ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 4 (2012). С. 3-12.

УДК 517.9:532.5

РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А.В. АКСЕНОВ, А.А. КОЗЫРЕВ

Аннотация. Рассмотрено уравнение, описывающее ламинарный стационарный плоский пограничный слой с градиентом давления. Получены все редукции рассмотренного уравнения. Показано, что рассматриваемое уравнение имеет редукции, не получаемые с помощью симметрий.

Ключевые слова: редукция, оператор симметрии, инвариантное решение, пограничный слой.

1. Введение

Для данного дифференциального уравнения с частными производными с двумя независимыми переменными важной является задача построения редукций этого уравнения, т.е. построение таких анзацев (видов решений), нахождение которых сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Редукция позволяет свести решение уравнения с частными производными к решению ОДУ. Редукции широко используются в приложениях. Наиболее используемыми являются автомодельные решения [1]. Автомодельные решения имеют вид

$$u = x^{\alpha}\varphi(\zeta)\,, \qquad \zeta = y/x^{\beta}\,, \tag{1.1}$$

где u — зависимая переменная; x, y — независимые переменные; α, β — постоянные величины. Эти решения получаются одно из другого преобразованием подобия. Автомодельные решения являются частным случаем инвариантных решений (или симметрийных редукций), получаемых с помощью симметрий [2]. Симметрийные редукции находятся стандартными методами группового анализа. Также используются редукции типа бегущих волн [3]. Решения типа бегущих волн имеют вид

$$u = \varphi(\zeta) + u_0(y)\,, \qquad \zeta = x + V(y)\,.$$

Эти решения при фиксированном значении переменной y получаются одно из другого преобразованием сдвига. В работе [4] были рассмотрены редукции вида

$$u = P(x) + A(x)\varphi(\zeta)\,, \qquad \zeta = y/B(x) + Q(x)\,, \tag{1.2}$$

обобщающие редукции вида (1.1).

В работе [5] был предложен метод нахождения редукций уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными. В этой работе для уравнений Буссинеска

$$u_{yy} + \frac{1}{2}(u^2)_{xx} + u_{xxxx} = 0$$

были получены все редукции вида

$$u = U(x, y, w(z))\,, \tag{1.3}$$

A.V. Aksenov, A.A. Kozyrev, Reductions of stationary boundary layer equation.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-00188-а и 12-01-00940-а).

Поступила 30 октября 2012 г.

где $z = z(x, y)$, и функция $w(z)$ является решением ОДУ. Было показано, что существуют редукции, отличные от редукций, получаемых с помощью симметрий. В этой работе также были найдены все редукции уравнения Бюргерса

$$u_y + uu_x = u_{xx}\,,$$

уравнения Кортевега–де Вриза

$$u_y + uu_x = u_{xxx}$$

и модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза

$$u_y + u^2u_x = u_{xxx}\,.$$

Для этих уравнений было показано, что найденные редукции совпадают с симметрийными редукциями. Было также показано, что для этих уравнений редукции (1.3) имеют следующий вид

$$u = \alpha(x, y) + \beta(x, y)w(z)\,. \tag{1.4}$$

В настоящей работе рассмотрено уравнение

$$u_{yyy} - u_y u_{xy} + u_x u_{yy} + P(x) = 0\,. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) описывает движение вязкой несжимаемой жидкости в ламинарном стационарном плоском пограничном слое с градиентом давления [6]. Уравнение записано в безразмерных переменных. Здесь u — функция тока; $P(x) = -\partial p/\partial x$ — заданная функция, p — давление. Автомодельные решения уравнения (1.5) рассмотрены в монографиях [1, 6, 7]. Симметрийные редукции уравнения (1.5) могут быть получены на основе результатов, изложенных в [2]. В работе [4] были найдены и исследованы редукции вида (1.2). В работе [8] на основе использования метода неклассических симметрий [9] и рассмотрения его обобщения были получены новые редукции уравнения (1.5) вида (1.4).

