha = 0$, $\beta = 0$. С помощью A_7, A_8 зануляются координаты $\gamma = 0$, $\delta = 0$, и в оптимальную систему войдет подалгебра $\{X_1 + bX_2 + cX_3\}$. Если же $a = 0$ и $b \neq 0$, то с помощью A_7 нельзя занулить γ. В этом случае получается ещё один одномерный представитель $\{bX_2 + X_3 + \langle\gamma\rangle_7\}$.

В случае $a = 0$, $b = 0$, автоморфизм A_4 позволяет сделать $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Координата γ остаётся общего вида. Действуя оператором A_8, получаем $\delta = 0$. Тогда в оптимальную систему записывается $\{X_3 + \langle 1\rangle_5 + \langle\gamma\rangle_7\}$.

Остается рассмотреть случай, когда $c = 0$, то есть X_3 не входит в базисный оператор подалгебры. Если при этом $a = 0$ и $b = 0$, то получаем подалгебру $\{\langle 1\rangle_5 + \langle\gamma\rangle_7 + \langle\delta\rangle_8\}$. Если же $a \neq 0$, имеем уже рассмотренный случай. При $b \neq 0$ получаем одномерную подалгебру $\{bX_2 + \langle\gamma\rangle_7 + \langle\delta\rangle_8\}$.

Таким образом, оптимальная система содержит следующие одномерные подалгебры:

$$\begin{gathered}\{aX_1 + bX_2 + cX_3 + \langle 1\rangle_4\}, \quad \{X_1 + bX_2 + cX_3\},\\ \{bX_2 + X_3 + \langle\gamma\rangle_7\}, \quad \{\langle 1\rangle_5 + \langle\gamma\rangle_7 + \langle\delta\rangle_8\},\\ \{bX_2 + \langle\gamma\rangle_7 + \langle\delta\rangle_8\}, \quad \{X_3 + \langle 1\rangle_5 + \langle\gamma\rangle_7\}, \{aX_1 - 2aX_3 + \langle\delta\rangle_8\}.\end{gathered}$$

Аналогичным образом строится оптимальная система двумерных подалгебр. Условие подалгебры (коммутатор базисных операторов подалгебры является их линейной комбинацией) позволяет дополнительно уточнить вид произвольных функций, входящих в базисные операторы. Как и для одномерных подалгебр, наиболее сложный для дальнейшего использования оператор $\langle\tau\rangle_4$ действием преобразования (6) всегда можно привести к оператору переноса по времени $\langle 1\rangle_4 = \partial_t$. Окончательно, оптимальная система подалгебр выглядит следующим образом (функции $\alpha_{1,2}(t)$, $\beta_{1,2}(t)$, $\gamma_{1,2}(t)$, $\delta_{1,2}(t)$ произвольны, если не указано иное):

$$\begin{aligned}&\{X_1 + \langle 1\rangle_4, X_2 + \langle C\rangle_4 + \langle C_1 e^{t/2}\cos(\tfrac{t}{2}) - C_2 e^{t/2}\sin(\tfrac{t}{2})\rangle_5 +\\ &+\langle C_2 e^{t/2}\cos(\tfrac{t}{2}) + C_1 e^{t/2}\sin(\tfrac{t}{2})\rangle_6 + \langle C_3 e^{2t}\rangle_7 + \langle C_4 e^{t}\rangle_8\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\{X_1 + \langle 1\rangle_4, cX_2 + X_3 + \langle C\rangle_4 + \langle C_1 e^{t/2}\cos(\tfrac{t}{2}) - C_2 e^{t/2}\sin(\tfrac{t}{2})\rangle_5 +\\ &+\langle C_2 e^{t/2}\cos(\tfrac{t}{2}) + C_1 e^{t/2}\sin(\tfrac{t}{2})\rangle_6 + \langle C_3 e^{2t}\rangle_7 + \langle C_4 e^{t}\rangle_8\},\end{aligned}$$

