ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 69-78.

УДК 517.9

ИТЕРАТИВНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

И.И. ГОЛИЧЕВ

Аннотация. Построен и обоснован итерационный процесс, сводящий решение системы нелинейных нестационарных уравнений Навье-Стокса к решению последовательности линейных задач. Использование априорных оценок решения позволяет доказать сходимость метода с любого начального приближения. Показано, что предлагаемый метод может быть использован для доказательства существования и единственности решения.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, априорные оценки, итерационный процесс.

1. Введение

Рассмотрим начально-краевую задачу для обобщенной системы уравнений Навье-Стокса

$$\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + v_i\mathbf{v}_{x_i} + grad\ p = \mathbf{f}(x,t), \tag{1}$$

$$\mathbf{v}|_{S_T} = 0, \ \ \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{2}$$

$$div\ \mathbf{v} = 0 \tag{3}$$

в области $Q_T = \Omega \times [0,T]$, $S_T = S \times [0,T]$, S — граница области Ω, $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, $\mathbf{L}_2(Q_T) = \mathbf{G}(Q_T) \oplus \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$ — ортогональное разложение на градиентную и соленоидальную составляющие части пространства $\mathbf{L}_2(Q_T)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$,

$$div\ \mathbf{a} = 0, \ \ \mathbf{a}|_S = 0. \tag{4}$$

Здесь и далее, в основном, применяются обозначения, используемые в работе [1]. Для однозначной определенности давления будем считать, что $\int\limits_{\Omega} p(x,t)dx = 0$ почти всюду по t на [0,T].

2. Построение итерационного процесса

При построении итерационного процесса используется априорная оценка

$$\|\mathbf{v}_x(t)\| = \|\mathbf{v}_x(x,t)\| \leqslant M(t) \leqslant M_0, \ \ \forall t \in [0,T]. \tag{5}$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha_R(t, \mathbf{v}_x) = min[1, R(t)/\|\mathbf{v}_x(t)\|], \tag{6}$$

I.I. Golichev, Iterative linearization of the evolution Navier-Stokes equations.

© Голичев И.И. 2012.

Поступила 24 августа 2011 г.

где R(t) — неубывающая, положительная функция на [0,T]. Оператор $P_R\mathbf{v}_x = \alpha_R(t,\mathbf{v}_x)\mathbf{v}_x(t)$ является оператором проектирования на шар $\{\mathbf{v}_x(t) : \|\mathbf{v}_x(t)\| \leqslant R(t)\}$, поэтому, в силу свойства оператора проектирования,

$$\left\|P_R\mathbf{v}_x^1(t) - P_R\mathbf{v}_x^2(t)\right\| \leqslant \left\|\mathbf{v}_x^1 - \mathbf{v}_x^2\right\| \forall t \in [0,T], \mathbf{v}^1(t), \mathbf{v}^2(t) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega). \tag{7}$$

Если существует решение задачи (1) – (3) и выполняется ограничение (5), то при $R(T) \geq M(t)$ $\alpha_R(t,\mathbf{v}_x) \equiv 1$, поэтому $\mathbf{v}$ является также решением уравнения

$$\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + \alpha_R(t,\mathbf{v}_x)v_i\mathbf{v}_{x_i} + grad\ p = \mathbf{f} \tag{8}$$

с начально-краевыми условиями (2) и условием (3).

Для решения задачи (8), (2), (3) построим итерационный процесс:

$$\mathbf{v}_t^{k+1} - \nu\Delta\mathbf{v}^{k+1} + \alpha_k v_i^k \mathbf{v}_{x_i}^{k+1} + grad\ p_{k+1} = \mathbf{f}, \tag{9}$$

$$\mathbf{v}^{k+1}\big|_{S_T} = 0, \ \ \mathbf{v}^{k+1}\big|_{t=0} = \mathbf{a}(x), \tag{10}$$

$$div\ \mathbf{v}^{k+1} = 0, \tag{11}$$

где $\alpha_k = \alpha_k(t) = \alpha_R(t,\mathbf{v}_x^k)$.

Будем предполагать, что область Ω ограничена, $S \in C^2$, n равно 2 или 3. Обозначим $a_i^k = \alpha_R(t,\mathbf{v}_x^k)v_i^k$ и покажем, что

$$\left\|a_i^k\right\|_4 \leqslant c_1R(t), \quad i = \overline{1,n},\ k = 0,1,\ldots,\ t \in [0,T]. \tag{12}$$

Для этого воспользуемся хорошо известными неравенствами ([2] гл. 2)

$$\|v\|_4 \leqslant c_2\|v_x\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}, \quad \text{при } n = 2, \tag{13}$$

$$\|v\|_4 \leqslant c_3\|v_x\|^{\frac{3}{4}}\|v\|^{\frac{1}{4}}, \quad \text{при } n = 3, \tag{14}$$

$$\|v\| \leqslant c_4\|v_x\|, \tag{15}$$

справедливыми для $\forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, где $c_2 = 2^{\frac{1}{4}}$, $c_3 = 2^{\frac{1}{2}}$, $c_4 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}$, λ_1 — первое собственное значение оператора Лапласа с однородными краевыми условиями первого рода.

Для дальнейшего заметим, что если функция v не обращается в нуль на S, но удовлетворяет условию: $\int\limits_\Omega v dx = 0$, то также выполняются неравенства (13), (14), но с постоянными $c_2 = c_2(\Omega)$, $c_3 = c_3(\Omega)$, зависящими от области.

Из неравенств (13) – (15) следует, что

$$\|v\|_4 \leqslant c_2c_4^{\frac{1}{2}}\|v_x\|, \quad n = 2, \tag{16}$$

$$\|v\|_4 \leqslant c_3c_4^{\frac{1}{4}}\|v_x\|, \quad n = 3. \tag{17}$$

Учитывая последние неравенства и соотношение (6), получаем

$$\left\|\alpha_R(t,\mathbf{v}_x^k)v_i^k\right\|_4 \leqslant c_5\alpha_R(t,\mathbf{v}_x^k)\left\|\mathbf{v}_x^k\right\| \leqslant c_5R(t), \tag{18}$$

где $c_5 = 2^{\frac{1}{4}}c_4^{\frac{1}{2}}$ при $n = 2$ и $c_5 = 2^{\frac{1}{2}}c_4^{\frac{1}{4}}$ при $n = 3$.