В работе найдены все редукции уравнения (1.5) вида (1.3). Показано, что рассматриваемое уравнение имеет редукции, не получаемые с помощью симметрий.

2. Редукции уравнения пограничного слоя

Подставляя решение вида (1.3) в уравнение (1.5), получим следующее соотношение

$$\begin{aligned}
&U_w z_y^3 w''' + 3U_{ww} z_y^3 w'w'' + z_y(3U_{yw}z_y + U_xU_wz_y - U_yU_wz_x + 3U_wz_{yy})w'' + \\
&\quad + U_{www}z_y^3(w')^3 + (3U_{yww}z_y^2 - U_wU_{xw}z_y^2 + U_wU_{yw}z_xz_y + U_xU_{ww}z_y^2 - \\
&\quad - U_yU_{ww}z_xz_y + U_w^2z_xz_{yy} - U_w^2z_yz_{xy} + 3U_{ww}z_yz_{yy})(w')^2 + (3U_{yyw}z_y - \\
&\quad - U_wU_{xy}z_y + U_wU_{yy}z_x - U_yU_{xw}z_y - U_yU_{yw}z_x + 2U_xU_{yw}z_y + U_xU_wz_{yy} - \\
&\quad - U_yU_wz_{xy} + 3U_{yw}z_{yy} + U_wz_{yyy})w' + U_{yyy} - U_yU_{xy} + U_xU_{yy} + P(x) = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Поделим обе части соотношения (2.1) на коэффициент при старшей производной, т.е. на $U_w z_y^3$. Условием того, что полученное соотношение является ОДУ, является зависимость каждого из нормированных коэффициентов при производных функции $w(z)$ только от переменных z и w. Рассмотрим нормированный коэффициент при слагаемом, содержащем $w'w''$. Он имеет вид

$$\frac{3U_{ww}}{U_w} = \Gamma_1(z, w)\,. \tag{2.2}$$

Проинтегрировав соотношение (2.2) дважды, получим

$$U(x, y, w) = \beta(x, y)\Gamma(z, w) + \alpha(x, y).$$

Поскольку в качестве функции $w(z)$ можно взять произвольную функцию от w и z, то редукции уравнения (1.5) можно искать в виде (1.4).

Отметим, что при выводе соотношения (2.2) предполагалось, что $z_y \neq 0$. Случай $z_y = 0$ соответствует вырожденной редукции. Этот случай не представляет особого интереса, и его подробное рассмотрение не приводится.

