ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 17-85.

УДК 517.957

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. ЖИБЕР, Р.Д. МУРТАЗИНА, И.Т. ХАБИБУЛЛИН, А.Б. ШАБАТ

Аннотация. Обзор посвящен систематическому изложению алгебраического подхода к исследованию нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных и их дискретных аналогов, основанного на понятии характеристического векторного поля. Особое внимание уделяется уравнениям, интегрируемым в смысле Дарбу, и солитонным уравнениям. Обсуждается проблема построения высших симметрий уравнений, а также их частных и общих решений. В частности показано, что уравнение в частных производных гиперболического типа интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда его характеристические кольца Ли по обоим характеристическим направлениям имеют конечную размерность. Для гиперболических уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, характеристические кольца имеют минимальный рост. Предложены пути применения метода характеристических колец к системам дифференциальных уравнений гиперболического типа с большим, чем два числом характеристических направлений, уравнениям эволюционного типа, а также к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: характеристическое векторное поле, симметрия, интегрируемость по Дарбу.

СОДЕРЖАНИЕ

A.V. Zhiber, R.D. Murtazina, I.T. Habibullin, A.B. Shabat, Characteristic Lie rings and integrable models in mathematical physics.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-97005-р-поволжье-а, 10-01-00088-а) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (соглашение №8499).

Поступила 25 ноября 2011 г.

1. Введение

Основополагающие идеи в изучении проблемы интегрирования уравнений в частных производных гиперболического типа восходят к классическим работам Лапласа, Лиувилля, Ли, Дарбу, Гурса, Вессио и др. При этом понимание интегрирования, как получения явной формулы для общего решения, почти сразу же было вытеснено другими, менее обременительными определениями. Например, метод Дарбу интегрирования гиперболического уравнения состоит в отыскании интегралов по каждому характеристическому направлению и последующему сведению его к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ясно, что в общем случае довести дело до явных формул, выражающих совместное общее решение этих уравнений, весьма сложно.

Для отыскания интегралов (также как и для выяснения интегрируемости заданного уравнения) Дарбу пользовался каскадным методом Лапласа. В более поздних исследованиях (см. [49, 60, 61]) основным инструментом поиска интегралов становится алгебраический подход, использующий характеристические векторные поля (именно в рамках такого подхода были получены, по-видимому, первые списки уравнений, обладающих интегралами по обоим направлениям [49]). Другой подход к интегрированию нелинейных уравнений связан с однопараметрическими группами преобразований, т.е. с симметриями. Понятие симметрии, введенное более ста лет назад в трудах С.Ли и Э.Нетер, служит фундаментом современной теории интегрируемости. Открытие метода обратной задачи рассеяния и появление класса солитонных уравнений дало мощный толчок в развитии симметрийного подхода в теории интегрируемости. Стало ясно, что уравнения, интегрируемые при помощи метода обратной задачи рассеяния, обладают бесконечной иерархией высших симметрий.

В последние три десятилетия в рамках симметрийного подхода были созданы эффективные алгоритмы решения классификационных задач и составлены исчерпывающие списки интегрируемых представителей для очень важных классов нелинейных уравнений в частных производных и их дискретных аналогов (см. [2, 10, 11, 33, 34, 38–40, 46–48, 59]). При этом наибольшие успехи связаны с классификацией уравнений эволюционного типа. Однако в ряде случаев, таких как классификация интегрируемых уравнений размерности 1+2 и выше, а также классификация гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными и их дискретных аналогов симметрийный подход не столь эффективен. В последние годы появились новые методы классификации интегрируемых уравнений, такие как тест Пенлеве, метод алгебраической энтропии [55], условие 3D совместности [45] и др. Интерес для специалистов представляет также монография [24], посвященная детальному изложению некоторых аспектов теории интегрирования уравнений в частных производных.

В настоящей работе рассматривается альтернативный подход к задаче о классификации интегрируемых уравнений, восходящий к упомянутым выше классическим работам Гурса. Важной вехой в формировании этого подхода послужила работа [44], где исследовалась система гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = \exp(a_{i1}u^1 + a_{i2}u^2 + \ldots + a_{in}u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

В этой работе было введено понятие характеристической алгебры Ли векторных полей и было показано, что характеристическая алгебра Ли системы (1.1) имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда матрица $A = (a_{ij})$ является матрицей Картана простой алгебры Ли. Далее, в работе [30], для систем гиперболических уравнений более общего вида

$$u^i_{xy} = F^i(u^1, u^2, \ldots, u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

показано, что условием интегрируемости в квадратурах является конечномерность ее характеристической алгебры Ли.

Характеристические алгебры для гиперболических систем вида

$$u^i_x = c^i_{jk}u^j v^k + c^i_k u^k, \quad v^k_y = d^k_{jl}u^j v^l + d^k_j u^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.3}$$

исследовались в работе [13]. В частности, здесь было дано полное описание базиса характеристической алгебры для уравнения $u_{xy} = \sin u$.

Ниже в первом, третьем и четвертом разделах обзора будет дано определение и подробное описание понятия характеристического кольца Ли для уравнений (и систем уравнений) в частных производных гиперболического типа и их дискретных аналогов. Здесь мы кратко остановимся лишь на основных моментах излагаемого материала. Для скалярного гиперболического уравнения (как в непрерывном, так и дискретном варианте) характеристическое кольцо Ли по каждому характеристическому направлению порождается двумя операторами, обозначим их X_1 и X_2. Обозначим через V_j линейное пространство над полем локально аналитических функций, натянутое на X_1, X_2 и все кратные коммутаторы операторов X_1 и X_2 порядка меньшего или равного j, так что

$$V_0 = \{X_1, X_2\}, \quad V_1 = \{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}, \quad \ldots.$$

Введем функцию $\Delta(k) = \dim V_{k+1} - \dim V_k$.

Глубокая связь между свойствами характеристического кольца Ли и свойством интегрируемости уравнения была осознана в работе [18]. В этой работе было обнаружено, что линейные пространства кратных коммутаторов образующих характеристического кольца для таких интегрируемых уравнений, как уравнение синус-Гордона, уравнение Цицейки и др. на первых шагах растут очень медленно, точнее говоря, $\Delta(1) = \Delta(2) = \Delta(3) = \Delta(4) = 1$. Была высказана гипотеза о том, что такое поведение функции $\Delta(k)$ присуще всем интегрируемым уравнениям. В дальнейшем эта мысль была уточнена и подтверждена многочисленными примерами интегрируемых непрерывных и дискретных моделей (см. [35, 53]). Затем в работах [42, 51] была сформулирована следующая

Гипотеза 1.1. *(алгебраический тест). Любое интегрируемое скалярное (непрерывное или дискретное) гиперболическое уравнение удовлетворяет следующему условию: найдется последовательность натуральных чисел $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\Delta(t_k) \leqslant 1$.*

Определение 1.1. *Характеристическое кольцо Ли, для которого существует такая последовательность натуральных чисел, называется кольцом минимального роста.*

Свойство минимальности роста кольца стало рассматриваться в качестве классификационного критерия для интегрируемых уравнений. Для специальных классов уравнений был решен ряд модельных классификационных задач ([18, 42, 51]). Эти результаты убеждают, что свойство минимальности роста характеристического кольца Ли является столь же универсальным свойством интегрируемых уравнений, как наличие бесконечной иерархии высших симметрий.

Статья представляет обзор результатов авторов, посвященных приложениям алгебраического метода, основанного на понятии характеристического векторного поля к нелинейным интегрируемым моделям.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе проведена классификация скалярных гиперболических уравнений специального вида с бесконечномерным характеристическим кольцом Ли минимального роста. Показано, что система уравнений $u_x = f(u, v)$, $v_y = \varphi(u, v)$, для которой выполнены первые три D и $\overline{D}$–условия наличия высших симметрий, имеет x- и y-характеристические кольца минимального роста. Описаны классы уравнений с конечномерным характеристическим кольцом Ли. С использованием образующих характеристических колец Ли построены высшие симметрии уравнений Лиувилля, синус-Гордон, Цицейки и модифицированного уравнения синус-Гордон.

В третьем разделе дается краткий обзор результатов авторов (см. [13, 44, 56]), посвященных классификации интегрируемых гиперболических систем уравнений на основе понятий характеристических алгебр Ли и колец Ли.

В четвертом разделе вводится определение характеристического кольца для дифференциально-разностного уравнения. Иллюстрируется применение характеристических векторных полей в задаче класификации уравнений лиувиллевского типа. Приводятся классификационные результаты. Подробно исследуется характеристическое кольцо дифференциально-разностного аналога уравнения синус-Гордон. Примечательно, что в этом случае кольцо имеет минимальный рост.

В пятом разделе рассматриваются полностью дискретные уравнения. Дается общее определение интеграла, вводится понятие характеристического кольца Ли и обсуждаются возможные способы применения этих понятий в задачах классификации интегрируемых дискретных уравнений.

Шестой раздел посвящен обсуждению открытых вопросов и перспектив излагаемого в статье алгебраического подхода. Например, предлагается схема исследования характеристического кольца систем дифференциальных уравнений гиперболического типа с большим чем два числом характеристических направлений. Характерным примером такой системы является система n-волн. Кратко обсуждаются возможности распространения излагаемого подхода к другим классам нелинейных уравнений, таким как уравнения эволюционного типа, обыкновенные дифференциальные уравнения (см. [8]).

2. Скалярные интегрируемые уравнения

2.1. Определение характеристического кольца Ли. Для исследования интегрируемости уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{2.4}$$

используется подход, основанный на понятии "характеристического" кольца.

На множестве локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $x, y, \overline{u}_1, u, u_1, u_2, \ldots$, оператор полного дифференцирования по y имеет вид

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial y} + \overline{u}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots,$$

а оператор полного дифференцирования по x —

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \overline{D}(f) \frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + f \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots,$$

где $u_1 = u_x, \overline{u}_1 = u_y, u_2 = u_{xx}, \overline{u}_2 = u_{yy}, \ldots$.

Представим

$$\overline{D} = \overline{u}_2 X_2 + X_1, \tag{2.5}$$

где

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} + \overline{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + D(f) \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}.$$

Характеристическое уравнение

$$\overline{D} W(x, y, u, u_1, \ldots, u_m) = 0 \tag{2.6}$$

согласно (2.5) эквивалентно системе

$$X_1 W = 0, \quad X_2 W = 0. \tag{2.7}$$

Отметим, что решение уравнения (2.6) называется x-интегралом уравнения (2.4).

С уравнениями (2.7) естественным образом связано кольцо Ли, порожденное векторными полями X_1 и X_2. Аналогично вводится кольцо Ли, порожденное образующими Y_1 и Y_2 при рассмотрении характеристического уравнения $D\overline{W}(x, y, u, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m) = 0$.

Пусть L_n – линейное пространство коммутаторов образующих длины $n - 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Например, L_2 – линейная оболочка векторных полей X_1, X_2, а L_3 порождается элементом $X_3{=}[X_1, X_2]$, L_4 – коммутаторами $X_4{=}[X_2, X_3]$, $X_5{=}[X_1, X_3]$ и т.д. Тогда x-характеристическое кольцо Ли A представимо в виде

$$A = \sum_{i=2}^{\infty} L_i,$$

а y-характеристическое кольцо Ли $\overline{A}$ уравнения (2.4)

$$\overline{A} = \sum_{i=2}^{\infty} \overline{L}_i.$$

Введем обозначение: $\pounds_k = \sum_{i=2}^{k} L_i$.

Классификация интегрируемых уравнений основана на следующем утверждении:

Лемма 2.1. *Пусть u-решение уравнения* (2.4) *и векторные поля Z и $\overline{Z}$ имеют вид*

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \ \ \alpha_i = \alpha_i(u, \overline{u}_1, u_1, u_2, \ldots, u_{n_i}),$$

$$\overline{Z} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_i}, \ \ \overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_i(u, u_1, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_{n_i}), \ \ i = 1, 2, \ldots.$$

Если $[D,Z]=0$*, то* $Z=0$*. Аналогично, если* $[\overline{D},\overline{Z}]=0$*, то* $\overline{Z}=0$*.*

Доказательство. Так как оператор полного дифференцирования по x на множестве локально-аналитических функций, зависящих от конечного набора переменных $\overline{u}_1, u, u_1, u_2, \dots$

$$D = f\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \dots,$$

то

$$\begin{aligned}[D,Z] = (D(\alpha_1)\tfrac{\partial}{\partial u_1} + D(\alpha_2)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + D(\alpha_3)\tfrac{\partial}{\partial u_3} + \dots)-\\ -(\alpha_1 f_{u_1}\tfrac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \alpha_1\tfrac{\partial}{\partial u} + \alpha_2\tfrac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_3\tfrac{\partial}{\partial u_2} + \dots).\end{aligned}$$

По условию $[D,Z]=0$, поэтому

$$\alpha_1 = 0, \quad D(\alpha_i) - \alpha_{i+1} = 0, \quad i = 1,2,\dots$$

и, следовательно, $\alpha_i = 0$ для $i = 1,2,3,\dots$. Аналогично, если $[\overline{D},\overline{Z}]=0$ и

$$\overline{D} = f\frac{\partial}{\partial u_1} + \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + \overline{u}_2\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \dots,$$

то $\overline{Z}=0$. Лемма доказана.

2.2. Классификация интегрируемых гиперболических уравнений с бесконечномерным характеристическим кольцом Ли. В случае $f = f(u)$ на множестве локально-аналитических функций, зависящих от переменных $u, u_1, u_2, \dots, u_m$

$$\overline{D} = \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial u_1} + D(f)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots = \overline{u}_1 X_2 + X_1.$$

2.2.1. Уравнение Клейна-Гордона. В этом пункте рассматриваются уравнения (см. [15, 16])

$$u_{xy} = f(u). \tag{2.8}$$

Имеем

$$[D, X_1] = -fX_2, \quad [D, X_2] = 0. \tag{2.9}$$

Отметим, что операторы X_1, X_2 – линейно независимы при $f(u) \neq 0$.

Пусть $X_3 = [X_2, X_1]$. Используя тождество Якоби и (2.9), получаем, что

$$[D, X_3] = -f_u X_2. \tag{2.10}$$

Лемма 2.2. *Размерность линейного пространства* $\pounds_3 = \sum_{i=2}^{3} L_i$ *равна двум тогда и только тогда, когда*

$$X_3 - cX_1 = 0.$$

При этом правая часть уравнения (2.8) *принимает вид*

$$f(u) = \alpha \mathrm{e}^{cu},$$

где α, c *– постоянные,* $\alpha \neq 0$*.*

Доказательство. Пусть $\dim \pounds_3 = 2$. Тогда, так как

$$X_3 = f'\frac{\partial}{\partial u_1} + f'' u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots,$$

то $X_3 = c(u)X_1$, согласно утверждению леммы 2.1 и формулам (2.9) и (2.10) имеем

$$[D, X_3 - cX_1] = -f'X_2 - D(c)X_1 + cfX_2 = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно следующей системе уравнений

$$f' - cf = 0, \quad D(c) = 0.$$

Следовательно c – *const* и $f = \alpha \mathrm{e}^{cu}$. Лемма доказана.

Таким образом, нелинейное уравнение (2.8) с двумерной характеристической алгеброй Ли A сводится к уравнению Лиувилля

$$u_{xy} = e^u. \tag{2.11}$$

Пусть $X_4 = [X_2, X_3]$, $X_5 = [X_1, X_3]$. Используя тождество Якоби и соотношения (2.9), (2.10), получаем

$$[D, X_4] = -f''X_2, \quad [D, X_5] = f'X_3 - fX_4. \tag{2.12}$$

Далее будем предполагать, что размерность линейного пространства $\mathcal{L}_3$ равна трем (X_1, X_2, X_3 – линейно независимы), и покажем, что случай, когда $\dim \mathcal{L}_4 = 3$, не реализуется.

Действительно, если $\dim \mathcal{L}_4 = 3$, то

$$X_4 = c_1X_1 + c_2X_3 \quad \text{и} \quad X_5 = \bar{c}_1X_1 + \bar{c}_2X_3, \tag{2.13}$$

где $c_i = c_i(u, u_1, u_2, \ldots, u_{n_i}), \bar{c}_i = \bar{c}_i(u, u_1, u_2, \ldots, u_{\bar{n}_i}), i = 1, 2$.

Первое соотношение (2.13), согласно утверждению леммы 2.1 и формулам (2.9)–(2.12), эквивалентно системе

$$D(c_1) = 0, \quad c_1f - f'' + c_2f' = 0, \quad D(c_2) = 0.$$

Поэтому c_1, c_2 – постоянные и

$$f'' - c_2f' - c_1f = 0.$$

Второе соотношение (2.13) эквивалентно системе вида

$$D(\bar{c}_1) + c_1f = 0, \quad \bar{c}_1f + \bar{c}_2f' = 0, \quad D(\bar{c}_2) + c_2f - f' = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\bar{c}_2$ – постоянная, то есть $f' = c_2f$. Тогда, как показано выше, $\dim \mathcal{L}_3 = 2$.

Лемма 2.3. *Размерность пространства $\mathcal{L}_4$, порожденного операторами X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5, равна 4 тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет уравнению вида*

$$f'' - pf' - qf = 0, \tag{2.14}$$

где p, q – постоянные и $f' \neq \beta f$. При этом $X_4 = pX_3 + qX_1$.

Доказательство. Используя лемму 2.1 и формулы (2.9)–(2.12), получаем, что либо

$$X_4 = c_1X_1 + c_2X_3 + c_3X_5,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} D(c_1) - c_1c_3f = 0, \quad f'' - c_1f - c_2f' = 0, \\ D(c_2) + c_3f' - c_2c_3f = 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

либо

$$X_5 = \bar{c}_1X_1 + \bar{c}_2X_3 + \bar{c}_3X_4,$$

и тогда

$$\begin{aligned} D(\bar{c}_1) = 0, \quad \bar{c}_1f + \bar{c}_2f' + \bar{c}_3f'' = 0, \\ D(\bar{c}_2) - f' = 0, \quad D(\bar{c}_3) + f = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Согласно первому и третьему уравнениям (2.15) c_1, c_2 – постоянные, $c_3 = 0$ (иначе $f' = c_2f$ и, тогда $\dim \mathcal{L}_3 = 2$), и функция f удовлетворяет уравнению (2.14). Если выполнено (2.16), то $f = 0$.

Обратно, если функция f удовлетворяет уравнению (2.14), то

$$[D, X_4] = -(pf' + qf)X_2 = p[D, X_3] + q[D, X_1] = [D, pX_3 + qX_1].$$

Следовательно, $X_4 = pX_3 + qX_1$ и $\dim \mathcal{L}_4 = 4$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. *Если* $X_4 = 0$, *то* $p = q = 0$, *и уравнение* (2.8) *сводится к уравнению* $u_{xy} = u$.

Далее будем считать, что выполняется условие леммы 2.3. Введем операторы длины 4:

$$X_6 = [X_2, X_5] \quad \text{и} \quad X_7 = [X_1, X_5].$$

Используя тождество Якоби

$$[X_2, [X_1, X_3]] + [X_3, [X_2, X_1]] + [X_1, [X_3, X_2]] = 0,$$

нетрудно показать, что $X_6 = pX_5$. Поэтому $\dim \pounds_5 \leqslant 5$.

Замечание 2.2. *Если* $X_6 = 0$, *то* $p = 0$, *и равенство* (2.14) *принимает вид*

$$f'' - qf = 0.$$

Тогда уравнение (2.8) *сводится к уравнению синус-Гордона*

$$u_{xy} = e^u + e^{-u}. \tag{2.17}$$

С помощью формул (2.9)–(2.12) получаем, что

$$[D, X_7] = (f' - 2pf)X_5. \tag{2.18}$$

Проверим, что $\dim \pounds_5 = 5$. Допустим обратное: $\dim \pounds_5 = 4$ и $X_7 = c_1X_1 + c_2X_3 + c_3X_5$. Тогда

$$\begin{aligned} D(\bar{c}_1) - c_3qf &= 0, \\ \bar{c}_1 f + \bar{c}_2 f' &= 0, \\ D(\bar{c}_2) + c_3f' - c_3pf &= 0, \\ D(\bar{c}_3) + 2pf - f' &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ясно, что c_i-постоянные, $i = 1, 2, 3$. Из последнего уравнения (2.19) видно, что $f' = 2pf$, т.е. $X_3 = 2pX_1$ (лемма 2.2).

Теперь введем операторы длины 5:

$$X_8 = [X_2, X_7], \quad X_9 = [X_1, X_7], \quad [X_3, X_5].$$

Легко проверить, что оператор $[X_3, X_5] = -pX_7 + X_8$, поэтому $\dim \pounds_6 \leqslant 7$.

Используя (2.9)–(2.12), (2.18), получаем, что

$$[D, X_8] = (q - 2p^2)fX_5, \quad [D, X_9] = -fX_8 + (f' - 2pf)X_7. \tag{2.20}$$

Если $\dim \pounds_6 = 5$, тогда выполняется следующие соотношения:

$$X_8 = \bar{c}_1X_1 + \bar{c}_2X_3 + \bar{c}_3X_5 + \bar{c}_4X_7,$$

$$X_9 = c_1X_1 + c_2X_3 + c_3X_5 + c_4X_7.$$

Первое соотношение согласно утверждению леммы 2.1 и формулам (2.10)–(2.12), (2.18), (2.20) перепишем в виде:

$$D(c_1) - qc_3f = 0, \quad c_1f + c_2f' = 0, \quad D(c_3) + c_3f' - pc_3f = 0,$$

$$D(c_3) + c_4f' - 2pc_4f = 0, \quad D(c_4) - f' + 2pf = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $c_4 = 0$ и $f' = 2pf$. Значит $X_3 = 2pX_1$, то есть $\dim \pounds_3 = 2$. Итак, $\dim \pounds_6 \geq 6$.

Справедливо утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть* $\dim \pounds_i = i$, $i = 3, 4, 5$. *Тогда размерность пространства* $\pounds_6$ *равна 6 тогда и только тогда, когда*

$$X_8 = 0.$$

Доказательство. Пусть $\dim \mathcal{L}_6 = 6$. Тогда либо

$$X_9 = c_1X_1 + c_2X_3 + c_3X_5 + c_4X_7 + c_5X_8$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} D(c_1) - qc_3f = 0, \quad c_1f + c_2f' = 0, \quad D(c_2) + c_3f' - pc_3f = 0, \\ D(c_3) + c_4f' - 2pc_4f + c_5f'' - c_5pf' - 2c_5p^2f = 0, \\ D(c_4) - f' + 2pf = 0, \quad D(c_5) + f = 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

либо

$$X_8 = \overline{c}_1X_1 + \overline{c}_2X_3 + \overline{c}_3X_5 + \overline{c}_4X_7 + \overline{c}_5X_9,$$

и тогда

$$\begin{aligned} D(\overline{c}_1) - \overline{c}_3qf - \overline{c}_1\overline{c}_5f = 0, \quad \overline{c}_1f + \overline{c}_2f' = 0, \\ D(\overline{c}_2) + \overline{c}_3f' - \overline{c}_3pf - \overline{c}_2\overline{c}_5f = 0, \\ D(\overline{c}_3) - (q-2p^2)f + \overline{c}_4(f' - 2pf) - \overline{c}_3\overline{c}_5f = 0, \\ D(\overline{c}_4) - \overline{c}_4\overline{c}_5f = 0, \quad D(\overline{c}_5) - \overline{c}_5^2f = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Из последнего уравнения (2.21) видно, что $f = 0$. Систему (2.22) перепишем так

$$\begin{gathered} \overline{c}_3q = 0, \quad \overline{c}_1f + \overline{c}_2f' = 0, \quad \overline{c}_3(f' - pf) = 0, \\ -(q-2p^2)f + \overline{c}_4(f' - 2pf) = 0, \end{gathered}$$

где $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, $\overline{c}_3$, $\overline{c}_4$ – $const$, $\overline{c}_5{=}0$.

Если $\overline{c}_3 \neq 0$, то функция f удовлетворяет уравнению $f' = pf$, тогда $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. Если $\overline{c}_3 = 0$, то $\overline{c}_4 = 0$ (иначе $\dim \mathcal{L}_3 = 2$), и из четвертого уравнения следует, что $q = 2p^2$. Значит $X_8 = 0$. Таким образом, условие необходимости доказано.

Теперь докажем достаточность. Пусть $X_8 = 0$, тогда так как $[X_3, X_5] = -pX_7$, то $\dim \mathcal{L}_6 \leqslant 6$. Если $\dim \mathcal{L}_6 = 5$, то оператор X_9 должен выражаться через линейную комбинацию операторов X_1, X_3, X_5 и X_7, но в этом случае (как показано выше) $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. Лемма доказана.

Замечание 2.3. *Итак, если $X_8 = 0$, то $q = 2p^2$, и уравнение* (2.8), (2.14) *приводится к уравнению Цицейки*

$$u_{xy} = e^u + e^{-2u}. \tag{2.23}$$

2.2.2. Гиперболические уравнения $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$. Рассматривается нелинейное уравнение

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{2.24}$$

В этом пункте получены условия на правую часть уравнения (2.24) (см. [16,18,35]), для которых

$$\dim \mathcal{L}_i = i, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6.$$

Мы исключаем уравнения (2.24) линейные по переменной u_x, либо по u_y.

Положим

$$X_1 = \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + D^{n-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1},$$

тогда

$$\overline{D} = X_1 + \overline{u}_2X_2. \tag{2.25}$$

Имеем

$$[D, X_1] = -(\overline{u}_1f_u + ff_{u_1})X_2, \qquad [D, X_2] = -f_{\overline{u}_1}X_2. \tag{2.26}$$

Используя тождество Якоби

$$[D, X_3] = [D, [X_2, X_1]] = -[X_1, [D, X_2]] - [X_2, [X_1, D]]$$

и соотношения (2.26), получаем

$$[D, X_3] = -(f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1}) X_2 - f_{\overline{u}_1} X_3. \tag{2.27}$$

А для операторов X_4, X_5 выполняются соотношения

$$\begin{gathered} [D, X_4] = -f_{u_1} f_{\overline{u}_1\overline{u}_1} X_2 - f_{\overline{u}_1\overline{u}_1} X_3 - 2 f_{\overline{u}_1} X_4, \\ [D, X_5] = (f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - \overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} - f f_{u_1\overline{u}_1})(f_{u_1} X_2 + X_3) - \\ -(\overline{u}_1 f_u + f f_{u_1}) X_4 - f_{\overline{u}_1} X_5. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Теорема 2.1. *Пусть размерность пространства $\pounds_4$, порожденного операторами длины $1, 2$ и 3, равна четырем. Тогда*

$$X_4 + c_1(X_1 - \overline{u}_1 X_3) + c_2 X_5 = 0,$$

и выполняется одно из следующих соотношений для правой части уравнения (2.24): либо

$$\begin{gathered} f = \overline{c}\left(u_1 \int \tfrac{\overline{c}_u}{\overline{c}^2} d\overline{u}_1 + B\right), \quad \overline{c}_{\overline{u}_1} + \tfrac{\delta \overline{u}_1}{\overline{c}} = \lambda, \\ B = B(u, u_1), \quad \overline{c} = \overline{c}(u, \overline{u}_1), \end{gathered} \tag{2.29}$$

$$\text{где} \quad c_1 = \frac{1}{\overline{c}^2}, \quad c_2 = 0, \quad \delta, \lambda - const;$$

либо функция f удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - \overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} - f f_{u_1\overline{u}_1} - c f_{\overline{u}_1\overline{u}_1} = 0, \\ D(c) - c f_{\overline{u}_1} - (\overline{u}_1 f_u + f f_{u_1}) = 0, \quad c = c(u, \overline{u}_1), \end{gathered} \tag{2.30}$$

$$\text{где} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{c}, \quad c_2 \neq 0.$$

Рассматривая y–характеристическое кольцо, получим "симметричный" вариант теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Если размерность пространства $\overline{\pounds}_4$ равна четырем, то*

$$Y_4 + \overline{c}_1(Y_1 - u_1 Y_3) + \overline{c}_2 Y_5 = 0,$$

и выполняется одно из следующих соотношений для правой части уравнения (2.24):

либо

$$\begin{gathered} f = c\left(\overline{u}_1 \int \tfrac{c_u}{c^2} du_1 + \overline{B}\right), \quad c_{u_1} + \tfrac{\overline{\delta} u_1}{c} = \overline{\lambda}, \\ \overline{B} = \overline{B}(u, \overline{u}_1), \quad c = c(u, u_1), \end{gathered} \tag{2.31}$$

$$\text{где} \quad \overline{c}_1 = \frac{1}{c^2}, \quad \overline{c}_2 = 0, \quad \overline{\delta}, \overline{\lambda} - const;$$

либо функция f удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - u_1 f_{uu_1} - f f_{u_1\overline{u}_1} - \overline{c} f_{u_1 u_1} = 0, \\ \overline{D}(\overline{c}) - \overline{c} f_{u_1} - (u_1 f_u + f f_{\overline{u}_1}) = 0, \quad \overline{c} = \overline{c}(u, u_1), \end{gathered} \tag{2.32}$$

$$\text{где} \quad \overline{c}_1 = 0, \quad \overline{c}_2 = \frac{1}{\overline{c}}, \quad \overline{c}_2 \neq 0.$$

Отметим, что соотношения (2.31), (2.32) получаются из уравнений (2.29), (2.30) заменой u_1 на $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_1$ на u_1.

Лемма 2.5. *Пусть правая часть уравнения (2.24) удовлетворяет равенствам (2.29), (2.31). Тогда*

$$\begin{gathered} u_{xy} = K(u) L(u_x) \overline{B}(u_y), \quad L' + \eta\left(\tfrac{u_x}{L}\right) = \widetilde{\lambda}, \quad \overline{B}' + \delta\left(\tfrac{u_y}{\overline{B}}\right) = \lambda, \\ \widetilde{\lambda}, \lambda, \eta, \delta - const. \end{gathered} \tag{2.33}$$

Отметим, что для уравнения (2.33) операторы X_4 и Y_4 имеют вид

$$X_4 + \frac{\delta}{\overline{B}^2}(X_1 - u_y X_3) = 0, \quad Y_4 + \frac{\eta}{L^2}(Y_1 - u_x Y_3) = 0.$$

Введем операторы длины 4:

$$X_6 = [X_2, X_5], \quad X_7 = [X_1, X_5].$$

Нетрудно показать, что $X_6 = \frac{\delta \overline{u}_1}{\overline{B}^2} X_5$.

Положим

$$\alpha = -(\overline{u}_1 f_u + f f_{u_1}), \quad \beta = -f_{\overline{u}_1}, \quad \gamma = -(f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1}), \quad p = -f_{\overline{u}_1 \overline{u}_1},$$
$$q = f_{u_1} p, \quad r = f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - \overline{u}_1 f_{u \overline{u}_1} - f f_{u_1 \overline{u}_1}, \quad s = f_{u_1} r.$$

Используя тождество Якоби и соотношения (2.26), (2.27) и (2.28), имеем

$$\begin{gathered}[D, X_7] = -\tfrac{\delta}{\overline{B}^2}(\overline{u}_1 \alpha_u + f \alpha_{u_1})(X_1 - \overline{u}_1 X_3) + (\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - \\ -s)(f_{u_1} X_2 + X_3) + (2\alpha \tfrac{\delta \overline{u}_1}{\overline{B}^2} + \overline{u}_1 \beta_u + f \beta_{u_1} + r) X_5 + \beta X_7.\end{gathered} \tag{2.34}$$

Видно, что размерность пространства $\mathcal{L}_5$ растет не более чем на единицу, т.е. $\dim \mathcal{L}_5 \leqslant 5$.

Пусть для уравнения (2.33) размерность пространства $\mathcal{L}_5$ равна пяти, т.е. операторы X_1, X_2, X_3, X_5, X_7 линейно независимы. Теперь введем операторы длины 5: $X_8 = [X_2, X_7]$, $X_9 = [X_1, X_7]$, $[X_3, X_5]$. Используя тождество Якоби, имеем

$$[X_3, X_5] = -\frac{\delta \overline{u}_1}{\overline{B}^2} X_7 + X_8,$$

т.е. $\dim \mathcal{L}_6 \leqslant 7$.