Пользуясь теоремой $1'$, гл.4, [1], убеждаемся в существовании и единственности решения задачи (9) – (11) в классе функций $\mathbf{W}_2^{2,1}(Q_T)$, $\mathbf{p}_x \in \mathbf{L}_2(Q_T)$.

3. Ограниченность последовательности итераций

Далее будем обозначать $|||\mathbf{v}|||_{0t} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_2(Q_T)}$, $Q_t = \Omega \times [0,t]$ и введем вспомогательную норму $[\mathbf{v}]^2_{\lambda,t} = \frac{1}{2} \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax} \|\mathbf{v}_x(\tau)\|^2 + \nu|||\Delta\mathbf{v}|||^2_{0,t} + \lambda|||\Delta\mathbf{v}_x|||^2_{0,t}$.

Покажем, что при достаточно больших $\lambda > 0$, последовательность $\{v_k\}_{k=0}^{\infty}$, определенная итерационным процессом (9) – (11) при любом $\mathbf{v}_0 \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{2,1}(Q_T)$, ограничена

$$[\mathbf{v}^k]_{\lambda t} \leqslant c_t e^{\lambda t} \leqslant c_6 \quad \forall t \in [0,T], k = 0, 1, \ldots. \tag{19}$$

Пусть $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^{2,1}(Q_T)$, оценим норму $|||\lambda v_i w_{x_i}|||_{0,t}$. Используя неравенства (16) – (18) и второе энергетическое неравенство:

$$\|v_{xx}\| \leqslant c_7\|\Delta v\| \qquad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega), \tag{20}$$

получаем

$$|||\alpha v_i w_{x_i}|||_{0,t} \leqslant \left(\int_0^t \int_\Omega |\alpha\mathbf{v}|^2|\mathbf{w}_x|^2\, dx d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^t \|\alpha\mathbf{v}\|_4^2\|\mathbf{w}_x\|_4^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c_5 \left(\int_0^t \|\alpha\mathbf{v}_x\|^2\|\mathbf{w}_x\|_4^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_5 R(t) \left(\int_0^t \|\mathbf{w}_x\|_4^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{21}$$

Для оценки интеграла в правой части неравенства (21) воспользуемся неравенством (20) и неравенствами (13), (14), в которых c_2 и c_3 зависят от области.

При $n = 2$ получаем

$$\left(\int_0^t \|\mathbf{w}_x\|_4^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_2c_7 \left(\int_0^t \|\mathbf{w}_x\|\|\Delta\mathbf{w}\|\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_2c_7|||\mathbf{w}_x|||^{\frac{1}{2}}_{0,t}|||\Delta\mathbf{w}|||^{\frac{1}{2}}_{0,t}.$$

Откуда получаем, что при $n = 2$

$$|||\alpha v_i w_{x_i}|||_{0,t} \leqslant c_2c_5c_7R(t)|||\mathbf{w}_x|||^{\frac{1}{2}}_{0,t}|||\Delta\mathbf{w}|||^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

При $n = 3$, применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{4}{3}, 4$, получаем

$$\left(\int_0^t \|\mathbf{w}_x\|_4^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_3c_7 \left(\int_0^t \|\mathbf{w}_x\|^{\frac{1}{2}}\|\Delta\mathbf{w}\|^{\frac{3}{2}}\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant c_3c_7|||\mathbf{w}_x|||^{\frac{1}{4}}_{0,t}|||\Delta\mathbf{w}|||^{\frac{3}{4}}_{0,t}.$$

Таким образом, получаем оценку при $n = 3$

$$|||\alpha v_i w_{x_i}|||_{0,t} \leqslant c_3c_5c_7R(t)|||\mathbf{w}_x|||^{\frac{1}{4}}_{0,t}|||\Delta\mathbf{w}|||^{\frac{3}{4}}_{0,t}.$$

Из оценок (21), (22) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $c(\varepsilon)$, что

$$|||\alpha v_i w_{x_i}|||_{0,t} \leqslant \varepsilon|||\Delta\mathbf{w}|||_{0,t} + c(\varepsilon)|||\mathbf{w}_x|||_{0,t}, \tag{23}$$

где $c(\varepsilon)$ зависит от $c_i (i = 2, 3, 4, 7), R(t), \varepsilon$. Здесь при $n = 2$ использовалось неравенство Юнга: $ab \leqslant \frac{1}{m}\varepsilon_1^m a^m + \frac{m-1}{m}\varepsilon_1^{-\frac{m-1}{m}} b^{\frac{m}{m-1}}$, где $m = 2$ при $n = 2$, а при $n = 3$ полагаем $m = \frac{4}{3}$.

При доказательстве сходимости итерационного процесса (9) – (11) нам потребуется оценить интеграл $|||(\alpha_1 v_i^1 - \alpha_2 v_i^2)\mathbf{v}_{x_i}|||_{0,t}$, где $\alpha_i = \alpha_i(t, \mathbf{v}_x^i) = min[1, R(t)/\|\mathbf{v}_x(t)\|]$ при условии, что

$$\underset{t\in[0,T]}{vraimax}\|\mathbf{v}_x(t)\| \leqslant c_8, \quad |||\Delta\mathbf{v}|||_{0,T} \leqslant c_8. \tag{24}$$