$$\{dX_1 + X_2 + \langle 1\rangle_4, fX_2 + X_3 + \langle C\rangle_4 + \langle C_1 e^{\frac{d}{2}t}\rangle_5 + \langle C_2 e^{\frac{d}{2}t}\rangle_6 + \langle C_3 e^{2dt}\rangle_7 + \langle C_4 e^{dt}\rangle_8\},$$

$$\{aX_1 + bX_2 + cX_3 + \langle 1\rangle_4, \langle C\rangle_4 + \langle\alpha_2\rangle_5 + \langle\beta_2\rangle_6 + \langle C_1 e^{2at}\rangle_7 + \langle C_2 e^{(2a+C)t}\rangle_8\},$$
где функции α_2, β_2 являются решением следующей системы:
$$\begin{pmatrix}\alpha_2'\\ \beta_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a & b+1\\ b-1 & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\end{pmatrix},$$

$\{\langle 1\rangle_4, \langle C\rangle_4 + \langle\alpha_2\rangle_5 + \langle\beta_2\rangle_6 + \langle\gamma_2\rangle_7 + \langle\delta_2\rangle_8\}$,

$\{X_1 + \langle C_1\rangle_5 + \langle C_2\rangle_6 + \langle C_3\rangle_7 + \langle C_4\rangle_8, X_2 + \langle 1\rangle_4\}$,

$\{X_1 + \langle C_1 \cos\left(\frac{1}{2}(c-1)t\right) + C_2 \sin\left(\frac{c-1}{2}t\right)\rangle_5 +$
$+\langle C_2 \cos\left(\frac{c-1}{2}t\right) - C_1 \sin\left(\frac{c-1}{2}t\right)\rangle_6 + \langle C_3\rangle_7 + \langle C_4 e^{t/2}\rangle_8, cX_2 + X_3 + \langle 1\rangle_4\}$,

$\{dX_1 + X_2 + \langle C_1 \cos\left(\frac{1}{2}(c-1)t\right) + C_2 \sin\left(\frac{c-1}{2}t\right)\rangle_5 +$
$+\langle C_2 \cos\left(\frac{c-1}{2}t\right) - C_1 \sin\left(\frac{c-1}{2}t\right)\rangle_6 + \langle C_3\rangle_7 + \langle C_4 e^{t/2}\rangle_8, fX_2 + X_3 + \langle 1\rangle_4\}$,

$\{aX_1 + bX_2 + cX_3 + \langle C_1 \cos\left(\frac{t}{2}\right) - C_2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\rangle_5 + \langle C_2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C_1 \sin\left(\frac{t}{2}\right)\rangle_6 + \langle C_3\rangle_7 + \langle C_4\rangle_8, \langle 1\rangle_4\}$,

$\{X_1, X_2\}$,

$\{X_1, cX_2 + X_3\}$,

$\{dX_1 + X_2, fX_2 + X_3\}$,

$\{bX_2 + X_3 + \langle\gamma_1\rangle_7, \langle\gamma_2\rangle_7\}$,

$\{\langle 1\rangle_5 + \langle\gamma_1\rangle_7 + \langle\delta_1\rangle_8, \langle\alpha_2\rangle_5 + \langle C + \alpha_2'\rangle_6 + \langle\gamma_2\rangle_7 + \langle\delta_2\rangle_8\}$,

$\{bX_2 + \langle\gamma_1\rangle_7 + \langle\delta_1\rangle_8, \langle\gamma_2\rangle_7 + \langle\delta_2\rangle_8\}$,

$\{X_3 + \langle 1\rangle_5 + \langle\gamma\rangle_7, \langle\alpha_2\rangle_5 + \langle C + \alpha_2'\rangle_6 + \langle\gamma_2\rangle_7\}$.