Подставляя (1.4) в уравнение (1.5), получаем соотношение

$$\begin{aligned}
\beta z_y^3 w''' &+ \beta z_y(\beta_x z_y - \beta_y z_x) w w'' + z_y(3\beta z_{yy} + 3\beta_y z_y + \alpha_x \beta z_y - \alpha_y \beta z_x) w'' + \\
&+ \beta(\beta z_x z_{yy} - \beta z_y z_{xy} + \beta_y z_x z_y - z_y^2 \beta_x)(w')^2 + \\
&+ (\beta_x \beta z_{yy} + \beta z_x \beta_{yy} - \beta_y^2 z_x + \beta_y \beta_x z_y - \beta_y \beta z_{xy} - \beta z_y \beta_{xy}) w w' + \\
&+ (\beta z_{yyy} - \alpha_y \beta_x z_y - \alpha_y \beta_y z_x - \alpha_y \beta z_{xy} - \beta z_y \alpha_{xy} + 2\alpha_x \beta_y z_y + \\
&\qquad + \alpha_x \beta z_{yy} + \beta z_x \alpha_{yy} + 3\beta_y z_{yy} + 3\beta_{yy} z_y) w' + \\
&+ (\beta_x \beta_{yy} - \beta_y \beta_{xy}) w^2 + (\beta_{yyy} + \alpha_x \beta_{yy} - \beta_y \alpha_{xy} - \alpha_y \beta_{xy} + \beta_x \alpha_{yy}) w + \\
&+ \alpha_{yyy} - \alpha_y \alpha_{xy} + \alpha_x \alpha_{yy} + P(x) = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Условие того, что соотношение (2.3) есть ОДУ, означает, что нормированные коэффициенты, зависящие от функций $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $z(x,y)$ и их производных, должны быть функциями переменной z. Откуда получаем следующую переопределенную систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta_x z_y - \beta_y z_x}{z_y^2} = \Gamma_1(z)\,, \\
&\frac{3\beta z_{yy} + 3\beta_y z_y + \alpha_x \beta z_y - \alpha_y \beta z_x}{\beta z_y^2} = \Gamma_2(z)\,, \\
&\frac{\beta(\beta z_x z_{yy} - \beta z_y z_{xy} + \beta_y z_x z_y - z_y^2 \beta_x)}{\beta z_y^3} = \Gamma_3(z)\,, \\
&\frac{\beta_x \beta z_{yy} + \beta z_x \beta_{yy} - \beta_y^2 z_x + \beta_y \beta_x z_y - \beta_y \beta z_{xy} - \beta z_y \beta_{xy}}{\beta z_y^3} = \Gamma_4(z)\,, \\
&\frac{\beta z_{yyy} - \alpha_y \beta_x z_y - \alpha_y \beta_y z_x - \alpha_y \beta z_{xy} - \beta z_y \alpha_{xy}}{\beta z_y^3} + \\
&\qquad + \frac{2\alpha_x \beta_y z_y + \alpha_x \beta z_{yy} + \beta z_x \alpha_{yy} + 3\beta_y z_{yy} + 3\beta_{yy} z_y}{\beta z_y^3} = \Gamma_5(z)\,, \\
&\frac{\beta_x \beta_{yy} - \beta_y \beta_{xy}}{\beta z_y^3} = G_6(z)\,, \\
&\frac{\beta_{yyy} + \alpha_x \beta_{yy} - \beta_y \alpha_{xy} - \alpha_y \beta_{xy} + \beta_x \alpha_{yy}}{\beta z_y^3} = \Gamma_7(z)\,, \\
&\frac{\alpha_{yyy} - \alpha_y \alpha_{xy} + \alpha_x \alpha_{yy} + P(x)}{\beta z_y^3} = \Gamma_8(z)\,.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Изложим основные соображения, лежащие в основе предлагаемого метода построения редукций:

1. Каждое из уравнений (2.4) эквивалентно условию равенства нулю якобиана левой части этого уравнения и функции $z(x,y)$. В результате можно получить переопределенную систему уравнений ($\mathcal{A}$-система) для определения функций $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $z(x,y)$ (она не приводится ввиду ее громоздкости).

2. Вводятся вспомогательные функции $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$, $\mu_3(x,y)$, определяемые из следующих соотношений

$$z_x - \mu_1(x,y) z_y = 0\,,$$

$$\begin{aligned}&\beta_x-\mu_1(x,y)\beta_y-\mu_2(x,y)\beta=0\,,\\&\alpha_x-\mu_1(x,y)\alpha_y-\mu_2(x,y)\alpha-\mu_3(x,y)=0\,.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Введение вспомогательных функций является ключевым для предлагаемого метода. Как было отмечено в работе [5], редукции вида (1.4) допускают следующие преобразования, переводящие редукцию в редукцию

$$\begin{aligned}&z\to F_1(z)\,,\\&\beta\to\frac{\beta}{F_2(z)}\,,\\&\alpha\to\alpha+\frac{\beta}{F_3(z)}\,,\end{aligned}\tag{2.6}$$

где $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$ — произвольные функции. Эти преобразования связаны с произволом в нахождении ОДУ на функцию $w(z)$. Можно показать, что введенные вспомогательные функции являются инвариантами преобразований (2.6). Также можно показать, что $\mathcal{A}$-система допускает преобразования (2.6).