При $n = 2$ получаем оценки

$$|||(\alpha_1 v_i^1 - \alpha_2 v_i^2)\mathbf{v}_{x_i}|||_{0,t} \leqslant \left(\int_0^t \|\alpha_1\mathbf{v}^1 - \alpha_2\mathbf{v}^2\|_4^2\ \|\mathbf{v}_x\|_4^2\ d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}c_2c_7\left(\int\limits_0^t \|\alpha_1\mathbf{v}^1-\alpha_2\mathbf{v}^2\|\|\alpha_1\mathbf{v}_x^1-\alpha_2\mathbf{v}_x^2\|\|\mathbf{v}_x\|\|\Delta\mathbf{v}\|\,d\tau\right)^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}c_2c_7\ \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\,\|\mathbf{v}_x(\tau)\|^{\frac12}\ \ \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\,\|\alpha_1\mathbf{v}_x^1-\alpha_2\mathbf{v}_x^2\|^{\frac12}\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_0^t \|\alpha_1\mathbf{v}^1-\alpha_2\mathbf{v}^2\|\,\|\Delta\mathbf{v}\|\ d\tau\right)^{\frac12}.$$

Учитывая неравенство (24) и соотношения

$$\|\alpha_1\mathbf{v}_x^1-\alpha_2\mathbf{v}_x^2\|=\|P_R\mathbf{v}_x^1-P_R\mathbf{v}_x^2\|\leqslant\|\mathbf{v}_x^1-\mathbf{v}_x^2\|,$$

получаем

$$|||(\alpha_1v_i^1-\alpha_2v_i^2)\mathbf{v}_{x_i}|||_{0,t}\leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}c_2c_7c_8^{\frac12}\ \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\|\mathbf{v}_x^1-\mathbf{v}_x^2\|^{\frac12}\left(\int\limits_0^t \|\alpha_1\mathbf{v}_x^1-\alpha_2\mathbf{v}_x^2\|\|\Delta\mathbf{v}\|\,d\tau\right)^{\frac12}\leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}c_2c_7c_8\ \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\|\mathbf{v}_x^1-\mathbf{v}_x^2\|^{\frac12}\|\mathbf{v}_x^1-\mathbf{v}_x^2\|_{0,t}^{\frac12}. \tag{25}$$

При $n=3$ аналогичным образом доказывается, что

$$|||(\alpha_1v_i^1-\alpha_2v_i^2)\mathbf{v}_{x_i}|||_{0,t}\leqslant 2c_3c_7c_8\ \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\|\mathbf{v}_x^1-\mathbf{v}_x^2\|^{\frac34}|||\mathbf{v}_x^1-\mathbf{v}_x^2|||_{0,t}^{\frac14}. \tag{26}$$

Вновь, используя неравенство Юнга и учитывая неравенства (25), (26), получаем, что

$$|||(\alpha_1v_i^1-\alpha_2v_i^2)\mathbf{v}_{x_i}|||_{0,t}\leqslant \varepsilon\ \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\|\mathbf{v}_x^1-\mathbf{v}_x^2\|+c(\varepsilon)|||\mathbf{v}_x^1-\mathbf{v}_x^2|||_{0,t}, \tag{27}$$

где $c(\varepsilon)$ зависит от ε и $c_i(i=2,3,7,8)$.

В работе [1] вводится оператор $\tilde\Delta$ как расширение по Фридрихсу оператора $\mathbf{P_j}\Delta$, где $\mathbf{P_j}\Delta$ — проекция из $\mathbf{L}_2(\Omega)$ в $\overset{\circ}{\mathbf{J}}(\Omega)$, определенного на $\mathbf{W}_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{\mathbf{J}}(\Omega)$. В подпространстве $\overset{\circ}{\mathbf{J}}(\Omega)$ оператор $\tilde\Delta$ обладает теми же свойствами, что и оператор Δ в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. §4, гл. 2 и §5, гл. 3, [1]).

Обозначим $\tilde{\mathbf{v}}^k=\mathbf{v}^ke^{-\lambda t}$, умножим уравнение (9) на $-\tilde\Delta\mathbf{v}^{k+1}e^{-2\lambda t}$ и проинтегрируем по области Q_t. После интегрирования по частям получаем соотношение

$$\tfrac12\|\tilde{\mathbf{v}}_x^{k+1}(t)\|^2+\int\limits_0^t\left(\nu\|\tilde\Delta\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}\|^2+\lambda\|\tilde{\mathbf{v}}_x^{k+1}\|^2\right)\,d\tau+\int\limits_0^t\alpha_kv_i^k\tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{k+1}\Delta\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}\,dxd\tau=$$

$$=-\int\limits_{Q_t}\tilde{\mathbf{f}}\tilde\Delta\mathbf{v}^{k+1}\,dxdt, \tag{28}$$

где $\tilde{\mathbf{f}}=\mathbf{f}e^{-\lambda t}$.

Используя оценку (23), получаем

$$J_1(t)\equiv\left|\int\limits_0^t\alpha_kv_i^k\tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{k+1}\tilde\Delta\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}\,dxd\tau\right|\leqslant|||\alpha_kv_i^k\tilde{\mathbf{v}}_{x_i}^{k+1}|||_{0,t}\ |||\tilde\Delta\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||_{0,t}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\left(|||\tilde\Delta\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||_{0,t}+\varepsilon^{-1}c(\varepsilon)|||\tilde{\mathbf{v}}_x^{k+1}|||_{0,t}\right)|||\tilde\Delta\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||_{0,t}\leqslant$$

$$\leqslant\nu^{-1}\varepsilon\left(\nu^{\frac12}|||\tilde\Delta\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||_{0,t}+\nu^{\frac12}c(\varepsilon)\varepsilon^{-1}|||\tilde{\mathbf{v}}_x^{k+1}|||_{0,t}\right)|||\nu^{\frac12}\tilde\Delta\mathbf{v}^{k+1}|||_{0,t}\leqslant$$

$$\leqslant\nu^{-1}\varepsilon\left(\tfrac32\nu|||\tilde\Delta\mathbf{v}^{k+1}|||_{0,t}^2+\tfrac12\nu^{-2}\varepsilon c^2(\varepsilon)|||\tilde{\mathbf{v}}_x^{k+1}|||_{0,t}^2\right).$$