Согласно (2.26), (2.27), (2.28) и (2.34) получаем

$$\begin{gathered}[D, X_8] = (\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)_{\overline{u}_1}(f_{u_1} X_2 + X_3) - (\tfrac{\delta}{\overline{B}^2}(\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s) + \\ + \left(\tfrac{\delta}{\overline{B}^2}(\overline{u}_1 \alpha_u + f \alpha_{u_1})\right)_{\overline{u}_1} + \tfrac{\delta^2}{\overline{B}^4}\overline{u}_1(\overline{u}_1 \alpha_u + f \alpha_{u_1}))(X_1 - \overline{u}_1 X_3) + \\ + \Big(\left(2\delta\alpha \tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2} + \overline{u}_1 \beta_u + f \beta_{u_1} + r\right)_{\overline{u}_1} + \delta \tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2}(2\delta\alpha \tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2} + \\ + \overline{u}_1 \beta_u + f \beta_{u_1} + r)\Big) X_5 + \beta_{\overline{u}_1} X_7 + 2\beta X_8,\end{gathered} \tag{2.35}$$

$$\begin{gathered}[D, X_9] = (\overline{u}_1(\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)_u + f(\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)_{u_1} - \\ - f_{u_1}(\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s))(f_{u_1} X_2 + X_3) + (2\overline{u}_1 r_u + 2 f r_{u_1} - s + \\ + \overline{u}_1(3\delta \tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2} \alpha_u + \overline{u}_1 \beta_{uu} + f_u \beta_{u_1}) + 2\overline{u}_1 f \beta_{u u_1} + \\ + f\left(3\delta \tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2} \alpha_{u_1} + f_{u_1} \beta_{u_1} + f \beta_{u_1 u_1}\right)) X_5 + (2\delta \tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2} \alpha + 2\overline{u}_1 \beta_u + \\ + 2 f \beta_{u_1} + r) X_7 + \alpha X_8 + \beta X_9 - \tfrac{\delta}{\overline{B}^2}(2\overline{u}_1 f \alpha_{u u_1} + \\ + \overline{u}_1(\overline{u}_1 \alpha_{uu} + f_u \alpha_{u_1}) + f(f_{u_1} \alpha_{u_1} + f \alpha_{u_1 u_1}))(X_1 - \overline{u}_1 X_3).\end{gathered} \tag{2.36}$$

Лемма 2.6. *Если размерность пространства $\mathcal{L}_6$ для уравнения (2.33) равна шести, то функции $K(u)$, $L(u_x)$ и $\overline{B}(u_y)$ удовлетворяют соотношениям вида*

$$K'' = 4\lambda^2 k_2^2 K^3 + 2k_2 \lambda K K', \quad L' = k_2(1 + 2k_2 \frac{u_x}{L}), \quad \overline{B}' = \lambda(1 + 2\lambda \frac{u_y}{\overline{B}}). \tag{2.37}$$

При этом

$$X_8 + d_1(X_1 - u_y X_3) + d_3 X_7 = 0,$$

где

$$d_1 = 2\lambda k_2 (1 + \lambda \frac{u_y}{\overline{B}})(2\lambda k_2 K^2 + K'), \quad d_3 = 2\lambda \frac{1}{\overline{B}}(1 + \lambda \frac{u_y}{\overline{B}}).$$

Замечание 2.4. *Для уравнения (2.33), (2.37) постоянная λ не равна нулю, иначе $\overline{B}' = 0$.*

Замечание 2.5. *Уравнение* (2.33), (2.37) *точечной заменой*

$$K = \frac{1}{\lambda k_3}\widetilde{K}, \quad L = k_2\widetilde{L}, \quad \overline{B} = \lambda\widetilde{B}$$

приводится к уравнению

$$u_{xy} = \widetilde{K}\widetilde{L}\widetilde{B}, \quad \widetilde{K}'' = 4\widetilde{K}^3 + 2\widetilde{K}\widetilde{K}', \quad \widetilde{L}' = 1 + 2\frac{u_x}{\widetilde{L}}, \quad \widetilde{B}' = 1 + 2\frac{u_y}{\widetilde{B}},$$

которое связано с уравнением Цицейки $v_{xy} = e^v + e^{-2v}$ *дифференциальной подстановкой (см. [4, 20])*

$$v = -\frac{1}{2}\ln(u_x - \widetilde{L}) - \frac{1}{2}(u_y - \widetilde{B}) + P(u),$$

где функция P *определяется из обыкновенного дифференциального уравнения*

$$P'^2 - 2\widetilde{K}P' - 3\widetilde{K}' - 2\widetilde{K}^2 = 0.$$

Для уравнения (2.33) ($\lambda = \widetilde{\lambda} = 0$)

$$u_{xy} = K(u)\sqrt{1 - u_1^2}\sqrt{1 - \overline{u}_1^2} \tag{2.38}$$

размерность линейного пространства L_6 равна 2, т.е. пространство $\mathcal{L}_6$ порождено образующими $X_1, X_2, X_3, X_5, X_7, X_8, X_9$ ($\dim \mathcal{L}_6 = 7$).

Введем операторы длины 6:

$$X_{10} = [X_2, X_8] = \tfrac{3\overline{u}_1}{1-\overline{u}_1^2}X_8, \quad X_{11} = [X_1, X_8],$$
$$X_{12} = [X_2, X_9], \quad X_{13} = [X_1, X_9].$$

Теорема 2.3. *Пусть размерность пространства* $\mathcal{L}_7$ *для уравнения* (2.38) *равна девяти. Тогда*

$$X_{11} = -3KK'\overline{u}_1(X_1 - \overline{u}_1X_3) + (3K^2 + \mu)\overline{u}_1X_5 + \frac{\overline{u}_1}{1 - \overline{u}_1^2}X_9.$$

А функция K *удовлетворяет соотношению вида*

$$K'' - 2K^3 - \mu K = 0, \quad \mu - const. \tag{2.39}$$

Уравнение (2.38), (2.39) в значительно более громоздкой форме впервые возникло в работе [3]. Последнее заменой (см. [20])

$$v = \arcsin u_x + \arcsin u_y + P(u), \quad P'^2 = 2K' - 2K^2 - \lambda,$$

сводится к уравнению синус-Гордона $v_{xy} = e^v + e^{-v}$.

2.3. Система уравнений $u_x = f(u, v)$, $v_y = \varphi(u, v)$**.** В данном разделе рассматривается система уравнений

$$u_x = f(u, v), \quad v_y = \varphi(u, v). \tag{2.40}$$

В работе [21] для классификации интегрируемых уравнений применен симметрийный метод и было показано, что если выполнены первые три D и $\overline{D}$–условия существования высших симметрий, то система (2.40) приводится к одной из следующих

$$\begin{gathered} u_x = v, \quad v_y = \sin u, \\ u_x = v, \quad v_y = e^u + e^{-2u}, \\ u_x = \sin v, \quad v_y = \sin u, \\ u_x = \alpha(v), \quad v_y = e^u, \\ u_x = \tfrac{1}{v}, \quad v_y = uv + 1, \\ u_x = v, \quad v_y = e^u v + e^{2u}, \\ u_x = uv + 1, \quad v_y = uv + 1. \end{gathered} \tag{2.41}$$

На множестве локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $u, v, \overline{u}_1, v_1, \overline{u}_2, v_2, \overline{u}_3, v_3, \ldots$, оператор полного дифференцирования по x имеет вид

$$D = v_1\frac{\partial}{\partial v} + f\frac{\partial}{\partial u} + \overline{D}f\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{D}^2 f\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots,$$

где $\overline{u}_1 = u_y, v_1 = v_x, \overline{u}_2 = u_{yy}, v_2 = v_{xx}, \ldots$.

Тогда

$$D = v_1X_1 + X_2, \tag{2.42}$$

где

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_2 = f\frac{\partial}{\partial u} + \overline{D}f\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{D}^2 f\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots.$$

Таким образом, с системой уравнений (2.40) естественным образом связано кольцо Ли, порожденное векторными полями X_1 и X_2.

Пусть $\dim \mathcal{L}_3 \leqslant 3$, $\dim \mathcal{L}_4 \leqslant 4$. Тогда выполнено одно из следующих соотношений:

$$\begin{array}{l}
(i) \quad X_3 = c_1X_1 + c_2X_2, \quad c_1 = c_1(v),\ c_2 = c_2(v);\\
(ii) \quad X_4 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3,\ X_5 = \widetilde{c}_1X_1 + \widetilde{c}_2X_2 + \widetilde{c}_3X_3,\\
\qquad c_i = c_i(v),\ \widetilde{c}_i = \widetilde{c}_i(v),\ i = 1, 2, 3;\\
(iii) \quad X_4 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_5X_5,\\
\qquad c_i = c_i(v),\ i = 1, 2, 3, 5;\\
(iv) \quad X_5 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4,\\
\qquad c_i = c_i(v),\ i = 1, 2, 3, 4.
\end{array} \tag{2.43}$$

Оператор $\overline{D} = \varphi\frac{\partial}{\partial v} + \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + \overline{u}_2\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \ldots$ совпадает с оператором полного дифференцирования по y на множестве функций, зависящих от переменных $v, u, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \ldots$.

Лемма 2.7. *Пусть u и v — решения системы уравнений* (2.40) *($\varphi'_u \neq 0$), и векторное поле Z имеет вид*

$$Z = \alpha_0(u, v)\frac{\partial}{\partial u} + \alpha_1(u, v, \overline{u}_1)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \alpha_2(u, v, \overline{u}_1, \overline{u}_2)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots.$$

Если $[\overline{D}, Z] = 0$, то $Z = 0$.

Имеем

$$[\overline{D}, X_1] = -\varphi_v X_1, \quad [\overline{D}, X_2] = -f\varphi_u X_1. \tag{2.44}$$

Используя тождество Якоби и соотношения (2.44), получаем также

$$\begin{gathered}
[\overline{D}, X_3] = [\overline{D}, [X_1, X_2]] = -[X_2, [\overline{D}, X_1]] - [X_1, [X_2, \overline{D}]] =\\
= [X_2, \varphi_v X_1] - [X_1, f\varphi_u X_1] = -f_v\varphi_u X_1 - \varphi_v X_3,\\
[\overline{D}, X_4] = [\overline{D}, [X_1, X_3]] = -f_{vv}\varphi_u X_1 - \varphi_{vv}X_3 - 2\varphi_v X_4,\\
[\overline{D}, X_5] = [\overline{D}, [X_2, X_3]] = \varphi_u\left(f_u f_v - f f_{uv}\right)X_1 +\\
+\left(f_v\varphi_u - f\varphi_{uv}\right)X_3 - f\varphi_u X_4 - \varphi_v X_5.
\end{gathered} \tag{2.45}$$

Пусть размерность характеристического кольца равна двум. Тогда $X_3 = c_1X_1 + c_2X_2$. Согласно лемме 2.7 и соотношениям (2.44) и (2.45) имеем

$$c_1 = 0, \quad (f_v - c_2 f)\varphi_u = 0, \quad \overline{D}(c_2) + c_2\varphi_v = 0. \tag{2.46}$$

Если операторы X_1, X_2 и X_3 линейно независимы, и размерность характеристического кольца равна трем, то $X_4 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3$, $X_5 = \widetilde{c}_1X_1 + \widetilde{c}_2X_2 + \widetilde{c}_3X_3$. Последние равенства, используя лемму 2.7 и соотношения (2.44) и (2.45), перепишем в эквивалентной форме

$$\begin{gathered}
c_1 = \widetilde{c}_1 = 0, \quad \left(c_2 f + c_3 f_v - f_{vv}\right)\varphi_u = 0,\\
c_{2v}\varphi + 2c_2\varphi_v = 0, \quad c_{3v}\varphi + \varphi_{vv} + c_3\varphi_v = 0,\\
\widetilde{c}_2 f + \widetilde{c}_3 f_v + f_u f_v - f f_{uv} = 0, \quad \widetilde{c}_{2v}\varphi + \widetilde{c}_2\varphi_v + c_2 f\varphi_u = 0,\\
\widetilde{c}_{3v}\varphi + c_3 f\varphi_u - f_v\varphi_u + f\varphi_{uv} = 0.
\end{gathered} \tag{2.47}$$

Теперь рассмотрим случаи, когда характеристическое кольцо минимального роста, т.е. $\dim \pounds_4 = 4$. Если операторы X_1, X_2, X_3 и X_4 линейно независимы, а $X_5 = c_1X_1 + c_2X_2+$ $+c_3X_3 + c_4X_4$, тогда

$$\begin{gathered} c_1 = \widetilde{c}_1 = 0, \quad (c_2 f + c_3 f_v + c_4 f_{vv} + f_u f_v - f f_{uv})\,\varphi_u = 0,\\ c_{2v}\varphi + c_2\varphi_v = 0, \quad c_{3v}\varphi - c_4\varphi_{vv} - f_v\varphi_u + f\varphi_{uv} = 0,\\ c_{4v}\varphi - c_4\varphi_v + f\varphi_u = 0. \end{gathered} \tag{2.48}$$

Если операторы X_1, X_2, X_3 и X_5 линейно независимы, а $X_4 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_5X_5$, тогда

$$\begin{gathered} c_1 = \widetilde{c}_1 = 0, \quad (c_2 f + c_3 f_v - f_{vv} - c_5(f_u f_v - f f_{uv}))\,\varphi_u = 0,\\ c_{2v}\varphi + 2c_2\varphi_v - c_2c_5 f\varphi_u = 0,\\ c_{3v}\varphi + c_3\varphi_v + \varphi_{vv} + c_5(f_v\varphi_u - f\varphi_{uv}) - c_3c_5 f\varphi_u = 0,\\ c_{5v}\varphi + c_5\varphi_v - c_5^2 f\varphi_u = 0. \end{gathered} \tag{2.49}$$

Аналогично вводится y-характеристическое кольцо Ли системы уравнений (2.40). Из условия "медленного" роста следует, что выполнено одно из соотношений

$$\begin{aligned} &(i') \quad Y_3 = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2, \quad \beta_1 = \beta_1(u),\ \beta_2 = \beta_2(u);\\ &(ii') \quad Y_4 = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \beta_3Y_3,\ Y_5 = \widetilde{\beta}_1Y_1 + \widetilde{\beta}_2Y_2 + \widetilde{\beta}_3Y_3,\\ &\qquad \beta_i = \beta_i(u),\ \widetilde{\beta}_i = \widetilde{\beta}_i(u),\ i = 1,2,3;\\ &(iii') \quad Y_4 = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \beta_3Y_3 + \beta_5Y_5,\\ &\qquad \beta_i = \beta_i(u),\ i = 1,2,3,5;\\ &(iv') \quad Y_5 = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \beta_3Y_3 + \beta_4Y_4,\\ &\qquad \beta_i = \beta_i(u),\ i = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Для систем уравнений (2.41) выполнено одно из условий (2.43) и (2.50). А именно, для первой, второй, шестой и седьмой систем (2.41) $X_4 = 0$. А также, для первой системы имеем $Y_4 = -Y_2$, для второй $Y_4 = 2Y_2 - Y_3$, для шестой $Y_4 = -2Y_2 + 3Y_3$, для седьмой $Y_4 = 0$.

Для третьей системы $X_4 = -X_2$ и $Y_4 = -Y_2$.

Y-характеристическое кольцо Ли четвертой системы уравнений $u_x = \alpha(v)$, $v_y = e^u$ трехмерно ($Y_3 = Y_2$), а x-характеристическое кольцо для каждого из случаев (i)–(iv) определяет функцию $\alpha(v)$ следующим образом: при $X_3 = c_2X_2$ функция $\alpha = \gamma e^{c_2 v}$ (c_2, γ — постоянные); в случае (ii) функция α удовлетворяет соотношениям вида

$$\begin{gathered} c_2\alpha + c_3\alpha' - \alpha'' = 0, \quad \widetilde{c}_2\alpha + \widetilde{c}_3\alpha' = 0,\\ \widetilde{c}_2' + c_2\alpha = 0, \quad \widetilde{c}_3' + c_3\alpha - \alpha' = 0, \quad c_1 = \widetilde{c}_1 = 0, \end{gathered}$$

где c_2, c_3 – постоянные, $\widetilde{c}_2 = \widetilde{c}_2(v)$, $\widetilde{c}_3 = \widetilde{c}_3(v)$.

В случае (iii) функция α удовлетворяет соотношениям вида

$$\begin{gathered} c_2\alpha + c_3\alpha' - \alpha'' = 0, \quad c_2' - c_2c_5\alpha = 0,\\ c_3' + c_5\alpha' - c_3c_5\alpha = 0, \quad c_5' - c_5^2\alpha = 0, \quad c_i = c_i(v),\ i = 2,3,5. \end{gathered}$$

При этом $X_4 = c_2X_2 + c_3X_3 + c_5X_5$.

А в случае (iv) $X_5 = c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4$ и функция α такая, что

$$\begin{gathered} c_2\alpha + c_3\alpha' + c_4\alpha'' = 0, \quad c_3' = \alpha',\\ c_4' = -\alpha, \quad c_2 - const, \quad c_i = c_i(v),\ i = 3,4. \end{gathered}$$

Замечание 2.6. *Нетривиальные симметрии существуют лишь при* $\frac{\alpha''}{\alpha} = const$ *(см. [21]).*

Пятая система уравнений $u_x = \frac{1}{v}$, $v_y = uv + 1$ ($Y_4 = 0$) заменой $v = e^{-w}$ приводится к виду

$$u_x = e^w, \quad w_y = u + e^w.$$

Для последней системы уравнений $X_4 = 0$.

Итак показано, что системы уравнений (2.41) имеют кольца минимального роста, то есть удовлетворяют (2.43) и (2.50).

2.4. Нелинейные интегрируемые уравнения с конечномерным характеристическим кольцом. В этом пункте рассматриваются уравнения (2.24) с характеристическим кольцом A размерности 2 и 3 (см. [16, 18, 35]) и уравнение (2.33) при $\dim A = 4$.

Видно, что операторы X_1 и X_2 линейно независимы, т.е. $\dim L_2 = 2$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.8. *Размерность характеристического кольца A равна двум если и только если правая часть f уравнения* (2.24) *имеет вид*

$$f = A(u, u_x)u_y.$$

При этом $X_3 = \frac{1}{u_y}X_1$.

Пусть размерность кольца A равна трем. В этом случае выполняются соотношения вида

$$\begin{gathered} X_4 + c(X_1 - \overline{u}_1 X_3) = 0, \quad X_5 + \overline{c}(X_1 - \overline{u}_1 X_3) = 0, \\ c = c(u, \overline{u}_1, u_1, u_2, \ldots), \quad \overline{c} = \overline{c}(u, \overline{u}_1, u_1, u_2, \ldots). \end{gathered}$$

Тогда

$$[D, X_4 + c(X_1 - \overline{u}_1 X_3)] = 0, \quad [D, X_5 + \overline{c}(X_1 - \overline{u}_1 X_3)] = 0.$$

Последние соотношения, согласно (2.26), (2.27) и (2.28), эквивалентны следующей системе уравнений

$$\begin{gathered} D(c) + 2cf_{\overline{u}_1} = 0, f_{\overline{u}_1\overline{u}_1} + c(f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}) = 0, \\ D(\overline{c}) + c(\overline{u}_1 f_u + f f_{u_1}) + \overline{c} f_{\overline{u}_1} = 0, \\ f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - \overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} - f f_{u_1\overline{u}_1} - \overline{c}(f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}) = 0. \end{gathered} \tag{2.51}$$

Ясно, что $c = c(u, \overline{u}_1)$, $\overline{c} = \overline{c}(u, \overline{u}_1)$.

Справедливо утверждение.

Лемма 2.9. *Уравнение* (2.24) *с характеристическим кольцом Ли A размерности* 3 *точечной заменой приводится к одному из следующих*

$$u_{xy} = -\frac{1}{B_{u_x}}(B_u u_y + 1), \quad B = B(u, u_x), \quad c = \overline{c} = 0;$$

либо

$$u_{xy} = e^u \Psi(u_x), \quad c = 0, \quad \overline{c} = \overline{c}(u, u_y);$$

либо

$$u_{xy} = \frac{1}{u} p(u_x) \overline{r}(u_y), \quad \overline{r}' + \frac{u_y}{\overline{r}} = \lambda, \quad p' + \frac{u_x}{p} = \lambda,$$

$$\textit{где} \quad \lambda - const, \quad \lambda \neq 0, \quad c = \frac{1}{\overline{r}^2}, \quad \overline{c} = -\frac{1}{u};$$

либо

$$u_{xy} = q(u) p(u_x) \overline{r}(u_y), \quad (\ln q)'' = q^2, \quad \overline{r}' + \frac{u_y}{\overline{r}} = 0, \quad p' + \frac{u_x}{p} = 0,$$

$$\textit{где} \quad c = \frac{1}{\overline{r}^2}, \quad \overline{c} = \frac{q'}{q};$$

либо

$$u_{xy} = \overline{F}(u, u_y) u_x,$$

$$\textit{где} \quad c = \frac{1}{u_y}(\ln(\overline{F} - u_y \overline{F}_{u_y}))'_{u_y}, \quad \overline{c} = (\ln(\overline{F} - u_y \overline{F}_{u_y}))'_u,$$

функция $\overline{F}$ удовлетворяет соотношению

$$u_y e^{-\varphi} + (\overline{F} - \varphi' u_y) \int e^{-\varphi} du = \Phi(\overline{F} - \varphi' u_y), \quad \varphi = \varphi(u).$$

Здесь B, Ψ, Φ–произвольные функции своих аргументов. При этом

$$X_4 = -c(X_1 - u_y X_3), \quad X_5 = -\bar{c}(X_1 - u_y X_3).$$

Теперь рассмотрим уравнение (2.33), для которого $\dim \mathcal{L}_4 = 4$.

Лемма 2.10. *Пусть размерность пространства $\mathcal{L}_4$ равна четырем. Для уравнения* (2.33) $\dim \mathcal{L}_5 = 4$ *только тогда, когда функция K удовлетворяет соотношению*

$$\left(\frac{K'}{K}\right)' = \kappa K^2, \quad \kappa - const. \tag{2.52}$$

Отметим, что размерности x- и $y-$характеристических колец Ли A и $\overline{A}$ уравнения (2.33), (2.52) равны четырем (см. [20]). Поэтому это уравнение является уравнением лиувиллевского типа.

2.5. Уравнение $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$ с x- и y-интегралами второго порядка. В работе [36] предложен метод классификации нелинейных гиперболических уравнений (2.24) с x- и y-интегралами второго порядка, основанный на исследовании пары характеристических колец Ли. Характеристические кольца таких уравнений трехмерны.

Теорема 2.4. *Пусть характеристические кольца A и $\overline{A}$ уравнения* (2.24) *трехмерны. Тогда выполнены следующие соотношения:*

$$A_{u_1} = 0, \quad A_u u_1 + A_{\overline{u}_1} f = -2 f_{\overline{u}_1} A, \tag{2.53}$$

$$B_{u_1} = 0, \quad B_u u_1 + B_{\overline{u}_1} f = -(f_u \overline{u}_1 + f f_{u_1}) A - f_{\overline{u}_1} B, \tag{2.54}$$

где $A = \frac{f_{\overline{u}_1 \overline{u}_1}}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}}, \quad B = \frac{\overline{u}_1 f_{u \overline{u}_1} + f f_{u_1 \overline{u}_1} - f_u - f_{u_1} f_{\overline{u}_1}}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}}.$

$$\overline{A}_{\overline{u}_1} = 0, \quad \overline{A}_u \overline{u}_1 + \overline{A}_{u_1} f = -2 f_{u_1} \overline{A}, \tag{2.55}$$

$$\overline{B}_{\overline{u}_1} = 0, \quad \overline{B}_u \overline{u}_1 + \overline{B}_{u_1} f = -(f_u u_1 + f f_{\overline{u}_1}) \overline{A} - f_{u_1} \overline{B}, \tag{2.56}$$

где $\overline{A} = \frac{f_{u_1 u_1}}{f - u_1 f_{u_1}}, \quad \overline{B} = \frac{u_1 f_{u u_1} + f f_{u_1 \overline{u}_1} - f_u - f_{u_1} f_{\overline{u}_1}}{f - u_1 f_{u_1}}.$

Соотношения (2.53)–(2.56) позволяют составить полный список уравнений с интегралами второго порядка (см., например, [6]).

2.6. Линеаризованное уравнение. Для классификации нелинейных интегрируемых уравнений вместо кольца Ли исходного уравнения можно использовать характеристическое кольцо его линеаризации.

Рассмотрим линеаризацию

$$(D\overline{D} - f_{u_x} D - f_{u_y} \overline{D} - f_u) v = 0 \tag{2.57}$$

уравнения (2.4). Для данного уравнения можем определить последовательность инвариантов Лапласа (см. [20]).

Определение 2.1. *Уравнение* (2.4) *называется интегрируемым по Дарбу, если существуют функции ω, $\overline{\omega}$, зависящие от конечного числа переменных*

$$x, y, u, u_1, u_2, u_3, \ldots, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \ldots \tag{2.58}$$

такие, что на решениях уравнения (2.4) *функция ω не зависит от переменной y, а функция $\overline{\omega}$ – от x.*

Приведем критерий интегрируемости по Дарбу (см. [19, 32, 41, 49]):

Теорема 2.5. *Нелинейное уравнение* (2.4) *интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда последовательность инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения* (2.57) *обрывается с двух сторон.*

В работах [14, 17], используя понятие характеристического кольца Ли, показано, что последовательность инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения (2.57) обрывается с двух сторон только в том случае, когда характеристические кольца Ли конечномерны.

2.7. Высшие симметрии интегрируемых уравнений. В данном параграфе проводится описание высших симметрий интегрируемых уравнений на основе образующих характеристического кольца Ли (см. [10, 32, 37]).

Правая часть нелинейного уравнения $u_{xy} = f(u)$, допускающего нетривиальную группу преобразований Ли-Беклунда, приводится к одному из видов: $e^u, e^u + e^{-u}, e^u + e^{-2u}$.

2.7.1. Симметрии уравнения Лиувилля. X–характеристческое кольцо Ли порождается операторами

$$X_1 = e^u \frac{\partial}{\partial u_1} + D(e^u)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Положим

$$X = e^{-u} \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(e^u) \frac{\partial}{\partial u_k} = e^{-u} X_1,$$

а оператор $\overline{X}$ получим заменой $u_k \leftrightarrow \overline{u}_k$, $D \leftrightarrow \overline{D}$.

Известно (см. [22]), что любая симметрия представима в виде

$$F = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) + \overline{\varphi}(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_m),$$

где φ, $\overline{\varphi}$ являются симметриями.

Теперь определяющее уравнение

$$D\overline{D}\varphi = e^u \varphi$$

примет вид

$$(D + u_1)X\varphi = \varphi. \tag{2.59}$$

Применяя к уравнению (2.59) оператор X, получаем

$$(D + u_1)X^2\varphi = 0.$$

Следовательно, $h = X\varphi \in Ker\overline{D}$, аналогично $\overline{h} = \overline{X}\overline{\varphi} \in KerD$, и из формулы (2.59) получаем, что любая симметрия уравнения Лиувилля представима в виде

$$f = (D + u_1)h + (\overline{D} + \overline{u}_1)\overline{h}, \tag{2.60}$$

где $h(\overline{h})$– произвольный элемент $Ker\overline{D}(D)$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Симметрии уравнения Лиувилля вычисляются по формуле*

$$f = (D + u_1)h(w, w_1, \dots) + (\overline{D} + \overline{u}_1)\overline{h}(\overline{w}, \overline{w}_1, \dots),$$

где $w = u_2 - \frac{u_1^2}{2}$ $(\overline{w} = \overline{u}_2 - \frac{\overline{u}_1^2}{2})$, $h(\overline{h})$*–произвольная функция своих аргументов.*

2.7.2. Симметрии уравнения синус-Гордон. Векторное поле x-характеристического кольца уравнения синус-Гордон

$$X_1 = (e^u + e^{-u})\frac{\partial}{\partial u_1} + D(e^u + e^{-u})\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

представим в виде (см. [11])

$$X_1 = e^u X + e^{-u} Y.$$

Тогда определяющее уравнение $D\overline{D}F = (e^u - e^{-u})F$ эквивалентно системе

$$(D + u_1)XF = F, \quad (D - u_1)YF = F. \tag{2.61}$$

Так как коммутатор $[D, \overline{D}] = 0$, то справедливы следующие соотношения

$$(D + u_1)X = XD, \quad (D - u_1)Y = YD. \tag{2.62}$$

Применяя к уравнениям (2.61) дифференцирования X и Y, и используя при этом (2.62), приходим к формулам

$$\begin{gathered} DYXF = (Y-X)F, \quad (D+u_1)XYXF = YXF, \\ (D-u_1)Y^2XF = -YXF. \end{gathered} \tag{2.63}$$

Из (2.61) – (2.63) следует, что если F–симметрия порядка n, то YXF–симметрия порядка $n-2$. Действительно, так как

$$\begin{gathered} (Y-X)F = -2\left(u_1\tfrac{\partial}{\partial u_2} + u_2\tfrac{\partial}{\partial u_3} + \ldots + (u_{n-1}+\ldots)\tfrac{\partial}{\partial u_n}\right)(u_n + \\ + cu_{n-1} + g(u_1,\ldots,u_{n-2})), \end{gathered}$$

то $\operatorname{ord}(Y-X)F = n-1$, и поэтому из первого соотношения (2.63) получаем, что $\operatorname{ord} YXF = n-2$. Следовательно, если исходное уравнение допускает симметрию четного порядка, то оно должно иметь симметрию второго порядка. А симметрия второго порядка отсутствует.

Из формул (2.61) получаем, что

$$2F = (D - u_1D^{-1}u_1)(X-Y)F.$$

Последняя с учетом (2.63) записывается в виде

$$2F = (-D^2 + u_1D^{-1}u_1D)YXF = -LYXF.$$

Таким образом, алгебра симметрий уравнения синус-Гордон вычисляется по рекуррентной формуле

$$F^{(n+2)} = (D^2 - u_1^2 + u_1D^{-1}u_2)F^{(n)}, \quad F^{(1)} = u_1, \quad n = 1,3,5,\ldots. \tag{2.64}$$

2.7.3. Симметрии уравнения Цицейки. Определим дифференцирования X и Y соотношением $e^uX + e^{-2u}Y = X_1$, где

$$X_1 = (e^u + e^{-2u})\frac{\partial}{\partial u_1} + D(e^u + e^{-2u})\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots.$$

Тогда для функций вида $F(u_1,\ldots,u_n)$ определяющее уравнение

$$D\overline{D}F = (e^u - 2e^{-2u})F$$

эквивалентно системе:

$$(D+u_1)XF = F, \quad (D-2u_1)YF = -2F. \tag{2.65}$$

Последовательное применение операторов X и Y к уравнениям (2.65) приводит к формулам:

$$\begin{gathered} (D-u_1)YXF = (Y-X)F, \quad DXYXF = 3YXF, \\ (D+u_1)X^2YXF = 3XYXF, \quad (D+2u_1)X^3YXF = 2X^2YXF, \\ (D-u_1)YX^2YXF = -X^2YXF, \\ DYX^3YXF = 2(YX^2YX - X^3YX)F, \\ (D+u_1)X(YX^3YXF) = YX^3YXF, \\ (D-2u_1)Y(YX^3YXF) = -2YX^3YXF. \end{gathered} \tag{2.66}$$

Пусть F–симметрия порядка n. Тогда из формул (2.65), (2.66) следует, что YX^3YXF–симметрия исходного уравнения порядка $n-6$. Далее перепишем уравнения (2.65) следующим образом

$$D(2X+Y)F + 2u_1(X-Y)F = 0, \quad D(X-Y)F + u_1(X+2Y)F = 3F.$$

Из последнего нетрудно получить формулу:

$$3F = (D - u_1 - 2u_1D^{-1}u_1)(X-Y)F. \tag{2.67}$$

Теперь, используя (2.66), получаем новое представление симметрии (2.67)

$$27F = (D - u_1 - 2u_1D^{-1}u_1)(D-u_1)D(D+u_1)X^2YXF. \tag{2.68}$$

Четвортое и пятое равенства (2.66) запишем в виде

$$[D,(X^3YX+2YX^2YX)+2u_1(X^3YX-YX^2YX)]F=0,$$
$$[D(X^3YX-YX^2YX)+u_1(2X^3YX+YX^2YX)-3X^2YX]F=0.$$

Из последних соотношений получаем, что

$$3X^2YXF=\big((D+u_1-2D^{-1}u_1)(X^3YX-YX^2YX)\big)\,F. \tag{2.69}$$

И, наконец, используя шестое равенство (2.66) и (2.69), формулу (2.68) можно записать в виде

$$162F=LYX^3YXF,$$

где оператор рекурренции L определен формулой

$$L=(D-u_1-2u_1D^{-1}u_1)(D-u_1)D(D+u_1)(D+u_1-2u_1D^{-1}u_1)D. \tag{2.70}$$

Последнее соотношение дает рекуррентную формулу для симметрий

$$F^{(n+6)}=LF^{(n)}. \tag{2.71}$$

Полагая $F^{(1)}=u_1$, а $F^{(5)}=u_5+5(u_2-u_1^2)u_3-5u_1u_2^2+u_1^5$, получим из (2.71) две последовательности симметрий

$$\left\{F^{(1+6k)}\right\}\quad \text{и}\quad \left\{F^{(5+6k)}\right\},\quad k=0,1,2,\ldots$$

уравнения Цицейки.

2.7.4. Симметрии модифицированного уравнения синус-Гордона. Модифицированное уравнение синус-Гордона (2.38), (2.39) (мСГ) представим в виде

$$u_{xy}=s(u)b(u_1)\bar b(\bar u_1),\quad \text{где}\quad s''-2s^3-\mu s=0\quad b'=-\frac{u_1}{b},\quad \bar b'=-\frac{\bar u_1}{\bar b},\quad \mu-const. \tag{2.72}$$

На множестве локально-аналитических функций из $\Im$

$$\overline{D}F(u,u_1,u_2,\ldots)=\bar u_1\tfrac{\partial}{\partial u}+sb\bar b\tfrac{\partial}{\partial u_1}+D(sb\bar b)\tfrac{\partial}{\partial u_2}+\ldots=$$
$$=\bar u_1\tfrac{\partial}{\partial u}+sb\bar b\tfrac{\partial}{\partial u_1}+(s'u_1b\bar b-s\tfrac{u_1u_2}{b}\bar b-s^2b^2\bar u_1)\tfrac{\partial}{\partial u_2}+\ldots.$$

Поэтому образующие x-характеристической алгебры Ли A уравнения (2.72) имеют вид

$$X=\frac{\partial}{\partial u}-s^2b^2\bar u_1\frac{\partial}{\partial u_2}+\ldots,\quad Y=sb\frac{\partial}{\partial u_1}+(s'u_1b-s\frac{u_1u_2}{b})\frac{\partial}{\partial u_2}+\ldots. \tag{2.73}$$

Тогда $\overline{D}=\bar u_1X+\bar bY$.