3. Частично инвариантное решение системы

Для удобства дальнейшего исследования запишем уравнения динамической конвекции моря в цилиндрических координатах:

$$\begin{array}{l} U_t + UU_r + r^{-1}VU_\theta + WU_z - V + \rho^{-1}p_r = r^{-1}V^2, \\ V_t + UV_r + r^{-1}VV_\theta + WV_z + U + (r\rho)^{-1}p_\theta = -r^{-1}UV, \\ \rho_t + U\rho_r + r^{-1}V\rho_\theta + W\rho_z = 0, \\ U_r + r^{-1}U + r^{-1}V_\theta + W_z = 0, \\ \rho = -p_z. \end{array} \tag{8}$$

Рассмотрим следующую пятимерную подалгебру алгебры Ли симметрии системы:

$$L_5 = \langle \partial_z, t\partial_z + \partial_W, \partial_\theta, p\partial_p + \rho\partial_\rho, \partial_p\rangle. \tag{9}$$

Базисные операторы алгебры (9) соответствуют, в порядке следования, таким операторам алгебры Ли: $\langle 1\rangle_7, \langle t\rangle_7, X_2, X_3, \langle 1\rangle_8$.

Алгебра (9) порождает частично инвариантное решение ранга 2 и дефекта 3, имеющее представление:

$$\begin{array}{c} U = U(t,r),\ V = V(t,r),\ W = W(t,r,\theta,z), \\ \rho = \rho(t,r,\theta,z),\ p = p(t,r,\theta,z), \end{array} \tag{10}$$

причем $\rho > 0$, $p > 0$ в силу неотрицательности плотности и давления.

Подставим представление (10) в исходную систему, получим следующую подмодель:

$$\begin{aligned}
&U_t + UU_r - V + \rho^{-1}p_r = r^{-1}V^2,\\
&V_t + UV_r + U + (r\rho)^{-1}p_\theta = -r^{-1}UV,\\
&\rho_t + U\rho_r + r^{-1}V\rho_\theta + W\rho_z = 0,\\
&U_r + r^{-1}U + W_z = 0,\\
&\rho = -p_z.
\end{aligned} \tag{11}$$

Разрешим полученные уравнения относительно производных функции p:

$$\begin{gathered}
p_r = r^{-1}\rho\left(rV + V^2 - r\left(UU_r + U_t\right)\right),\\
p_\theta = -\rho\left(U\left(rV_r\right) + rV_t\right),\\
p_z = -\rho.
\end{gathered} \tag{12}$$

Оставшиеся уравнения системы примут следующий вид:

$$W_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU\right), \tag{13}$$

$$\rho_t + U\rho_r + r^{-1}V\rho_\theta + W\rho_z = 0. \tag{14}$$

Уравнение (13) определяет функцию $W(t,r,\theta,z)$:

$$W(t,r,\theta,z) = -\frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU\right) + W_0(t,r,\theta). \tag{15}$$

Из условий совместности уравнений (12) получим выражения для производных функции плотности:

$$\rho_r = -r^{-1}\left(rV + V^2 - r\left(UU_r + U_t\right)\right)\rho_z, \tag{16}$$

$$\rho_\theta = \left(U\left(r + V + rV_r\right) + rV_t\right)\rho_z. \tag{17}$$

Интегрирование соответствующего условия совместности системы (12) с учетом полученных представлений (16), (17) позволяет определить V_t:

$$rV_t = -rV_rU - UV - rU - h(t),$$

где $h(t)$ — произвольная функция времени, появившаяся после интегрирования. Подстановка полученного выражения во второе уравнение системы (11) дает следующее:

$$p_\theta = h(t)\rho.$$

Обозначим $f(t,r) = -U_t - UU_r + V + \dfrac{V^2}{r}$, тогда первое уравнение системы (12) примет вид:

$$p_r = f(t,r)\rho.$$

В итоге, система (12) переписывается в следующем виде:

$$\begin{cases}
p_\theta = h(t)\rho,\\
p_r = f(t,r)\rho,\\
p_z = -\rho.
\end{cases} \tag{18}$$

Плотность ρ находится интегрированием уравнений (16), (17):

$$\rho(t,r,\theta,z) = R\left(t,\lambda\right), \quad \lambda = h(t)\theta - z + g(t,r), \tag{19}$$

где $R > 0$ — некоторая произвольная функция, $g(t,r) = \displaystyle\int f(t,r)dr$. Подставляя полученное в (18), находим функцию p:

$$p = \int R\left(t,\lambda\right)d\lambda + p_0(t). \tag{20}$$

В соотношении (19) зависимость переменной λ от полярного угла θ линейна, поэтому для непрерывности плотности во всем пространстве течения функция R должна быть периодической. По той же причине давление должно быть периодической функцией. Но в силу неотрицательности ρ из формулы (20) следует, что давление является строго возрастающей функцией переменной λ. Следовательно, непрерывности решения можно добиться только для $h(t) = 0$.