3. Находя из соотношений (2.5) производные α_x, β_x, z_x, $\ldots$ и подставляя их в $\mathcal{A}$-систему, получим следующую переопределенную систему для нахождения вспомогательных функций

$$\begin{aligned}&\mu_{1y}\mu_2+\mu_{1xy}-\mu_{1y}^2-\mu_1\mu_{1yy}=0\,,\\&\mu_2^2+\mu_{2x}-\mu_2\mu_{1y}-\mu_1\mu_{2y}=0\,,\\&\mu_2\mu_3+3\mu_{1yy}+3\mu_{2y}+\mu_{3x}-\mu_1\mu_{3y}-\mu_{1y}\mu_3=0\,,\\&\mu_{2y}(2\mu_{1y}-\mu_2)=0\,,\\&\mu_2\mu_{2yy}=\mu_{2y}^2\,,\\&4\mu_{1yyy}+6\mu_{2yy}-\mu_2\mu_{3y}+2\mu_{2y}\mu_3-2\mu_{1y}\mu_{3y}=0\,,\\&\mu_{2yyy}+2\mu_{2y}\mu_{3y}-\mu_{2yy}\mu_3-\mu_2\mu_{3yy}=0\,,\\&\mu_{3yyy}-\mu_{3y}^2+\mu_3\mu_{3yy}-3P(x)\mu_{1y}-P(x)\mu_2+P'(x)=0\,.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Таким образом, $\mathcal{A}$-система сводится к более простой системе уравнений (2.7). Запись $\mathcal{A}$-системы только через инварианты преобразований (2.6) следует из ее инвариантности относительно этих преобразований.

4. По найденным вспомогательным функциям можно найти функции $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $z(x,y)$ из соответствующих линейных уравнений (2.5). Далее, по функциям $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $z(x,y)$ строятся искомые редукции с точностью до преобразований (2.6).

Как видно из четвертого уравнения системы (2.7), для ее решения следует рассмотреть два случая: $\mu_{2y}=0$ и $2\mu_{1y}-\mu_2=0$. При этом в первом из них нужно рассмотреть случаи $\mu_2\neq0$ и $\mu_2=0$.

Случай I. $\boldsymbol{\mu_2=\mu_2(x)\neq0}$. В этом случае интегрирование исходной системы проводится элементарно и приводит к нескольким возможным случаям.

Случай I.1. $\boldsymbol{P(x)=\lambda(x+\kappa)^\delta}$. В этом случае решение системы уравнений (2.7) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}&\mu_1=y\frac{(\delta-1)}{4(x+\kappa)}+f(x)\,,\\&\mu_2=\frac{(\delta+3)}{4(x+\kappa)}\,,\\&\mu_3=\frac{c_3(\delta+3)}{4(x+\kappa)}\,,\qquad c_3=const\,.\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем $f(x)$ — произвольная функция переменной x. Тогда можно положить

$$\alpha(x,y) = const\,, \qquad \beta(x,y) = (x+\kappa)^{\frac{\delta+3}{4}}\,,$$
$$z(x,y) = y(x+\kappa)^{\frac{\delta-1}{4}} + \int f(x)(x+\kappa)^{\frac{\delta-1}{4}}dx\,.$$

При этом получается следующее ОДУ

$$4w''' + (\delta+3)ww'' - 2(\delta+1)w'^2 + 4\lambda = 0\,.$$

Случай I.2. $\boldsymbol{P(x) = \lambda\exp(\delta x)}$**.** В этом случае решение системы уравнений (2.7) имеет следующий вид

$$\mu_1 = \frac{\delta y}{4} + f(x), \qquad \mu_2 = \frac{\delta}{4}, \qquad \mu_3 = c_3\,.$$

Тогда можно положить

$$\alpha(x,y) = const\,, \qquad \beta(x,y) = \exp\left(\frac{\delta x}{4}\right)\,,$$
$$z(x,y) = y\exp\left(\frac{\delta x}{4}\right) + \int f(x)\exp\left(\frac{\delta x}{4}\right)dx\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$4w''' + \delta ww'' - 2\delta w'^2 + 4\lambda = 0.$$