Теорема 2.7. *Дифференциальный оператор*

$$Y^2+s^2$$

переводит высшие симметрии порядка n в симметрии порядка $n-2$. Оператор рекурренции

$$D^2+2\frac{u_1u_2}{b^2}D-u_1D^{-1}(\frac{u_3}{b^2}D+\frac{u_1u_2^2}{b^4}D+3s^2u_1D+$$
$$+3ss'u_1^2-ss'+\lambda u_2)+s^2+\lambda u_1^2$$

определяет алгебру симметрий уравнения мСГ (см. [37]).

Отметим, что оператор рекурренции был получен в работе [28] с использованием преобразования Беклунда.

Если $\mu=0$, т.е. $s'^2-ss''+s^4=0$. Тогда функция s определяется так

$$s=\frac{\sqrt{\lambda}}{\cos(\sqrt{\lambda}u-c)},\quad \lambda,c-const.$$

Оказывается существует оператор, который симметрии уравнения

$$u_{xy} = \frac{1}{\cos u}\sqrt{1-u_1^2}\sqrt{1-\overline{u}_1^2}. \tag{2.74}$$

переводит в y-интеграл.

Теорема 2.8. *Оператор*

$$\frac{b}{s}Y + u_1$$

симметрию F переводит в интеграл W уравнения (2.74). *А оператор*

$$\left(\frac{s'}{s}+\frac{u_2}{b^2}\right)^{-1}\left(D-\frac{s}{b}D\left(\frac{b}{s}\right)\right)$$

интеграл — в симметрию.

3. Системы гиперболических уравнений

3.1. Симметрии. Характеристическое кольцо.

3.1.1. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Интегрируемость системы уравнений $u_{z\bar{z}} = F(u)$ определяется свойствами характеристической алгебры Ли, задаваемой векторным полем $F(u)$ (см. [30]). В связи с этим возникает задача о классификации конечномерных (тип I) и допускающих конечномерное представление (тип II) характеристических алгебр. Мы рассмотрим экспоненциальные системы уравнений. Экспоненциальная система с матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ записывается в виде

$$u^i_{z\bar{z}} = e^{v^i}, \quad v^i = a_{i1}u^1 + \ldots + a_{ir}u^r, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.75}$$

Если A–матрица Картана простой алгебры Ли, то эта система интегрируется в квадратурах (см. [29, 57]).

Относительно системы уравнений (3.75) с произвольной матрицей A в работе [30] высказана гипотеза о совпадении характеристической алгебры $\mathcal{X}(A)$ с порожденной положительными корнями подалгеброй $G_+(A)$ контрагредиентной алгебры Ли канонически ассоциированной с матрицей A. Известно (см. [25]), что контрагредиентная алгебра Ли конечномерна тогда и только тогда, когда матрица A эквивалентна одной из матриц Картана простой алгебры Ли.

Нашей целью является описание конечномерных характеристических алгебр $\mathcal{X}(A)$, соответствующих невырожденным матрицам A. Элементами алгебры $\mathcal{X}(A)$ являются операторы вида $\sum_{i,j} f_{ij}(u_1, u_2, \ldots)\frac{\partial}{\partial u^i_j}$ в пространстве переменных $u_j = (u^1_j, \ldots, u^r_j)$, $j \geq 1$. Образующие $X_1, \ldots, X_r$ алгебры Ли $\mathcal{X}(A)$ определяются соотношениями

$$X_j D = (D + a_j)\, X_j, \quad X_j u^k_1 = \delta^k_j, \tag{3.76}$$

где $D:\, u_j \to u_{j+1},\ a_j = a_{j1}u^1_1 + \ldots + a_{jr}u^r_1$. Как векторное пространство, характеристическая алгебра порождается кратными коммутаторами следующего специального вида

$$X_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = ad_{\alpha_1}\ldots ad_{\alpha_{n-1}}X_{\alpha_n}, \quad ad_j:\, Y \to [X_j, Y]. \tag{3.77}$$

Условие невырожденности матрицы A системы уравнений (3.75) удобно заменить условиями

$$\begin{gathered} a_{ii} = 2, \quad a_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0, \\ a_{ij} = 0, -1, -2, \ldots \quad (i, j = 1, \ldots, r, i \neq j). \end{gathered} \tag{3.78}$$

Матрицу, удовлетворяющую этим условиям (возможно вырожденную), будем называть обобщенной матрицей Картана. Покажем, что соотношения (3.78) являются следствием конечномерности алгебры $\mathcal{X}(A)$ и условия $\det A \neq 0$.

Конечномерность характеристической алгебры означает равенство нулю коммутаторов (3.77) достаточно большого порядка n. Это следует из разложения

$$\mathcal{X}(A) \equiv \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_n \oplus \ldots,$$

где $\mathcal{X}_j$–линейное подпространство, натянутое на коммутаторы порядка j. $\mathcal{X}_j \cap \mathcal{X}_k = \{0\}$, так как коэффициенты $X_\alpha u^i_m$ оператора $X_\alpha \in \mathcal{X}_n$ являются обобщенно однородными полиномами степени $m-n$. Для операторов $X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{X}_1$ это справедливо в силу формулы (3.76), а для коммутаторов (3.77) в силу общей формулы

$$\begin{gathered} X_\alpha D = \left(D + a_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_n}\right) X_\alpha + X_{[\alpha]}, \\ X_{[\alpha]} = -a_{\alpha_{n-1}\alpha_n} X_{\alpha/\alpha_n} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j X_{\alpha/\alpha_j}, \quad c_j = \sum_{k=j+1}^{n} a_{\alpha_k\alpha_j}. \end{gathered} \tag{3.79}$$

где α/α_j–мультииндекс, полученный из α зачеркиванием компоненты с номером j.

Формула (3.79) дает, в частности, соотношение

$$X_{\alpha_1\ldots\alpha_n} u_n = X_{[\alpha]} u_{n-1}, \quad n \geq 2, \tag{3.80}$$

из которого следует, что при $n \geq 1$

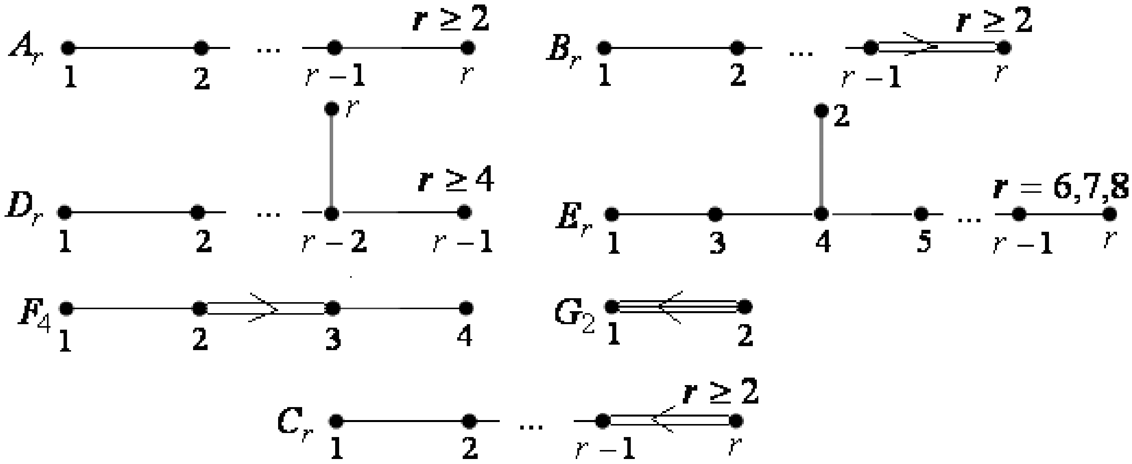
$$\begin{gathered} \left(ad_j^n X_k\right) u^i_{n+1} = n \left(a_{kj} + \tfrac{n-1}{2} a_{jj}\right) ad_j^{n-1} X_k u^i_n = \ldots = \\ = n! \prod_{p=2}^{n} \left(a_{kj} + \tfrac{p-1}{2} a_{jj}\right), \\ X_{jk} u^i_2 = n! \prod_{p=2}^{2} \left(a_{kj} + \tfrac{p-1}{2} a_{jj}\right) \left(a_{kj}\delta^i_k - a_{jk}\delta^k_j\right). \end{gathered} \tag{3.81}$$

Полагая $a_{jj} = 0$, получаем $ad_j^n X_k u^\alpha_{n+1} = n! \left(a_{kj}\right)^{n-1}$. Таким образом, для конечномерной алгебры из $a_{jj} = 0$ следует $a_{1j} = a_{2j} = \ldots = a_{rj} = 0$, что противоречит невырожденности матрицы A. Итак, можно положить $a_{jj} = 2$, $\forall j = 1, \ldots, r$. Формула (3.81) при $i = j$ дает $a_{jk}(a_{kj}+1)(a_{kj}+2)\ldots(a_{kj}+n) = 0$, $n \gg 1$. Соотношения (3.78) доказаны.

Матрица A порядка r называется разложимой, если для некоторого разбиения множества индексов $\{1, \ldots, r\} = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ элементы матрицы A удовлетворяют условиям $a_{ij} = a_{ji} = 0$, $\forall i \in I_1, j \in I_2$. Система уравнений (3.75) с разложимой матрицей A распадается на две независимые подсистемы. Матрицы систем уравнений (3.75), отличающихся только нумерацией переменных, будем называть эквивалентными.

Теорема 3.1. Описание конечномерных характеристических алгебр. *Неразложимая обобщенная матрица Картана с конечномерной характеристической алгеброй эквивалентна матрице Картана простой алгебры Ли (табл. 1).*

Таблица 1.



В табл. 1 приведены графы (схемы Дынкина) матриц Картана. Вершины графа пронумерованы. Ребро $\{i, j\}$ соединяет вершины с номерами i, j, если $a_{ij}a_{ji} \neq 0$. Указанные в таблице графы однозначно определяют матрицы Картана (см. [5]). Кратность ребра $\{i, j\}$ указывает на величину произведения $a_{ij}a_{ji} = 1, 2, 3$. Стрелка определяет место элемента, не равного -1. Отметим, что перестановке $u^i \leftrightarrow u^j$ переменных соответствует перестановка $i \leftrightarrow j$ вершин графа.

Замечание 3.1. *Конечномерность характеристической алгебры, соответствующей одной из матриц Картана, следует из соотношений (см.* (3.81)*)*

$$ad_j^{1-a_{kj}} X_k = 0, \quad j \neq k.$$

Действительно, аналогичные соотношения полностью определяют порожденную положительными корнями подалгебру G_+ контрагредиентной алгебры Ли, которая является конечномерной в случае матриц Картана (см. [25]).

Уравнение

$$\tfrac{\partial}{\partial \bar z}\omega\left(u_1, \dots, u_n\right) = 0 \tag{3.82}$$

называется характеристическим уравнением системы $u^i_{z\bar z} = F^i(u^1, \dots, u^r), \quad i = 1, 2, \dots, r.$ Оператор

$$\tfrac{\partial}{\partial \bar z} = F(u)\tfrac{\partial}{\partial u_1} + F_z(u)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + F_{zz}(u)\tfrac{\partial}{\partial u_3} + \dots \tag{3.83}$$

определяет характеристическую алгебру Ли $\mathcal{X}(F)$ этой системы. Образующими алгебры $\mathcal{X}(F)$ являются операторы вида (3.83), соответствующие различным значениям параметра $u = (u^1, \dots, u^r)$. Легко видеть, что в случае экспоненциальной системы (3.75), соответствующей обобщенной матрице Картана, так определенная характеристическая алгебра совпадает с алгеброй Ли, порожденной операторами (3.76).

Лемма 3.1. *Характеристическое уравнение* (3.82) *системы с конечномерной алгеброй* $\mathcal{X}(F)$, $F = (F^1, \dots, F^r)$ *имеет* r *решений*

$$\omega^k = \omega^k\left(u_1, \dots, u_{n_k}\right), \quad k = 1, \dots, r,$$

удовлетворяющих условию независимости в главном

$$\det\left[\frac{\partial \omega^1}{\partial u_{n_1}}, \dots, \frac{\partial \omega^r}{\partial u_{n_r}}\right] \neq 0.$$

Основное свойство конечномерных характеристических алгебр $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \dots$.

Лемма 3.2. *Пусть* A *– обобщенная матрицы Картана,* $\dim \mathcal{X}(A) < \infty$. *Тогда любой конечный набор* $\{X_\alpha = X_{\alpha_1 \dots \alpha_m}\} \subset \mathcal{X}_m$ *удовлетворяет условию:*

$$\sum_\alpha c_\alpha X_{[\alpha]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_\alpha c_\alpha \left(\sum_{k=1}^m a_{\alpha_k}\right) X_\alpha u^i_m = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Покажем, что для любой, не содержащейся в таблице 1, матрицы A (неразложимой, удовлетворяющей условиям (3.78)), либо при некотором $n \leqslant 4 \quad \dim \mathcal{X}_{n+1}(A) > \dim \mathcal{X}_n(a)$, и применима лемма 3.2, либо характеристическая алгебра $\mathcal{X}(A)$ имеет бесконечномерную подалгебру, соответствующую вырожденной матрице.

Пусть A – неразложимая обобщенная матрица Картана порядка $r = 2$. В силу формулы (3.79)

$$X_{[112]} = 2\left(1 + a_{21}\right) X_{12}, \quad X_{[212]} = 2\left(1 + a_{12}\right) X_{12}.$$

Лемма 3.2 дает

$$\begin{gathered}\left(1 + a_{12}\right)\left(2a_1 + a_2\right) X_{112} u_3 - \left(1 + a_{21}\right)\left(a_1 + 2a_2\right) X_{212} u_3 = \\ = \left(1 + a_{12}\right) a_1 X_{112} u_3 - \left(1 + a_{21}\right) a_2 X_{212} u_3 = 0.\end{gathered}$$

В силу формулы (3.80)

$$X_{112} u_3 = 2\left(1 + a_{21}\right) X_{12} u_2, \quad X_{212} u_3 = 2\left(1 + a_{12}\right) X_{12} u_2.$$

Поэтому

$$(1 + a_{12})(1 + a_{21})(a_1 - a_2) X_{12} u_2 = 0.$$

Так как неразложимость матрицы A означает $X_{12} u_2 \neq 0$, то

$$(1 + a_{12})(1 + a_{21}) = 0.$$

Полагая, для определенности, $a_{12} = -1$, получаем $X_{212} = X_{2112} = 0$ и

$$X_{[11112]} = 4(3 + a_{21} X_{1112}), \quad X_{[21112]} = -X_{[1112]}.$$

Лемма 3.2 дает

$$(1 + a_{21})(2 + a_{21})(3 + a_{21}) = 0.$$

Полученный результат обобщается. Рассматривая подалгебры с двумя образующими, убеждаемся, что справедливо следующее.

Замечание 3.2. *Элементы обобщенной матрицы Картана $A = (a_{ij})$ с конечномерной характеристической алгеброй удовлетворяют условию*

$$\forall i \neq j \quad a_{ij} a_{ji} = 0, 1, 2, 3.$$

Доказанное утверждение исчерпывает вопрос о классификации матриц второго порядка (см. табл. 1).

Замечание 3.3. *Элементы неразложимой обобщенной матрицы Картана $A = (a_{ij})$ $(r > 2,\ \dim \mathcal{X}(A) < \infty)$ удовлетворяют условию: $a_{ij} a_{ji} \neq 3$.*

Замечание 3.4. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неразложимая обобщенная матрица Картана порядка $r \geq 3$, $\quad \dim \mathcal{X}(A) < \infty$. Тогда*

$$a_{ij} a_{ji} = 2 \quad \Rightarrow \quad a_{ik} a_{ki},\ a_{jk} a_{kj} \neq 2, \quad k \neq i, j.$$

Доказательство классификационной теоремы сводится к отысканию бесконечных подалгебр. В процессе доказательства выясняется, что любая бесконечная характеристическая алгебра, удовлетворяющая перечисленным в замечаниях 3.2 – 3.4 условиям, содержит подалгебру, соответствующую одной из матриц табл. 2,3.

Матрицы условно разделены на две таблицы. Бесконечность алгебр матриц табл. 2 доказывается при помощи леммы 3.2. Матрицы, для которых применение леммы 3.2 затруднительно или невозможно, отнесены в табл. 3 вырожденных матриц (бесконечномерность соответствующих алгебр проверяется отдельно).

Имея в виду табл. 2, выпишем соотношения $\sum c_\alpha X_{[\alpha]} = 0$, указывающие на применимость леммы 3.2. При использовании леммы 3.2 некоторые коэффициенты не существенны (см. доказательство замечания 3.4), они не выписаны в явном виде.

Таблица 2.

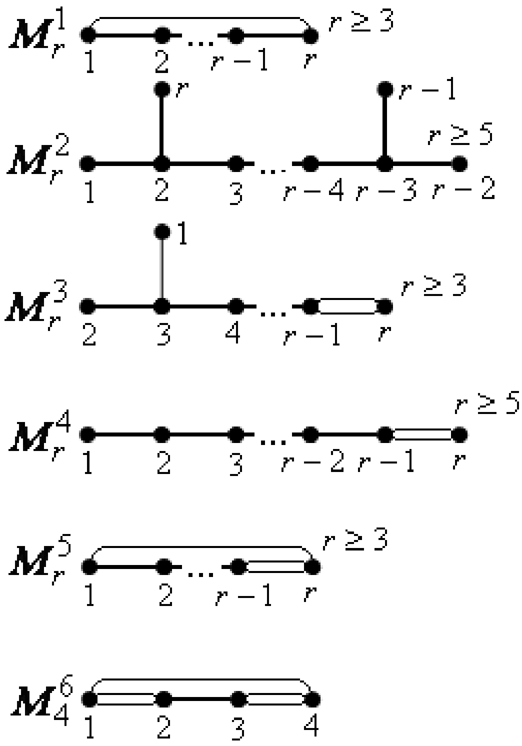
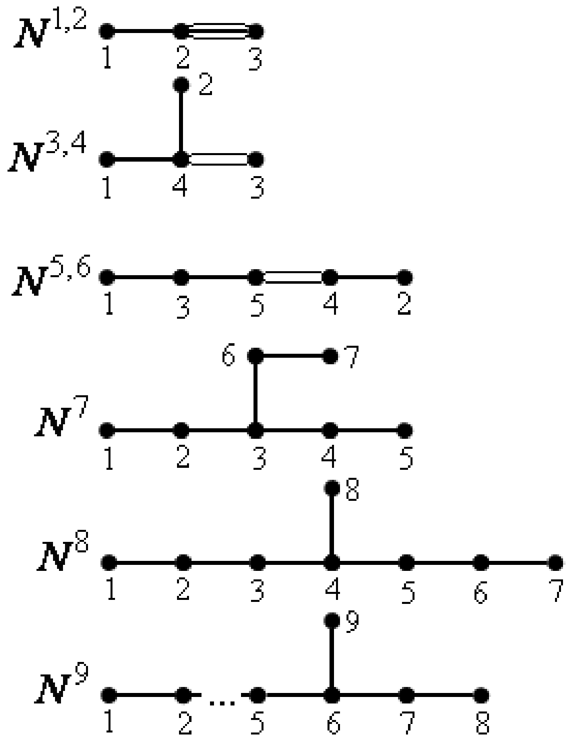


Таблица 3.



$$M_r^1: \quad X_{[r,1]} + \sum_{k=1}^{r-1} X_{[k,k+1]} = 0,$$

$$M_r^2: \quad \sum_{k=3}^{r-4} X_{[k-1,k,k+1]} + \frac{1}{2}\left(X_{[123]} + X_{[32r]} - X_{[12r]}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(X_{[r-1,r-3,r-2]} + X_{[r-1,r-3,r-4]} - X_{[r-4,r-3,r-2]}\right) = 0, \quad r \geq 6,$$

$$M_5^2: \quad X_{[312]} + X_{[512]} + X_{[423]} - X_{[524]} = 0,$$

$$M_r^3: \quad X_{[123]} + X_{[134]} + X_{[234]} + 2\sum_{k=4}^{r-2} X_{[k-1,k,k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[r-2,r-1,r]} + c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]} + X_{[r,r,r-1]}\right) = 0,$$

$$M_r^4: \quad -(3+2a_{21})^{-1}\left(X_{[112]} + X_{[221]}\right) + 2X_{[123]} + 2a_{21}\sum_{k=3}^{r-2} X_{[k-1,k,k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[r-2,r-1,r]} + c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]} + X_{[r,r,r-1]}\right) = 0,$$

$$M_r^5: \quad X_{[21r]} + \frac{1}{a_{r,r-1}} X_{[r-1,1,r]} + \sum_{k=2}^{r-2} X_{[k-1,k,k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[r-2,r-1,r]} + c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]} + X_{[r,r,r-1]}\right) = 0, \quad r \geq 4,$$

$$M_4^6: \quad -\frac{a_{34}}{6+4a_{21}}\left(X_{[112]} + X_{[221]}\right) + a_{34}X_{[123]} + a_{21}X_{[234]} +$$

$$+ c\left(X_{[334]} + X_{[443]}\right) = 0.$$

3.1.2. Квадратичные системы. Системы уравнений вида

$$p^i_x = c^i_{jk}p^jq^k + c^i_kq^k, \quad q^k_y = d^k_{jl}p^jq^l + d^k_jp^j \tag{3.84}$$

будем называть квадратичными. Здесь $p^i = p^i(x,y), q^k = q^k(x,y)$, $i = 1,2,\dots,n$, $k = 1,2,\dots,m$ – неизвестные функции; $c^i_{jk}, c_k, d^k_{jl}, d_j$ – постоянные.

Например, уравнение Лиувилля можно записать в виде:

$$p_x = pq, \quad q_y = p \quad (p = e^u, q = u_x). \tag{3.85}$$

Уравнение синус-Гордон допускает запись:

$$p^1_x = p^1q, \quad p^2_x = -p^2q, \quad q_y = p^1 + p^2 \quad (p^1 = e^u, p^2 = e^{-u}, q = u_x). \tag{3.86}$$

Обозначим через a алгебру гладких функций, зависящих от конечного набора переменных $p^i, q^k, p^i_1, q^k_1, \dots, p^i_l, q^k_l, \dots$, $i = 1,2,\dots,n$, $k = 1,2,\dots,m$, где

$$p^i_{l+1} = \overline{D}p^i_l, \quad q^k_{l+1} = Dq^k_l, \quad p^i_0 = p^i, \quad q^k_0 = q^k.$$

Через a_x обозначим алгебру гладких функций,зависящих от переменных q^k_l, $k = 1,2,\dots,m$, $l = 0,1,2,\dots$. Аналогично определяется алгебра a_y. Если функция $f \in a_x$, то $\overline{D}f = f_0 + \sum_{j=1}^n p^jf_j$, где $f_j \in a_x$, $j = 1,2,\dots,n$. Отображения Y_i, определяемые равенствами $Y_if = f_i$, являются дифференцированиями алгебры a_x. Точно также задаются дифференцирования X_i алгебры a_y.

Определение 3.1. *Порожденная образующими Y_i подалгебра L_x алгебры $Der\, a_x$ называется характеристической алгеброй системы* (3.84) *вдоль x.*

Аналогично определяется характеристическая алгебра Ли L_y. Для определения полной алгебры системы (3.84) рассмотрим соотношения

$$\begin{gathered}[\overline{X}_0, \overline{Y}_i] = \sum_{l=1}^m d^l_i\overline{X}_l, \quad [\overline{X}_l, \overline{Y}_0] = -\sum_{i=1}^n c^i_l\overline{Y}_i, \\ [\overline{X}_0, \overline{Y}_0] = 0, \quad [\overline{X}_l, \overline{Y}_i] = -\sum_{j=1}^n c^j_{il}\overline{Y}_j + \sum_{k=1}^m d^k_{il}\overline{X}_k,\end{gathered} \tag{3.87}$$

где $i = 1,2,\dots,n,\ l = 1,2,\dots,m$.

Определение 3.2. *Пусть алгебра Ли $\overline{L}$, порожденная образующими $\overline{X}_l, \overline{Y}_i$, $l = 0,1,\dots,m, i = 0,1,2,\dots,n$, как векторное пространство является прямой суммой $\overline{L} = \overline{L}_x \oplus \overline{L}_y$ своих подалгебр, порожденных образующими $\overline{Y}_i$ и $\overline{X}_l$ соответственно. Если соответствия $X_l \to \overline{X}_l$ ($Y_i \to \overline{Y}_i$) порождают изоморфизмы алгебр Ли $L_y \to \overline{L}_y$ ($L_x \to \overline{L}_x$), то алгебра $\overline{L}$ называется полной алгеброй квадратичной системы* (3.84).

Отметим, что соотношения (3.87) эквивалентны равенству

$$[D + \overline{X}_0 + q^k\overline{X}_k, \overline{D} + \overline{Y}_0 + p^i\overline{Y}_i] = 0, \tag{3.88}$$

если p^i, q^k являются решениями системы (3.84). С другой стороны, соотношения (3.87) и (3.88) при условии линейной независимости элементов $\overline{X}_l$, $\overline{Y}_i$ порождают систему (3.84). В этом случае уравнение (3.88) называют представлением нулевой кривизны ($L - A$–парой) для системы уравнений (3.84).

Определение 3.3. *Набор функций $f^i, g^k \in a$ называют симметрией системы* (3.84), *если уравнения*

$$p^i_\tau = f^i, \quad q^k_\tau = g^k, \quad i = 1,2,\dots,n, k = 1,2,\dots,m$$

совместны с ней.

Продифференцировав систему (3.84) по параметру τ, получаем систему уравнений для определения симметрий:

$$\begin{aligned}Df^i &= c^i_{jk}(q^kf^j + p^jg^k) + c^i_kg^k, \\ \overline{D}g^k &= d^k_{jl}(q^lf^j + p^jg^l) + d^k_jf^j,\end{aligned} \tag{3.89}$$

где $i=1,2,\dots,n,\ l=1,2,\dots,m$.

Пусть S–линейное пространство симметрий, а S_x (S_y) подмножество симметрий вида

$$f^i=f_0^i+f_j^ip^j,\quad g^k\quad (f^i,\quad g^k=g_0^k+g_j^kq^j),$$

для которых $f_j^i,g^k\in a_x$ ($f^i,g_j^k\in a_y$).

По-видимому, пространство симметрий уравнений S является прямой суммой своих подпространств S_x и S_y.

Для симметрий системы уравнений (3.84) из пространства S_x определяющаяся система (3.89) приобретает вид:

$$\begin{gathered}Df_0^i+c_k^iq^kf_l^i=c_{jk}^iq^kf_0^j+c_k^ig^k,\quad Df_l^i+c_{lk}^rq^kf_r^i=c_{jk}^iq^kf_l^j+c_{lk}^ig^k,\\ Y_0g^k=d_{jl}^kq^lf_0^j+d_j^kf_0^j,\quad Y_1g^k=d_{ji}^kq^if_l^j+d_{li}^kg^i+d_j^kf_l^j,\end{gathered}\tag{3.90}$$

$i=1,2,\dots,n,\ l=1,2,\dots,n,\ k=1,2,\dots,m$.

После обозначений $p^1=e^{2u},p^2=e^uv,q^1=u_x,q^2=w$ система уравнений

$$u_{xy}=\alpha e^{2u}+e^uvw,\quad v_x=e^uw,\quad w_y=e^uv$$

принимает квадратичный вид

$$p_x^1=2p^1q^1,\quad p_x^2=p^2p^1+p^1q^2,\quad q_y^1=\alpha p^1+p^2q^2,\quad q_y^2=p^2.\tag{3.91}$$

Для системы (3.91) при $\alpha=\frac{4}{9}$ в работе [31] получено представление нулевой кривизны в алгебре Вирасоро. Точнее говоря, система (3.91) при $\alpha=\frac{4}{9}$ является следствием недоопределенной системы уравнений, вытекающих из представления нулевой кривизны. В статье приведено иное представление нулевой кривизны, эквивалентное данной системе.

При описании характеристической алгебры полезны следующие соотношения:

$$[D,Y_i]=c_{ik}^jq^kY_j,\quad [D,Y_0]=c_k^iq^kY_i,\tag{3.92}$$

$$[\overline{D},X_k]=d_{ki}^lp^iX_1,\quad [\overline{D},X_0]=d_i^lp^iX_1,\tag{3.93}$$

вытекающие из $[D,\overline{D}]=0,\ \overline{D}=Y_0+p^iY_i,\ D=X_0+q^iX_1$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Если $Q\in Dera_x,\ [D,Q]=fQ$ и $Q(q^k)=0$,$k=1,2,\dots,m$, то $Q=0$.*

Доказательство. Имеем

$$Q(q_1^k)=QD(q^k)=(DQ-fQ)(q^k)=0.$$

Далее индукцией по i получаем $Q(q_i^k)=0$. Следовательно, $Q=0$. Лемма доказана.

Система уравнений (3.91)**.**

Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая $\alpha=\frac{4}{9}$.

Уравнения (3.92), (3.93) для системы (3.91) запишутся в виде

$$\begin{gathered}[\overline{D},X_0]=\tfrac{4}{9}p^1X_1+p^2X_2,\quad [\overline{D},X_1]=0,\quad [\overline{D},X_1]=p^2X_1,\\ [D,Y_1]=-2q^1Y_1-q^2Y_2,\quad [D,Y_2]=-q^1Y_2,\quad Y_0=0.\end{gathered}\tag{3.94}$$

При описании алгебры L_y будут использоваться значения ее образующих X_k на функциях p^i

$$\begin{gathered}X_0(p^1)=0,\quad X_1(p^1)=2p^1,\quad X_2(p^1)=0,\\ X_0(p^2)=0,\quad X_1(p^2)=p^2,\quad X_2(p^2)=p^1.\end{gathered}\tag{3.95}$$

Из равенства $[\overline{D},[X_1,X_2]]=p^2X_1$ при помощи формул (3.94), (3.95) и леммы 3.3 получаем, что $[X_1,X_2]=X_2$. Совершенно аналогично, используя соотношение $[\overline{D},[X_1,X_0]]==\frac{8}{9}p^1X_1+2p^2X_2$, устанавливаем, что $[X_1,X_0]=2X_0$.

Далее положим

$$U_0=X_1,\quad U_1=X_2,\quad U_2=-X_0,\quad U_{i+2}=(adX_2)^iU_2,\ i=1,2,\dots.\tag{3.96}$$

Лемма 3.4. *Справедливы следующие формулы:*

$$U_{i+2} = \frac{3i(i-1)}{2(i-2)}[X_0, U_i], \quad i = 3, 4, \dots. \tag{3.97}$$

Из равенств (3.96)–(3.97) следует, что элементы $U_0, U_1, U_2, \dots$ образуют базис характеристической алгебры L_y. Для описания алгебры L_x введем элементы

$$V_1 = Y_2, \quad V_2 = Y_1, \quad V_{i+2} = (adY_2)^i V_2, \quad i = 1, 2, \dots. \tag{3.98}$$

Лемма 3.5. *Справедливы формулы*

$$V_{i+2} = \frac{3i(i-1)}{2(i-2)}[Y_1, V_i], \quad i = 3, 4, \dots. \tag{3.99}$$

Из формул (3.98) и (3.99) следует, что элементы V_i, $i = 1, 2, \dots$ образуют базис характеристической алгебры L_x.

Соотношения (3.87) для системы уравнений (3.91) при $\alpha = \frac{4}{9}$ имеет вид:

$$[\overline{X}_0, \overline{Y}_1] = \tfrac{4}{9}\overline{X}_1, \quad [\overline{X}_0, \overline{Y}_2] = \overline{X}_2, \quad [\overline{X}_1, \overline{Y}_1] = -2\overline{Y}_1;$$
$$[\overline{X}_1, \overline{Y}_2] = -\overline{Y}_2, \quad [\overline{X}_2, \overline{Y}_1] = -\overline{Y}_2, \quad [\overline{X}_2, \overline{Y}_2] = \overline{X}_1.$$

Далее структура алгебр L_x и L_y указывает, что представление образующих $\overline{X}_0, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{Y}_1, \overline{Y}_2$ следует искать в алгебре Вирасоро ($[e_i, e_j] = (j-1)e_{i+j}, \ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\overline{X}_0 = \frac{2}{3}\lambda^2 e_2, \quad \overline{X}_1 = e_0, \quad \overline{X}_2 = \lambda e_1, \quad \overline{Y}_2 = -\frac{1}{2\lambda}e_{-1}, \quad \overline{Y}_1 = -\frac{1}{6\lambda^2}e_{-2}.$$

Элементы $\overline{U}_i, \overline{V}_i$, вычисленные по формулам (3.96) и (3.98), имеют вид

$$\overline{U}_i = \frac{2}{3}(i-2)!\lambda^i e_i, \quad \overline{V}_i = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}(i-2)!\lambda^i e_{-1}, \quad i = 2, 3, \dots.$$

Легко проверить, что для них выполняются соотношения (3.97) и (3.99). Таким образом, элементы $\overline{U}_0, \overline{U}_i, \overline{V}_i$, $i = 1, 2, \dots$ образуют базис полной алгебры системы (3.91) при $\alpha = \frac{4}{9}$. Эта алгебра изоморфна алгебре Вирасоро.