Подстановка представления (19) в уравнение (14) даёт следующее:

$$R_t + R_\lambda \left(g_t(t,r) + U g_r(t,r) + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU) + W_0(t,r,\theta) \right) = 0.$$

Сомножитель при R_λ должен зависеть только от λ. Этого можно добиться за счёт выбора функций W_0 и U:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU) = f(t), \quad W_0(t,r,\theta) = g_t(t,r) + U g_r(t,r) + \frac{g}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU),$$
$$U(t,r) = f(t)\frac{r}{2} + \frac{a(t)}{r},$$

где $f(t)$, $a(t)$ — некоторые произвольные функции времени.

В результате имеем уравнение для функции $R(t, \lambda)$:

$$R_t - f(t)\lambda R_\lambda = 0. \tag{21}$$

Его решение записывается так:

$$R(t,\lambda) = R\left(\lambda \exp(\int f(t)dt) \right).$$

Теперь можем найти функцию V из второго уравнения системы (11):

$$V(t,r) = -\frac{r}{2} + \frac{C(\xi)}{r}, \tag{22}$$

где ξ — лагранжева координата, заданная следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = U(t,r), \\ r(0) = \xi. \end{cases} \tag{23}$$

Тогда первое уравнение системы (11) определяет введенную нами функцию $g(t, r)$:

$$g(t,r) = -\frac{r^2}{4}\left(f'(t) + \frac{1}{2}f(t)^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{a(t)^2}{2r^2} - a'(t)\ln r + \int \left(\frac{C(\xi)^2}{r^3} \right) dr. \tag{24}$$

Таким образом, получаем следующее точное решение:

$$\begin{aligned}
&U = \frac{rf(t)}{2} + \frac{q(t)}{2\pi r},\\
&V = -\frac{r}{2} + \frac{\Gamma(\xi)}{2\pi r},\\
&W = -zf(t) + W_0(t,r),\\
&R = R\Big(\lambda \exp(\int f(t)dt)\Big),\\
&P = \int R\Big(\lambda \exp(\int f(t)dt)\Big) d\lambda + p_0(t)\\
&g = -\frac{r^2}{4}\left(f'(t) + \frac{1}{2}f(t)^2 + \frac{1}{2} \right) - \frac{q(t)^2}{4\pi^2 r^2} - \frac{q'(t)}{2\pi}\ln r + \frac{1}{4\pi^2}\int \left(\frac{\Gamma(\xi)^2}{r^3} \right) dr.
\end{aligned}$$

Введены обозначения
$$a(t) = \frac{q(t)}{2\pi}, \quad C(\xi) = \frac{\Gamma(\xi)}{2\pi}.$$
Для произвольных функций, входящих в решение, имеется ясная физическая трактовка. Функция $q(t)$ задаёт расход распределённого на оси Oz источника. Функция $f(t)$ определяет скорость радиального разлёта частиц. Функция $\Gamma(\xi)$ позволяет задать произвольно циркуляцию вектора скорости по окружности $r = \text{const}$ в некотором цилиндрическом слое.

Характерными для решения являются поверхности постоянства плотности $\rho = \rho_0$:
$$z = g(t,r) + C\exp\left(\int f(t)dt\right). \tag{25}$$

Зададим функцию $q(t)$ в виде:
$$\begin{aligned} &q(t) = 2\pi(1-\cos t) \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\\ &q(t) = 0 \text{ при } t > 2\pi, \quad t < 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Оставшиеся произвольные функции положим равными нулю: $f(t) = \Gamma(\xi) = 0$. На рис. 2,*а* показаны образующие поверхностей постоянной плотности в данном случае. В начальный момент времени поверхности равной плотности являются параболоидами. При $t > 0$, когда функция $q(t)$ принимает ненулевое значение, появляется особенность при $r = 0$, связанная с включением источника на оси. Поверхности равной плотности при этом отходят от оси $r = 0$. Когда же действие источника прекращается, поверхности вновь становятся параболоидами.