Случай I.3. $\boldsymbol{P(x) = \lambda = const}$**.**
Случай I.3.1. $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$**.** В этом случае решение системы уравнений (2.7) имеет следующий вид

$$\mu_1 = -y\frac{3}{4x+\kappa} + f(x)\,, \qquad \mu_2 = \frac{3}{4x+\kappa}\,, \qquad \mu_3 = \frac{c_3}{4x+\kappa}\,.$$

Тогда можно положить

$$\alpha(x,y) = const\,, \qquad \beta(x,y) = (4x+\kappa)^{\frac{3}{4}}\,,$$
$$z(x,y) = \frac{y}{(4x+\kappa)^{\frac{1}{4}}} + \int \frac{f(x)dx}{(4x+\kappa)}\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w''' + 3ww'' - 2w'^2 + \lambda = 0.$$

Случай I.3.2. $\boldsymbol{\lambda = 0}$**.** В этом случае решение системы уравнений (2.7) имеет следующий вид

$$\mu_1 = y\frac{1-c_1}{c_1x+c_2} + f(x)\,, \qquad \mu_2 = \frac{1}{c_1x+c_2}\,, \qquad \mu_3 = \frac{c_3}{c_1x+c_2}\,.$$

Тогда можно положить

$$\alpha(x,y) = const\,, \qquad \beta(x,y) = (c_1x+c_2)^{1/c_1}\,,$$
$$z(x,y) = y(c_1x+c_2)^{1/c_1-1} + \int f(x)(c_1x+c_2)^{1-1/c_1}dx\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w''' + ww'' - 2w'^2 + (c_1-2)w^2 = 0\,.$$

Случай I.4. $\boldsymbol{P(x) = -\lambda_1^2/(3x+\kappa)^{5/3} + \lambda_2/(3x+\kappa)^{1/3}}$**.** В этом случае решение системы уравнений (2.7) имеет следующий вид

$$\mu_1 = -\frac{y}{3x+\kappa} + f(x)\,, \qquad \mu_2 = \frac{2}{3x+\kappa}\,,$$
$$\mu_3 = \frac{\lambda_1 y}{(3x+\kappa)^{4/3}} + \frac{c}{3x+\kappa} + \frac{\lambda_1 \int \frac{f(x)dx}{(3x+\kappa)^{1/3}}}{(3x+\kappa)}\,.$$

В этом случае можно положить

$$\alpha(x,y) = \frac{\lambda_1 y}{(3x+\kappa)^{1/3}} - \frac{c}{2} - \lambda_1 \int \frac{f(x)dx}{(3x+\kappa)^{1/3}}\,,$$
$$\beta(x,y) = (3x+\kappa)^{2/3}\,,$$
$$z(x,y) = \frac{y}{(3x+\kappa)^{1/3}} + \int \frac{f(x)dx}{(3x+\kappa)^{1/3}}\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w''' + 2ww'' - w'^2 + \lambda_2 = 0\,.$$

Случай II. $\boldsymbol{\mu_2 = 0}$**.** Тогда система (2.7) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned}
&\mu_{1xy} - \mu_{1y}^2 - \mu_1\mu_{1yy} = 0\,,\\
&3\mu_{1yy} + \mu_{3x} - \mu_3\mu_{1y} - \mu_{3y}\mu_1 = 0\,,\\
&2\mu_{1yyy} = \mu_{3y}\mu_{1y}\,,\\
&\frac{dP(x)}{dx} - \mu_{3yyy} + \mu_{3y}^2 - \mu_3\mu_{3yy} - 3P(x)\mu_{1y} - P(x)\mu_2 = 0\,.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Проинтегрировав первое из уравнений системы (2.8) по y, получим:

$$\mu_{1x} - \mu_1\mu_{1y} = f'(x)\,, \tag{2.9}$$

где $f'(x)$ — произвольная функция. Тогда можно выписать общее решение уравнения (2.9) в виде

$$F(I_1, I_2) = 0,$$

где F — произвольная функция, $I_1 = y + x(\mu_1 - f(x)) + \int f(x)dx$, $I_2 = \mu_1 - f(x)$. Поэтому один из первых интегралов есть функция от другого, то есть $I_1 = G(I_2)$ или $I_2 = G(I_1)$. Коротко изложим ход решения в этом случае. Итак, пусть