Представление нулевой кривизны (3.88) для этой системы имеет вид:

$$[D + \frac{2}{3}\lambda^2 e_2 + q^1 e_0 + q^2\lambda e_1, \overline{D} - \frac{1}{2\lambda}p^2 e_{-1} - \frac{1}{6\lambda^2}p^1 e_{-2}] = 0.$$

Симметрии системы (3.91)**.**

Пусть f^i, g^i, $i = 1, 2$ симметрия системы уравнений (3.91) из пространства S_x. Тогда из соотношений (3.90) нетрудно получить, используя формулы (3.94), что

$$f^1 = 2p^1 Y_2 g^2, \quad f^2 = (p^1 Y_1 + p^2 Y_2)g^2, \quad g^1 = DY_2 g^2, \tag{3.100}$$

где функция g^2–решение следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}(Y_1 - Y_2)g^2 = 0, \quad \left((D + 2q^1)Y_1 Y_2 - 2\alpha Y_2\right)g^2 = 0,\\ \left((D + q^1)Y_2^2 - q_2 Y_2 - 1\right)g^2 = 0.\end{gathered} \tag{3.101}$$

Применяя к последнему уравнению (3.101) дифференцирование Y_2, будем иметь

$$\left((D + 2q^1)Y_2^3 - 2Y_2\right)g^2 = 0. \tag{3.102}$$

Из (3.101) и (3.102) следует, что

$$(\alpha Y_2^3 - Y_1 Y_2)g^2 = 0. \tag{3.103}$$

Далее применим к уравнению (3.102) дважды дифференцирование X_2. Получим, что

$$\left((D + 4q^1)Y_2^5 + 5q^2 Y_2^4\right)g^2 = 0. \tag{3.104}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть функция $\psi \in a_x$–решение уравнения*

$$\left((D + 4q^1)Y_2^2 + 5q^2 Y_2\right)\psi = 0. \tag{3.105}$$

Тогда $Y_2\psi = 0$.

Используя формулы (3.100)–(3.102), получаем, что симметрии системы (3.91) из пространства S_x вычисляются по формулам

$$\begin{array}{c} f^1 = p^1\left(D + 2q^1\right)\psi, \quad f^2 = p^1 q^2\psi + \frac{1}{2}p^2\left(D + 2q^1\right)\psi, \\ g^1 = \frac{1}{2}D\left(D + 2q^1\right)\psi, \quad g^2 = \left(D + 2q^1\right)q^2\psi - \frac{1}{2}q^2\left(D + 2q^1\right)\psi. \end{array} \tag{3.106}$$

3.2. Характеристические кольца Ли и критерий интегрируемости по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений. В данном параграфе рассматривается система уравнений

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y)\ (u^i_{xy} = F^i,\ i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3.107}$$

обладающая полным набором x- и y-интегралов.

Известно (см. [7]), что максимальное число независимых $x-$интегралов равно порядку n исходной системы.

Определение 3.4. *Система уравнений* (3.107) *называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует максимальное число независимых x- и y-интегралов.*

Определим x- и y-характеристические кольца Ли системы уравнений (3.107). Оператор $\overline{D}$ на функциях из пространства локально аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $\overline{u}_1, u, u_1, u_2, \ldots, u_k \ldots$, действует по правилу

$$\overline{D} = \overline{u}_2^i X_i + X_{n+1},$$

где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1^i},\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$X_{n+1} = \overline{u}_1^i \frac{\partial}{\partial u^i} + F^i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + D(F^i)\frac{\partial}{\partial u_2^i} + \ldots + D^{k-1}(F^i)\frac{\partial}{\partial u_k^i} + \ldots.$$

$X-$характеристическое кольцо Ли уравнения (3.107) есть кольцо A, порожденное векторными полями $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$. Аналогично определяется $y-$характеристическое кольцо Ли $\overline{A}$.

В статье [27] приведены примеры систем с характеристическими кольцами Ли A и $\overline{A}$ размерности 5. В статьях [30, 44] показано, что система $u^i_{xy} = F^i(u), \quad 1, 2, \ldots, n$ обладает полным набором $x-$интегралов тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо конечномерно.

Теорема 3.2. *Система уравнений* (3.107) *интегрируема по Дарбу, если и только если характеристические кольца Ли A и $\overline{A}$ конечномерны. При этом если n_k – число x-интегралов k-го порядка, $k = 1, 2, \ldots, m$, то*

$$\dim A = n + \sum_{i=1}^{m} i n_i. \tag{3.108}$$

Замечание 3.5. *Для системы уравнений*

$$u^i_{xy} = F^i(x, y, u, u_x, u_y), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.109}$$

x-характеристическое кольцо Ли порождается операторами

$$\begin{array}{c} X_i = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ X_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y} + \overline{u}_1^i \frac{\partial}{\partial u^i} + F^i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + D(F^i)\frac{\partial}{\partial u_2^i} + \ldots + D^{k-1}(F^i)\frac{\partial}{\partial u_k^i} + \ldots. \end{array}$$

Тогда система уравнений (3.109) *интегрируема по Дарбу, если и только если характеристические кольца Ли A и $\overline{A}$ конечномерны. При этом, если s_i-порядок i-го x-интеграла, $i=1,2,\ldots,n$, то*

$$\dim A = n+1+\sum_{i=1}^{n} s_i.$$

3.3. Нелинейные гиперболические системы уравнений с интегралами первого порядка. Рассмотрим систему уравнений (3.107) с полным набором x- и y-интегралов $\omega^i(u,u_1)$, $\overline{\omega}^i(u,\overline{u}_1)$, $i=1,2,\ldots,n$, то есть с x- и y-характеристическими кольцами Ли A и $\bar{A}$ размерности $2n$.

Из уравнений

$$\overline{D}(\omega_i)=0,\ D(\bar{\omega}_i)=0,\ i=1,2,\ldots,n$$

следует, что правая часть системы (3.107) имеет вид

$$F^i(u,u_1,\bar{u}_1) = -\Gamma^i_{kj}(u)u_1^k\overline{u}_1^j,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{3.110}$$

где $\Gamma^i_{kj}(u)$–символы Кристоффеля. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Система уравнений* (3.107), (3.110) *обладает максимальным числом x- и y-интегралов первого порядка, если и только если выполнены соотношения*

$$\begin{aligned}\tilde{R}^i_{pqj} &= \frac{\partial}{\partial u^q}\Gamma^i_{pj} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{pq} + \Gamma^s_{pj}\Gamma^i_{sq} - \Gamma^i_{vj}\Gamma^v_{pq} = 0,\\ R^i_{qpj} &= \frac{\partial}{\partial u^p}\Gamma^i_{jq} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{pq} + \Gamma^i_{ps}\Gamma^s_{jq} - \Gamma^i_{jv}\Gamma^v_{pq} = 0.\end{aligned} \tag{3.111}$$

Здесь R^i_{qpj} – тензор Римана, а $\tilde{R}^i_{pqj}$ – сопряженный тензор Римана.

Отметим, что x- интегралы системы (3.107), (3.110) задаются формулами

$$\omega^i(u,u_1) = A^i_s(u)u_1^s,\ i=1,2,\ldots,n,$$

где функции $A^i_s(u)$ — решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^k}A^i_s(u) - \Gamma^j_{sk}A^i_j(u) = 0.$$

Условие совместности последней системы уравнений записывается так $\tilde{R}^i_{pqj}=0$.

Теорема 3.4. *Любая система уравнений* (3.107) *($n=2$) с полным набором x- и y-интегралов первого порядка точечным преобразованием $u=\phi(v)$ приводится к следующей*

$$v^i_{xy} = v_x^2v_y^1 - v_x^kv_y^k\frac{\partial}{\partial v^k}\ln\left(p(v^1)+q(v^2)\right),\ i=1,2. \tag{3.112}$$

Интегралы системы (3.112) вычисляются по формулам

$$\omega_1 = v_x^1 - v_x^2,\ \omega_2 = \left[e^{-v^1}p(v^1)+s(v^1)\right]v_x^1 + \left[e^{-v^1}q(v^2)-s(v^1)\right]v_x^2,$$

$$\bar{\omega}_1 = v_y^1 - v_y^2,\ \bar{\omega}_2 = \left[e^{-v^2}p(v^1)-r(v^2)\right]v_y^1 + \left[e^{-v^2}q(v^2)+r(v^2)\right]v_y^2,$$

где функции $s(v^1)$, $r(v^2)$, $p(v^1)$ и $q(v^2)$ связаны соотношениями

$$s^{'}(v^1) = e^{-v^1}p(v^1),\ r^{'}(v^2) = e^{-v^2}q(v^2).$$

3.4. Двухкомпонентные системы уравнений с интегралами первого и второго порядка. В работе [12] показано, что любая невырожденная система уравнений (3.107) при $n = 2$ с интегралами

$$\omega^1(u, u_1),\ \omega^2(u, u_1, u_2),\ \bar{\omega}^1(u, \bar{u}_1),\ \bar{\omega}^2(u, \bar{u}_1) \tag{3.113}$$

точечной заменой приводится к одному из следующих видов:

$$u^i_{xy} = -\Gamma^i_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1,\ i = 1, 2 \tag{3.114}$$

или

$$u^1_{xy} = u^1_1\bar{u}^2_1,\ u^2_{xy} = \bar{r}(u^1, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1)u^1_1. \tag{3.115}$$

Здесь рассматривается задача классификации систем уравнений (3.114) и (3.115) с интегралами (3.113).

Лемма 3.7. *Систем уравнений* (3.114) *с интегралами* (3.113) *не существует. А система уравнений* (3.115) *обладает интегралами вида* (3.113) *тогда и только тогда, когда функция $\bar{r}$ является решением следующего уравнения*

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^1} + \bar{u}^2_1\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{u}^1_1} + \bar{r}\frac{\partial\bar{r}}{\partial\bar{u}^2_1} + \bar{u}^1_1\frac{P'(u^1)}{2} + P(u^1)\bar{u}^2_1 = 0. \tag{3.116}$$

При этом

$$\omega^1 = e^{-u^2}u^1_1,\ \omega^2 = u^2_2 - u^2_1\frac{D\omega^1}{\omega} - \frac{(u^2_1)^2}{2} + \frac{1}{2}P(u^1)e^{2u^2}(\omega^1)^2, \tag{3.117}$$

а y-интегралы $\bar{\omega}^1$ и $\bar{\omega}^2$ определяются из уравнений в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \bar{u}^2_1\frac{\partial}{\partial\bar{u}^1_1} + \bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{u}^2_1}\right)\bar{\omega} = 0,\ \frac{\partial}{\partial u^2}\bar{\omega} = 0. \tag{3.118}$$

Далее приведем условия, при которых система уравнений (3.107) при $n = 2$ обладает интегралами

$$\omega^1(u, u_1),\ \omega^2(u, u_1, u_2),\ \bar{\omega}^1(u, \bar{u}_1),\ \bar{\omega}^2(u, \bar{u}_1, \bar{u}_2). \tag{3.119}$$

Лемма 3.8. *Система уравнений* (3.107) *при $n = 2$ с полным набором интегралов* (3.119) *приводится к одной из следующих*

$$u^i_{xy} = A_i(u, u_1)\bar{A}_i(u, \bar{u}_1) + \Phi^i_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1,\ i = 1, 2, \tag{3.120}$$

$$\begin{cases} u^1_{xy} = B_1(u, u_1)\bar{B}_1(u, \bar{u}_1) + \Psi^1_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1 \\ u^2_{xy} = \bar{u}^k_1\alpha_k(u)B_2(u, u_1) + u^k_1\beta_k(u)\bar{B}_2(u, \bar{u}_1) + \Psi^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1, \end{cases} \tag{3.121}$$

$$u^i_{xy} = \bar{u}^k_1\gamma_k(u)C_i(u, u_1) + u^k_1\delta_k(u)\bar{C}_i(u, \bar{u}_1) + \Sigma^i_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1,\ i = 1, 2. \tag{3.122}$$

Далее, на интегралы первого порядка мы накладываем условия

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial u^1_1}\left(\frac{\omega^1_{u^1_1}}{\omega^1_{u^2_1}}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial u^2_1}\left(\frac{\omega^1_{u^1_1}}{\omega^1_{u^2_1}}\right)\right)^2 \neq 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial\bar{u}^1_1}\left(\frac{\bar{\omega}^1_{\bar{u}^1_1}}{\bar{\omega}^1_{\bar{u}^2_1}}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial\bar{u}^2_1}\left(\frac{\bar{\omega}^1_{\bar{u}^1_1}}{\bar{\omega}^1_{\bar{u}^2_1}}\right)\right)^2 \neq 0, \end{gathered} \tag{3.123}$$

которые означают, что интегралы ω^1 и $\bar{\omega}^1$ точечной заменой $u^1 = \varphi(p, q)$, $u^2 = \psi(p, q)$ не приводятся к виду $\omega^1 = W(p, q, p_1)$, $\bar{\omega}^1 = \bar{W}(p, q, \bar{p}_1)$.

При выполнении условий (3.123) с использованием уравнений $\bar{D}\omega^1 = 0$, $D\bar{\omega}^1 = 0$ можно уточнить правые части систем (3.120)–(3.122). А именно, системы (3.120), (3.121) сводятся к виду

$$\begin{cases} u^1_{xy} =A(u,u_1)\bar{A}(u,\bar{u}_1) + \tilde{\Phi}^1_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1 \\ u^2_{xy} =\mu(u)A(u,u_1)\bar{A}(u,\bar{u}_1) + \bar{u}^k_1\varphi_k(u)A(u,u_1) + u^k_1\psi_k(u)\bar{A}(u,\bar{u}_1)+ \\ \qquad + \tilde{\Phi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1, \end{cases} \tag{3.124}$$

а система (3.122) к виду

$$\begin{cases} u^1_{xy} =\bar{u}^k_1\chi^1_k(u)B(u,u_1) + u^k_1\epsilon^1_k(u)\bar{B}(u,\bar{u}_1) + \tilde{\Psi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1 \\ u^2_{xy} =\lambda(u)B(u,u_1)\bar{B}(u,\bar{u}_1) + \bar{u}^k_1\chi^2_k(u)B(u,u_1) + u^k_1\epsilon^2_k(u)\bar{B}(u,\bar{u}_1)+ \\ \qquad + \tilde{\Psi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1. \end{cases} \tag{3.125}$$

Лемма 3.9. *Системы уравнений* (3.124), (3.125) *с полным набором интегралов* (3.119), *удовлетворяющих условию* (3.123), *точечными заменами сводятся к уравнениям вида*

$$u^i_{xy} = -\Gamma^i_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1, \quad i=1,2. \tag{3.126}$$

Для системы (3.126) x-характеристическое кольцо Ли порождается операторами

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i_1}, \quad X_3 = \bar{u}^p_1 Y_p,$$

где

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial u^i} - \Gamma^p_{ki}u^k_1\frac{\partial}{\partial u^p_1} + \dots, \quad i=1,2.$$

Согласно теореме 3.2, если система уравнений (3.126) обладает x-интегралами вида (3.119), то $\dim A = 5$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что векторные поля Y_1, Y_2 и Y_3 ($Y_3 = [Y_1, Y_2]$) линейно независимые и

$$[Y_i, Y_3] = A_i(u,u_1,\bar{u}_1)Y_3. \tag{3.127}$$

Равенство (3.127) можно переписать в виде

$$[D,[Y_i,Y_3]] = A_i[D,Y_3] + D(A_i)Y_3. \tag{3.128}$$

Используя уравнение $[D,\bar{D}] = 0$, находим

$$\begin{aligned} &[D,Y_i] = \Gamma^p_{kj}u^k_1 Y_p, \quad i=1,2, \\ &[D,Y_3] = \tilde{R}^p_{k12}u^k_1 Y_p + (\Gamma^1_{k1}+\Gamma^2_{k2})u^k_1 Y_3. \end{aligned} \tag{3.129}$$

Теперь, учитывая соотношения (3.127) и (3.129), получаем, что равенство (3.128) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u^i}\tilde{R}^p_{k12} + \tilde{R}^q_{k12}\Gamma^q_{qi} - \tilde{R}^p_{q12}\Gamma^q_{ki} = A_i(u)\tilde{R}^p_{k12}, \\ &\tilde{R}^2_{k12} + \frac{\partial}{\partial u^1}(\Gamma^1_{k1}+\Gamma^2_{k2}) - \Gamma^q_{k1}(\Gamma^1_{q1}+\Gamma^2_{q2}) = \frac{\partial}{\partial u^k}A_1(u) - \Gamma^q_{k1}A_q(u), \\ &-\tilde{R}^1_{k12} + \frac{\partial}{\partial u^2}(\Gamma^1_{k1}+\Gamma^2_{k2}) - \Gamma^q_{k2}(\Gamma^1_{q1}+\Gamma^2_{q2}) = \frac{\partial}{\partial u^k}A_2(u) - \Gamma^q_{k2}A_q(u). \end{aligned}$$

Последние соотношения являются необходимыми условиями для существования x-интегралов (3.119) у системы уравнений (3.126). Аналогично получаются условия существования y-интегралов.

3.5. Квадратичные системы уравнений с интегралами первого и второго порядка. В данном параграфе рассматривается система уравнений (3.126) (см. [56]).

Отметим, что при преобразовании $u^i \to p^i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2$ система уравнений (3.126) не меняет вид, при этом функции p^i можно выбрать так, что $\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = 0$. Кроме этого, будем предполагать, что $\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{21} = 0$. Таким образом, мы рассматриваем систему уравнений:

$$u^1_{xy} = \Gamma^1_{1j} u^1_1 \bar{u}^j_1, \quad u^2_{xy} = \Gamma^2_{i2} u^i_1 \bar{u}^2_1 \tag{3.130}$$

с полным набором интегралов

$$\omega^1(u^1, u^2, u^1_1, u^2_1), \ \omega^2(u^1, u^2, u^1_1, u^2_1, u^1_2, u^2_2), \tag{3.131}$$

$$\bar{\omega}^1(u^1, u^2, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1), \ \bar{\omega}^2(u^1, u^2, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1, \bar{u}^1_2, \bar{u}^2_2). \tag{3.132}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Система уравнений* (3.130) *обладает набором x-интегралов* (3.131) *тогда и только тогда, когда справедливы соотношения:*

$$\frac{\partial^2 \Gamma^2_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} = \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \ln F}{\partial u^1}, \tag{3.133}$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma^2_{22}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \ln F}{\partial u^2}, \tag{3.134}$$

$$-2\frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} = \frac{\partial^2 \ln F}{\partial u^1 \partial u^2}, \tag{3.135}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11} - \frac{\partial \ln F}{\partial u^1}\right)\left(\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}\right) = 0, \tag{3.136}$$

$$-\Gamma^2_{22}\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\right) = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\right), \tag{3.137}$$

$$\Gamma^2_{12}\left(F - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial u^2} - \Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{12} - \frac{\partial \ln F}{\partial u^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}\right) = 0, \tag{3.138}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \Gamma^1_{12}\right)\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\right) + \Gamma^2_{12}\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\right) - F = 0, \tag{3.139}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\right)\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\right) + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} = 0, \tag{3.140}$$

где

$$F(u^1, u^2) = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2}. \tag{3.141}$$

Рассматривая y-характеристическое кольцо системы уравнений (3.130), получаем "симметричный" вариант теоремы 3.5:

Теорема 3.6. *Система уравнений* (3.130) *обладает набором интегралов* (3.132) *тогда и только тогда, когда справедливы соотношения:*

$$\frac{\partial^2 \Gamma^1_{11}}{\partial u^2 \partial u^2} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^2}, \tag{3.142}$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma^1_{11}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^1}, \tag{3.143}$$

$$-2\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \ln \bar{F}}{\partial u^1 \partial u^2}, \tag{3.144}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22} - \frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12}\right) = 0, \tag{3.145}$$

$$-\Gamma^1_{11}\left(\frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\right) = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\right), \tag{3.146}$$

$$\Gamma^1_{12}\left(\bar{F} + \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial u^1} - \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} - \frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^1}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12}\right) = 0, \tag{3.147}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \Gamma^2_{12}\right)\left(\frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^2} + \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\right) + \Gamma^1_{12}\left(\frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\right) + \bar{F} = 0, \tag{3.148}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\right)\left(\frac{\partial \ln \bar{F}}{\partial u^2} + \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\right) + \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} = 0, \tag{3.149}$$

где

$$\bar{F} = \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^2}. \tag{3.150}$$

Таким образом, согласно теоремам 3.5, 3.6 классификация интегрируемых систем уравнений (3.130) сводится к исследованию совместности уравнений (3.133)–(3.140), (3.142)–(3.149) относительно неизвестных $\Gamma^1_{11}, \Gamma^1_{12}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^2_{22}$.

Теорема 3.7. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} \neq 0. \tag{3.151}$$

Тогда система (3.130) *с полным набором интегралов* (3.131), (3.132) *приводится к одному из следующих видов:*

$$\begin{gathered} u^1_{xy} = \frac{u^1_1 \bar{u}^1_1}{X} + \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{\alpha Y}\right) u^1_1 \bar{u}^2_1, \quad u^2_{xy} = \frac{u^2_1 \bar{u}^2_1}{Y} + \left(\frac{1}{\alpha X} + \frac{1}{\alpha^2 Y}\right) u^1_1 \bar{u}^2_1, \\ X = u^1 + u^2 + c, \quad Y = \frac{u^1}{\alpha^2} + u^2 - c, \end{gathered} \tag{3.152}$$

либо

$$\begin{gathered} u^1_{xy} = \frac{u^2}{X} u^1_1 \bar{u}^1_1 + \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{\alpha Y}\right) u^1 u^1_1 \bar{u}^2_1, \quad u^2_{xy} = \frac{u^1}{Y} u^2_1 \bar{u}^2_1 + \left(\frac{\alpha}{X} + \frac{1}{Y}\right) u^2 u^1_1 \bar{u}^2_1, \\ X = u^1 u^2 + d_2, \quad Y = u^1 u^2 + c_2, \quad \frac{\alpha + 1}{\alpha} d_2 = (\alpha + 1) c_2, \end{gathered} \tag{3.153}$$

где c – произвольная постоянная, c_2, d_2, α – ненулевые постоянные.

Для решения полной задачи классификации систем уравнений (3.130) осталось рассмотреть случай, когда условие (3.151) нарушено.

Лемма 3.10. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2} = 0,$$

тогда система уравнений (3.130) *с полным набором интегралов* (3.131), (3.132) *не существует.*

Теперь рассмотрим задачу построения $x-$ и $y-$интегралов систем уравнений (3.152), (3.153).

Отметим, что замена $u^1 \to u^1 + \dfrac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}c$, $u^2 \to u^2 - \dfrac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}c$ систему уравнений (3.152) при $\alpha \neq 1$ приводит к системе с постоянной c, равной 0.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 3.8. *Интегралы системы уравнений* (3.152) *задаются формулами: при* $\alpha = 1$

$$\omega^1 = 2u^2 - \frac{u_1^2}{z} + 2c\ \ln z,\ \bar{\omega}^1 = 2u^1 - \frac{\bar{u}_1^1}{\bar{z}} - 2c\ \ln \bar{z}, \tag{3.154}$$

$$\omega^2 = \frac{z_1}{z} - z,\quad \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}} - \bar{z}, \tag{3.155}$$

а при $\alpha \neq 1$ $(c = 0)$

$$\omega^1 = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) u^2 z^{1-\alpha} - u_1^2 z^{-\alpha},\quad \bar{\omega}^1 = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) u^1 \bar{z}^{1-\alpha} - \bar{u}_1^1 \bar{z}^{-\alpha}, \tag{3.156}$$

$$\omega^2 = \frac{z_1}{z} - \frac{z}{\alpha},\quad \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{\alpha}, \tag{3.157}$$

где

$$z = \frac{u_1^1}{X},\ \bar{z} = \frac{\bar{u}_1^2}{Y},\ z_1 = \frac{\partial z}{\partial x},\ \bar{z}_1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}.$$

Теорема 3.9. *Интегралы системы уравнений* (3.153) *задаются формулами: при* $\alpha = -1$

$$\omega^1 = \frac{(u^2)^2 z^2}{2}(d_2 - c_2) - c_2 u_1^2 z,\ \bar{\omega}^1 = \frac{(\bar{u}^1)^2 \bar{z}^2}{2}(c_2 - d_2) - d_2 \bar{u}_1^1 \bar{z}, \tag{3.158}$$

$$\omega^2 = \frac{z_1}{z} + \frac{d_2}{c_2} u^2 z,\ \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}} + \frac{c_2}{d_2} u^1 \bar{z}, \tag{3.159}$$

а при $\alpha \neq -1$

$$\omega^1 = \frac{u_1^2 - (u^2)^2 z\alpha}{z^\alpha},\ \bar{\omega}^1 = \frac{\bar{u}_1^1 - \dfrac{(u^1)^2 \bar{z}}{\alpha}}{\bar{z}^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{3.160}$$

$$\omega^2 = u^2 z - \frac{z_1}{z},\ \bar{\omega}^2 = u^1 \bar{z} - \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}}, \tag{3.161}$$

где

$$z = \frac{u_1^1}{X},\ \bar{z} = \frac{\bar{u}_1^2}{Y},\ z_1 = \frac{\partial z}{\partial x},\ \bar{z}_1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}.$$

Теорема 3.10. *Общее решение системы уравнений* (3.152) *дается формулами: при* $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \tfrac{A(x)+B(y)}{(C(x)+D(y))^2} + c\ \ln \tfrac{1}{C(x)+D(y)} - \\ &- \tfrac{B'(y)}{D'(y)(C(x)+D(y))} + \tfrac{c}{2}, \\ u^2(x,y) &= \tfrac{A(x)+B(y)}{(C(x)+D(y))^2} - c\ \ln \tfrac{1}{C(x)+D(y)} - \\ &- \tfrac{A'(x)}{C'(x)(C(x)+D(y))} - \tfrac{c}{2}, \end{aligned} \tag{3.162}$$

а при $\alpha \neq 1$ $(c = 0)$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \frac{\alpha A(x) + B(y)}{\alpha(C(x)+D(y))^{\alpha+1}} - \frac{B'(y)}{\alpha D'(y)(C(x)+D(y))^{\alpha}}, \\ u^2(x,y) &= \frac{A(x) + \alpha B(y)}{\alpha(C(x)+D(y))^{\alpha+1}} - \frac{A'(x)}{\alpha C'(x)(C(x)+D(y))^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.163}$$

Теорема 3.11. *Общее решение системы уравнений* (3.153) *дается формулами: при* $\alpha = -1$ *и* $c_2 + d_2 = 0$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \left(\frac{B'(y)}{Y'(y)} + X(x)\right) e^{-A(x)-B(y)-X(x)Y(y)}, \\ u^2(x,y) &= -d_2\left(\frac{A'(x)}{X'(x)} + Y(y)\right) e^{A(x)+B(y)+X(x)Y(y)}, \end{aligned} \tag{3.164}$$

при $\alpha = -1$ *и* $c_2 + d_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \left(\tfrac{2d_2}{c_2+d_2}\cdot\tfrac{X(x)}{X(x)Y(y)+c} - \tfrac{\bar W'(y)}{\bar W(y)Y'(y)}\right)\times \\ &\quad\times(X(x)Y(y)+c)^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}\tfrac{\bar W(y)}{W(x)}, \\ u^2(x,y) &= \left(\tfrac{2c_2}{c_2+d_2}\cdot\tfrac{Y(y)}{X(x)Y(y)+c} - \tfrac{W'(x)}{W(x)X'(x)}\right)\times \\ &\quad\times(X(x)Y(y)+c)^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}\tfrac{W(x)}{\bar W(y)}, \end{aligned} \tag{3.165}$$

где

$$c = \frac{c_2+d_2}{2},$$

а при $\alpha \neq -1$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= -\left(A(y) - (1+\alpha)B(y)D(x) - (1+\alpha)E(x)\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}\times \\ &\quad\times\tfrac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\tfrac{c_2}{B'(y)}\left(A'(y) - (1+\alpha)B'(y)D(x)\right), \\ u^2(x,y) &= (A(y) - (1+\alpha)B(y)D(x) - \\ &\quad -(1+\alpha)E(x))^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(B(y) + \tfrac{E'(x)}{D'(x)}\right). \end{aligned} \tag{3.166}$$

3.6. Линеаризация экспоненциальных систем ранга 2. Рассматриваются системы уравнений (см. [26])

$$u_{xy} = a_{i1}e^{u^1} + \ldots + a_{in}e^{u^n}, \; i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.167}$$

В случае, когда $n = 2$

$$u_{xy} = a_{11}e^u + a_{12}e^v, \quad v_{xy} = a_{21}e^u + a_{22}e^v. \tag{3.168}$$

Для решения задачи классификации исследуется структура характеристического кольца линеаризации системы уравнений (3.168).

Линеаризация системы уравнений (3.168) имеет вид

$$p_{xy} = a_{11}e^u p + a_{12}e^v q, \quad q_{xy} = a_{21}e^u p + a_{22}e^v q. \tag{3.169}$$

Далее считаем, что u и v заданные функции и $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Определим $x-$ и $y-$характеристические кольца Ли системы уравнений (3.169). Оператор $\bar D$ на пространстве локально аналитических функций, зависящих от конечного числа независимых переменных $x, y, p, q, p_1, q_1, p_2, q_2 \ldots$, действует по правилу

$$\bar D = \bar p_1 Y_1^{(0)} + \bar q_1 Y_2^{(0)} + X_1,$$

где

$$Y_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial p}, \; Y_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q},$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} + (a_{11}e^u p + a_{12}e^v q)\frac{\partial}{\partial p_1} + (a_{21}e^u p + a_{22}e^v q)\frac{\partial}{\partial q_1} + \dots .$$

X-характеристическое кольцо Ли системы уравнений (3.169) есть кольцо A, порожденное векторными полями $Y_1^{(0)}$, $Y_2^{(0)}$, X_1. Аналогично определяется y-характеристическое кольцо Ли $\bar{A}$.

Лемма 3.11. *Пусть*

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \frac{\partial}{\partial q_i}, \ \alpha_i, \beta_i \in F, \ i = 1, 2, \dots .$$

Тогда соотношение $[D, Z] = 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $Z = 0$.

Рассмотрим коммутаторы

$$Y_1^{(1)} = [Y_1^{(0)}, X_1] = e^u[a_{11}\frac{\partial}{\partial p_1} + a_{21}\frac{\partial}{\partial q_1} + a_{11}u_1\frac{\partial}{\partial p_2} + a_{21}u_1\frac{\partial}{\partial q_2} + \dots],$$

$$Y_2^{(1)} = [Y_2^{(0)}, X_1] = e^v[a_{12}\frac{\partial}{\partial p_1} + a_{22}\frac{\partial}{\partial q_1} + a_{12}v_1\frac{\partial}{\partial p_2} + a_{22}v_1\frac{\partial}{\partial q_2} + \dots].$$

Введем обозначения

$$Y_1^{(0)} = Z_1^{(0)}, \ Y_2^{(0)} = Z_2^{(0)},$$
$$Y_1^{(1)} = e^u Z_1^{(1)}, \ Y_2^{(1)} = e^v Z_2^{(1)}.$$

Далее, по определению положим

$$Z_1^{(n+1)} = [Z_1^{(n)}, X_1], \ Z_2^{(n+1)} = [Z_2^{(n)}, X_1], \ n = 1, 2, \dots .$$

Отметим, что векторные поля X_1, $Z_1^{(0)}$, $Z_2^{(0)}$, $Z_1^{(1)}$, $Z_2^{(1)}$ являются линейно независимыми.