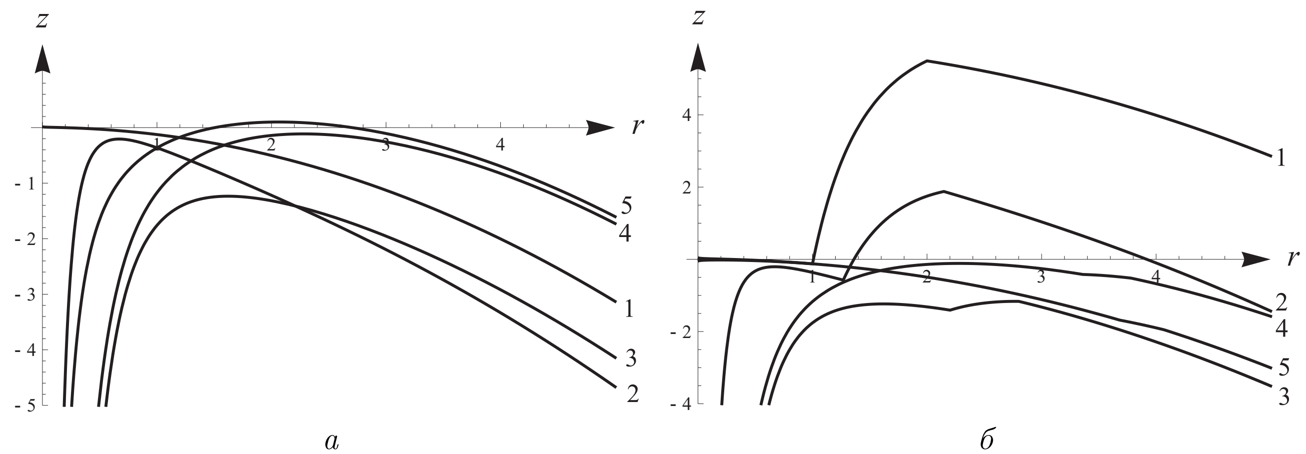

Рис. 2. Поверхности постоянной плотности (25) для равных промежутков времени $t \in (0, 2\pi)$ пронумерованы в порядке возрастания t при *а* — $\Gamma(\xi) = 0$, *б* — $\Gamma(\xi) \neq 0$

Рассмотрим случай, когда помимо источника на оси имеется конечная закрутка течения в некотором цилиндрическом слое. Для этого зададим функцию $\Gamma(\xi)$ следующим образом:
$$\Gamma(\xi) = 0 \text{ при } \xi < 1, \xi > 2,$$
$$\Gamma(\xi) = 8\pi \text{ при } 1 \leqslant \xi \leqslant 2.$$

Функцию $q(t)$ оставим той же, что и раньше, определенной (26), а $f(t)$ тождественно равной нулю. В этом случае получим поверхности постоянной плотности, изображенные на рис. 2, *б*. В области, в которой $\Gamma(\xi)$ принимает ненулевое значение, происходит «выпучивание» поверхностей постоянной плотности, которое со временем сохраняется, но удаляется от оси Oz.

4. Автомодельное решение

В этой части работы рассмотрим построение инвариантного решения относительно следующей четырехмерной подалгебры алгебры Ли симметрии системы:

$$L_4 = \langle \partial_z, t\partial_z + \partial_W, p\partial_p + \rho\partial_\rho, r\partial_r + 2z\partial_z + U\partial_U + V\partial_V + 2W\partial_W + p\partial_p \rangle, \quad (27)$$

где базисные операторы соответствуют следующим операторам алгебры $\langle 1\rangle_7$, $\langle t\rangle_7$, X_3, X_1.