Здесь использовались неравенства $(a+b)c \leqslant \frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{2}c^2 \leqslant a^2+b^2+\frac{1}{2}c^2$. Выбираем, далее, $\varepsilon = \nu/6, \lambda > 36\nu^{-1}c^2(\varepsilon)$, получаем:

$$J_1(t) \leqslant \frac{1}{4}\nu|||\tilde{\Delta}\mathbf{v}^{k+1}|||^2_{0,t} + \frac{1}{2}\lambda|||\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}_x|||^2_{0,t}. \tag{29}$$

Учитывая соотношение (28), неравенство (29) и неравенство

$$\left|\int\limits_{Q_t} \tilde{\mathbf{f}}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}\,dxdt\right| \leqslant \tfrac{1}{4}\nu|||\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||^2_{0,t} + 4\nu^{-1}|||\tilde{\mathbf{f}}|||^2_{0,t},$$

получаем

$$\tfrac{1}{2}\left\|\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}_x(t)\right\|^2 + \tfrac{1}{2}\nu|||\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||^2_{0,t} + \tfrac{1}{2}\lambda|||\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}_x|||^2_{0,t} \leqslant 4\nu^{-1}|||\tilde{\mathbf{f}}|||^2_{0,t}.$$

Откуда следует, что

$$\nu|||\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||^2_{0,t} + \lambda|||\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}_x|||^2_{0,t} \leqslant 8\nu^{-1}|||\tilde{\mathbf{f}}|||^2_{0,t}$$

и

$$\tfrac{1}{2}\ \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\,\|\tilde{\mathbf{v}}_x(\tau)\|^2 \leqslant 4\nu^{-1}|||\tilde{\mathbf{f}}|||_{0,t}.$$

Учитывая далее, что $|||\tilde{\mathbf{f}}|||_{0,t} \leqslant |||\mathbf{f}|||_{0,t}$, $|||\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}_x|||_{0,t} \geq e^{-\lambda t}|||\mathbf{v}^{k+1}|||_{0,t}$, $|||\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||_{0,t} \geq$ $\geq e^{-\lambda t}|||\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}^{k+1}|||_{0,t}$ и $\underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\,\|\tilde{\mathbf{v}}_x(\tau)\| \geq e^{-\lambda t}\ \underset{\tau\in[0,t]}{vraimax}\,\|\mathbf{v}_x(\tau)\|$, получаем неравенство:

$$[\mathbf{v}^{k+1}]^2_{\lambda,t} \leqslant 12\nu^{-1}|||\mathbf{f}|||^2_{0,t}\ e^{2\lambda t}. \tag{30}$$

Заметим, что в последнем неравенстве параметр λ определяется величинами ν, $R(t)$ и постоянными $c_i\left(i=\overline{2,8}\right)$. Таким образом, неравенство (19) доказано, где $c_t = 2\sqrt{3}\nu^{-\frac{1}{2}}|||\mathbf{f}|||_{0,t}$ и $c_6 = c_T e^{2\lambda T}$.

4. Сходимость последовательности итераций

Обозначим $\mathbf{w}^k = \mathbf{v}^k - \mathbf{v}^{k-1}$, $\delta p_k = p_k - p_{k-1}$, и заметим, что $\mathbf{w}^{k+1} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{w}^{k+1}_t - \nu\Delta\mathbf{w}^{k+1} + \alpha_k v^k_i \mathbf{w}^{k+1}_{x_i} + grad\ \delta p_k = -\left(\alpha_k v^k_i - \alpha_{k-1}v^{k-1}_i\right)\mathbf{v}^k_{x_i}, \tag{31}$$

однородным начальным и краевым условиям.

Умножим уравнение (31) на $-\tilde{\Delta}\mathbf{w}^{k+1}e^{-2\lambda t}$ и, интегрируя по частям, получим соотношение:

$$\tfrac{1}{2}\left\|\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}(t)\right\|^2 + \nu|||\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}|||^2_{0,t} + \lambda|||\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}_x|||^2_{0,t} + \int\limits_{Q_t}\alpha_k v^k_i \tilde{\mathbf{w}}^{k+1}_{x_i}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}\,dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_t}\left(\alpha_k\tilde{v}^k_i - \alpha_{k-1}\tilde{v}^{k-1}_i\right)\mathbf{v}^k_{x_i}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}\,dxdt, \tag{32}$$

где $\tilde{\mathbf{w}}^{k+1} = \mathbf{w}^{k+1}e^{-\lambda t}$.

По доказанному, последовательность $\left\{\mathbf{v}^k\right\}$ удовлетворяет условию (24), если положить $c_8 = c_6$.

Учитывая неравенство (23), получаем

$$\begin{aligned} J_2(t) = \left|\int \alpha_k v^k_i \tilde{\mathbf{w}}^{k+1}_{x_i}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}\,dxdt\right| &\leqslant |||\alpha_k v^k_i\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}_{x_i}|||_{0,t}\ |||\tilde{\Delta}\mathbf{w}^{k+1}|||_{0,t} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon\nu^{-1}\left(\nu^{\frac{1}{2}}|||\Delta\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}|||_{0,t} + \nu^{\frac{1}{2}}c_1(\varepsilon)|||\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}_x|||_{0,t}\right)&|||\nu^{\frac{1}{2}}\tilde{\Delta}\mathbf{w}^{k+1}|||_{0,t} \leqslant \\ \leqslant 2\varepsilon\nu^{-1}\left(\nu|||\Delta\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}|||^2_{0,t} + \nu c^2_1(\varepsilon)|||\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}_x|||^2_{0,t}\right)&. \end{aligned} \tag{33}$$