С учетом последних обозначений оператор $\bar{D}$ будет иметь вид

$$\bar{D} = \bar{p}_1 Z_1^{(0)} + \bar{q}_1 Z_2^{(0)} + X_1.$$

Легко проверить, что

$$[D, Z_1^{(0)}] = [D, Z_2^{(0)}] = 0,$$
$$[Z_1^{(i)}, [D, X_1]] = [Z_2^{(i)}, [D, X_1]] = 0, \ i = 1, 2, \dots .$$

Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&[D, X_1] = -(a_{11}e^u p + a_{12}e^v q)Z_1^{(0)} - (a_{21}e^u p + a_{22}e^v q)Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_1^{(1)}] = -u_1 Z_1^{(1)} - a_{11}Z_1^{(0)} - a_{21}Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_2^{(1)}] = -v_1 Z_2^{(1)} - a_{12}Z_1^{(0)} - a_{22}Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_1^{(2)}] = -u_1 Z_1^{(2)} + a_{12}e^v Z_1^{(1)} - a_{21}e^v Z_2^{(1)},\\
&[D, Z_2^{(2)}] = -v_1 Z_2^{(2)} - a_{12}e^u Z_1^{(1)} + a_{21}e^u Z_2^{(1)}.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Лемма 3.12. *Для операторов* $Z_1^{(2)}$ *и* $Z_2^{(2)}$ *верно соотношение*

$$e^u Z_1^{(2)} + e^v Z_2^{(2)} = 0. \tag{3.171}$$

Далее, для удобства введем обозначения

$$Z_1^{(0)} = W_1^{(0)},\ Z_2^{(0)} = W_2^{(0)},\ Z_1^{(1)} = W_1^{(1)},\ Z_2^{(1)} = W_2^{(1)},$$
$$Z_1^{(2)} = e^v W_1^{(2)},\ Z_2^{(2)} = e^u W_2^{(2)}.$$

По определению положим

$$W_1^{(n+1)} = [W_1^{(n)}, X_1],\ n = 2, 3, \ldots.$$

При этом легко показать справедливость следующих равенств

$$[W_1^{(n)}, [D, X_1]] = 0,$$
$$[D, W_1^{(n+1)}] = -[X_1, [D, W_1^{(n)}]].$$

Отметим, что векторные поля X_1, $W_1^{(0)}$, $W_2^{(0)}$, $W_1^{(1)}$, $W_2^{(1)}$, $W_1^{(2)}$ являются линейно независимыми, а операторы $W_2^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$ связаны формулой

$$W_2^{(2)} = -W_1^{(2)}.$$

Лемма 3.13. *Справедливо следующее соотношение*

$$\begin{gathered}[D, W_1^{(n)}] = -(u_1 + v_1) W_1^{(n)} + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i-1} C_{n-2}^{i-2} X_1^{n-i} (u_1 + v_1) W_1^{(i)} + \\ + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i-1} C_{n-3}^{i-2} X_1^{n-i-1} (a_{12} e^v + a_{21} e^u) W_1^{(i)},\ n = 3, 4, \ldots.\end{gathered} \tag{3.172}$$

Предположим теперь, что характеристическое кольцо Ли системы уравнений (3.169) конечномерно. Это означает, что найдется $n \geq 2$, для которого операторы $X_1, W_1^{(0)}$, $W_2^{(0)}$, $W_1^{(1)}$, $W_2^{(1)}$, $W_1^{(2)}$, $W_1^{(3)}, \ldots$ $W_1^{(n)}$ образуют базис этого кольца. Тогда оператор $W_1^{(n+1)}$ есть линейная комбинация элементов базиса.

Поскольку

$$W_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial p},\quad W_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q},$$

а операторы старших порядков имеют структуру

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \ldots,\ i = 1, 2, \ldots,$$

то

$$W_1^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} A_k W_1^{(k)} + B_1 W_2^{(1)},$$

где $A_k,\ B_1$ – функции переменных $u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \ldots$.
Последнее соотношение эквивалентно равенству

$$[D, W_1^{(n+1)}] = \sum_{k=1}^{n} D(A_k) W_1^{(k)} + D(B_1) W_2^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} A_k [D, W_1^{(k)}] + B_1 [D, W_2^{(1)}].$$

По лемме 3.13 получаем

$$\begin{gathered}D(A_1) W_1^{(1)} + D(B_1) W_2^{(1)} + A_1(-u_1 W_1^{(1)} - a_{11} W_1^{(0)} - a_{21} W_2^{(0)}) + \\ + A_2(a_{12} W_1^{(1)} - a_{21} W_2^{(1)}) + B_1(-v_1 W_2^{(1)} - a_{12} W_1^{(0)} - a_{22} W_2^{(0)}) = 0.\end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты правой и левой частей последнего равенства при векторных полях $W_1^{(0)}, W_2^{(0)}, W_1^{(1)}, W_2^{(1)}$, получаем систему

$$\begin{aligned}
-a_{11}A_1 - a_{12}B_1 &= 0,\\
-a_{21}A_1 - a_{22}B_1 &= 0,\\
D(A_1) + a_{12}A_2 - u_1A_1 &= 0,\\
D(B_1) - a_{21}A_2 - v_1B_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Откуда находим $A_1 = B_1 = 0$ и $A_2 = 0$. Таким образом, доказано следующее предложение.

Лемма 3.14. *X - характеристическая алгебра A системы уравнений* (3.169) *конечномерна тогда и только тогда, когда либо $W_1^{(3)} = 0$, либо*

$$W_1^{(n+1)} = \sum_{k=3}^{n} A_k W_1^{(k)},\ \ A_k = A_k(u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \ldots),\ \ n = 3, 4, \ldots.$$

При этом $\dim A = 6$, *либо* $\dim A = n + 4,\ n = 3, 4, \ldots$ *соответственно.*

Теперь, пользуясь леммами 3.13 и 3.14, выпишем необходимые и достаточные условия конечномерности характеристического кольца системы (3.169).

При $\dim A = 6$ получаем

$$X_1(u_1 + v_1) + a_{12}e^v + a_{21}e^u = 0, \tag{3.173}$$

а в случае $\dim A = n + 4$ $(n \geq 3)$ имеем

$$\begin{gathered}
(-1)^{n-2}X_1^{n-2}((a_{11} + 2a_{21})e^u + (a_{22} + 2a_{12})e^v) =\\
= \sum_{p=3}^{n} A_p(-1)^{p-3}X_1^{p-3}((a_{11} + 2a_{21})e^u + (a_{22} + 2a_{12})e^v),\\
(-1)^{n-i}\left(C_{n-1}^{i-2}X_1^{n-i+1}(u_1 + v_1) + C_{n-2}^{i-2}X_1^{n-i}(a_{12}e^v + a_{21}e^u)\right) = \qquad (3.174)\\
= \sum_{p=i+1}^{n} A_p(-1)^{p-i-1}\left(C_{p-2}^{i-2}X_1^{p-i}(u_1 + v_1) + C_{p-3}^{i-2}X_1^{p-i-1}(a_{12}e^v + a_{21}e^u)\right) +\\
+D(A_i),\ i = 3, 4, \ldots, n-1,\\
(n-1)X_1(u_1 + v_1) + a_{12}e^v + a_{21}e^u = D(A_n).
\end{gathered}$$

Можно показать, что для системы (3.174) неизвестные A_i есть функции переменных $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \ldots, \bar{u}_{n-i+1}, \bar{v}_{n-i+1},\ i = 3, 4, \ldots, n-1$.

Теорема 3.12. *Если характеристическая алгебра Ли системы уравнений* (3.169) *конечномерна, то система* (3.168) *приводится к виду*

$$u_{xy} = 2e^u + a_{12}e^v,\quad v_{xy} = -e^u + 2e^v. \tag{3.175}$$

Теперь будем рассматривать системы уравнений вида (3.175).

Напомним, что алгебра Ли A линеаризованной системы уравнений (3.169) порождается векторными полями $X_1,\ W_1^{(0)},\ W_2^{(0)},\ W_1^{(1)},\ W_2^{(1)},\ W_1^{(2)}$, поэтому $\dim A \geq 6$.

Далее проведем исследование системы уравнений, для которых $\dim A \leqslant 9$.

Теорема 3.13. *Размерность x - характеристической алгебры A линеаризованной системы уравнений* (3.169) *не превышает* 9 *тогда и только тогда, когда коэффициент a_{12} принимает одно из следующих значений $-1,\ -2$ или -3. При этом $\dim A = 6,\ 7,\ 9$ соответственно.*

Получены все уравнения, для которых размерность характеристического кольца линеаризации не превышает 9. Показано, что правые части этих систем задаются матрицами Картана простой алгебры Ли.

4. Дифференциально-разностные уравнения гиперболического типа

В этом разделе рассматриваются цепочки дифференциально-разностных уравнений следующего вида

$$t_x(n+1) = f(t(n), t(n+1), t_x(n)), \tag{4.176}$$

где неизвестная функция $t = t(n,x)$ зависит от дискретной переменной n и непрерывной переменной x. Цепочку (4.176) можно интерпретировать как бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с последовательностью неизвестных функций $\{t(n)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$. Функция $f(t, t_1, t_x)$ предполагается локально-аналитической по всем трем аргументам, причем в некоторой области выполняется условие

$$\frac{\partial f}{\partial t_x} \neq 0. \tag{4.177}$$

Мы используем нижний индекс для обозначения сдвига дискретного аргумента $t_k = t(n+k, x)$ $(t_0 = t)$, а также для обозначения производных по x:

$$t_x = \frac{\partial}{\partial x} t(n,x), \quad t_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} t(n,x).$$

Обозначим через D и D_x оператор сдвига и, соответственно, оператор полной производной по x. Например, $Dh(n,x) = h(n+1,x)$ и $D_x h(n,x) = \frac{\partial}{\partial x} h(n,x)$. В качестве динамических переменных выбираются переменные $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $\{D_x^m t\}_{m=1}^{\infty}$. Ниже мы считаем динамические переменные независимыми.

4.1. Дифференциально-разностные уравнения лиувиллевского типа. Функции I и F, зависящие от x и конечного числа динамических переменных, называются, соответственно, n- и x-интегралами уравнения (4.176), если выполняются равенства $DI = I$ и $D_x F = 0$. Интегралы вида $I = I(x)$, $F = const$ называются тривиальными интегралами.

Определение 4.1. *Цепочка* (4.176) *называется интегрируемой по Дарбу, если она имеет нетривиальные x- и n-интегралы.*

Следует отметить, что интегрируемая по Дарбу цепочка сводится к паре уравнений: обыкновенному разностному уравнению и обыкновенному дифференциальному уравнению. Действительно, из определения следует, что n-интеграл может зависеть только от x, а x-интеграл только от n. Поэтому любое решение цепочки (4.176) удовлетворяет следующим двум уравнениям

$$I(x, t, t_x, t_{xx}, \ldots) = p(x), \quad F(x, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots) = q(n)$$

с подходящим образом выбранными функциями $p(x)$ и $q(n)$.

В настоящее время дискретные нелинейные модели находят важные приложения в физике и активно исследуются. Подробное обсуждение приложений и обзор литературы можно найти в работах [1, 23, 58, 62].

В это главе мы предлагаем алгоритм классификации интегрируемых по Дарбу дискретных цепочек (4.176), основанный на понятии характеристического кольца Ли (см. [43, 50–54]).

Введем понятие характеристического кольца L_n цепочки (4.176) в направлении n. Заметим, что

$$D^{-j} \frac{\partial}{\partial t_1} D^j I = 0 \tag{4.178}$$

для любого n-интеграла и $j \geq 1$. Действительно, равенство $DI = I$ может быть переписано в развернутой форме

$$I(x, t_1, f, f_x, f_{xx}, \ldots) = I(x, t, t_x, t_{xx}, \ldots). \tag{4.179}$$

Левая часть последнего равенства зависит от переменной t_1, а правая не зависит от нее. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t_1}DI = 0,$$

что дает

$$D^{-1}\frac{\partial}{\partial t_1}DI = 0.$$

Продолжая это рассуждение, легко получить формулу (4.178). Введем в рассмотрение векторные поля

$$Y_j = D^{-j}\frac{\partial}{\partial t_1}D^j, \quad j \geq 1 \tag{4.180}$$

и

$$X_j = \frac{\partial}{\partial t_{-j}}, \quad j \geq 1. \tag{4.181}$$

Таким образом, мы видим, что всякий n-интеграл I лежит в ядре операторов X_j и Y_j для любого $j \geq 1$. Следующая теорема содержит определение характеристического кольца L_n для (4.176) (см. [43]).

Теорема 4.1. *Если уравнение* (4.176) *допускает нетривиальный n-интеграл, то выполняются следующие два условия:*

- линейная оболочка операторов $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеет конечную размерность. Обозначим эту размерность N.

- кольцо Ли L_n над полем локально дифференцируемых функций, порожденное операторами $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, X_1, X_2, \ldots, X_N$, имеет конечную размерность. Назовем L_n характеристическим кольцом Ли по направлению n.

Введем понятие характеристического кольца L_x цепочки (4.176) по направлению x. Для этого отметим, что в силу условия (4.177) цепочку (4.176) можно переписать в виде

$$t_x(n-1) = g(t(n), t(n-1), t_x(n)).$$

По определению, x-интеграл $F(x, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots)$ удовлетворяет уравнению $D_x F = 0$, т.е. $K_0 F = 0$, где

$$K_0 = \frac{\partial}{\partial x} + t_x\frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial t_1} + g\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + f_1\frac{\partial}{\partial t_2} + g_{-1}\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \ldots. \tag{4.182}$$

Но, поскольку F не может зависеть от t_x, то имеем $XF = 0$, где

$$X = \frac{\partial}{\partial t_x}. \tag{4.183}$$

Тогда очевидно, что F лежит в ядре любого оператора из кольца Ли, порожденного над полем локально-аналитических функций парой операторов X и K_0.

Можно доказать следующее важное утверждение (см. [9]).

Теорема 4.2. *Цепочка* (4.176) *допускает нетривиальный x-интеграл тогда и только тогда, когда ее характеристическое кольцо Ли L_x имеет конечную размерность.*

4.2. Классификация интегрируемых по Дарбу цепочек частного вида. Рассмотрим задачу описания всех цепочек вида

$$t_{1x} = t_x + d(t, t_1), \tag{4.184}$$

допускающих нетривиальные x- и n-интегралы. Полный список цепочек (4.184), допускающих x-интегралы, дается в следующей теореме:

Теорема 4.3. *Цепочка* (4.184) *допускает нетривиальный x-интеграл тогда и только тогда, когда $d(t,t_1)$ принадлежит одному из классов:*

(1) $d(t,t_1)=A(t-t_1)$,

(2) $d(t,t_1)=c_0(t-t_1)t+c_2(t-t_1)^2+c_3t-c_3t_1$,

(3) $d(t,t_1)=A(t-t_1)e^{\alpha t}$,

(4) $d(t,t_1)=c_4(e^{\alpha t_1}-e^{\alpha t})+c_5(e^{-\alpha t_1}-e^{-\alpha t})$,

где $A=A(t-t_1)$, $c_i - const, i=0,\dots,5$, $c_0\neq 0, c_4\neq 0, c_5\neq 0$ *и* $\alpha - const$, $\alpha\neq 0$.

При этом x-интегралы имеют вид соответственно

(i) $F=x+\int^{\tau}\frac{du}{A(u)}$, *если* $A(u)\neq 0$ *и* $F=t_1-t$, *если* $A(u)\equiv 0$,

(ii) $F=\frac{1}{-c_2-c_0}\ln|\frac{-(c_2+c_0)\tau_1}{\tau_2}+c_2|+\frac{1}{c_2}\ln|\frac{c_2\tau_1}{\tau}-c_2-c_0|$ *для* $c_2(c_2+c_0)\neq 0$, $F=\ln\tau_1-\ln\tau_2+\frac{\tau_1}{\tau}$ *для* $c_2=0$ *и* $F=\frac{\tau_1}{\tau_2}-\ln\tau+\ln\tau_1$ *для* $c_2=-c_0$,

(iii) $F=\int^{\tau}e^{-\alpha u}\frac{du}{A(u)}-\int^{\tau_1}\frac{du}{A(u)}$,

(iv) $F=\frac{(e^{\alpha t}-e^{\alpha t_2})(e^{\alpha t_1}-e^{\alpha t_3})}{(e^{\alpha t}-e^{\alpha t_3})(e^{\alpha t_1}-e^{\alpha t_2})}$,

где $\tau=t-t_1$, $\tau_1=t_1-t_2$, $\tau_2=t_2-t_3$.

Обсудим некоторые необходимые условия существования x-интеграла. Обозначим через F класс локально-аналитических функций, каждая из которых зависит от конечного числа динамических переменных. В частности, мы получаем, что $f(t,t_1,t_x)\in F$. Ниже мы будем иметь дело с векторными полями, заданными в виде формальных рядов

$$Y=\sum_{-\infty}^{\infty}y_k\frac{\partial}{\partial t_k} \tag{4.185}$$

с коэффициентами $y_k\in F$. Уточним, как понимается линейная зависимость и линейная независимость векторных полей вида (4.185). Пусть P_N оператор проектирования, определенный в классе формальных рядов (4.185)

$$P_N(Y)=\sum_{-N}^{N}y_k\frac{\partial}{\partial t_k}. \tag{4.186}$$

Рассмотрим сначала векторные поля, заданные конечной суммой вида

$$Z=\sum_{-N}^{N}z_k\frac{\partial}{\partial t_k}. \tag{4.187}$$

Векторные поля $Z_1,Z_2,\dots,Z_m$ вида (4.187) линейно зависимы в некоторой открытой области Ω, если существует набор функций $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$, определенных в Ω так, что функция $|\lambda_1|^2+|\lambda_2|^2+\ldots+|\lambda_m|^2$ не является тождественным нулем, и для всех точек области Ω выполняется равенство

$$\lambda_1Z_1+\lambda_2Z_2+\ldots+\lambda_mZ_m=0. \tag{4.188}$$

Назовем набор векторных полей $Y_1,Y_2,\dots,Y_m$ вида (4.185) линейно зависимым в области Ω, если для любого натурального N следующий набор векторных полей $P_N(Y_1),P_N(Y_2),\dots,P_N(Y_m)$, заданных конечными суммами, линейно зависим в этой области. В противном случае набор $Y_1,Y_2,\dots,Y_m$ называется линейно независимым.

Из определения линейной зависимости векторных полей очевидным образом получаем следующее утверждение:

Замечание 4.1. *Если векторное поле Y является линейной комбинацией вида*

$$Y=\lambda_1Y_1+\lambda_2Y_2+\ldots+\lambda_mY_m, \tag{4.189}$$

где векторные поля $Y_1,Y_2,\dots,Y_m$ линейно независимы в Ω, и коэффициенты всех векторных полей $Y,Y_1,Y_2,\dots,Y_m$ принадлежат F и определены в Ω, то коэффициенты $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ также принадлежат F.

Вернемся к цепочкам (4.184). В этом случае кольцо L_x распадается в прямую сумму двух подколец. Действительно, поскольку $f = t_x + d$ и $g = t_x - d_{-1}$, то $f_k = t_x + d + \sum_{j=1}^{k} d_j$ и $g_{-k} = t_x - \sum_{j=1}^{k+1} d_{-k}$ для $k \geq 1$, где $d = d(t, t_1), d_j = d(t_j, t_{j+1})$. Поэтому легко видеть, что $K_0 = t_x \widetilde{X} + Y$, где

$$\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_{-1}} + \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots \tag{4.190}$$

и

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial t_1} - d_{-1}\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + (d + d_1)\frac{\partial}{\partial t_2} - (d_{-1} + d_{-2})\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots . \tag{4.191}$$

Из соотношений $[X, \widetilde{X}] = 0$ и $[X, Y] = 0$ имеем $\widetilde{X} = [X, K_0] \in L_x$ так, что $Y \in L_x$. Следовательно, $L_x = \{X\} \oplus L_{x1}$, где L_{x1} является кольцом Ли, порожденным операторами $\widetilde{X}$ и Y.

Лемма 4.1. *Если уравнение* (4.184) *имеет нетривиальный x-интеграл, тогда оно имеет x-интеграл, не зависящий явно от x.*

Доказательство. Допустим, что существует нетривиальный x-интеграл цепочки (4.184). Тогда кольцо Ли L_x конечномерно. Выберем в нем базис в следующем виде:

$$T_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{1,k}\frac{\partial}{\partial t_k}, \quad T_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j,k}\frac{\partial}{\partial t_k}, \quad 2 \leqslant j \leqslant N.$$

Причем существует x-интеграл $F(x, t, t_1, \dots, t_{N-1})$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{k=0}^{N-1} a_{1,k}\frac{\partial F}{\partial t_k} = 0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_{j,k}\frac{\partial F}{\partial t_k} = 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant N.$$

В силу известной теоремы Якоби (см. [30]) существует замена переменных $\theta_j = \theta_j(t, t_1, \dots, t_{N-1})$, приводящая систему к виду

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{a}_{1,k}\frac{\partial F}{\partial \theta_k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_k} = 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant N-2,$$

что равносильно уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \widetilde{a}_{1,N-1}\frac{\partial F}{\partial t_{N-1}} = 0$$

для $F = F(x, \theta_{N-1})$.

Здесь возможны два случая: (1) $\widetilde{a}_{1,N-1} = 0$ и (2) $\widetilde{a}_{1,N-1} \neq 0$. В случае (1) находим $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, во втором –

$$F = x + H(\theta_{N-1}) = x + H(t, t_1, \dots, t_{N-1})$$

для некоторой функции H. Очевидно, что $F_1 = DF = x + H(t_1, t_2, \dots, t_N)$ также является x-интегралом. Поэтому $F_1 - F$ – есть нетривиальный x-интеграл, не зависящий явно от x. Лемма доказана.

В силу леммы 4.1 можно искать x-интеграл, зависящий только от переменных $t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots$. Другими словами, можно ограничиться изучением кольца Ли, порожденного векторными полями $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$

$$\widetilde{Y} = d\frac{\partial}{\partial t_1} - d_{-1}\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + (d + d_1)\frac{\partial}{\partial t_2} - (d_{-1} + d_{-2})\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots . \tag{4.192}$$

Можно доказать, что линейный оператор, действующий по правилу $Z \to DZD^{-1}$, определяет автоморфизм характеристического кольца L_x. Этот автоморфизм играет ключевую роль при изучении цепочек. Прямое вычисление показывает, что

$$D\widetilde{X}D^{-1} = \widetilde{X}, \quad D\widetilde{Y}D^{-1} = -d\widetilde{X} + \widetilde{Y}. \tag{4.193}$$

Лемма 4.2. *Пусть векторное поле вида* $Z = \sum a(j)\frac{\partial}{\partial t_j}$ *с коэффициентами* $a(j) = a(j, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots)$, *зависящими от конечного числа динамических переменных, удовлетворяет условию* $DZD^{-1} = \lambda Z$ *и пусть* $a(j) = 0$ *для некоторого* $j = j_0$, *тогда* $Z = 0$.

Доказательство. Применяя автоморфизм сдвига к оператору Z, получаем $DZD^{-1} = \sum D(a(j))\frac{\partial}{\partial t_{j+1}}$. Теперь, для завершения доказательства сравним коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial t_j}$ в равенстве $DZD^{-1} = \lambda Z$. Лемма доказана.

Построим бесконечную последовательность кратных коммутаторов векторных полей $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$

$$\widetilde{Y}_1 = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \quad \widetilde{Y}_k = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}_{k-1}] \quad \text{для} \quad k \geq 2. \tag{4.194}$$

Лемма 4.3. *Имеет место равенство*

$$D\widetilde{Y}_k D^{-1} = -\widetilde{X}^k(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_k, \quad k \geq 1. \tag{4.195}$$

Доказательство леммы проведем по индукции. При $k = 1$ из (4.193) и (4.194) следует, что

$$D\widetilde{Y}_1 D^{-1} = D[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]D^{-1} = [D\widetilde{X}D^{-1}, D\widetilde{Y}D^{-1}] = [\widetilde{X}, -d\widetilde{X} + \widetilde{Y}] = -\widetilde{X}(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_1.$$

Теперь предположим, что утверждение верно для $k - 1$, и получим

$$D\widetilde{Y}_k D^{-1} = [D\widetilde{X}D^{-1}, D\widetilde{Y}_{k-1}D^{-1}] = [\widetilde{X}, -\widetilde{X}^{k-1}(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_{k-1}] = -\widetilde{X}^k(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_k.$$

Лемма доказана.

Поскольку векторные поля $X, \widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ линейно независимы, то размерность кольца Ли L_x не может быть меньше трех. В силу (4.195) случай $\widetilde{Y}_1 = 0$ означает $\widetilde{X}(d) = 0$ или $d_t + d_{t_1} = 0$, что дает $d = A(t - t_1)$. Здесь $A(\tau)$– произвольная функция одной переменной.

Допустим, что цепочка (4.184) допускает нетривиальный x-интеграл и $\widetilde{Y}_1 \neq 0$. Рассмотрим последовательность векторных полей $\{\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}_3, \ldots,\}$. Поскольку L_x имеет конечную размерность, то существует натуральное число N такое, что

$$\widetilde{Y}_{N+1} = \gamma_1\widetilde{Y}_1 + \gamma_2\widetilde{Y}_2 + \ldots + \gamma_N\widetilde{Y}_N, \quad N \geq 1, \tag{4.196}$$

причем $\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \ldots, \widetilde{Y}_N$ линейно независимы. Следовательно,

$$D\widetilde{Y}_{N+1}D^{-1} = D(\gamma_1)D\widetilde{Y}_1D^{-1} + D(\gamma_2)D\widetilde{Y}_2D^{-1} + \ldots + D(\gamma_N)D\widetilde{Y}_ND^{-1}, \quad N \geq 1.$$

По лемме 4.3 и в силу (4.196) последнее уравнение можно переписать в виде

$$\begin{gathered}-\widetilde{X}^{N+1}(d)\widetilde{X} + \gamma_1\widetilde{Y}_1 + \gamma_2\widetilde{Y}_2 + \ldots + \gamma_N\widetilde{Y}_N = D(\gamma_1)(-\widetilde{X}(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_1) + \\ + D(\gamma_2)(-\widetilde{X}^2(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_2) + \ldots + D(\gamma_N)(-\widetilde{X}^N(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_N).\end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты перед линейно независимыми операторами $\widetilde{X}, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \ldots, \widetilde{Y}_N$, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}\widetilde{X}^{N+1}(d) = D(\gamma_1)\widetilde{X}(d) + D(\gamma_2)\widetilde{X}^2(d) + \ldots + D(\gamma_N)\widetilde{X}^N(d), \\ \gamma_1 = D(\gamma_1), \quad \gamma_2 = D(\gamma_2), \ldots, \gamma_N = D(\gamma_N).\end{gathered}$$

Так как коэффициенты векторных полей $\widetilde{Y}_j$ зависят только от переменных $t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots$, то и коэффициенты γ_j могут зависеть только от этих переменных (см. замечание 4.1). Более того, из последней системы уравнений следует, что коэффициенты γ_k — постоянны для всех $1 \leqslant k \leqslant N$, а функции $d = d(t, t_1)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению

$$\widetilde{X}_{N+1}(d) = \gamma_1\widetilde{X}(d) + \gamma_2\widetilde{X}^2(d) + \ldots + \gamma_N\widetilde{X}^N(d), \quad \widetilde{X}(d) = d_t + d_{t_1}. \tag{4.197}$$

Используя замену переменных $s = t$ и $\tau = t - t_1$, перепишем уравнение (4.197) в виде

$$\frac{\partial^{N+1} d}{\partial s^{N+1}} = \gamma_1 \frac{\partial d}{\partial s} + \gamma_2 \frac{\partial^2 d}{\partial s^2} + \ldots + \gamma_N \frac{\partial^N d}{\partial s^N}. \tag{4.198}$$

Следовательно, справедливо утверждение:

Теорема 4.4. *Искомая функция $d = d(t, t_1)$ имеет следующий вид*

$$d(t, t_1) = \sum_k \left(\sum_{j=0}^{m_k - 1} \lambda_{k,j}(t - t_1) t^j \right) e^{\alpha_k t}, \tag{4.199}$$

где $\lambda_{k,j}(t - t_1)$–некоторые функции, α_k–характеристические корни кратности m_k уравнения (4.198).

Пусть $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ – несовпадающие корни характеристического уравнения. Тогда уравнение (4.197) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \Lambda(\widetilde{X})d = \widetilde{X}^{m_0}(\widetilde{X} - \alpha_1)^{m_1}(\widetilde{X} - \alpha_2)^{m_2} \ldots (\widetilde{X} - \alpha_s)^{m_s} d = 0, \\ m_0 + m_1 + \ldots + m_s = N + 1, \quad m_0 \geq 1. \end{gathered} \tag{4.200}$$

Отталкиваясь от формулы (4.192), введем в рассмотрение отображение $h \to Y_h$, которое ставит в соответствие функции $h = h(t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots)$ векторное поле

$$Y_h = h \frac{\partial}{\partial t_1} - h_{-1} \frac{\partial}{\partial t_{-1}} + (h + h_1) \frac{\partial}{\partial t_2} - (h_{-1} + h_{-2}) \frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \ldots.$$

Для любого полинома с постоянными коэффициентами $P(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \ldots + c_m \lambda^m$ имеем формулу

$$P(ad_{\widetilde{X}})\widetilde{Y} = Y_{P(\widetilde{X})d}, \quad ad_X Y = [X, Y], \tag{4.201}$$

которая устанавливает изоморфизм между линейным пространством V всех решений уравнения (4.198) и линейной оболочкой $\widetilde{V}$ векторных полей $\widetilde{Y}, \widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_N$.

Представим функцию (4.199) в виде суммы $d(t, t_1) = P(t, t_1) + Q(t, t_1)$ полиномиального слагаемого $P(t, t_1) = \sum_{j=0}^{m_0 - 1} \lambda_{0,j}(t - t_1) t^j$ и "экспоненциального" слагаемого $Q(t, t_1) = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{m_k - 1} \lambda_{k,j}(t - t_1) t^j \right) \mathrm{e}^{\alpha_k t}$.

Лемма 4.4. *Пусть уравнение* (4.184) *допускает нетривиальный x-интеграл. Тогда, по крайней мере, одна из функций $P(t, t_1)$ и $Q(t, t_1)$ тождественно равна нулю.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. ни одна из функций не является тождественным нулем. Сначала мы покажем, что в этом случае кольцо L_x содержит векторные поля $T_0 = Y_{A(\tau)e^{\alpha_k t}}$ и $T_1 = Y_{B(\tau)}$ с некоторыми функциями $A(\tau)$ и $B(\tau)$. Выберем в качестве T_0 векторное поле $\Lambda_0(ad_{\widetilde{X}})\widetilde{Y} = Y_{\Lambda_0(\widetilde{X})d} \in L_x$, где $\Lambda_0(\lambda) = \frac{\Lambda(\lambda)}{\lambda - \alpha_k}$. Очевидно, что функция $\widetilde{A}(t, t_1) = \Lambda_0(\widetilde{X})d$ удовлетворяет уравнению $(\widetilde{X} - \alpha_k)\widetilde{A}(t, t_1) = \Lambda(\widetilde{X})d = 0$, из которого мгновенно следует, что $\widetilde{A}(t, t_1) = A(\tau)e^{\alpha_k t}$.

Аналогично можно построить поле $T_1 = Y_{B(\tau)} \in L_x$. Отметим, что согласно нашему предположению функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ отличны от тождественного нуля.

Рассмотрим бесконечную последовательность векторных полей, определенных по правилу

$$T_2 = [T_0, T_1], \quad T_3 = [T_0, T_2], \ldots, T_n = [T_0, T_{n-1}], \quad n \geq 3.$$

Можно показать, что

$$\begin{gathered} [\widetilde{X}, T_0] = \alpha_k T_0, \quad [\widetilde{X}, T_1] = 0, \quad [\widetilde{X}, T_n] = \alpha_k (n-1) T_n, \quad n \geq 2, \\ D T_0 D^{-1} = -A e^{\alpha_k t} \widetilde{X} + T_0, \quad D T_1 D^{-1} = -B \widetilde{X} + T_1, \ldots, \\ D T_n D^{-1} = T_n - \tfrac{(n-1)(n-2)}{2} \alpha_k A e^{\alpha_k t} T_{n-1} + b_n \widetilde{X} + \textstyle\sum_{k=0}^{n-2} a_k^{(n)} T_k, \quad n \geq 2. \end{gathered}$$

Поскольку алгебра конечномерна, и $\widetilde{X}, T_0, T_1, \ldots, T_N$ линейно независимы, то существует число N такое, что

$$T_{N+1} = \lambda \widetilde{X} + \mu_0 T_0 + \mu_1 T_1 + \ldots + \mu_N T_N. \tag{4.202}$$

Имеем

$$DT_{N+1}D^{-1} = D(\lambda)\widetilde{X} + D(\mu_0)\left(-Ae^{\alpha_k t}\widetilde{X} + T_0\right) + \ldots +,$$
$$+D(\mu_N)\left(T_N - \tfrac{(N-1)(N-2)}{2}\alpha_k Ae^{\alpha_k t}T_{N-1} + \ldots\right).$$

Сравнивая коэффициенты перед оператором T_N в последнем уравнении, находим

$$\mu_N - \frac{N(N-1)}{2}\alpha_k A(\tau)e^{\alpha_k t} = D(\mu_N).$$

Отсюда следует, что μ_N является функцией, зависящей только от t. Применяя оператор $ad_{\widetilde{X}}$ к обеим частям уравнения (4.202), получаем

$$N\alpha_k T_{N+1} = [\widetilde{X}, T_{N+1}] = \widetilde{X}(\lambda)\widetilde{X} + \left(\widetilde{X}(\mu_0) + \mu_0\alpha_k\right)T_0 + \ldots +$$
$$+\left(\widetilde{X}(\mu_N) + \mu_N(N-1)\alpha_k\right)T_N.$$

Снова, сравнивая коэффициенты перед T_N, находим

$$N\alpha_k\mu_N = \widetilde{X}(\mu_N) + (N-1)\alpha_k\mu_N \quad \text{или} \quad \widetilde{X}(\mu_N) = \alpha_k\mu_N.$$

Следовательно, $\mu_N = A_1 e^{\alpha_k t}$, где A_1–ненулевая константа, и поэтому $A(\tau)e^{\alpha_k t} = A_2 e^{\alpha_k t} - A_2 e^{\alpha_k t_1}$, $A_2 - const$.