$$\mu_1 - f(x) = G(y + x(\mu_1 - f(x)) + \int f(x)dx)\,. \tag{2.10}$$

Тогда, как нетрудно убедиться, общим решением второго уравнения системы (2.8) будет

$$\mu_3 = -3\frac{\mu_{1yy}}{\mu_{1y}} + \mu_{1y}H(\mu_1 - f(x)), \tag{2.11}$$

где H — произвольная функция своего аргумента. Подстановка (2.10), (2.11) в последние два уравнения системы (2.8) приводит в итоге к соотношениям, в которые функции G и H и их производные входят полиномиально, причем коэффициенты при мономах есть степени переменной x. Поскольку $H = H(\mu_1 - f(x))$, то H зависит и от G. Таким образом, функции G, H зависят только от одного сложного аргумента, и по переменной x следует провести расщепление. Это приводит к переопределенной системе ОДУ на функции G и H. Дальнейшие вычисления проводятся элементарно и дают в итоге следующие случаи.

Случай II.1. $\boldsymbol{P(x) = \lambda(x+\kappa)^{-3}}$**.** В этом случае

$$\mu_1 = -\frac{y}{x+\kappa} + f(x)\,, \qquad \mu_2 = 0\,, \qquad \mu_3 = \frac{c}{x+\kappa}\,.$$

Тогда можно положить

$$\alpha(x,y) = c\ln(x+\kappa)\,, \qquad \beta(x,y) = 1\,, \qquad z(x,y) = \frac{y}{x+\kappa} + \int \frac{f(x)dx}{x+\kappa}\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w''' + cw'' + w'^2 + \lambda = 0\,.$$

Случай II.2. $\boldsymbol{P(x) = \lambda x + \kappa}$. В этом случае

$$\mu_1 = f(x)\,, \qquad \mu_2 = 0,$$

а μ_3 удовлетворяет уравнению

$$\mu_{3yyy} + \mu_3\mu_{3yy} - \mu_{3_y}^{\;2} - \frac{dP(x)}{dx} = 0.$$

Тогда функция $\mu_3 = H(y + \int f(x)dx)$ должна быть решением уравнения

$$H''' + HH'' - H'^2 - \lambda = 0\,.$$

Тогда можно положить

$$\alpha(x,y) = xH(y + \int f(x)dx)\,, \qquad \beta(x,y) = 1\,, \qquad z(x,y) = y + \int f(x)dx\,.$$

Соответствующее ОДУ имеет вид

$$w''' + Hw'' - H'w' + \kappa = 0\,.$$

Отметим, что в случае $\mu_2 - 2\mu_{1y} = 0$, как нетрудно проверить, получаются рассмотренные выше редукции. Поэтому разбор этого случая не приводится.

3. Редукции, получаемые с помощью симметрий

Найдем симметрии уравнения (1.5). Оператор симметрии ищем в виде

$$X = \xi^1(x,y,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,y,u)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Система определяющих уравнений на компоненты оператора симметрии, с учетом дифференциальных следствий, имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
&\xi^1_y = 0, \qquad \xi^1_u = 0, \qquad \xi^2_u = 0, \qquad \xi^2_{xy} = 0,\\
&\eta_x = 0, \qquad \eta_y = 0, \qquad \xi^1_x - \xi^2_y - \eta_u = 0,\\
&\xi^1 P'(x) + (3\xi^2_y - \eta_u)P(x) = 0.
\end{aligned}$$

Симметрии уравнения (1.5) зависят от вида задаваемой функции $P(x)$. Приведем результат групповой классификации.