Для оценки интеграла в правой части соотношения (32) воспользуемся неравенством (27), получим

$$J_3(t) = \left| \int\limits_{Q_t} \left(\alpha_k \tilde{v}_i^k - \alpha_{k-1} \tilde{v}_i^{k-1} \right) \mathbf{v}_{x_i}^k \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{w}}^{k+1} \, dx d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2} \varepsilon \nu^{-\frac{1}{2}} \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} \, \underset{\tau \in [0,t]}{vraimax} \left\| \tilde{\mathbf{w}}_x^k(\tau) \right\| + \tfrac{1}{\sqrt{2}} c_2(\varepsilon) ||| \tilde{\mathbf{w}}_x^k |||_{0,t} \right) \; ||| \nu^{\frac{1}{2}} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{w}}^{k+1} |||_{0,t} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \varepsilon \nu^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \underset{\tau \in [0,t]}{vraimax} \left\| \tilde{\mathbf{w}}_x^k(\tau) \right\|^2 + \frac{1}{2} c_2^2(\varepsilon) ||| \tilde{\mathbf{w}}^k |||_{0,t}^2 \right)^{\frac{1}{2}} ||| \nu^{\frac{1}{2}} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{w}}^k |||_{0,t}. \tag{34}$$

Заметим, что здесь $c_1(\varepsilon),\ c_2(\varepsilon)$ зависят от $\varepsilon,\ c_i \left(i = \overline{2,7}\right),\ R(t)$.

Выбираем λ, удовлетворяющим условию

$$\lambda > max \left[\nu c_1^2(\varepsilon),\ \frac{1}{2} c_2(\varepsilon) \right], \tag{35}$$

тогда из соотношения (32) и неравенств (33), (34) следует, что

$$\frac{1}{2} \left\| \tilde{\mathbf{w}}^{k+1}(t) \right\|^2 + \left(1 - 2\varepsilon\nu^{-1}\right) \left(\nu ||| \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{w}}^{k+1} |||_{0,t}^2 + \lambda ||| \tilde{\mathbf{w}}_x^{k+1} |||_{0,t}^2 \right) \leqslant 2\varepsilon \nu^{-\frac{1}{2}} \left[\tilde{\mathbf{w}}^k \right]_{\lambda,t} \left[\tilde{\mathbf{w}}^{k+1} \right]_{\lambda,t}. \tag{36}$$

Откуда следует, что

$$\nu ||| \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{w}}^{k+1} |||_{0,t}^2 + \lambda ||| \tilde{\mathbf{w}}_x^{k+1} |||_{0,t}^2 \leqslant 2\varepsilon \nu^{-\frac{1}{2}} \left(1 - 2\varepsilon\nu^{-1}\right) \left[\tilde{\mathbf{w}}^k \right]_{\lambda,t} \left[\tilde{\mathbf{w}}^{k+1} \right]_{\lambda,t};$$

$$\tfrac{1}{2} \, \underset{\tau \in [0,t]}{vraimax} \left\| \tilde{\mathbf{w}}^{k+1}(\tau) \right\|^2 \leqslant 2\varepsilon \nu^{-\frac{1}{2}} \left[\tilde{\mathbf{w}}^k \right]_{\lambda,t} \left[\tilde{\mathbf{w}}^{k+1} \right]_{\lambda,t}.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\left[\tilde{\mathbf{w}}^{k+1} \right]_{\lambda,t} \leqslant q(\varepsilon) \left[\tilde{\mathbf{w}}^k \right]_{\lambda,t}, \tag{37}$$

где $q(\varepsilon) = 2\varepsilon\nu^{-\frac{1}{2}} \left(\left(1 + 2\varepsilon\nu^{-1}\right)^{-1} + 1 \right) = 4\varepsilon\nu^{-\frac{1}{2}} \left(\nu + \varepsilon\right) \left(\nu + 2\varepsilon\right)^{-1}$. Поскольку $\underset{\varepsilon \to 0}{lim}\ q(\varepsilon) = 0$, то по любому $q \in (0,1)$ можно найти такое $\varepsilon > 0$, что $q \in (0,1)$, и по $\varepsilon > 0$ найти λ, удовлетворяющие условию (35).

Обозначим $\mathbf{w}^{k,l} = \mathbf{v}^{k+l} - \mathbf{v}^k$, $\tilde{\mathbf{w}}^{k,l} = \tilde{\mathbf{v}}^{k+l} - \tilde{\mathbf{v}}^k$ и, учитывая неравенство (37), получим

$$\left[\tilde{\mathbf{w}}^{k,l} \right]_{\lambda,t} \leqslant \sum_{j=k}^{k+l} \left[\tilde{\mathbf{w}}^j \right]_{\lambda,t} \leqslant (1-q)^{-1} \left[\mathbf{w}^k \right]_{\lambda,t} \leqslant q^{k-1} (1-q)^{-1} \left[\tilde{\mathbf{w}}^1 \right]_{\lambda,t}, \tag{38}$$

где $q = q(\varepsilon)$. Откуда следует, что

$$\left[\mathbf{w}^{k,l} \right]_{\lambda,t} \leqslant e^{\lambda t} q \left(1-q\right)^{-1} \left[\mathbf{w}^1 \right]_{\lambda,t}. \tag{39}$$

Далее заметим, что $\mathbf{w}^{k,l}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{w}_t^{k,l} - \nu \tilde{\Delta} \mathbf{w}^{k,l} + grad\ \delta p_{k,l} + \alpha_{k+l-1} v_i^{k+l-1} \mathbf{w}_{x_i}^{k,l} = -\left(\alpha_{k+l-1} v_i^{k+l-1} - \alpha_{k-1} v_i^{k-1} \right) \mathbf{v}_{x_i}^k, \tag{40}$$

здесь $p_{kl} = p_{k+l} - p_k$.