Имеем $T_0 = A_2 e^{\alpha_k t}\widetilde{X} - A_2 S_0$, где $S_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{\alpha_k t_j}\frac{\partial}{\partial t_j}$. А также

$$[\widetilde{X}, S_0] = \alpha_k S_0, \quad DS_0D^{-1} = S_0.$$

Рассмотрим новую последовательность векторных полей

$$P_1 = S_0, \quad P_2 = [T_1, S_0], \quad P_3 = [T_1, P_2], \quad P_n = [T_1, P_{n-1}], \quad n \geq 3.$$

Можно показать, что

$$[\widetilde{X}, P_n] = \alpha_k P_n, \quad DP_nD^{-1} = P_n - \alpha_k(n-1)BP_{n-1} +$$
$$+b_n\widetilde{X} + a_n S_0 + \textstyle\sum_{j=2}^{n-2} a_j^{(n)}P_j, \quad n \geq 2.$$

Так как алгебра L_x конечномерна, то существует число M такое, что

$$P_{M+1} = \lambda^*\widetilde{X} + \mu_2^* P_2 + \ldots + \mu_M^* P_M, \tag{4.203}$$

где поля $\widetilde{X}, P_2, \ldots, P_M$ линейно независимы. Тогда

$$DP_{M+1}D^{-1} = D(\lambda^*)\widetilde{X} + D(\mu_2^*)(P_2 + \ldots) + \ldots +$$
$$+D(\mu_M^*)(P_M - \alpha_k(M-1)BP_{M-1} + \ldots).$$

Сравнивая коэффициенты перед P_M в последнем соотношении, получим

$$\mu_M^* - M\alpha_k B(\tau) = D(\mu_M^*). \tag{4.204}$$

Значит μ_M^*–функция, зависящая только от t.

Подействуем оператором $ad_{\widetilde{X}}$ на обе части соотношения (4.203), тогда имеем

$$\alpha_k P_{M+1} = [\widetilde{X}, P_{M+1}] = \widetilde{X}(\lambda^*)\widetilde{X} + (\widetilde{X}(\mu_2^*) + \alpha_k\mu_2^*)P_2 +$$
$$+ \ldots + (\widetilde{X}(\mu_M^*) + \alpha_k\mu_M^*)P_M.$$

Снова, сравнивая коэффициенты перед P_M, и зная, что $\alpha_k\mu_M^*(t) = \widetilde{X}(\mu_M^*(t)) + +\alpha_k\mu_M^*(t)$, получаем μ_M^* – постоянная. Из уравнения (4.204) следует, что $B(\tau) = 0$. Из данного противоречия следует, что хотя бы одна из функций $P(t, t_1)$ и $Q(t, t_1)$ тождественно равна нулю. Лемма доказана.

Дальнейшее уточнение вида функции $d(t, t_1)$, а также полное доказательство теоремы 4.3 можно найти в работе [53].

Результат полной классификации уравнения (4.184) содержится в следующем утверждении (см. [52]).

Теорема 4.5. *Цепочка* (4.184), *допускающая одновременно нетривиальные x- и n-интегралы, принадлежит одному из типов:*

(1) $d(t,t_1) = A(t_1 - t)$, *где* $A(t_1-t) = \frac{d}{d\theta}P(\theta)$, $t_1 - t = P(\theta)$, $P(\theta)$ – *квазимногочлен по* θ,
(2) $d(t,t_1) = C_1(t_1^2 - t^2) + C_2(t_1 - t)$,
(3) $d(t,t_1) = \sqrt{C_3 e^{2\alpha t_1} + C_4 e^{\alpha(t_1+t)} + C_3 e^{2\alpha t}}$,
(4) $d(t,t_1) = C_5(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t}) + C_6(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t})$,

где $\alpha \neq 0$, C_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$ – *произвольные постоянные. Причем соответствующие интегралы минимального порядка можно привести к виду*

i) $F = x - \int^{t_1-t}\frac{ds}{A(s)}$, $I = L(D_x)t_x$, *где* $L(D_x)$ – *дифференциальный оператор, который обращает в нуль* $\frac{d}{d\theta}P(\theta)$. *Причем* $D_x\theta = 1$.

ii) $F = \frac{(t_3-t_1)(t_2-t)}{(t_3-t_2)(t_1-t)}$, $I = t_x - C_1t^2 - C_2t$,

iii) $F = \int^{t_1-t}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha s}ds}{\sqrt{C_3\mathrm{e}^{2\alpha s}+C_4\mathrm{e}^{\alpha s}+C_3}} - \int^{t_2-t_1}\frac{ds}{\sqrt{C_3\mathrm{e}^{2\alpha s}+C_4\mathrm{e}^{\alpha s}+C_3}}$, $I = 2t_{xx} - \alpha t_x^2 - \alpha C_3 \mathrm{e}^{2\alpha t}$,

iv) $F = \frac{(\mathrm{e}^{\alpha t}-\mathrm{e}^{\alpha t_2})(\mathrm{e}^{\alpha t_1}-\mathrm{e}^{\alpha t_3})}{(\mathrm{e}^{\alpha t}-\mathrm{e}^{\alpha t_3})(\mathrm{e}^{\alpha t_1}-\mathrm{e}^{\alpha t_2})}$, $I = t_x - C_5 e^{\alpha t} - C_6 e^{-\alpha t}$.

4.3. S-интегрируемые дифференциально-разностные уравнения. Пользуясь координатными представлениями (4.182), (4.183) характеристических векторных полей, можно построить характеристическое кольцо Ли $L_x = \{X, K_0\}$, соответствующее произвольному дифференциально-разностному уравнению вида (4.176).

Ниже мы подробно исследуем характеристическое кольцо Ли цепочки вида

$$t_{1x} = t_x + A_1(\mathrm{e}^{\alpha t_1} + \mathrm{e}^{\alpha t}) + A_2(\mathrm{e}^{-\alpha t} + \mathrm{e}^{-\alpha t_1}), \tag{4.205}$$

которая является дифференциально-разностным аналогом уравнения синус-Гордон $u_{xy} = \sin u$. Поскольку уравнение (4.205) имеет вид (4.184), то в качестве образующих кольца можно выбрать операторы $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ (см. (4.190), (4.192)). Далее воспользуемся тождеством (4.201), в котором положим $d = A_1(\mathrm{e}^{\alpha t_1} + \mathrm{e}^{\alpha t}) + A_2(\mathrm{e}^{-\alpha t} + \mathrm{e}^{-\alpha t_1})$. Положим $P_0(\lambda) = \frac{1}{2\alpha A_1}(\lambda + \alpha)$, $P_1(\lambda) = -\frac{1}{2\alpha A_2}(\lambda - \alpha)$.

Введем два оператора $S_0^* = P_0(ad_{\widetilde{X}})\widetilde{Y}$ и $S_1^* = P_1(ad_{\widetilde{X}})\widetilde{Y}$:

$$\begin{gathered} S_0^* = (\mathrm{e}^{\alpha t_1} + \mathrm{e}^{\alpha t})\frac{\partial}{\partial t_1} - (\mathrm{e}^{\alpha t_{-1}} + \mathrm{e}^{\alpha t})\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + \\ +(\mathrm{e}^{\alpha t} + 2\mathrm{e}^{\alpha t_1} + \mathrm{e}^{\alpha t_2})\frac{\partial}{\partial t_2} - (\mathrm{e}^{\alpha t} + 2\mathrm{e}^{\alpha t_{-1}} + \mathrm{e}^{\alpha t_{-2}})\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \ldots, \end{gathered} \tag{4.206}$$

$$\begin{gathered} S_1^* = (\mathrm{e}^{-\alpha t_1} + \mathrm{e}^{-\alpha t})\frac{\partial}{\partial t_1} - (\mathrm{e}^{-\alpha t_{-1}} + \mathrm{e}^{-\alpha t})\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + \\ +(\mathrm{e}^{-\alpha t} + 2\mathrm{e}^{-\alpha t_1} + \mathrm{e}^{-\alpha t_2})\frac{\partial}{\partial t_2} - (\mathrm{e}^{-\alpha t} + 2\mathrm{e}^{-\alpha t_{-1}} + \mathrm{e}^{-\alpha t_{-2}})\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \ldots. \end{gathered} \tag{4.207}$$

Из очевидных равенств $[\widetilde{X}, S_0^*] = \alpha S_0^*$, $[\widetilde{X}, S_1^*] = -\alpha S_1^*$, $\widetilde{Y} = A_1 S_0^* + A_2 S_1^*$ вытекает, что $L_{x1} = \{\widetilde{X}\} \oplus L_{x2}$, где L_{x2} – кольцо Ли, порожденное операторами S_0^*, S_1^*.

Построим базис линейного пространства, состоящего из элементов кольца L_{x2}. Заменим зависимые переменные следующим образом $\tau_j = t_j - t_{j+1}$, тогда τ_j и $t = t_0$ новые переменные, при этом имеют место равенства $\frac{\partial}{\partial t_j} = -\frac{\partial}{\partial \tau_{j-1}} + \frac{\partial}{\partial \tau_j}$, которые позволяют переписать операторы S_0^*, S_1^* в виде $S_0^* = -\mathrm{e}^{\alpha t}S_0$, $S_1^* = -\mathrm{e}^{-\alpha t}S_1$, где

$$S_0 = \sum_j A(\tau_j)\mathrm{e}^{\alpha\rho(j)}\frac{\partial}{\partial \tau_j}, \quad S_1 = \sum_j B(\tau_j)\mathrm{e}^{-\alpha\rho(j)}\frac{\partial}{\partial \tau_j}, \tag{4.208}$$

причем

$$A(\tau) = 1 + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}, \quad B(\tau) = 1 + \mathrm{e}^{\alpha\tau}, \tag{4.209}$$

$$\rho(j) = \begin{cases} -\tau - \tau_1 - \ldots - \tau_{j-1}, \quad \text{если} \quad j \geq 1; \\ 0, \quad \text{если} \quad j = 0; \\ \tau_{-1} + \tau_{-2} + \ldots + \tau_j, \quad \text{если} \quad j \leqslant -1. \end{cases} \tag{4.210}$$

Пользуясь равенством $D\rho(j) = \rho(j+1) + \tau$, легко можно проверить, что

$$DS_0D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}S_0, \quad DS_1D^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}S_1. \tag{4.211}$$

Как и следовало ожидать, характеристическое кольцо L_{x2} имеет бесконечную размерность. Кольцо L_{x2} (так же, как и L_{x1}, L_x) является кольцом минимального роста. Иначе говоря, размерность линейного пространства кратных коммутаторов с ростом кратности растет на единицу, и на два в зависимости от четности. Например, если V_j линейное пространство всех коммутаторов кратности не выше j, то базис V_{2k} состоит из операторов $\{S_0, S_1, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2k}, Q_2, Q_4, \ldots, Q_{2k}\}$, а базис V_{2k+1} – из операторов $\{S_0, S_1, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2k+1}, Q_2, Q_4, \ldots, Q_{2k}\}$. Здесь операторы P_j, Q_j определяются последовательно

$$\begin{array}{ll} P_1 = [S_0, S_1] + \alpha S_0 + \alpha S_1, & Q_1 = P_1, \\ P_2 = [S_1, P_1], & Q_2 = [S_0, Q_1], \\ P_3 = [S_0, P_2] + \alpha P_2, & Q_3 = [S_1, Q_2] - \alpha Q_2, \\ P_{2j} = [S_1, P_{2j-1}], & Q_{2j} = [S_0, Q_{2j-1}], \\ P_{2j+1} = [S_0, P_{2j}] + \alpha P_{2j}, & Q_{2j+1} = [S_1, Q_{2j}] - \alpha Q_{2j}, \end{array}$$

для $j \geq 1$. Вычисления показывают, что

$$\begin{gathered} DP_1D^{-1} = P_1 - 2\alpha(S_0 + S_1), \\ DP_2D^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}(P_2 + 2\alpha P_1 - 2\alpha^2(S_0 + S_1)), \\ DP_3D^{-1} = P_3 + 2\alpha Q_2 - 2\alpha P_2 - 4\alpha^2 P_1 + 4\alpha^3(S_0 + S_1), \\ DP_4D^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}(P_4 + 2\alpha Q_3 - 4\alpha^2 P_2 + 4\alpha^2 Q_2 - \\ -4\alpha^3 P_1 + 4\alpha^4(S_0 + S_1)), \\ DQ_2D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}(Q_2 - 2\alpha P_1 + 2\alpha^2(S_0 + S_1)), \\ DQ_3D^{-1} = Q_3 + 2\alpha Q_2 - 2\alpha P_2 - 4\alpha^2 P_1 + 4\alpha^3(S_0 + S_1), \\ DQ_4D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}(Q_4 - 2\alpha P_3 + 2\alpha^2(P_2 - Q_2) + \\ +4\alpha^3 P_1 - 4\alpha^4(S_0 + S_1)), \\ P_3 = Q_3, \quad [S_1, P_2] = -\alpha P_2, \quad [S_0, Q_2] = \alpha Q_2, \\ [S_1, P_4] = -\alpha P_4, \quad [S_0, Q_4] = \alpha Q_4. \end{gathered} \tag{4.212}$$

Коэффициент при $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ во всех векторных полях DP_iD^{-1}, DQ_iD^{-1}, $1 \leqslant i \leqslant 4$ равен нулю.

Лемма 4.5. *Для любого $j \geq 1$ имеют место равенства*

(1) $DP_{2j+1}D^{-1} + 2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j}D^{-1} = P_{2j+1} + 2\alpha Q_{2j}$,
(2) $\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1} - \alpha DP_{2j+1}D^{-1} = P_{2j+2} + \alpha Q_{2j+1}$,
(3) $DQ_{2j+1}D^{-1} - 2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DQ_{2j}D^{-1} = Q_{2j+1} - 2\alpha P_{2j}$,
(4) $\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DQ_{2j+2}D^{-1} + \alpha DQ_{2j+1}D^{-1} = Q_{2j+2} - \alpha P_{2j+1}$,
(5) $P_{2j+1} = Q_{2j+1}$,
(6) $[S_1, P_{2j+2}] = -\alpha P_{2j+2}$,
(7) $[S_0, Q_{2j+2}] = \alpha Q_{2j+2}$.

Более того, коэффициент перед $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ во всех векторных полях DP_kD^{-1}, DQ_kD^{-1} равен нулю.

Доказательство. Индукцией по j. Из (4.212) ясно, что утверждение леммы верно при $j = 1$. Допустим, что (1) – (7) верно при всех j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Покажем, что (1) верно при

$j=k+1$.

$$
\begin{aligned}
DP_{2j+3}D^{-1} &= D([S_0,P_{2j+2}]+\alpha P_{2j+2})D^{-1} = [\mathrm{e}^{\alpha\tau}S_0, DP_{2j+2}D^{-1}]+\alpha DP_{2j+2}D^{-1} = \\
&= [\mathrm{e}^{\alpha\tau}S_0, \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DP_{2j+1}D^{-1}+\mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+2}+\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}Q_{2j+1}]+\alpha DP_{2j+2}D^{-1} = \\
&= -\alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})DP_{2j+1}D^{-1}+\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}[\mathrm{e}^{\alpha\tau}S_0, DP_{2j+1}D^{-1}]-\alpha(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+2}- \\
&- \alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})Q_{2j+1}+P_{2j+3}-\alpha P_{2j+2}+\alpha Q_{2j+2}+\alpha DP_{2j+2}D^{-1} = \\
&= -\alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})DP_{2j+1}D^{-1}+\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}D[S_0,Q_{2j+1}]D^{-1}-\alpha(2+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+2}- \\
&- \alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})Q_{2j+1}+P_{2j+3}+\alpha Q_{2j+2}+\alpha DP_{2j+2}D^{-1} = \\
&= -\alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})DP_{2j+1}D^{-1}+\alpha Q_{2j+2}-\alpha^2P_{2j+1}-\alpha^2DQ_{2j+1}D^{-1}- \\
&- \alpha(2+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+2}-\alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})Q_{2j+1}-2\alpha^2Q_{2j+1}-2\alpha P_{2j+2}+P_{2j+3} = \\
&= -2\alpha^2DP_{2j+1}D^{-1}+2\alpha Q_{2j+2}-2\alpha^2Q_{2j+1}-2\alpha P_{2j+2}+P_{2j+3} = \\
&= 2\alpha P_{2j+2}+2\alpha^2Q_{2j+1}-2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1}+2\alpha Q_{2j+2}-2\alpha^2Q_{2j+1}- \\
&- 2\alpha P_{2j+2}+P_{2j+3} = -2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1}+2\alpha Q_{2j+2}+P_{2j+3}.
\end{aligned}
$$

Условие (3) доказывается точно так же, как и (1). Покажем, что (5) верно при $j=k+1$. Очевидно, имеем

$$
\begin{aligned}
DP_{2j+3}D^{-1} &= -2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1}+2\alpha Q_{2j+2}+P_{2j+3} = \\
&= -2\alpha(\alpha DP_{2j+1}D^{-1}+P_{2j+2}+\alpha Q_{2j+1})+2\alpha Q_{2j+2}+P_{2j+3},
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
DQ_{2j+3}D^{-1} &= 2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DQ_{2j+2}D^{-1}-2\alpha P_{2j+2}+Q_{2j+3} = \\
&= 2\alpha(-\alpha DQ_{2j+1}D^{-1}+Q_{2j+2}-\alpha P_{2j+1})-2\alpha P_{2j+2}+Q_{2j+3}.
\end{aligned}
$$

В силу (5) $P_{2j+1}=Q_{2j+1}$, и поэтому

$$D(P_{2j+3}-Q_{2j+3})D^{-1} = -2\alpha P_{2j+2}-2\alpha Q_{2j+2}+2\alpha Q_{2j+2}+2\alpha P_{2j+2}=0.$$

Следовательно, $P_{2j+3}=Q_{2j+3}$.

Покажем, что (2) верно при $j=k+1$. Имеем

$$
\begin{gathered}
\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+1}D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}D[S_1,P_{2j+3}]D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}[\mathrm{e}^{-\alpha\tau}S_1, DP_{2j+3}D^{-1}] = \\
= \mathrm{e}^{\alpha\tau}[\mathrm{e}^{-\alpha\tau}S_1, -2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1}+2\alpha Q_{2j+2}+P_{2j+3}] = \\
= \mathrm{e}^{\alpha\tau}(-2\alpha^2(1+\mathrm{e}^{\alpha\tau})DP_{2j+2}D^{-1})-2\alpha\mathrm{e}^{2\alpha\tau}[\mathrm{e}^{-\alpha\tau}S_1, DP_{2j+2}D^{-1}]+ \\
+P_{2j+4}+2\alpha Q_{2j+3}+2\alpha^2Q_{2j+2} = -2\alpha^2(\mathrm{e}^{\alpha\tau}+\mathrm{e}^{2\alpha\tau})DP_{2j+2}D^{-1}+ \\
+2\alpha^2\mathrm{e}^{2\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1}+P_{2j+4}+2\alpha Q_{2j+3}+2\alpha^2Q_{2j+2} = \\
= -2\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1}+P_{2j+4}+2\alpha Q_{2j+3}+2\alpha^2Q_{2j+2} = \\
= \alpha DP_{2j+3}D^{-1}-\alpha P_{2j+3}-2\alpha^2Q_{2j+2}+P_{2j+4}+2\alpha Q_{2j+3}+ \\
+2\alpha^2Q_{2j+2} = \alpha DP_{2j+3}D^{-1}+\alpha Q_{2j+3}+P_{2j+4}.
\end{gathered}
$$

Доказательство (4) аналогично доказательству (2).

Докажем (6) при $j = k + 1$.

$$\begin{gathered}
D[S_1, P_{2j+4}]D^{-1} = [\mathrm{e}^{-\alpha\tau} S_1, \alpha \mathrm{e}^{-\alpha\tau} D P_{2j+3} D^{-1} + \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+4} + \alpha \mathrm{e}^{-\alpha\tau} Q_{2j+3}] = \\
= [\mathrm{e}^{-\alpha\tau} S_1, \alpha \mathrm{e}^{-\alpha\tau}(-2\alpha \mathrm{e}^{\alpha\tau} D P_{2j+2} D^{-1} + P_{2j+3} + 2\alpha Q_{2j+2}) + \\
+ \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+4} + \alpha \mathrm{e}^{-\alpha\tau} Q_{2j+3}] = [\mathrm{e}^{-\alpha\tau} S_1, -2\alpha^2 D P_{2j+2} D^{-1} + \\
+ 2\alpha \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+3} + 2\alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} Q_{2j+2} + \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+4}] = -2\alpha^2 D[S_1, P_{2j+2}]D^{-1} - \\
-2\alpha^2 \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}(1 + \mathrm{e}^{\alpha\tau}) P_{2j+3} - 2\alpha^3 \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}(1 + \mathrm{e}^{\alpha\tau}) Q_{2j+2} + 2\alpha \mathrm{e}^{-2\alpha\tau} P_{2j+4} + \\
+ 2\alpha^2 \mathrm{e}^{-2\alpha\tau} Q_{2j+3} + 2\alpha^3 \mathrm{e}^{-2\alpha\tau} Q_{2j+2} - \alpha \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}(1 + \mathrm{e}^{\alpha\tau}) P_{2j+4} + \\
+ \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}] = 2\alpha^3 D P_{2j+2} D^{-1} - 2\alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+3} + \alpha(\mathrm{e}^{-2\alpha\tau} - \\
- \mathrm{e}^{-\alpha\tau}) P_{2j+4} - 2\alpha^3 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} Q_{2j+2} + \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}] = \\
= \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+3} + 2\alpha^3 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} Q_{2j+2} - \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} D P_{2j+3} D^{-1} - 2\alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+3} + \\
+ \alpha(\mathrm{e}^{-2\alpha\tau} - \mathrm{e}^{-\alpha\tau}) P_{2j+4} - 2\alpha^3 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} Q_{2j+2} + \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}] = \\
= -\alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+3} + \alpha(\mathrm{e}^{-2\alpha\tau} - \mathrm{e}^{-\alpha\tau}) P_{2j+4} - \alpha D P_{2j+4} D^{-1} + \alpha \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+4} + \\
+ \alpha^2 \mathrm{e}^{-\alpha\tau} Q_{2j+3} + \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}].
\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&D[S_1, P_{2j+4}]D^{-1} = \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}] + \alpha \mathrm{e}^{-2\alpha\tau} P_{2j+4} - \alpha D P_{2j+4} D^{-1} \\
&D([S_1, P_{2j+4}] + \alpha P_{2j+4}) D^{-1} = \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}([S_1, P_{2j+4}] + \alpha P_{2j+4}).
\end{aligned}$$

Следовательно, $[S_1, P_{2j+4}] = -\alpha P_{2j+4}$.

Доказательство (7) аналогично доказательству (6). Лемма доказана.

Замечание 4.2. *Имеют место равенства*

$$\begin{gathered}
\mathrm{e}^{-\alpha\tau} D Q_{2j} D^{-1} + \mathrm{e}^{\alpha\tau} D P_{2j} D^{-1} = Q_{2j} + P_{2j}, \\
D P_{2j+1} D^{-1} = P_{2j+1} + \sum_{k=1}^{j} (\mu_{2k}^{(2j+1)} P_{2k} + \nu_{2k}^{(2j+1)} Q_{2k}) + \\
+ \textstyle\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{2k+1}^{(2j+1)} P_{2k+1} + \mu_0^{(2j+1)} S_0 + \nu_0^{(2j+1)} S_1, \\
D P_{2j} D^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}(P_{2j} + \sum_{k=1}^{j-1} (\mu_{2k}^{(2j)} P_{2k} + \nu_{2k}^{(2j)} Q_{2k}) + \\
+ \textstyle\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{2k+1}^{(2j)} P_{2k+1} + \mu_0^{(2j)} S_0 + \nu_0^{(2j)} S_1), \\
D Q_{2j} D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}(Q_{2j} - \sum_{k=1}^{j-1} (\mu_{2k}^{(2j)} P_{2k} + \nu_{2k}^{(2j)} Q_{2k}) - \\
- \textstyle\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{2k+1}^{(2j)} P_{2k+1} - \mu_0^{(2j)} S_0 - \nu_0^{(2j)} S_1).
\end{gathered}$$

Более того, $\mu_{2j}^{(2j+1)} = -2\alpha$, $\nu_{2j}^{(2j+1)} = 2\alpha$, $\mu_{2j-1}^{(2j)} = 2\alpha$.

Пусть L_x конечномерно. Тогда имеется три возможности:

1) $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j-1}$–линейно независимы и $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j-1}, P_{2j}$–линейно зависимы,
2) $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j-1}, P_{2j}$–линейно независимы и $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2n-1}, P_{2j}, Q_{2j}$–линейно зависимы,
3) $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j}, Q_{2j}$–линейно независимы и $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j}, Q_{2j}, P_{2j+1}$–линейно зависимы.

В случае 1),

$$P_{2j} = \gamma_{2j-1} P_{2j-1} + \gamma_{2j-2} P_{2j-2} + \eta_{2j-2} Q_{2j-2} + \ldots$$

и

$$\begin{gathered}
D P_{2j} D^{-1} = D(\gamma_{2j-1}) D P_{2j-1} D^{-1} + \\
+ D(\gamma_{2j-2}) D P_{2j-2} D^{-1} + D(\eta_{2j-2}) D Q_{2j-2} D^{-1} + \ldots .
\end{gathered} \tag{4.213}$$

Воспользуемся замечанием 4.2 для сравнения коэффициентов при P_{2j-1} в (4.213) и получим противоречивое уравнение

$$\mathrm{e}^{-\alpha\tau}(\gamma_{2j-1}+2\alpha)=D(\gamma_{2j-1}).$$

Оно показывает, что случай 1) не реализуется.

В случае 2),

$$Q_{2j}=\gamma_{2j}P_{2j}+\gamma_{2j-1}P_{2j-1}+\eta_{2j-2}Q_{2j-2}+\dots$$

и

$$\begin{gathered}DQ_{2j}D^{-1}=D(\gamma_{2j})DP_{2j}D^{-1}+\\+D(\gamma_{2j-1})DP_{2j-1}D^{-1}+D(\eta_{2j-2})DQ_{2j-2}D^{-1}+\dots .\end{gathered}\tag{4.214}$$

снова воспользуемся замечанием 4.2 для сравнения коэффициентов перед P_{2j-1} в (4.214) и придем к противоречивому условию

$$\mathrm{e}^{\alpha\tau}(\gamma_{2j-1}-2\alpha)=D(\gamma_{2j-1}),$$

которое показывает, что случай 2) невозможен.

В случае 3)

$$P_{2j+1}=\eta_{2j}Q_{2j}+\gamma_{2j}P_{2j}+\dots$$

и

$$DP_{2j+1}D^{-1}=D(\eta_{2j})DQ_{2j}D^{-1}+D(\gamma_{2j})DP_{2j}D^{-1}+\dots .\tag{4.215}$$

Воспользуемся замечанием 4.2 для сравнения коэффициентов при P_{2j} в (4.215) и придем к противоречию

$$(\gamma_{2j}-2\alpha)=D(\gamma_{2j})\mathrm{e}^{-\alpha\tau}.$$

Поэтому случай 3) невозможен. Следовательно, характеристическое кольцо Ли L_x имеет бесконечную размерность.

5. Полностью дискретные уравнения

В настоящее время дискретные модели вида

$$u_{1,1}=f(m,n,u,u_1,\overline{u}_1),\tag{5.216}$$

называемые также уравнениями на квадратном графе, интенсивно исследуются в связи с их важными приложениями в физике, дискретной геометрии, архитектуре, биологии и т.д. В уравнении (5.216) искомая функция $u=u(m,n)$ зависит от двух независимых дискретных переменных. Нижние индексы и черта над буквой обозначают сдвиги аргументов:

$$u_k=u(m+k,n),\quad \overline{u}_k=u(m,n+k),\quad u_{i,j}=u(m+i,n+j).$$

Функция f предполагается гладкой функцией, определенной в некоторой области $\mathbb{R}^3$. Предполагается также, что уравнение (5.216) может быть разрешено, по крайней мере локально, относительно любого из трех переменных $u,u_1,\overline{u}_1$, то есть существуют функции $f^{i,j}$ такие, что

$$\begin{gathered}u=f^{-1,-1}(m,n,u_{1,1},\overline{u}_1,u_1),\\ u_1=f^{1,-1}(m,n,\overline{u}_1,u_{1,1},u),\\ \overline{u}_1=f^{-1,1}(m,n,u_1,u,u_{1,1}).\end{gathered}$$

5.1. Дискретные уравнения лиувиллевского типа. В этом разделе рассматриваются уравнения вида (5.216), допускающие интегралы.

Определение 5.1. *Назовем n-интегралом уравнения* (5.216) *последовательность функций $\{I_{(i)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\dots,u_k)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, зависящих от m, n и конечного числа динамических переменных $\{u_i\}$, таких, что выполняется соотношение*

$$\overline{D}I_{(i)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\dots,u_k)=I_{(i+1)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\dots,u_k),$$

где $\overline{D}$–оператор сдвига аргумента n такой, что $\overline{D}h(m,n)=h(m,n+1)$.

Замечание 5.1. *По ходу доказательства теоремы* 5.1 *(см. ниже) выясняется, что n-интеграл можно представить в виде $I=I(m,n,G)$, где $G=G(u,u_1,\dots,u_N)$ — некоторая функция.*

Пример 5.1. *Рассмотрим уравнение вида* (5.216)

$$u_{1,1}=\frac{1}{u_1},$$

для которого n-интегралом является последовательность функций $I_{(i)}=I_{(i)}(u_1)$ такая, что

$$I_{(i)}=\begin{cases} u_1, & i-\text{четное};\\ \frac{1}{u_1}, & i-\text{нечетное}.\end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\overline{D}I_{(2m)}&=\overline{D}u_1=u_{1,1}=\tfrac{1}{u_1}=I_{(2m+1)},\\ \overline{D}I_{(2m+1)}&=\overline{D}\tfrac{1}{u_1}=\tfrac{1}{u_{1,1}}=u_1=I_{(2m+2)}.\end{aligned}$$

В координатном представлении уравнение $\overline{D}I_{(i)}=I_{(i+1)}$ имеет вид

$$I_{(i)}(m,n,r_{-j+1},r_{-j+2},\dots,r,\overline{u}_1,f,f_1,\dots,f_{k-1})=I_{(i+1)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\dots,u_k),\qquad(5.217)$$

где $r=f^{-1,1}(m,n,u,u_{-1},\overline{u}_1)$. Выберем в качестве динамических (независимых) переменных переменные $\{u_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ и $\{\overline{u}_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$. Тогда функцию $r_{-1}=D^{-1}(r)$ можно переписать в виде

$$r_{-1}=f^{-1,1}(m-1,n,u_{-1},u_{-2},u_{-1,1})=f^{-1,1}(m-1,n,u_1,u,f^{-1,1}(m,n,u,u_{-1},\overline{u}_1)).$$

Здесь D – оператор сдвига переменной m: $Dy(m,n)=y(m+1,n)$. Аналогично все сдвиги в (5.217) можно представить как композицию функций, зависящих только от динамических переменных. Заметим, что правая часть равенства (5.217) не зависит от переменной $\overline{u}_1$, а потому выполнено условие $\frac{\partial}{\partial\overline{u}_1}\overline{D}I_{(i)}=0$ или, что то же самое, $Y_1I_{(i)}=0$, где $Y_1=\overline{D}^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{u}_1}\overline{D}$. В развернутом виде оператор Y_1 имеет вид

$$\begin{aligned}Y_1=\frac{\partial}{\partial u}+\overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_1}+\overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial r}{\partial\overline{u}_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_{-1}}+\\ +\overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\overline{u}_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_2}+\overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial r_{-1}}{\partial\overline{u}_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_{-2}}+\dots\end{aligned}\qquad(5.218)$$

Введем обозначения $x=\overline{D}^{-1}\frac{\partial f(u,u_1,\overline{u}_1)}{\partial\overline{u}_1}=-\frac{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\bar{u}_{-1})/\partial u}{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\bar{u}_{-1})/\partial u_1}$.

Лемма 5.1. *Имеют место следующие тождества:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial\overline{u}_1}&=\frac{1}{D^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\right)},\\ \frac{\partial f_j}{\partial\overline{u}_1}&=\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\cdot D\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\right)\cdot\ldots\cdot D^j\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Второе из соотношений леммы есть очевидное следствие формулы дифференцирования сложной функции. Например, при $j=1$ имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{u}_1}=\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}f(u_1,u_2f(u,u_1,\overline{u}_1))=D\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{u}_1}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial \overline{u}_1}.$$

Для доказательства первого соотношения леммы достаточно продифференцировать тождество

$$\overline{u}_1=f^{-1,1}(u_1,u,f(u,u_1,\overline{u}_1))$$

по переменной $\overline{u}_1$ и получить

$$1=D\left(\frac{\partial f^{-1,1}}{\partial \overline{u}_1}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial \overline{u}_1}.$$

Лемма доказана.

Пользуясь леммой, оператор Y_1 можно переписать в виде

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial u}+x\frac{\partial}{\partial u_1}+\frac{1}{x_{-1}}\frac{\partial}{\partial u_{-1}}+xx_1\frac{\partial}{\partial u_2}+\frac{1}{x_{-1}x_{-2}}\frac{\partial}{\partial u_{-2}}+\ldots. \tag{5.219}$$

Назовем оператор Y_1 характеристическим векторным полем.