Предложение 1. *При произвольной функции $P(x)$ базис операторов симметрии уравнения (1.5) имеет следующий вид*

$$X_1 = b(x)\frac{\partial}{\partial y}\,, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}\,,$$

где $b(x)$ — произвольная функция;
при $P(x) = \lambda(x+\kappa)^\delta$, $\lambda \neq 0$, $\delta \neq 0$ базис операторов симметрии состоит из операторов

$$X_1\,, \quad X_2\,, \quad Y_1 = 4(x+\kappa)\frac{\partial}{\partial x} + (1-\delta)y\frac{\partial}{\partial y} + (\delta+3)u\frac{\partial}{\partial u}\,;$$

при $P(x) = \lambda e^{\delta x}$, $\lambda \neq 0$, $\delta \neq 0$ базис операторов симметрии состоит из операторов

$$X_1\,, \quad X_2\,, \quad Y_2 = 4\frac{\partial}{\partial x} - \delta y\frac{\partial}{\partial y} + \delta u\frac{\partial}{\partial u}\,;$$

при $P(x) = a$, $a \neq 0$ базис операторов симметрии состоит из операторов

$$X_1\,, \quad X_2\,, \quad Z_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,, \quad Z_2 = 4x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + 3u\frac{\partial}{\partial u}\,;$$

при $P(x) = 0$ базис операторов симметрии состоит из операторов

$$X_1\,, \quad X_2\,, \quad Z_1\,, \quad Z_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\,, \quad Z_4 = x\frac{\partial}{\partial a} + u\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Отметим, что результаты групповой классификации уравнения (1.5) соответствуют результатам групповой классификации системы уравнений, описывающей ламинарный стационарный плоский пограничный слой с градиентом давления [2].

В каждом из указанных случаев расширения ядра симметрий можно без труда определить вид функций $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$, $\mu_3(x,y)$, соответствующих инвариантным решениям. Приведем соответствующие формулы.

Случай 1. $P(x) = \lambda(x+\kappa)^\delta$. Тогда допускаемый оператор симметрии общего вида будет иметь вид

$$X = 4c_1(x+\kappa)\frac{\partial}{\partial x} + (c_1(1-\delta)y + b(x))\frac{\partial}{\partial y} + (c_1(\delta+3)u + c_2)\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Тогда функции $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$, $\mu_3(x,y)$, соответствующие любому инвариантному решению, будут иметь вид

$$\mu_1 = \frac{y(\delta-1)}{4(x+\kappa)} - \frac{b(x)}{4c_1(x+\kappa)}\,,$$
$$\mu_2 = \frac{(\delta+3)}{4(x+\kappa)}\,,$$
$$\mu_3 = -\frac{c_2}{4c_1(x+\kappa)}\,.$$

Аналогичным образом можно найти функции $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$, $\mu_3(x,y)$ и в остальных случаях.

Случай 2. $P(x) = \lambda \exp(\delta x)$. Оператор симметрии имеет вид

$$X = 4c_1\frac{\partial}{\partial x} + (b(x) - c_1\delta y)\frac{\partial}{\partial y} + (c_1\delta u + c_2)\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Тогда

$$\mu_1 = \frac{\delta y}{4} - \frac{b(x)}{4c_1}\,, \qquad \mu_2 = \frac{\delta u}{4}\,, \qquad \mu_3 = -\frac{c_2}{4c_1}\,.$$

Случай 3. $P(x) = const \neq 0$. Оператор симметрии имеет вид

$$X = (4c_1x + c_2)\frac{\partial}{\partial x} + (c_1y + b(x))\frac{\partial}{\partial y} + (3c_1u + c_3)\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Тогда

$$\mu_1 = -\frac{c_1y}{4c_1x+c_2} - \frac{b(x)}{4c_1x+c_2}\,,$$
$$\mu_2 = -\frac{3c_1}{4c_1x+c_2}\,,$$
$$\mu_3 = -\frac{c_3}{4c_1x+c_2}\,.$$

Случай 4. $P(x) = 0$. Оператор симметрии имеет вид

$$X = ((c_1+c_2)x + c_3)\frac{\partial}{\partial x} + (c_2y + b(x))\frac{\partial}{\partial y} + (c_1u + c_4)\frac{\partial}{\partial u}\,.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= -\frac{c_2 y}{(c_1+c_2)x+c_3} - \frac{b(x)}{(c_1+c_2)x+c_3}\,,\\
\mu_2 &= -\frac{c_1}{(c_1+c_2)x+c_3}\,,\\
\mu_3 &= -\frac{c_4}{(c_1+c_2)x+c_3}\,.
\end{aligned}$$