Умножим последнее равенство на $\mathbf{w}_t^{k,l}$ и, интегрируя по частям, получим

$$||| \mathbf{w}_t^{k,l} |||_{0,t}^2 + \tfrac{1}{2} \left\| \mathbf{w}_x^{k,l}(t) \right\|^2 = -\int\limits_{Q_t} \alpha_{k+l-1} v_i^{k+l-1} \mathbf{w}_{x_i}^{k,l} \mathbf{w}_t^{k,l} \, dx d\tau -$$

$$- \int\limits_{Q_t} \left(\alpha_{k+l-1} v_i^{k+l-1} - \alpha_{k-1} v_i^{k-1} \right) \mathbf{v}_{x_i}^k \mathbf{w}_t^{k,l} \, dx d\tau. \tag{41}$$

Учитывая неравенства (23), (27), получим

$$||| \alpha_{k+l-1} v_i^{k+l-1} \mathbf{w}_{x_i}^{k,l} |||_{0,t} \leqslant \varepsilon \left(||| \Delta \mathbf{w}^{k,l} |||_{0,t} + \varepsilon^{-1} c(\varepsilon) ||| \mathbf{w}_x^{k,l} |||_{0,t} \right), \tag{42}$$

$$||| \left(\alpha_{k+l-1} v_i^{k+l-1} - \alpha_{k-1} v_i^{k-1} \right) \mathbf{v}_{x_i}^k |||_{0,t} \leqslant \varepsilon \left(\underset{\tau \in [0,t]}{vraimax} \left\| \mathbf{w}^{k-1,l}(\tau) \right\| + \varepsilon^{-1} c(\varepsilon) ||| \mathbf{w}_x^{k-1,l} |||_{0,t} \right). \tag{43}$$

Будем считать, что λ удовлетворяет условию (35) и $\lambda > \varepsilon^{-1}c(\varepsilon)$, где $c(\varepsilon)$ взято из неравенств (23), (27). Учитывая равенство (41) и неравенства (42), (43), (39), получаем

$$|||\mathbf{w}_t^{k,l}|||_{0,t} \leqslant \sqrt{2}\varepsilon\left(\left[\mathbf{w}^{k,l}\right]_{\lambda,t} + \left[\mathbf{w}^{k-1,l}\right]_{\lambda,t}\right) \leqslant 2\sqrt{2}q^{k-2}\left(1-q\right)^{-1}e^{\lambda,t}\left[\mathbf{w}^1\right]_{\lambda,t}. \tag{44}$$

Заметим, что уравнение (40) почти всюду по t на [0,T] есть решение системы Стокса $-\Delta\mathbf{w}^{k,l} + grad\ \delta p_{k,l} = -\alpha_{k+l-1}v_i^{k+l-1}\mathbf{v}_{x_i}^{k+l} - \left(\alpha_{k+l-1}v_i^{k+l-1} - \alpha_{k-1}v_i^{k-1}\right)\mathbf{v}_{x_i}^k - \mathbf{w}_t^{k,l} \equiv g_k(t)$.

В силу известного неравенства для оператора Стокса(см., например, [3] гл.1)

$$\left\|\mathbf{w}^{k,l}\right\|_{\mathbf{w}_2^2(\Omega)} + \left\|\delta_{k,l}\right\|_{\mathbf{w}_2^1(\Omega)} \leqslant c_0\left\|g_k(t)\right\|_{\mathbf{L}_2^n(\Omega)}.$$

Откуда, учитывая оценки (39), (42) − −(44), получаем

$$|||p_{k,l}|||_{\mathbf{w}_2^{1,0}(Q_t)} \leqslant c_0|||g_k|||_{0,t} \leqslant 4c_0\varepsilon q^{k-1}\left(1-q\right)^{-1}e^{\lambda,t}\left[\mathbf{w}^1\right]_{\lambda t}. \tag{45}$$

Из оценок (39), (44), (45) следует, что последовательность $\left\{\mathbf{v}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ сходится по норме $|||\mathbf{v}_t|||_{0,T} + [\mathbf{v}]_{\lambda,T}$, а последовательность $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ — по норме $\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_t)$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в итерационном процессе (9) − (11), убеждаемся, что функции $\mathbf{v}, p$ являются решением задачи (8), (2), (3).

Обозначим $\mathbf{z}^k = \mathbf{v}^k - \mathbf{v}$ и $\delta\overline{p}_k = p_k - p$, тогда вместо соотношения (31) легко получить следующее равенство:

$$\mathbf{z}_t^{k+1} - \nu\Delta\mathbf{z}^{k+1} + \alpha_k v_i^k\mathbf{z}_{x_i}^{k+1} = \left(\alpha_k v_i^k - \alpha_{k-1}v_i^{k-1}\right)\mathbf{v}_{x_i},$$

из которого, как и неравенство (37), получаем

$$\left[\tilde{\mathbf{z}}^{k+1}\right]_{\lambda,t} \leqslant q\left(\varepsilon\right)\left[\tilde{\mathbf{z}}^k\right]_{\lambda,t},$$

где $\tilde{\mathbf{z}}^k = \mathbf{z}^k e^{-\lambda t}$. Учитывая последнее неравенство, находим, что

$$\left[\mathbf{z}^k\right]_{\lambda,t} \leqslant e^{\lambda t}q^k\left[\mathbf{z}^0\right]_{\lambda,t}. \tag{46}$$

Далее последовательно, вместо неравенства (44) получаем оценку:

$$|||\mathbf{z}_t^k|||_{0,t} \leqslant 2\varepsilon e^{\lambda t}q^k\left[\mathbf{z}^0\right]_{\lambda,t} \tag{47}$$

и вместо оценки (45) — неравенство:

$$\left\|\delta\overline{p}_k\right\|_{\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_t)} \leqslant 4c_0 e^{\lambda t}q^k\left[\mathbf{z}^0\right]_{\lambda,t}. \tag{48}$$

Обозначим через $\mathbf{V}_2$ пространство $\mathbf{W}^{2,1}(Q_T) \cap \mathbf{L}_\infty(0,T;\mathbf{W}_2^1(\Omega))$ с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{V}_2} = \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{W}^{2,1}(Q)} + \underset{t\in[0,T]}{vraimax}\|\mathbf{v}_x\| \tag{49}$$

и заметим, что норма, определенная по формуле $\|\mathbf{v}\|_{\lambda,T} = |||\mathbf{v}_t|||_{0,T} + [\mathbf{v}]_{\lambda,T}$, эквивалентна норме (49).