Подалгебра (27) имеет инварианты $t, \theta, U/r, V/r$ и порождает частично-инвариантное решение ранга 2 и дефекта 3, имеющее представление:

$$\begin{gathered} U = ru(t,\theta),\ V = rv(t,\theta),\ W = w(t,r,\theta,z), \\ \rho = \rho(t,r,\theta,z),\ p = p(t,r,\theta,z). \end{gathered} \quad (28)$$

Попытка исследования подобного решения при $\rho = r^a R(t,\theta)$, $a = \mathrm{const}$ была сделана в [5].

После подстановки представления решения (28) получим фактор-систему следующего вида:

$$rv\,(u_\theta - 1) + ru^2 - rv^2 + \frac{1}{\rho}p_r + ru_t = 0, \quad (29)$$

$$rvv_\theta + u(2rv + r) + \frac{1}{r\rho}p_\theta + rv_t = 0, \quad (30)$$

$$\rho_z w + ru\rho_r + v\rho_\theta + \rho_t = 0, \quad (31)$$

$$2u + v_\theta + w_z = 0, \quad (32)$$

$$\rho = -p_z. \quad (33)$$

Из уравнения (32) получим представление для функции $w(t,r,\theta,z)$:

$$w(t,r,\theta,z) = -(2u+v)z + w_0(t,r,\theta). \quad (34)$$

Уравнения (29), (30) и (33) дают явное выражение для производных функции $p(t,r,\theta,z)$. Вычисление смешанных вторых производных от p дает два условия совместности, являющиеся уравнениями для функции $\rho(t,r,\theta,z)$. Они интегрируются в виде

$$\rho(t,r,\theta,z) = R(t,\lambda), \quad \lambda = \frac{r^2}{2}f(t,\theta) - z. \quad (35)$$

Введено обозначение

$$f(t,\theta) = v\,(u_\theta - 1) + u^2 - v^2 + u_t. \quad (36)$$

После подстановки (35) в исходные уравнения получим уравнение для функции $R(t,\lambda)$:

$$R_{\lambda\lambda}\left(\frac{r^2}{2}\left(f_t + f\,(4u + v_\theta) + vf_\theta\right) + \lambda\left(-2u - v_\theta\right) - w_0\right) + R_{t\lambda} = 0. \quad (37)$$

Множитель при $R_{\lambda\lambda}$ должен зависеть только от t и λ, отсюда следует

$$\begin{gathered} w_0 = \frac{r^2}{2}\left(f_t + f\,(4u + v_\theta) + vf_\theta\right) + \frac{h'(t)}{k(t)}, \\ u = \frac{1}{2}\left(-v_\theta + \frac{k'(t)}{k(t)}\right). \end{gathered} \quad (38)$$

Здесь $h(t)$, $k(t)$ — произвольные функции времени.

Подстановка соотношений (38) в (37) даёт окончательное выражение для плотности. Для удобства запишем её в виде производной от некоторой функции P:

$$\rho = P'(k(t)\lambda + h(t)). \quad (39)$$

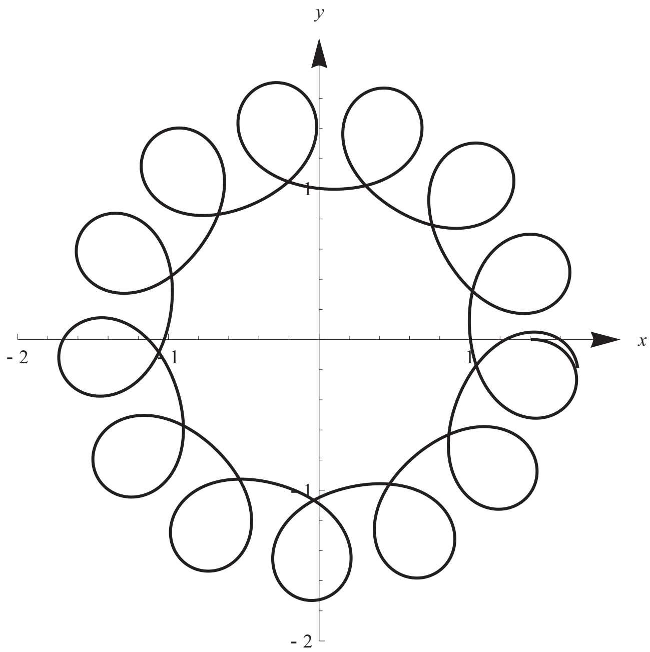

Рис. 3. Траектории автомодельного решения

Тогда давление имеет следующий вид:

$$p = \frac{1}{k(t)} P(\lambda k(t) + h(t)). \tag{40}$$

Подстановка представлений (39), (40) в исходную систему уравнений (29)–(33) приводит к следующей системе уравнений для функций $f(t,\theta), u(t,\theta), v(t,\theta)$:

$$\begin{cases} f_\theta = -2v_t + \left(-2u - 2v\dfrac{k'(t)}{k(t)}\right), \\ u_\theta = -\dfrac{1}{v}u_t + \left(1 - \dfrac{f}{v} - \dfrac{u^2}{v} + v\right), \\ v_\theta = -2u + \dfrac{k'(t)}{k(t)}. \end{cases} \tag{41}$$

Будем искать осесимметричное решение системы (41):

$$u = u(t), v = v(t), f = f(t).$$

Получим следующее решение:

$$u = \frac{k'(t)}{k(t)}, \quad v = \frac{A}{k(t)} - \frac{1}{2},$$
$$f = \frac{1}{4}\left(\frac{k'(t)}{k(t)}\right)^2 - \frac{k''(t)}{k(t)} - \frac{1}{4} + \left(\frac{A}{k(t)}\right)^2.$$

Здесь $k(t)$ — произвольная функция, A — произвольная константа. Построим траектории движения частиц в плоскости Oxy, для этого выберем

$$k(t) = 2 + \sin t, \quad A = 1.$$

Данное решение является периодическим во времени. На рис. 3 изображена характерная траектория частицы в течении жидкости, определённом полученным решением.

Заключение

Для бесконечномерной группы, допускаемой уравнениями динамической конвекции моря, построена оптимальная система одномерных и двумерных подалгебр. В ходе исследования вычислено в явном виде конечное преобразование для оператора допускаемой группы, преобразующего время t в произвольную функцию от t. Данный вид преобразования имел ключевое значение для построения оптимальной системы.

Также получены новые точные решения уравнений динамической конвекции моря. Решения являются частично инвариантными ранга 2 и дефекта 3. Первое описывает трехмерное вихревое течение, порожденное взаимодействием распределённого на вертикальной прямой источника произвольной мощности и произвольного вращения в цилиндрическом слое, окружающем источник. Второе решение соответствует вихревому периодическому по времени осесимметричному течению вокруг начала координат. Применяя допустимые преобразования симметрии, можно генерировать эквивалентные решения, в которых вихрь движется по произвольной траектории в горизонтальной плоскости и вращается жестко с произвольной угловой скоростью. Для первого решения приводятся физические характеристики поверхностей постоянной плотности потока, для второго решения построены траектории частиц.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Овсянников Л.В. *Уравнения динамической конвекции моря.* Препринт, ИгиЛ, СО РАН, 1967.
2. Ле Блон П., Майсек Л. *Волны в океане.* М.: Мир, 1981.
3. Овсянников Л.В. *Об оптимальных системах подалгебр* // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
4. Головин С.В., Чесноков А.А. *Групповой анализ дифференциальных уравнений: учебное пособие.* Изд-во Новосибирского госуниверситета, 2008.
5. Босых Н.Ю., Чупахин А.П. *Об одном частично инвариантном решении уравнений гидродинамики атмосферы*, Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, 2010, Т. 10, № 4, С. 26–35.

Сергей Валерьевич Головин,
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
пр-т ак. Лаврентьева, 15,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: golovin@hydro.nsc.ru

Мария Юрьевна Казакова,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, г. Новосибирск, Россия
E-mail: m.u.kazakova@gmail.com