Ясно теперь, что n-интеграл является решением уравнения в частных производных первого порядка $Y_1I_{(i)}=0$, коэффициенты которого выражаются через переменную x и ее сдвиги и поэтому зависят, вообще говоря, от переменной $\overline{u}_{-1}$, в то время как сама функция $I_{(i)}$ от $\overline{u}_{-1}$ зависеть не может, то есть $X_1I_{(i)}=0$, где $X_1=\frac{\partial}{\partial\overline{u}_{-1}}$. Примечательно, что в общем случае, кроме этих двух уравнений и их дифференциальных следствий, n-интеграл I удовлетворяет еще и другим уравнениям, что является отличительной чертой дискретного уравнения. Действительно, из тождества $\overline{D}I_{(i)}=I_{(i+1)}$ следует, что для любого целого k $\overline{D}^kI_{(i)}=I_{(i+k)}$. В последнем равенстве при выполнении условия $k>0$ правая часть не зависит от переменной $\overline{u}_1$, в то время как в левую часть равенства $\overline{u}_1$ формально входит, поэтому имеем $\overline{D}^{-k}\frac{\partial}{\partial\overline{u}_1}\overline{D}^kI_{(i)}=0$, $k\geq 0$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\overline{D}^{-k}\frac{\partial}{\partial\overline{u}_1}\overline{D}^k=X_{k-1}+Y_k,\quad k\geq 2,$$

где

$$\begin{gathered}Y_{j+1}=\overline{D}^{-1}(Y_jf)\tfrac{\partial}{\partial u_1}+\overline{D}^{-1}(Y_jr)\tfrac{\partial}{\partial u_{-1}}+\\ +\overline{D}^{-1}(Y_jf_1)\tfrac{\partial}{\partial u_2}+\overline{D}^{-1}(Y_jr_{-1})\tfrac{\partial}{\partial u_{-2}}+\ldots,\\ X_j=\tfrac{\partial}{\partial\overline{u}_{-j}},\quad j\geq 1.\end{gathered} \tag{5.220}$$

Обозначим через N^* размерность линейного пространства, порожденного операторами $\{Y_j\}_1^\infty$. Кольцо Ли над полем локально аналитических функций, порожденное операторами $\{Y_j\}_1^{N^*}\cup\{X_j\}_1^{N^*}$, назовем характеристическим кольцом Ли L_n уравнения (5.216) в направлении n.

Теорема 5.1. *Уравнение* (5.216) *допускает нетривиальный n-интеграл тогда и только тогда, когда* $\dim L_n<\infty$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (5.216) допускает нетривиальный n-интеграл $I=I_{(i)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\ldots,u_k)$, где $\frac{\partial I}{\partial u_{-j}}\neq 0$, $\frac{\partial I}{\partial u_k}\neq 0$. Введем кольцо Ли M, порожденное векторными полями $\{Y_j\}_1^\infty\cup\{X_j\}_1^{N_2}$, где число N_2 будет определено позже. Положим

$$M^{(j,k)}=\{T^{j,k}=P_{j,k}(T):T\in M\},$$

где $P_{j,k}$ – оператор проектирования, определенный следующим образом

$$P_{i,m}: \sum_{s=-N_2}^{-1} a_s \frac{\partial}{\partial \overline{u}_s} + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_s \frac{\partial}{\partial u_s} \to \sum_{s=-N_2}^{-1} a_s \frac{\partial}{\partial \overline{u}_s} + \sum_{s=-i}^{m} b_s \frac{\partial}{\partial u_s},$$

$i, m = 1, 2, 3, \ldots$.

Обозначим через N_1 размерность пространства $M^{(j,k)}$. Очевидно, что $N_1 \leqslant N_2+k+j+1$. Пусть множество операторов $\{T_{01}, T_{02}, \ldots, T_{0N_1}\}$ образует базис в $M^{(j,k)}$. Обозначим через $T_i = \sum_{s=-N_2}^{-1} a_s(T_j)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_s} + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_s(T_j)\frac{\partial}{\partial u_s}$ векторное поле из M такое, что $P_{j,k}(T_j) = T_{0j}$, $j = 1, 2, \ldots, N_1$. Покажем теперь, что множество операторов $\{T_1, T_2, \ldots, T_{N_1}\}$ образует базис в M.

Возьмем произвольное векторное поле $T = \sum_{s=-N_2}^{-1} a_s(T)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_s} + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_s(T)\frac{\partial}{\partial u_s}$ из M. Так как $P_{j,k}(T) \in M^{(j,k)}$, то $P_{j,k}(T) = \sum_{m=1}^{N_1} \beta_m T_{0m}$. Проверим, что $T = \sum_{m=1}^{N_1} \beta_m T_{jm}$, что равносильно равенству $Z = 0$, где $Z = T - \sum_{m=1}^{N_1} \beta_m T_{jm}$. По определению, имеем $P_{j,k}(Z) = 0$. Так как I является n-интегралом, зависящим от $m, n, u_{-j}, u_{-j+1}, \ldots, u_k$, то DI есть n-интеграл, зависящий от $m, n, u_{-j+1}, u_{-j+2}, \ldots, u_{k+1}$. Действительно, $\overline{D}(DI) = D(\overline{D}I) = DI$. Следовательно,

$$0 = Z(DI) = P_{j,k}(Z)DI + \left(a_{k+1}(T) - \textstyle\sum_{s=1}^{N_1} \beta_s a_{k+1}(T_s)\right) \frac{\partial}{\partial u_{k+1}} DI =$$
$$= \left(a_{k+1}(T) - \textstyle\sum_{s=1}^{N_1} \beta_s a_{k+1}(T_s)\right) \frac{\partial}{\partial u_{k+1}} DI.$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial u_{k+1}} DI = D\left(\frac{\partial}{\partial u_k} I\right) \neq 0$, то $a_{k+1}(T) = \sum_{s=1}^{N_1} \beta_s a_{k+1}(T_s)$, а это означает, что $P_{j,k+1}(Z) = 0$. Применяя оператор Z последовательно к интегралам $D^2 I$, $D^3 I$, …, а также к интегралам $D^{-1} I$, $D^{-2} I$, … найдем, что $P_{i,m}(Z) = 0$ для любых натуральных чисел i, m. Следовательно, $Z = 0$. Это доказывает, что кольцо M имеет конечную размерность при любом выборе числа N_2. Тогда линейная оболочка векторных полей $\{Y_j\}_1^\infty$ имеет конечную размерность, обозначим ее N. Уточним теперь значение числа N_2, выбрав $N_2 \geq N$. Тогда имеем, что кольцо L_n, порожденное операторами $\{Y_j\}_1^N \cup \{X_j\}_1^N$, является подкольцом конечномерного кольца M. Поэтому кольцо L_n – конечномерно.

Предположим, что размерность характеристического кольца Ли L_n конечна, обозначим ее N_1. Пусть N – размерность линейной оболочки векторных полей $\{Y_j\}_1^\infty$. Тогда множество $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$ образует в ней базис. Положим $N_2 = N_1 - N$. Введем

$$L_n^{(N_2)} = \{T^{(m)} = P_{N_2}^{(N)}(T) : T \in L_n\},$$

где оператор проектирования $P_{N_2}^{(N)}$ действует по правилу

$$P_{N_2}^{(N)}\left(\textstyle\sum_{s=-N}^{-1} a_s \frac{\partial}{\partial \overline{u}_s} + \sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{\partial}{\partial u_s}\right) = $$
$$= \textstyle\sum_{s=-N}^{-1} a_s \frac{\partial}{\partial \overline{u}_s} + \sum_{s=0}^{N_2} b_s \frac{\partial}{\partial u_s}. \quad (5.221)$$

Пусть $\{T_{0i}\}_{i=1}^{N_1}$ образует базис в линейном пространстве $L_n^{(N_2)}$. Тогда мы имеем N_1 уравнений вида $T_{0i}G = 0$ на некоторую функцию G от $N_1 + 3$ переменных $m, n, u, u_1, \ldots, u_{N_2}, \overline{u}_{-1}, \overline{u}_{-2}, \ldots, \overline{u}_{-N}$. Причем m и n входят как параметры в коэффициенты уравнения. Согласно теореме Якоби, рассматриваемая система уравнений имеет непостоянное решение G. В силу уравнений $X_j G = 0$ эта функция не зависит от переменных $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_N$ и удовлетворяет условию $TG = 0$ для любого $T \in L_n$. Функция G определена неоднозначно, любое другое решение системы, зависящее от тех же переменных $m, n, u, u_1, \ldots, u_{N_2}$, может быть представлено в виде $h(m, n, G)$ для некоторой функции h.

Так как $\overline{D}^{-1} Y_1 \overline{D} = X_1 + Y_2$, $\overline{D}^{-1} X_j \overline{D} = X_{j+1}$, $j \geq 1$, $\overline{D}^{-1} Y_k \overline{D} = Y_{k+1}$, $k \geq 2$, то для любого векторного поля Z из L_n мы имеем $\overline{D}^{-1} Z \overline{D} = Z^* + \lambda X_{N+1}$ для некоторого $Z^* \in L_n$

и некоторой функции λ. Следовательно,

$$Z\overline{D}G = \overline{D}(\overline{D}^{-1}Z\overline{D}G) = \overline{D}(Z^* + \lambda X_{N+1})G = 0$$

для любого $Z \in L_n$. Поэтому $\overline{D}G$ также является решением упомянутой выше системы дифференциальных уравнений в частных производных, откуда имеем $\overline{D}G = h(m, n, G)$.

Аналогично, можно показать, что $\overline{D}^{-1}G = g(m, n, G)$ для некоторой функции g. Для построения искомого n-интеграла I достаточно теперь положить

$$\begin{aligned} G(m, n, u, u_1, \ldots, u_N) &= I_{(0)}(m, n, u, u_1, \ldots, u_N), \\ \overline{D}^i G(m, n, u, u_1, \ldots, u_N) &= I_{(i)}(m, n, u, u_1, \ldots, u_N), \\ \overline{D}^{-i} G(m, n, u, u_1, \ldots, u_N) &= I_{(-i)}(m, n, u, u_1, \ldots, u_N), \quad i \geq 1. \end{aligned}$$

Построенная таким образом последовательность функций $I_{(i)}(m, n, u, u_1, \ldots, u_N)$ является n-интегралом, так как удовлетворяет соотношению $\overline{D}I_{(i)} = I_{(i+1)}$.

5.2. Дискретные уравнения общего вида. Пользуясь явными выражениями (5.218) – (5.220) можно определить характеристические векторные поля $Z_k = X_{k-1} + Y_k$, $k \geq 2$ для произвольного уравнения вида (5.216). Согласно теореме 5.1 при отсутствии у уравнения n-интеграла кольцо L_n будет бесконечномерно. Очевидно, что операторы $\{Z_k\}_1^\infty$ линейно независимы.

Лемма 5.2. *Выполняются следующие коммутационные соотношения*

$$\begin{aligned} &1) \quad [Z_k, Z_j] = 0 \quad \text{для всех} \quad k, j \geq 1; \\ &2) \quad [X_k, Z_j] = 0 \quad \text{для всех} \quad k > j, \end{aligned}$$

где $Z_1 := Y_1$.

Доказательство. Пусть $j > k$, тогда имеет место равенство $[\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}, Z_{j-k}] = 0$, так как коэффициенты оператора Z_i, $i \geq 1$ не зависят от переменной $\overline{u}_1$. Применяя к этому равенству оператор сопряжения (не является автоморфизмом кольца)

$$Z \to \overline{D}^{-1} Z \overline{D} \tag{5.222}$$

k-раз, получим

$$[\overline{D}^{-k} \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} \overline{D}^k, \overline{D}^{-k} Z_{j-k} \overline{D}^k] = [Z_k, Z_j] = 0.$$

Вторая часть леммы следует из того, что $X_k = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-k}}$, а коэффициенты оператора Z_j не зависят от u_{-k} при $k > j$. Лемма доказана.

Ключевую роль при описании кольца L_n играет автоморфизм, определенный по правилу

$$Z \to DZD^{-1}, \tag{5.223}$$

где D — оператор сдвига аргумента n. Покажем, что X_1 и Y_1, рассматриваемые как операторы на множестве функций, зависящих от конечного числа переменных из суженного динамического набора $S_N = \{\overline{u}_{-N}, \overline{u}_{-N+1}, \ldots, \overline{u}_{-1}, u, u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \ldots\}$, удовлетворяют следующим соотношениям

$$DX_1D^{-1} = pX_1 + p(1)X_2 + \ldots + p(N-1)X_N, \tag{5.224}$$

$$DY_1D^{-1} = \frac{1}{x} Y_1, \tag{5.225}$$

где $p = DX_1 f^{-1,-1}$, $p(k) = DX_1 \overline{D}^{-k} f^{-1,-1}$, причем $f^{-1,-1} = f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})$. Отметим, что коэффициенты операторов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ зависят только от переменных из множества S_N. Равенство (5.224) легко проверить, подействовав обеими частями равенства на динамические переменные из S_N. Точно таким же способом можно доказать (5.225).

Выведем аналогичные равенства для высших характеристических операторов Y_j, X_j, $j \geq 1$. Удобно начать с оператора $Y_0 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}$. Сначала уточним действие оператора на функциях, зависящих от всех динамических переменных. Очевидно, имеем

$$DY_0D^{-1} = \xi(1)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \xi(2)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots + \xi(j)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_j}, \tag{5.226}$$

где $\xi(k) = DY_0\overline{D}^{k-1}f^{-1,1}$, $f^{-1,1} = f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_1)$. Последнее равенство легко проверяется применением к переменным $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_j, \ldots$. Ясно также, что все остальные динамические переменные лежат в ядре оператора (5.226). Подействуем теперь на равенство (5.226) оператором сопряжения (5.222) и в результате получим, с учетом равенств $D\overline{D} = \overline{D}D$, $\overline{D}^{-1}Y_0\overline{D} = Y_1$, $\overline{D}^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{u}_k}\overline{D} = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{k-1}}$ при $k \geq 2$, следующее соотношение

$$DY_1D^{-1} = \overline{\xi}_{-1}(1)Y_1 + \overline{\xi}_{-1}(2)Y_0 + \overline{\xi}_{-1}(3)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots, \tag{5.227}$$

где $\overline{\xi}_{-1}(j) = \overline{D}^{-1}\xi(j)$, которая, в частности, доказывает формулу (5.225). Остается лишь проверить, что $\overline{\xi}_{-1}(1) = \frac{1}{x}$. Действительно, дифференцируя тождество $\overline{u}_1 = f(u_{-1}, u, f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_1))$ по переменной $\overline{u}_1$, находим $D^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{u}_1}\right) \cdot \frac{\partial f^{-1,1}}{\partial \overline{u}_1} = 1$. Откуда следует, что $\xi(1) \cdot \overline{x}_1 = 1$. Поэтому $\overline{D}^{-1}\xi(1) = \frac{1}{x}$. Применяя далее многократно оператор (5.222) к равенству (5.227), находим

$$\begin{aligned} DZ_kD^{-1} &= \overline{\xi}_{-k}(1)Z_k + \overline{\xi}_{-k}(2)Z_{k-1} + \ldots + \\ &+ \overline{\xi}_{-k}(k)Y_1 + \overline{\xi}_{-k}(k+1)Y_0 + \overline{\xi}_{-k}(k+2)\tfrac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots, \end{aligned} \tag{5.228}$$

где $Z_k = \overline{D}^{1-k}Y_1\overline{D}^{k-1} = Y_k + X_{k-1}$ при $k \geq 2$. На суженном наборе динамических переменных S_N равенство (5.228) принимает вид

$$DZ_kD^{-1} = \overline{\xi}_{-k}(1)Z_k + \overline{\xi}_{-k}(2)Z_{k-1} + \ldots + \overline{\xi}_{-k}(k)Y_1. \tag{5.229}$$

Например, при $k = 2$ имеем

$$DZ_2D^{-1} = \frac{1}{\overline{x}_{-1}}Z_2 + \overline{\xi}_{-2}(2)Y_1. \tag{5.230}$$

На весь набор динамических переменных формула (5.224) продолжается следующим образом

$$DX_1D^{-1} = pX_1 + \sum_{i=1}^{\infty} p(i)X_{i+1}.$$

Подействуем на это равенство оператором сопряжения (5.222) и, с учетом условий $\overline{D}^{-1}X_j\overline{D} = X_{j+1}$, $j \geq 1$, получим

$$DX_jD^{-1} = \overline{p}_{1-j}X_j + \overline{p}_{1-j}(1)X_{j+1} + \ldots + \overline{p}_{1-j}(k)X_{k+1} + \ldots,$$

сужение которой на S_N дает

$$DX_jD^{-1} = \overline{p}_{1-j}X_j + \overline{p}_{1-j}(1)X_{j+1} + \ldots + \overline{p}_{1-j}(N-1)X_N \tag{5.231}$$

при $j \leqslant N$.

Лемма 5.3. *Предположим, что* $Z = \sum_{-\infty}^{+\infty} b(j)\frac{\partial}{\partial u_j} \in L_n$ *удовлетворяет следующим двум условиям:* $DZD^{-1} = cZ$ *для некоторой функции* c *и* $b(j_0) \equiv 0$ *для некоторого фиксированного значения* $j = j_0$. *Тогда* $Z = 0$.

Доказательство проводится простым вычислением (см. [42]).

Пример 5.2. *В качестве примера рассмотрим одну из дискретных версий уравнения Лиувилля*

$$e^{u_{1,1}+u} = e^{u_1+\overline{u}_1} + 1. \tag{5.232}$$

Вычислим функции x и p для уравнения (5.232). Имеем

$$u_{1,-1} = \ln\left(e^{\overline{u}_{-1}+u_{+1}} - 1\right) - u. \tag{5.233}$$

Следовательно, $r = f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_1) = \ln\left(e^{\overline{u}_1+u_{-1}} - 1\right) - u$. Пользуясь равенством

$$x = \overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial f(u, u_1, \overline{u}_1)}{\partial \overline{u}_1}\right) = -\frac{\frac{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\overline{u}_{-1})}{\partial u}}{\frac{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\overline{u}_{-1})}{\partial u_1}}, \tag{5.234}$$

находим $x = 1 - e^{-u_1-\overline{u}_{-1}}$. Далее находим $D^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x_{-1}} = 1 + e^{-u_{-1}-\overline{u}_{-1}}$.

Для описания p воспользуемся тождеством

$$p = D\left(\frac{\partial f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})}{\partial \overline{u}_{-1}}\right) = -\frac{1}{\frac{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\overline{u}_{-1})}{\partial \overline{u}_{-1}}}. \tag{5.235}$$

В результате имеем $p = x$. Поэтому

$$DX_1D^{-1} = (1 - e^{-u_1-\overline{u}_{-1}})X_1, \quad DY_1D^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-u_1-\overline{u}_{-1}}}Y_1.$$

На операторы $R_1 = [X_1, Y_1]$, $P_1 = [X_1, R_1]$, $Q_1 = [Y_1, R_1]$ отображение (5.223) действует по правилу

$$\begin{aligned} DR_1D^{-1} &= R_1 + \tfrac{x-1}{x}Y + (x-1)X_1, \\ DP_1D^{-1} &= xP_1 + (x-1)R_1 - \tfrac{x-1}{x}Y - (x-1)X_1, \\ DQ_1D^{-1} &= \tfrac{1}{x}Q_1 - \tfrac{x-1}{x}R_1 - \tfrac{x-1}{x}Y - (x-1)X_1. \end{aligned} \tag{5.236}$$

Из формул (5.236) имеем $D(P_1 + R_1)D^{-1} = x(P_1 + R_1)$ и $D(Q_1 + R_1) = \frac{1}{x}(Q_1 + R_1)$. Из последних соотношений, в силу леммы 5.3, вытекают равенства $P_1 = -R_1$, $Q_1 = -R_1$.

Аналогично можно проверить, что

$$Z_2 = X_1 - \left(1 + e^{u-\overline{u}_{-2}}\right)R_1. \tag{5.237}$$

Для этого достаточно сравнить равенство

$$DZ_2D^{-1} = \frac{1}{\overline{x}_{-1}}Z_2 + \left(\frac{1}{x\overline{x}_{-1}} - 1\right)Y_1$$

с первой из формул (5.236) с учетом равенства $DX_1D^{-1} = xX_1$.

Из (5.237) по лемме 5.3 следует, что $Y_2 = -\left(1 + e^{u-\overline{u}_{-2}}\right)R_1$. Следовательно, характеристическая алгебра L_n для уравнения (5.232) трехмерна, как линейное пространство, натянутое на векторы X_1, Y_1, R_1; n-интеграл минимального порядка зависит от трех переменных, например $I = I(u, u_1, u_{-1})$.

Для отыскания I решаем линейную систему $Y_1I = 0$, $R_1I = 0$, или в развернутом виде

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial I}{\partial u} + \left(1 - e^{-u_1-\overline{u}_{-1}}\right)\tfrac{\partial I}{\partial u_1} + \left(1 + e^{-u_{-1}-\overline{u}_{-1}}\right)\tfrac{\partial I}{\partial u_{-1}} = 0, \\ e^{-u_1-\overline{u}_{-1}}\tfrac{\partial I}{\partial u_1} - e^{-u_{-1}-\overline{u}_{-1}}\tfrac{\partial I}{\partial u_{-1}} = 0. \end{gathered}$$

Отсюда легко найти, что $I = e^{u_{-1}-u} + e^{u_1-u}$.

Выясним, как меняется характеристическая алгебра при замене переменных в дискретном уравнении. Наиболее общая точечная замена переменной в уравнении (5.216) задается функцией вида

$$u(m, n) = \phi(m, n, v(m, n)). \tag{5.238}$$

Замена (5.238) сведет (5.216) к уравнению

$$v_{1,1} = \widetilde{f}(m, n, v, v_1, \overline{v}_1), \tag{5.239}$$

где $\widetilde{f} = \phi^{-1}(m, n, f(m, n, \phi(m, n, v), \phi(m+1, n, v_1), \phi(m, n+1, \overline{v}_1)))$.

Выясним, как связаны характеристические векторные поля X_j, Z_j и $\widetilde{X}_j$, $\widetilde{Z}_j$ уравнений (5.238) и (5.239).

Лемма 5.4. *Имеют место равенства*

$$x = -\frac{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u_1}}, \quad \frac{1}{x_{-1}} = -\frac{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}}}.$$

Доказательство. Докажем второе равенство утверждения. Дифференцируя очевидное тождество

$$u_{-1} = f^{-1,-1}\left(\overline{u}_1, f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_1), u\right)$$

по переменной $\overline{u}_1$, найдем

$$0 = \overline{D}\left(\frac{\partial f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})}{\partial u}\right) + \overline{D}\left(\frac{\partial f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})}{\partial u_{-1}}\right) \cdot \frac{\partial f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})}{\partial \overline{u}_1}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{x_{-1}} = \overline{D}^{-1}\frac{\partial f^{-1,1}}{\partial \overline{u}_1} = -\frac{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}}}.$$

Первое равенство утверждения доказывается аналогично дифференцированием тождества

$$u_1 = f^{1,-1}\left(\overline{u}_1, f(u, u_1, \overline{u}_1), u\right)$$

по $\overline{u}_1$. Лемма доказана. Из леммы 5.4 имеем

$$\widetilde{x} = -\frac{\frac{\partial \widetilde{f}^{1,-1}}{\partial v}}{\frac{\partial \widetilde{f}^{1,-1}}{\partial v_1}} = -\frac{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u}\cdot\phi'(v)}{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u_1}\cdot\phi'(v_1)} = \frac{\phi'(v)}{\phi'(v_1)}x,$$

$$\frac{1}{\widetilde{x}_{-1}} = -\frac{\frac{\partial \widetilde{f}^{-1,-1}}{\partial v}}{\frac{\partial \widetilde{f}^{-1,-1}}{\partial v_{-1}}} = -\frac{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u}\cdot\phi'(v)}{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}}\cdot\phi'(v_{-1})} = \frac{\phi'(v)}{\phi'(v_{-1})}\cdot\frac{1}{x_{-1}}$$

Поэтому $\frac{\partial}{\partial v} = \phi'(v)\frac{\partial}{\partial u}$, а также

$$\widetilde{x}\cdot\widetilde{x}_1\cdot\ldots\cdot\widetilde{x}_j\frac{\partial}{\partial v_{j+1}} = \phi'(v)\cdot x\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_j\frac{\partial}{\partial u_{j+1}} \tag{5.240}$$

и

$$\frac{1}{\widetilde{x}_{-1}}\cdot\frac{1}{\widetilde{x}_{-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\widetilde{x}_{-j}}\frac{\partial}{\partial v_{-j}} = \phi'(v)\cdot\frac{1}{x_{-1}}\cdot\frac{1}{x_{-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x_{-j}}\frac{\partial}{\partial u_{-j}}. \tag{5.241}$$

В силу (5.240), (5.241) из явного выражения (5.219) и формулы

$$\widetilde{Y}_1 = \frac{\partial}{\partial v} + \widetilde{x}\frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{1}{\widetilde{x}_{-1}}\frac{\partial}{\partial v_{-1}} + \widetilde{x}\widetilde{x}_1\frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{1}{\widetilde{x}_{-1}\widetilde{x}_{-2}}\frac{\partial}{\partial v_{-2}} + \ldots$$

находим искомую связь

$$\widetilde{Y}_1 = \phi'(m, n, v)Y_1. \tag{5.242}$$

Очевидно, что $X_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}}$ и $\widetilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{v}_{-1}}$ связаны равенством

$$\widetilde{X}_1 = \phi'(m, n-1, \overline{v}_{-1})X_1. \tag{5.243}$$

Применяя к (5.242), (5.243) оператор сопряжения (5.222) и воспользовавшись равенствами

$$Z_{j+1} = \overline{D}^{-j}Y_1\overline{D}^j, \quad X_{j+1} = \overline{D}^{-j}X_j\overline{D},$$

находим

$$\widetilde{Z}_{j+1} = \phi(m, n-j, \overline{v}_{-j})Z_{j+1}, \quad \widetilde{X}_{j+1} = \phi(m, n-j-1, \overline{v}_{-j-1})X_{j+1}. \tag{5.244}$$

5.3. S-интегрируемые дискретные уравнения. В этом разделе исследуются характеристические операторы S-интегрируемых дискретных уравнений вида (5.216), т.е. уравнений солитонного типа. Пусть кольцо Ли T порождается векторными полями X и Y. Обозначим через V_j, $j \geq 0$ линейное пространство над полем локально-аналитических функций, натянутое на X, Y и все кратные коммутаторы операторов X, Y порядка меньше или равного j так, что

$$V_0 = \{X, Y\}, \quad V_1 = \{X, Y, [X, Y]\},$$
$$V_2 = \{X, Y, [X, Y], [X, [X, Y]], [Y, [X, Y]]\}, \dots .$$

Введем функцию $\triangle(k) = \dim V_{k+1} - \dim V_k$.

Определение 5.2. *Назовем T кольцом минимального роста, если найдется последовательность натуральных чисел $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\triangle(t_k) \leqslant 1$.*

Обозначим через T_{kj} кольцо Ли, порожденное операторами X_k, Y_j. Следующая гипотеза представляется правдоподобной.

Предложение 5.1. *Пусть уравнение* (5.216) *S-интегрируемо, тогда для любых $k, j \geq 1$ соответствующее кольцо T_{kj} является кольцом минимального роста.*

В качестве примера рассмотрим дискретное потенциированное уравнение КдФ

$$u_{1,1} = u + \frac{1}{u_1 - \overline{u}_1}. \tag{5.245}$$

Представим (5.245) в двух различных формах $(u - u_{-1,-1})(\overline{u}_{-1} - u_{-1}) = 1$ и $(u_1 - \overline{u}_{-1})(u_{1,-1} - u) = 1$. Откуда имеем

$$u_{-1,-1} = u + \frac{1}{u_{-1} - \overline{u}_{-1}} := f^{-1,-1}, \quad u_{1,-1} = u + \frac{1}{u_1 - \overline{u}_{-1}} := f^{1,-1}.$$

Следовательно,

$$x = -\frac{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u_1}} = (u_1 - \overline{u}_{-1})^2,$$
$$\frac{1}{x_{-1}} = -\frac{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}}} = (u_{-1} - \overline{u}_{-1})^2,$$
$$p = \frac{1}{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial \overline{u}_{-1}}} = (u_1 - \overline{u}_{-1})^2.$$

Поэтому

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u} + (u_1 - \overline{u}_{-1})^2 \frac{\partial}{\partial u_1} + (u_{-1} - \overline{u}_{-1})^2 \frac{\partial}{\partial u_{-1}} + \dots . \tag{5.246}$$

Легко видеть, что

$$Y_1 x = Y_1 (u_1 - \overline{u}_{-1})^2 = 2(u_1 - \overline{u}_{-1})^3 = 2x\sqrt{x},$$
$$Y_1 x_{-1} = Y_1 (u_{-1} - \overline{u}_{-1})^{-2} = 2\sqrt{x_{-1}},$$
$$X_1 x = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}} (u_1 - \overline{u}_{-1})^2 = -2(u_1 - \overline{u}_{-1}) = -2\sqrt{x},$$
$$X_1 x_{-1} = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}} (u_{-1} - \overline{u}_{-1})^{-2} = -2(u_{-1} - \overline{u}_{-1})^{-3} = -2x_{-1}\sqrt{x_{-1}}.$$

Рассмотрим кольцо $T_{1,1}$, порожденное операторами (см. (5.246)) Y_1 и $X_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}}$. Построим последовательность кратных коммутаторов

$$R_1 = [X_1, Y_1], \quad P_1 = [X_1, R_1], \quad Q_1 = [Y_1, R_1],$$
$$R_{k+1} = [X_1, Q_k], \quad P_k = [X_1, R_k], \quad Q_k = [Y_1, R_k], \quad k \geq 1.$$

Теорема 5.2. *Последовательность $X_1, Y_1, R_1, P_1, Q_1, R_2, P_2, Q_2, \dots$ образует базис кольца $T_{1,1}$ (см. [42]).*

Доказательство. Воспользуемся равенствами $DX_1D^{-1} = xX_1$ и $D(yY_1)D^{-1} = Y_1$, где $y = x_{-1}$, и запишем $[DX_1D^{-1}, D(yY_1)D^{-1}] = [xX_1, Y_1]$. Приведем последнее равенство к виду

$$D(R_1 - 2\sqrt{y}Y_1)D^{-1} = R_1 - 2\sqrt{x}X_1. \tag{5.247}$$

Симметричная форма записи наиболее проста и удобна. Прокоммутируем (5.247), сохраняя симметричность с $DX_1D^{-1} = xX_1$:

$$[D(R_1 - 2\sqrt{y}Y_1)D^{-1}, DX_1D^{-1}] = [R_1 - 2\sqrt{x}X_1, xX_1].$$

Последнее равенство приводится к виду

$$D(P_1 - 2\sqrt{y}R_1 + 2yY_1)D^{-1} = x(P_1 + 2X_1). \tag{5.248}$$

Коммутируя (5.247) с $D(yY_1)D^{-1} = Y_1$, получим

$$D(y(Q_1 - 2Y_1))D^{-1} = Q_1 + 2\sqrt{x}R_1 - 2xX_1. \tag{5.249}$$

Прокоммутируем $DX_1D^{-1} = xX_1$ с равенством (5.248), тогда

$$D\left([X_1, P_1] - 2\sqrt{y}P_1 + 4yR_1 - 4y\sqrt{y}Y_1\right)D^{-1} = x^2[X_1, P_1] - 2x\sqrt{x}P_1 - 4x\sqrt{x}X_1.$$

Вычтем из последнего равенства почленно равенство (5.248), помноженное на $2\sqrt{x}$, и в результате получим $D[X_1, P_1] = x^2[X_1, P_1]$. Из последнего, в силу леммы 5.3, следует, что $[X_1, P_1] = 0$. Аналогично проверяется, что $[Y_1, Q_1] = 0$.

Можно проверить, что действие автоморфизма (5.223) на операторы R_2, P_2, Q_2 записывается в виде

$$\begin{gathered} D(R_2 - 2\sqrt{y}Q_1)D^{-1} = R_2 + 2\sqrt{x}P_1, \\ D(P_2 + 2\sqrt{y}R_2 - 2yQ_1)D^{-1} = x(P_2 - 2P_1), \\ D(y(Q_2 - 2Q_1))D^{-1} = Q_2 + 2\sqrt{x}R_2 + 2xP_1. \end{gathered}$$

По индукции можно доказать, что при любом $j > 1$ выполнены соотношения

$$\begin{gathered} D(R_j - 2\sqrt{y}Q_{j-1})D^{-1} = R_j + 2\sqrt{x}P_{j-1}, \\ D(P_j + 2(-1)^j\sqrt{y}R_j + 2(-1)^{j-1}yQ_{j-1})D^{-1} = x(P_j - 2P_{j-1}), \\ D(y(Q_j - 2Q_{j-1}))D^{-1} = Q_j + 2\sqrt{x}R_j - 2xP_{j-1}X, \end{gathered}$$

причем $[X_1, P_j] = 0$, $[Y_1, Q_j] = 0$, $[Y_1, P_j] = [X, Q_j]$, $[R_j, P_k] = P_{k+j}$, $[R_j, Q_k] = -Q_{k+j}$, $[R_j, R_k] = 0$, $[P_j, Q_k] = -R_{k+j+1}$, $[P_j, P_k] = 0$, $[Q_j, Q_k] = 0$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Кольцо $T_{1,1}$ является кольцом минимального роста.*

Доказательство. По построению имеем $V_0 = \{X_1, Y_1\}$, $V_1 = V_0 \oplus \{R_1\}$, $V_2 = V_1 \oplus \{P_1, Q_1\}$, $\ldots$, $V_{2k-1} = V_{2k-2} \oplus \{R_k\}$, $V_{2k} = V_{2k-1} \oplus \{P_k, Q_k\}$, $\ldots$. Поэтому $\triangle(2k+1) = \dim V_{2k+2} - \dim V_{2k+1} = 2$, $\triangle(2k) = \dim V_{2k+1} - \dim V_{2k} = 1$ для любого $k \geq 0$.