Как было отмечено выше, по любому $q \in (0,1)$ найдется ε, а по $\varepsilon - \lambda$, при которых справедливы оценки (46) − (48), поэтому из этих оценок следует, что

$$\left\|\mathbf{z}^k\right\|_{\mathbf{V}_2} \leqslant c\left(q\right)q^k\left\|\mathbf{z}^0\right\|_{\mathbf{V}_2}, \tag{50}$$

$$\left\|\delta\overline{p}_k\right\|_{\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_t)} \leqslant c\left(q\right)q^k\left\|\mathbf{z}^0\right\|_{\mathbf{V}_2}. \tag{51}$$

Покажем, что решение задачи (8), (2), (3) единственно. Действительно, пусть $\mathbf{v}^1$, $\mathbf{v}^2$; p_1, p_2 — два решения этой задачи. Тогда $\mathbf{w} = \mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2$ является решением уравнения

$$\mathbf{w}_t - \nu\Delta\mathbf{w} + \alpha_1 v_i^1\mathbf{w}_{x_i} + \left(\alpha_1 v_i^1 - \alpha_2 v_i^2\right)\mathbf{v}_{x_i}^2 = grad\left(p_1 - p_2\right),$$

где $\alpha_i = \alpha_i\left(t, \mathbf{v}_x^i\right) = min\left[1, R(t)\left\|\mathbf{v}_x^i\right\|^{-1}\right]$ $(i = 1,2)$.

Последнее уравнение имеет вид уравнения (31). Повторяя такие же оценки, как и при выводе неравенства (37), получим неравенство:

$$\left[\tilde{\mathbf{w}}\right]_{\lambda,t} \leqslant q\left(\varepsilon\right)\left[\tilde{\mathbf{w}}\right]_{\lambda,t},$$

где $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}e^{\lambda t}$, $q(\varepsilon) \in (0,1)$, поэтому $\tilde{\mathbf{w}} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{v}^1 \equiv \mathbf{v}^2$, $p_1 = p_2$.

Таким образом доказана

Теорема. Пусть $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$, Ω — ограниченная область с границей $S \in C^2$, $\mathbf{a}(x)$ удовлетворяет условиям (4); тогда задача (8), (2), (3) имеет единственное решение $\mathbf{v}$, p с $\mathbf{v}_{xx}$, $\mathbf{v}_t$, p_x из $\mathbf{L}_2(Q_T)$, последовательности $\left\{\mathbf{v}^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{p^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, определенные итерационным процессом (9) – (11), где $\alpha_k = min\left[1, R(t)\left\|\mathbf{v}_x^k\right\|^{-1}\right]$, $R(t)$ - ограниченная, неубывающая функция, сходятся к решению задачи (8), (2), (3), и справедливы оценки:

$$\left\|\mathbf{v}^k - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2} \leqslant c(q)q^k \left\|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2}, \tag{52}$$

$$\left\|p_k - p\right\|_{\mathbf{W}_2^{1,0}(Q_T)} \leqslant c(q)q^k \left\|\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}\right\|_{\mathbf{V}_2} \tag{53}$$

при любом $q \in (0,1)$.

4. Следствия, замечания, другие варианты итерационных процессов

Замечание 2. Доказанная теорема гарантирует существование решения задачи (8), (2), (3) и сходимость итерационного процесса (9) – (11) на любом интервале $[0,T]$, на котором $\mathbf{f} \in \overset{\circ}{\mathbf{J}}(Q_T)$.

Следствие 1. Если на интервале $[0,T_1](T_1 \leqslant T)$ решение $\mathbf{v}^*$, p_* задачи (8), (2), (3) удовлетворяет неравенству

$$\|\mathbf{v}_x^*\| \leqslant R(t) \quad \forall t \in [0,T_1], \tag{54}$$

то решение задачи (1) – –(3) на этом интервале существует и $\mathbf{v} = \mathbf{v}^*, p = p_*$.

Действительно, если выполнено неравенство (54), то $\alpha\left(t, \mathbf{v}_x^*\right) = 1$, поэтому уравнения (1) и (8) совпадают.

Следствие 2. Если для решения задачи (1) – (3) и задачи (8), (2), (3) при $R(t) \geq M(t)$ справедлива априорная оценка (5) на интервале $[0,T_1]$, то на этом интервале существует решение задачи (1) – (3), которое совпадает с решением задачи (8), (2), (3).

Заметим, что априорная оценка (5) для задачи (1) – (3), как правило (см., например, лемма 9, гл. 6, [1]), получается через оценку интеграла $J_1 = \left|\int\limits_\Omega v_i \mathbf{v}_{x_i} \tilde{\Delta}\mathbf{v}\, dx\right| \leqslant c\nu^{-\frac{1}{2}} \left\|\tilde{\Delta}\mathbf{v}\right\|^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{v}_x\|^{\frac{3}{2}}$ (в случае $n=3$). Поскольку $|\alpha(t,\mathbf{v}_x)| \leqslant 1$ и не зависит от x, то легко убедиться, что интеграл $\left|\int\limits_\Omega \alpha(t,\mathbf{v}_x) v_i \mathbf{v}_{x_i} \tilde{\Delta}\mathbf{v}\, dx\right|$ имеет такую же оценку, поэтому полученная таким методом априорная оценка для задачи (1) – (3) будет верна и для задачи (8), (2), (3).

Замечание 3. Учитывая следствия 1, 2, нетрудно построить итерационный процесс, сходящийся к решению задачи (1) – (3) без использования оценки вида (5) при условии, что решение задачи (1) – (3) существует и удовлетворяет ограничению вида (5). Действительно, задаем некоторую положительную, ограниченную, неубывающую функцию $R_1(t)$ и решаем задачу (8), (2), (3) при $R(t) = R_1(t)$, далее проверяем условие (54) при $R(t) = R_1(t)$. Если это условие выполнено, то задача (1) – (3) решена. Если это условие не выполнено, то полагаем $R_2(t) = R_1(t) + K$ (K — параметр метода) и повторяем итерационный процесс. Ясно, что после конечного числа шагов условие (54) будет выполнено и, следовательно, решена задача (1) – (3).