Сравнивая перечисленные выражения для функций $\mu_1(x,y)$, $\mu_2(x,y)$, $\mu_3(x,y)$, $P(x)$ в случае инвариантных решений и в случае редукций, найденных прямым методом, можно заключить, что редукции случаев I.4 и II.2 не могут быть получены с помощью классического метода нахождения инвариантных решений, но, возможно, могут быть получены как дифференциально-инвариантные решения или дифференциально-инвариантные подстановки.

4. Редукции, получаемые с помощью неклассических симметрий

Обобщением классического метода Ли нахождения редукций уравнений с частными производными является так называемый метод неклассических симметрий [9]. В соответствии с этим методом ищутся операторы симметрии системы уравнений, состоящей из исходного уравнения $E(u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, ...) = 0$ и дополнительного условия (условия инвариантности)

$$\xi^1(x,y,u)u_x + \xi^2(x,y,y)u_y - \eta(x,y,u) = 0\,.$$

В этом случае, в отличие от классического метода Ли, система определяющих уравнений на компоненты $\xi^1(x,y,u)$, $\xi^2(x,y,u)$, $\eta(x,y,u)$ оператора симметрии

$$X = \xi^1(x,y,u)\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x,y,y)\frac{\partial}{\partial y} + \eta(x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

будет нелинейной. В настоящей статье вычисления неклассических симметрий и соответствующих им решений не приводятся (все необходимые выкладки можно найти в работе [8]). Отметим, что сравнение с результатами применения неклассического метода показывает, что все полученные выше редукции можно также получить с помощью неклассического метода. Таким образом, метод неклассических симметрий и прямой подход, предложенный в настоящей работе, эквивалентны и дают одинаковый результат.

5. Заключение

Основным результатом работы является предложенный метод построения редукций, основанный на идее инвариантности. Ключевым отличием предложенного в работе подхода от подхода Кларксона–Крускала является переход от нелинейной неоднородной системы уравнений на функции α, β, z к однородной системе уравнений на вспомогательные функции μ_1, μ_2, μ_3. Получающаяся система уравнений более удобна для интегрирования, чем система уравнений на функции α, β, z, содержащая неопределенные функции $G_1(z)$, ..., $G_8(z)$. Предложенный метод, в силу своей инвариантной природы, является более простым в использовании, чем метод Кларксона–Крускала. С помощью предложенного метода найдены все редукции уравнения (1.5) вида (1.3). Показано, что рассматриваемое уравнение имеет редукции, не получаемые с помощью симметрий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов Л.И. *Методы подобия и размерности в механике.* М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.
2. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* М.: Наука, 1978.
3. Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
4. Бурдэ Г.И. *Об одном классе решений уравнения пограничного слоя* // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1990. № 2. С. 45–51.
5. P.A. Clarkson, M.D. Kruskal *New similarity reductions of the Boussinesq equation* // J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 10. P. 2201–2213.
6. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя.* М.: Наука, 1974.
7. *Laminar boundary layers (ed. L. Rosenhead).* Oxford: Clarendon Press, 1963.
8. G.I. Burde *New similarity reductions of the steady-state boundary layer equations* // J. Phys. A: Math. Gen. 1996. V. 29. № 8. P. 1665–1683.
9. G.W. Bluman, J.D. Cole *The general similarity solution of the heat equation* // Journal of Mathematics and Mechanics. 1969. V. 18. № 11. P. 1025–1042.

Александр Васильевич Аксенов,
Механико-математический факультет,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
ул. Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: aksenov.av@gmail.com

Анатолий Александрович Козырев,
Механико-математический факультет,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
ул. Ленинские горы, 1,
119991, г. Москва, Россия
E-mail: anatoly.kozyrev@gmail.com