В работах [42, 51] исследовалась связь свойства интегрируемости уравнения (5.216) и свойство минимального роста колец $T_{j,k}$.

В работе [42] доказано следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть для кольца Ли $T_{1,1}$ дискретного уравнения вида*

$$u_{1,1} = u + \phi(u_1 - \overline{u}_1) \tag{5.250}$$

выполняется условие: существует хотя бы одно натуральное число k такое, что $\Delta(k) \leqslant 1$. Тогда точечной заменой уравнение сводится к одному из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} &(1) \quad u_{1,1} = u + c(u_1 - \overline{u}_1 - \beta), \\ &(2) \quad (u_{1,1} - u - \alpha)(u_1 - \overline{u}_1 - \beta) = \gamma, \\ &(3) \quad (\alpha u_1 + \beta\overline{u}_1)u_{1,1} + u(\gamma u_1 - \delta\overline{u}_1) = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что в этой теореме на кольцо Ли накладывается очень слабое требование, существование последовательности натуральных чисел для которых выполняется $\Delta(k) \leqslant 1$, заменено требованием, что существует хотя бы одно такое число. При этом получен некий список уравнений, и все они интегрируемы. Уравнение (1) является линейным, уравнение (2) – дискретное потенциированное уравнение Кортевега де Фриза, а уравнение (3) принадлежит известному списку Адлера, Бобенко, Суриса (АБС) (см. [45]).

В работе [51] уравнение вида

$$u_{1,1} + u = \phi(u_1 + \overline{u}_1) \tag{5.251}$$

исследуется при аналогичном требовании.

Теорема 5.4. *Пусть для кольца $T_{1,1}$ дискретного уравнения* (5.251) *выполнено условие: существует хотя бы одно натуральное число k такое, что $\Delta(k) \leqslant 1$. Тогда уравнение* (5.251) *точечной заменой приводится к одному из уравнений:*

$$\begin{array}{ll} (1) & u_{1,1} + u = c(u_1 - \overline{u}_1 - \beta), \\ (2) & (u_{1,1} + u - \alpha)(u_1 + \overline{u}_1 - \beta) = \gamma, \\ (3) & \alpha_1 u\overline{u}_1 u_{1,1} + \alpha_2 u u_{1,1} + \alpha_3 u_1 \overline{u}_1 + \alpha_4 = 0. \end{array}$$

Отметим, что уравнение (2) интегрируемо при $\alpha = \beta$, так как сводится к потенциированному уравнению КдФ, а уравнение (3) при $\alpha_3 = \pm\alpha_2$ сводится к известному уравнению из списка АБС. В остальных случаях эти уравнения неинтегрируемы.

6. Перспективы алгебраического метода

6.1. Характеристические кольца уравнений „n-волн“. Рассматривается система уравнений гиперболического типа в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_i \frac{\partial}{\partial x}\right) u^i = \phi_i(u^1, u^2, \ldots, u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.252}$$

Здесь a_i – произвольные постоянные и ϕ_i – произвольные функции. Когда функции ϕ_i являются квадратичными, то имеем систему уравнений n-волн [63]. Для определения двух характеристических направлений введем независимые переменные ξ и η так

$$\frac{\partial}{\partial t} + a_{i_0}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} + a_{i_1}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

В новых переменных система принимает вид

$$\begin{aligned} p_\xi &= f(p,q,r), \\ q_\eta &= \phi(p,q,r), \\ r_\xi &= r_\eta A + \psi(p,q,r), \end{aligned} \tag{6.253}$$

где $f = (f^1, f^2, \ldots, f^s)$, $\phi = (\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^l)$, $\psi = (\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^m)$, $p = (u^{i_1}, u^{i_2}, \ldots, u^{i_s})$, $q = (u^{j_1}, u^{j_2}, \ldots, u^{j_l})$, $r = (u^{k_1}, u^{k_2}, \ldots, u^{k_m})$, $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, $\forall i\ \lambda_i \neq 0$, где $p = (p^1, p^2, \ldots, p^s)$, $q = (q^1, q^2, \ldots, q^l)$, $r = (r^1, r^2, \ldots, r^m)$. Обозначим через F ($\bar{F}$) множество локально-аналитических функций, зависимых от конечного числа переменных $p, q, r, q_1, r_1, q_2, r_2, \ldots, q_i, r_i, \ldots$ ($p, q, r, \bar{p}_1, \bar{r}_1, \bar{p}_2, \bar{r}_2, \ldots, \bar{p}_i, \bar{r}_i, \ldots$). Здесь $q_i = D^i q$, $r_i = D^i r$, $\bar{p}_i = \bar{D}^i p$, $\bar{r}_i = \bar{D}^i r$, $i = 1, 2, \ldots$, $D = \frac{d}{d\xi}$, $\bar{D} = \frac{d}{d\eta}$. Оператор полного дифференцирования $\bar{D}$

по переменной η на множестве F определяется следующим образом

$$\begin{aligned}
\bar{D} &= \sum_{i=1}^{s} \bar{p}_1^i \frac{\partial}{\partial p^i} + \sum_{i=1}^{l} \phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i} r_1^i - \frac{1}{\lambda_i}\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i} + \\
&+ \sum_{i=1}^{l} D\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_1^i} + \sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i} r_2^i - \frac{1}{\lambda_i}D\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_1^i} + \ldots \\
&+ \sum_{i=1}^{l} D^n\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_n^i} + \sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i} r_{n+1}^i - \frac{1}{\lambda_i}D^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_n^i} + \ldots .
\end{aligned} \tag{6.254}$$

Рассматривая векторные поля $X_i = \frac{\partial}{\partial p^i}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ и

$$\begin{aligned}
X_{s+1} &= \sum_{i=1}^{l} \phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i} r_1^i - \frac{1}{\lambda_i}\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i} + \\
&+ \sum_{i=1}^{l} D\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_1^i} + \sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i} r_2^i - \frac{1}{\lambda_i}D\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_1^i} + \ldots \\
&+ \sum_{i=1}^{l} D^n\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_n^i} + \sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i} r_{n+1}^i - \frac{1}{\lambda_i}D^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_n^i} + \ldots ,
\end{aligned} \tag{6.255}$$

получаем, что $\bar{D} = \sum_{i=1}^{s} \bar{p}_1^i X_i + X_{s+1}$.

Определение 6.1. *Кольцо Ли R_ξ над полем F, порожденное векторными полями $X_1, X_2, \ldots, X_{s+1}$, называется характеристическим кольцом Ли по направлению ξ системы уравнений* (6.252).

Аналогично определим характеристическое кольцо Ли R_η в направлении η. Последнее порождается следующими векторными полями

$$\begin{aligned}
Y_i &= \frac{\partial}{\partial q^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, l, \\
Y_{l+1} &= \sum_{i=1}^{s} f^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial p^i} + \sum_{i=1}^{m}[\lambda_i \bar{r}_1^i + \psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i} + \ldots \\
&+ \sum_{i=1}^{s} \bar{D}^n f^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial \bar{p}_n^i} + \sum_{i=1}^{m}[\lambda_i \bar{r}_{n+1}^i + \bar{D}^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial \bar{r}_n^i} + \ldots .
\end{aligned} \tag{6.256}$$

В этом случае оператор полного дифференцирования D по переменной ξ на множестве $\bar{F}$ имеет вид $D = \sum_{i=1}^{l} q_1^i Y_i + Y_{l+1}$.

6.2. Эволюционные уравнения.

6.2.1. Кольца Ли эволюционных уравнений. Рассмотрим уравнения эволюционного типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}). \tag{6.257}$$

Для определения векторных полей, порождающих кольцо Ли уравнения (6.257), будем исследовать вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}), \tag{6.258}$$

где $F = Df$, D–оператор полного дифференцирования по переменной x. Определим оператор $\bar{D}$ в пространстве локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $u, u_1, u_2, \dots, u_i, \dots$ $(u_n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n})$ по правилу

$$\bar{D} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + F\frac{\partial}{\partial u_1} + DF\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + D^{n-1}F\frac{\partial}{\partial u_n} + \dots .$$

Введем векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = F\frac{\partial}{\partial u_1} + DF\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + D^{n-1}\frac{\partial}{\partial u_n} + \dots .$$

Определение 6.2. *Кольцо Ли R, порожденное векторными полями X_1 и X_2, называется характеристическим кольцом Ли уравнения* (6.257).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Если* $\dim R < \infty$, *то правая часть* $F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}})$ *уравнения* (6.258) *является квазиполиномом по переменной u.*

Доказательство. Так как $[D, \bar{D}] = 0$, то, используя $[D, \bar{D}] = [D, \frac{\partial u}{\partial t}X_1 + X_2]$, имеем

$$[D, X_1] = 0, \qquad [D, X_2] = FX_1. \tag{6.259}$$

Теперь положим $X_3 = [X_1, X_2]$ и, используя тождество Якоби и соотношения (6.259), получаем

$$[D, X_3] = \frac{\partial F}{\partial u}X_1. \tag{6.260}$$

Определим последовательность векторных полей X_i, $i = 4, 5, \dots$ следующим образом: $X_i = [X_1, X_{i-1}]$. Как и выше, получаем, что

$$[D, X_i] = \frac{\partial^{i-2} F}{\partial u^{i-2}}X_1, \quad i = 4, 5, \dots . \tag{6.261}$$

Пусть кольцо R конечномерно. Тогда найдется m такое, что векторные поля $X_2, X_3, \dots, X_m$ линейно независимы, а

$$X_{m+1} = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i X_i, \tag{6.262}$$

где коэффициенты α_i, $i = 2, 3, \dots, m$ являются функциями переменных $u, u_1, u_2, \dots$.

В силу (6.262) имеем $[D, X_{m+1}] = \sum_{i=2}^{m} D(\alpha_i)X_i + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i[D, X_i]$. Последнее, согласно (6.261), перепишем так

$$\frac{\partial^{m-1} F}{\partial u^{m-1}}X_1 = \sum_{i=2}^{m} D(\alpha_i)X_i + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{\partial^{i-2} F}{\partial u^{i-2}}X_1.$$

Так как векторные поля $X_1, X_2, \dots, X_m$ линейно независимы, то получаем, что

$$D(\alpha_i) = 0, \quad i = 2, 3, \dots, m, \tag{6.263}$$

$$\frac{\partial^{m-1} F}{\partial u^{m-1}} = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{\partial^{i-2} F}{\partial u^{i-2}}. \tag{6.264}$$

Из этих уравнений следует, что α_i является постоянной и F – квазиполином по переменной u. Лемма доказана.

Замечание 6.1. *Если кольцо Ли R эволюционного уравнения конечномерно, то правая часть $f(u, u_1, \ldots, u_n)$ есть решение согласно* (3.141) *следующего уравнения в частных производных*

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial u^{m-1}} \left(\sum_{i=0}^{n} u_{i+1} \frac{\partial f}{\partial u_i} \right) = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \left(\frac{\partial^{i-2}}{\partial u^{i-2}} \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} \frac{\partial f}{\partial u_k} \right).$$

Приведем примеры колец Ли уравнений эволюционного типа.

Пример 6.1. *Рассматриваем уравнение вида*

$$u_t = u_x + u^2.$$

Подействовав оператором D, получаем, что $u_{xt} = u_{xx} + 2uu_x$.

Из соотношения

$$D_t F(u, u_1, u_2, \ldots) = (u_t \frac{\partial}{\partial u} + f \frac{\partial}{\partial u_1} + Df \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots) F = (u_t X_1 + X_2) F$$

имеем

$$D_t = u_t X_1 + X_2, \tag{6.265}$$

где $f = u_{xx} + 2uu_x$.

Лемма 6.2. *Векторное поле $Y = a_1(u, u_1, \ldots, u_{n_1}) \frac{\partial}{\partial u_1} + a_2(u, u_1, \ldots, u_{n_2}) \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots$ коммутирует с оператором D если и только если $Y = 0$.*

Доказательство вытекает из формулы $[D, Y] = (Da_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + Da_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + Da_3 \frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots) - -a_1 \frac{\partial}{\partial u} - a_2 \frac{\partial}{\partial u_1} - a_3 \frac{\partial}{\partial u_2} - \ldots$.

Согласно (6.265) и $[D, D_t] = 0$ имеем

$$fX_1 + u_t[D, X_1] + [D, X_2] = 0.$$

Последнее соотношение распадается на два уравнения $[D, X_1] = 0$ и $[D, X_2] = -fX_1$.

Введем операторы $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$, $X_5 = [X_2, X_3]$. Легко показать, что $[D, X_3] = -2u_1 X_1$ и $[D, X_4] = 0$. Из утверждения леммы следует, что $X_4 = 0$.

Так как оператор $X_3 = 2u_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + 2u_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots$, то

$$[D, X_5] = (X_3 f) X_1 + [X_2, -2u_1 X_1] = (4u_1 u + 2u_2) X_1 + 2u_1 X_3 - 2f X_1,$$

или $[D, X_5] = 2u_1 X_3$.

Докажем, что базис кольца состоит из операторов X_1, X_2, X_3, X_5. Видно, что $[X_1, X_5] = 0$. Рассмотрим $X_7 = [X_2, X_5]$. Непосредственными вычислениями получим, что $[D, X_7] = -4u_1^2 X_1 + 2u_1 X_5 + 2f X_3$, поэтому $X_7 = 2u_1 X_3 + 2u X_5$. Теперь рассмотрим оператор $X_8 = [X_3, X_5]$. Вычислим $[D, X_8]$:

$$[D, X_8] = -[X_5, [D, X_3]] + [X_3, [D, X_5]] = 2X_5(u_1) X_1 + 2X_3(u_1) X_3 = 4u_1 X_3.$$

Сравнивая соотношения $[D, X_8] = 4u_1 X_3$ и $[D, X_5] = 2u_1 X_3$, имеем $X_8 = 2X_5$. Отсюда следует, что кольцо Ли данного уранения четырехмерно, и элементы X_1, X_2, X_3, X_5 линейно независимы.

Пример 6.2. *Уравнение Бюргерса*

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x.$$

Соответствующее уравнение (6.258) *имеет вид*

$$u_{xt} = u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2. \tag{6.266}$$

Характеристические векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = (u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2) \frac{\partial}{\partial u_1} + (u_4 + 2uu_3 + 6u_1 u_2) \frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + \\ + (u_{n+1} + 2uu_n + \ldots) \frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots.$$

Здесь
$$X_3 = [X_1, X_2] = 2D - 2u_1 X_1, \tag{6.267}$$
где $D = u_1 \frac{\partial}{\partial u} + u_2 \frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_n \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} + \ldots$.

Из соотношения $[D, \bar{D}] = 0$ *следует*
$$[D, u_t X_1 + X_2] = (u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2) X_1 + u_t [D, X_1] + [D, X_2] = 0.$$
Тогда
$$[D, X_1] = 0 \quad \text{и} \quad [D, X_2] = -(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2) X_1. \tag{6.268}$$
Используя (6.267) *и* (6.268), *получаем*
$$\begin{gathered} X_4 = [X_1, X_3] = [X_1, 2D - 2u_1 X_1] = 0, \\ X_5 = [X_2, X_3] = [X_2, 2D - 2u_1 X_1] = \\ = 2(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2) X_1 - 2(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2) X_1 + 2u_1 X_3. \end{gathered}$$
Откуда $X_4 = 0$, $X_5 = 2u_1 X_3$. *Таким образом, базис характеристического кольца уравнения Бюргерса состоит из операторов* X_1, X_2, X_3.

Пример 6.3. *Рассмотрим уравнение Кортевега-де Фриза* $u_t = u_{xxx} + uu_x$. *Уравнение* (6.258) *примет вид*
$$u_{xt} = u_4 + uu_2 + u_1^2. \tag{6.269}$$
Для уравнения (6.269) *нетрудно показать, что* $X_4 = [X_1, X_3] = 0$, $X_5 = [X_2, X_3] = = u_1 X_3$. *Следовательно, базис характеристического кольца Ли уравнения Кортевега-де Фриза состоит из операторов* X_1, X_2, X_3.

Пример 6.4. *Для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза* $u_t = u_{xxx} + u^2 u_x$ *уравнение* (6.258) *имеет вид*
$$u_{xt} = u_4 + u^2 u_2 + 2uu_1^2.$$
Операторы X_1, X_2, $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$ *образуют базис характеристического кольца Ли модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.*

6.2.2. Присоединенные алгебры Ли. Как следует из примеров, приведенных в разделе 6.2.1, характеристическое кольцо Ли определяет зависимость правой части $f = f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n})$ уравнения (6.257) от переменной u. Здесь мы предполагаем ввести определение кольца Ли, которое бы учитывало также зависимость f от производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$. Для этого перепишем уравнение (6.257) в виде
$$u_t^1 = f^1(u^1, u^2, u^3, \ldots, u^n), \tag{6.270}$$
полагая $u^1 = u$, $u^2 = u_x$, $u^3 = u_{xx}, \ldots, u^n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$.

Тогда из (6.270) последовательным дифференцированием по x получаем систему уравнений
$$\begin{aligned} u_t^1 &= f^1(u^1, u^2, \ldots, u^n), \\ u_t^2 &= f^2(u^1, u^2, \ldots, u^n, u_x^n), \\ u_t^3 &= f^3(u^1, u^2, \ldots, u^n, u_x^n, u_{xx}^n), \\ &\ldots, \\ u_t^n &= f^n(u^1, u^2, \ldots, u^n, u_x^n, u_{xx}^n, \ldots, \frac{\partial^{n-1} u^n}{\partial x^{n-1}}). \end{aligned} \tag{6.271}$$

Таким образом, мы от уравнения (6.257) переходим к эволюционной системе уравнений (6.271) относительно неизвестных функций $u^1, u^2, \ldots, u^n$. Теперь, как и в разделе 6.2.1, для определения характеристического кольца Ли системы (6.271) рассмотрим систему вида
$$u_{xt}^i = F^i, \quad F^i = Df^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.272}$$

Характеристическое кольцо Ли системы (6.271) задается оператором $\overline{D}$:

$$\overline{D} = \frac{\partial u^k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} + F^k \frac{\partial}{\partial u_1^k} + DF^k \frac{\partial}{\partial u_2^k} + \dots,$$

а, именно, векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \quad \dots, \quad X_n = \frac{\partial}{\partial u^n},$$
$$X_{n+1} = F^k \frac{\partial}{\partial u_1^k} + DF^k \frac{\partial}{\partial u_2^k} + \dots.$$

И, наконец, характеристическое кольцо Ли системы (6.271) мы будем называть присоединенным кольцом Ли эволюционного уравнения (6.257).

Так, для уравнения Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x$$

имеем $u_x = v$, $u_{xx} = w$. Тогда системы (6.271) и (6.272) принимают вид

$$\begin{aligned} u_t &= w + 2uv, \\ v_t &= w_x + 2u_x v + 2uv_x, \\ w_t &= w_{xx} + 4u_x v_x + 2u_{xx} v + 2uv_{xx}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_{xt} &= w_x + 2uv_x + 2u_x v, \\ v_{xt} &= w_{xx} + 2u_{xx} v + 2uv_{xx} + 4u_x v_x, \\ w_{xt} &= w_{xxx} + 6u_{xx} v_x + 6u_x v_{xx} + 2u_{xxx} v \end{aligned}$$

соответственно.

6.3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du^i}{dy} = f_i(x, y, u^1, u^2, \dots, u^n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{6.273}$$

Для введения понятия характеристического кольца Ли для уравнений (6.273) будем предполагать, что решение $u^1, u^2, \dots, u^n$ зависит от параметра x. Тогда дифференцированием по переменной x уравнений (6.273) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial x}. \tag{6.274}$$

Известно (см, например [56]), что гиперболическая система (6.274) обладает парой характеристических колец Ли, а именно x-характеристическое кольцо Ли X порождается векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \dots, X_n = \frac{\partial}{\partial u^n},$$
$$X_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y} + F_i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + DF_i \frac{\partial}{\partial u_2^i} + D^2 F_i \frac{\partial}{\partial u_3^i} + \dots,$$

а y-характеристическое кольцо Ли Y – полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u_1^1}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u_1^2}, \dots, Y_n = \frac{\partial}{\partial u_1^n},$$
$$Y_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x} + u_1^i \frac{\partial}{\partial u^i} + F_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1^i} + \overline{D} F_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_2^i} + \dots,$$

где $D(\overline{D})$ – оператор полного дифференцирования по переменной $x(y)$, $u_k^i = D^k u^i$, $\overline{u}_k^i = \overline{D}^k u^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теперь x и y – характеристические кольца Ли системы (6.274) будем называть кольцами Ли системы дифференциальных уравнений (6.273).

Исследование системы (6.273) основано на рассмотрении кольца X.

Отметим, что если $\dim X < \infty$, то правые части f_i системы (6.273) являются квазиполиномами переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$.

В качестве примера рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_y = f(y, u). \tag{6.275}$$

Нетрудно показать, что если характеристическое кольцо Ли уравнения (6.275) конечномерно, то правая часть $f(y, u)$ – квазиполином по переменной u.

Например, размерность кольца Ли уравнения

$$u_y = \alpha_0(y) + \alpha_1(y)u + \alpha_2 u^2 \tag{6.276}$$

равна 4, и если u-решение уравнения (6.276), зависящее от параметра x, то выражение $\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x^2}$ не зависит от y, то есть

$$\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x^2} = f(x).$$

Приведем пример уравнения Риккати (6.276) с кольцом Ли размерности 3. Таким примером является уравнение

$$u_y = \alpha_1(y)u + u^2. \tag{6.277}$$

Для решения уравнения Риккати (6.277), зависящего от параметра x, справедливо соотношение

$$\frac{u_{xx}}{u_x} - 2\frac{u_x}{u} = f(x).$$

Замечание 6.2. *Другой способ определения характеристического кольца Ли системы* (6.273) *основан на замене вида*

$$u^i = \frac{\partial v^i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда система (6.273) *примет вид*

$$\frac{\partial^2 v^i}{\partial x \partial y} = f_i\left(x, y, \frac{\partial v^1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v^n}{\partial x}\right). \tag{6.278}$$

X- и y-характеристические кольца Ли системы гиперболических уравнений (6.278) будем называть кольцами Ли исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.273).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер В.Э., Старцев С.Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // Теоретическая и математическая физика. Т. 121. № 2. 1999. С. 271–284.
2. Адлер В.Э., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к проблеме интегрируемости* // Теоретическая и математическая физика. Т. 125. № 3. 2000. С. 355–424.
3. Борисов А.Б., Зыков С.А. *Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений* // ТМФ. Т. 115. № 2. 1998. С. 199–214.
4. Борисов А.Б., Зыков С. А., Павлов М.В. *Уравнение Цицейки и размножение нелинейных интегрируемых уравнений* // ТМФ. Т. 131. № 1. 2002. С. 126–134.
5. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли* Москва: Мир. 1972. 334 с.

6. Гареева Н.В., Жибер А.В. *Интегралы второго порядка гиперболических уравнений и эволюционные уравнения* // Труды международной конференции "Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений". Орел, ОГУ. 1996. С. 39–42.
7. Гурьева А. М., Жибер А. В. *О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений* // Вестник УГАТУ. Т. 6. № 2(13). 2005. С. 26–33.
8. Гюрсес М., Жибер А.В., Хабибуллин И.Т. *Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений*// Уфимск. матем. журн., Т. 4. № 1. 2012. С. 53–62.
9. Желтухина Н.А., Сакиева А.У., Хабибуллин И.Т. *Характеристическая алгебра Ли и интегрируемые по Дарбу дискретные цепочки* // Уфимск. матем. журн., Т. 2. № 4. 2010. С. 39–51.
10. Жибер А.В. *Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58. № 4. 1994. С. 33–54.
11. Жибер А.В. *Симметрии и интегралы нелинейных дифференциальных уравнений* // Дисс. ... докт. физ.–мат. наук. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1994.
12. Жибер А.В., Костригина О.С. *Точно интегрируемые модели волновых процессов* // Вестник УГАТУ. Т. 9. № 7(25). 2007. С. 83–89.
13. Жибер А.В., Мукминов Ф.Х. *Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры* // Задачи математической физики и асимптотики их решений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР. 1991. С. 14–32.
14. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *Инварианты Лапласа и характеристические алгебры Ли* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-й Региональной молодежной конференции. 2008. С. 118–122.
15. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *О векторных полях интегрируемых уравнений Клейна-Гордона* // Межвузовский научный сборник, УГАТУ. 2004. С. 131–144.
16. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *О нелинейных гиперболических уравнениях с характеристической алгеброй медленного роста* // Вестник УГАТУ. Т. 7. № 2. 2006. С. 131–136.
17. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу* // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Уфа: РИЦ БашГУ. № 1. 2008. С. 84–92.
18. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *Характеристические алгебры Ли для уравнения* $u_{xy} = f(u, u_x)$ // ФПМ. Гамильтоновы и лагранжевы системы. Алгебры Ли. Т. 12. № 7. 2006. С. 65–78.
19. Жибер А.В., Соколов В.В. *Преобразования Лапласа в классификации интегрируемых квазилинейных уравнений* // Проблемы механики и управления. Уфа: Уфимский научный центр РАН. № 2. 1995. С. 51–65.
20. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. Т. 56. № 1(337). 2001. С. 63–106.
21. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Системы уравнений* $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$ *обладающие симметриями* // Доклады АН СССР. Т. 277. № 1. 1984. С. 29–33.
22. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой* // Доклады АН СССР. Т. 247. № 5. 1979. С. 1103–1107.
23. Забродин А.В. *Разностные уравнения Хироты* // Теоретическая и математическая физика. Т. 113. № 2. 1997. С. 179–230.
24. Капцов О.В. *Методы интегрирования уравнений в частных производных* М.: Физматлит. 2009. 184 с.
25. Кац В.Г. *Простые непроводимые градуированные алгебры Ли конечного роста* // Изв. АН СССР, сер. матем. № 32. 1968. С. 1323–1367.
26. Костригина О.С. *Двухкомпонентные гиперболические системы уравнений экспоненциального типа с конечномерной характеристической алгеброй Ли* // Уфимск. матем. журн. Т. 1. № 3. 2009. С. 57–64.
27. Костригина О. С. *О нелинейных гиперболических системах уравнений с конечномерной характеристической алгеброй Ли* Труды теоретической и математической физики. Труды 38-й Региональной молодежной конференции 29 января - 2 февраля 2007. УрО РАН ИММ. Екатеринбург. С. 164–168.

28. Кузнецова М.Н. *Симметрии уравнения эллиптического синуса* // Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике: Том 1 – Математика. Уфа: БашГУ. 2007. С. 170–179.
29. Лезнов А.Н. *О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерной пространстве* // ТМФ. Т. 42. № 3. 1980. С. 343–349.
30. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // Теоретическая и математическая физика. Т. 51. № 1. 1982. С. 10–22.
31. Лезнов А.Н., Савельев М.В., Лейтес Д.А. *О полной интегрируемости некоторых нелинейных уравнений струнных теорий* // Докл. Болгарской АН. Т. 35. № 4. 1982. С. 435–438.
32. А.В. Жибер, В.В. Соколов *Метод каскадного интегрирования Лапласа и уравнения, интегрируемые по Дарбу* Учебное пособие. Изд-е Башкирск. ун-та. Уфа. 1996. 56 с.
33. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Соколов В.В. *Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений* // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев: Наукова думка. 1990. С. 213–279.
34. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем* // Успехи математических наук. Т. 42. № 4. 1987. С. 3–53.
35. Муртазина Р.Д. *Нелинейные гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли* // Труды института математики и механики УрО РАН. Т. 13. № 4. 2007. С. 102–117.
36. Муртазина Р.Д. *Уравнение* $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$ *с* x*- и* y*-интегралами второго порядка* // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием „Дифференциальные уравнения и их приложения“. Уфа: Гилем. 2011. С. 109–112.
37. Муртазина Р.Д. *Характеристические алгебры Ли и симметрии уравнения мСГ* // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Уфа: РИЦ БашГУ. № 1. 2008. С. 156–164.
38. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения* // Функц. анализ. Т.16. № .4. 1982. С. 86–87.
39. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями* // Деп.ВИНИТИ. 1982. С. 3927–82.
40. Свинолупов С.И. *Йордановы алгебры и обобщенные уравнения Кортевега–де Фриза* // ТМФ. Т.87. № 3. 1991. С. 391–403.
41. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных* М.: Ил. 1957. 443 с.
42. Хабибуллин И.Т., Гудкова Е.В. *Алгебраический метод классификации* S*-интегрируемых дискретных моделей* // Теоретическая и математическая физика. Т. 167. № 3. 2011. С. 407–419.
43. Хабибуллин И.Т., Пекан А. *Характеристическая алгебра Ли и классификация полудискретных моделей* // Теоретическая и математическая физика. Т. 151. № 3. 2007. С. 413–423.
44. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* Препринт БФАН СССР, Уфа. 1981. 23 с.
45. V.E. Adler , A.I. Bobenko and Yu.B. Suris *Classification of integrable equations on quad-graphs* // The consistency approach, Commun. Math. Phys. V. 233. 2003. P. 513–43.
46. M.Gürses and A. Karasu *Variable Coefficient Third Order KdV Type of Equations* // J. Math. Phys. V. 36. 1995. 3485.
47. M.Gürses, A. Karasu, and R. Turhan *Nonautonomous Svinolupov Jordan KdV Systems* // J. Phys. A. V. 34. 2001. P. 5705-5711; arXiv:nlin/0101031v1 [nlin.SI].
48. M.Gürses and A. Karasu *Integrable KdV Systems: Recursion Operators of Degree Four* // Phys. Lett. A. V. 214. 1996. P. 21-26 (1996); V. 251. 1999. P. 247-249; arXiv:solv-int/9811013v1 (1998).
49. E. Goursat *Lecons sur l'integration des equations aux derivees partielles du second ordre a deux variables independantes* Paris: Hermann. V. I,II. 1896, 1898. 226 p., 345 p.
50. I.T. Habibullin *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations* // Symmetry Integrability Geom.: Methods Appl. V. 1. Paper 023. 2005. 9 pages.
51. I.T. Habibullin, E.V. Gudkova, *Classification of integrable discrete Klein-Gordon models* // Physica Scripta. V. 83. 2011. 045003. (arXiv : nlin/1011.3364).
52. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. V. 50. № 102710. 2009. (23 pages)

53. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *On the classification of Darboux integrable chains* // J. Math. Phys. V. 49. № 10. 2008. (40 pages)
54. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *On Some Algebraic Properties of Semi-Discrete Hyperbolic Type Equations* // Turk. J. Math. V. 32. 2008. P. 1–17.
55. J. Hietarinta and C. Viallet *Discrete Painleve I and singulatity confinement in projective space Chaos Solitons Fractals*
№ 11. 2000. P. 29–32.
56. O.S. Kostrigina, A.V. Zhiber *Darboux-integrable two-component nonlinear hyperbolic system of equations* // J. Math. Phys. 52:033503 suppl. (2011) doi:10.1063/1.3559134 (32 pages).
57. A.N. Leznov, M.V. Saveliev *Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp(Kx)_\alpha$ and its integrability* // Lett. Math. Phys. № 3. 1973. P. 489–494.
58. F.W. Nijhoff, H.W. Capel *The discrete Korteweg-de Vries equation* // Acta.Appl.Math. V. 39. 1995. P. 133–158.
59. Svinolupov S.I. Svinolupov *On the analogues of the Burgers Equation* Phys. Lett. A. V. 135. № 1. 1989. P. 32–36.
60. E. Vessiot *Sur les equations aux derivees partialles du second order, $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, inteqrables par la methode de Darboux* // J. Math. Pure Appl. V. 18. № 9. 1939. P. 1–61.
61. E. Vessiot *Sur les equations aux derivees partialles du second order, $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, inteqrables par la methode de Darboux* // J. Math. Pure Appl. V. 21. № 9. 1942. P. 1–68.
62. R. Yamilov *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. V. 39. 2006. R541-R623.
63. V.E. Zakharov, S.V. Manakov *The theory of resonance interaction of wave packets in nonlinear media* // Soviet Physics JETP. V. 42. 1975. P. 842.

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.com

Регина Димовна Муртазина,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: ReginaUFA@yandex.ru

Исмагил Талгатович Хабибуллин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: habibullinismagil@gmail.com

Алексей Борисович Шабат,
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН,
ул. Косыгина, 2,
119334, г. Москва, Россия
E-mail: shabatab@mail.ru