Замечание 4. Если выполнено условие (5), то, как следует из неравенств (16), (17), $\|\mathbf{v}(t)\|_4 \leqslant cM(t)$. Анализируя доказательство теоремы, нетрудно заметить, что утверждение теоремы и приведенных выше замечаний остаются верными, если α_k определить по формуле

$$\alpha_k = \alpha_k(t,\mathbf{v}^k) = min\left[1, R(t)/\left\|\mathbf{v}^k\right\|_4\right]. \tag{55}$$

В этом случае $\alpha_k \mathbf{v}^k = P\mathbf{v}^k$ есть проекция вектора $\mathbf{v}^k$ на шар $\{\mathbf{v} \in L_4(\Omega) : \|\mathbf{v}\|_4 \leqslant R(t)\}$.

В доказательстве теоремы ключевыми неравенствами являются неравенства (23), (27), доказательство которых в данном случае даже несколько упрощается. Например, неравенство (23) получено из неравенства (21), которое в данном случае можно переписать в виде:

$$|||\alpha v_i \mathbf{w}_{x_i}|||_{0,t} \leqslant \left(\int\limits_0^t \|\alpha\mathbf{v}\|_4^2 \|\mathbf{w}_x\|_4^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant R(t) \left(\int\limits_0^t \|\mathbf{w}_x\|_4^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{56}$$

Учитывая, что при оценке интеграла $\int\limits_0^t \|\mathbf{w}_x\|_4^2 \, d\tau$ априорная оценка не использовалась, нетрудно убедиться, что неравенство (23) выполнено.

При доказательстве неравенства (27) используем тот факт, что $\|\alpha_1\mathbf{v}^1 - \alpha_2\mathbf{v}^2\|_4 \leqslant$ $\leqslant \|\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2\|_4$, тогда $|||\left(\alpha_1 v_i^1 - \alpha_2 v_i^2\right)\mathbf{v}_{x_i}|||_{0,t} \leqslant \left(\int\limits_0^t \|\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2\|_4^2 \|\mathbf{v}_x\|_4^2 \, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$. Далее, внося соответствующие упрощения в выкладки при доказательстве неравенства (27), убеждаемся в его справедливости в случае, когда α_k определяется по формуле (55).

Замечание 5. В случае, если известна равномерная оценка

$$R_1(t) \leqslant |\mathbf{v}(x,t)| \leqslant R_2(t) \quad \forall\ (x,t) \in Q_t \tag{57}$$

вместо уравнения (8) рассмотрим уравнение

$$\mathbf{v}_t - \nu\Delta\mathbf{v} + Pv_i\mathbf{v}_{x_i} + grad\ p = \mathbf{f}, \tag{58}$$

где

$$Pv_i(x,t) = \begin{cases} R_1(t), & \text{если } v_i(x,t) < R_1(t), \\ v_i(x,t), & \text{если } R_1(t) \leqslant v_i(x,t) \leqslant R_2(t), \\ R_2(t), & \text{если } v_i(x,t) > R_2(t) \end{cases} \tag{59}$$

и уравнение (9) заменим на уравнение

$$\mathbf{v}_t^{k+1} - \nu\Delta\mathbf{v}^{k+1} + Pv_i^k\mathbf{v}_{x_i}^{k+1} + grad\ p_{k+1} = \mathbf{f}. \tag{9$'$}$$

Нетрудно убедиться, что для задачи (58), (2), (3) справедливы утверждения теоремы, а также следствий и замечаний, аналогичных следствиям 1, 2 и замечаниям 2, 3, где последовательность $\left\{\mathbf{v}^k\right\}$ определяется итерационным процессом (9$'$), (10), (11).

Действительно, неравенство (23), очевидно, выполнено при $\varepsilon = 0$, $c(\varepsilon) = R_2(t)$. Справедливость неравенства вида (27) также легко показать, учитывая, что $|Pv_i^1 - Pv_i^2| \leqslant |v_i^1 - v_i^2|$ $\forall\,(x,\tau) \in Q_t$, поэтому $\|P\mathbf{v}^1 - P\mathbf{v}^2\|_4 \leqslant \|\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2\|_4$.

В заключение заметим, что данная работа позволяет свести решение нелинейной системы Навье-Стокса к решению последовательности линейных задач. К решению линейных задач имеются различные подходы, среди них отметим подход, основанный на градиентных методах минимизации функционала $J(\mathbf{v}) = \int\limits_{Q_T} |div\ \mathbf{v}|^2 \, dxdt$, в котором давление p рассматривается как управление (см., например, [4], [5]). В работе [6] анонсирована теорема о сходимости одного из вариантов градиентного метода для решения нелинейной задачи Навье-Стокса. Для решения линейной задачи построен итерационный метод наискорейшего спуска, причем параметры метода находятся явно, что делает целесообразным предварительную линеаризацию задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О.А. *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970. 288 с.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967. 736 с.
3. Темам Р. *Уравнения Навье-Стокса.* М.: Мир, 1981. 408 с.
4. Агошин В.И., Ботвиновский Е.А. *Численное решение системы Стокса методами сопряженных уравнений и оптимального управления* // ЖВМиМФ. Т. 47. 2007. №7. С. 1192–1207.
5. Голичев И.И., Шарипов Т.Р. *Разработка методов, алгоритмов и программ для решения уравнений Навье-Стокса как задачи оптимального управления* // Вестник УГАТУ. Математика. Т. 9. 2007. № 3 (21). С. 51–57.
6. Голичев И.И. *Градиентные методы решения уравнений Навье-Стокса* // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 18, в. 3. 2011. С. 423–425.

Голичев Иосиф Иосифович,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: shaig@anrb.ru