Уфимский Математический Журнал

2012. Том 4. № 3 .

Главный редактор:
В.В. Напалков

Заместители главного редактора:
Р.К. Газизов
Р.С. Юлмухаметов

Ответственный секретарь:
Р.А. Башмаков

Редакционная коллегия:
Р.Р. Гадыльшин
А.М. Гайсин
А.В. Жибер
Л.А. Калякин
Ю.А. Кордюков
Ф.Х. Мукминов
И.Х. Мусин
Ф.С. Насыров
Б.Н. Хабибуллин
И.Т. Хабибуллин
З.Ю. Фазуллин
V.Ya. Eiderman (USA)
M. Gurses (Turkey)
Yu.I. Lyubarskii (Norway)
F.M. Mahomed (South Africa)
S.V. Meleshko (Thailand)
A. Montes Rodríguez (Spain)
A.G. Poltoratski (USA)
M. Sodin (Israel)
A. Vidras (Cyprus)
Deng Guantie (China)

Редакционный совет:
М.Б. Гузаиров
Н.Х. Ибрагимов
А.М. Ильин
В.В. Напалков
А.М. Седлецкий
А.Б. Шабат

СОДЕРЖАНИЕ

Учредители:

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра Российской академии наук,

ГОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный
технический университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный университет»

ГОУ ВПО «Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы»

Зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций (Свид. ПИ № ФС77-34233 от 26.11.2008)

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей доступны в Интернете на сайтах Института математики с ВЦ УНЦ РАН matem.anrb.ru, Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала mathnet.ru

Статьи журнала реферируются в Zentralblatt MATH (ZBMATH).

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Минобрнауки России журнал включен в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий.

Третий номер четвертого тома «Уфимского математического журнала» посвящается юбилею Шабата Алексей Борисовича.

Ответственные редакторы выпуска - профессор Жибер А.В., Хабибуллин И.Т.

Технические редакторы: Р.Н. Гарифуллин, А.А. Махота.
Корректура: О.А. Соколова.

Подписано в печать 20.09.2012 г. Формат 60×84/8.
Усл. печ. л. ???. Уч.-изд. л. ???. Тираж 500 экз. Изд. № ???. Заказ № ???.
Цена договорная.

Отпечатано с предоставленных файлов в редакционно-издательском центре
Уфимского государственного авиационного технического университета.
450074, г. Уфа, ул.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:
ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112, к. 22. Тел.+7 347 273 33 42.
E-mail: umj@matem.anrb.ru
URL: http://matem.anrb.ru

ISSN 2074-1863. Ufimskii matematičeskij žurnal.
Индекс в каталоге «Роспечать» 57382.

© ИМВЦ УНЦ РАН, 2012 г.

АЛЕКСЕЙ БОРИСОВИЧ ШАБАТ

(к семидесятипятилетию со дня рождения)

8 августа 2012 г. исполняется 75 лет со дня рождения выдающегося математика, лауреата государственной премии Российской Федерации в области науки и техники, главного научного сотрудника Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, доктора физико-математических наук, профессора Шабата Алексея Борисовича.

Алексей Борисович Шабат родился 8 августа 1937 г. в Москве в семье научных работников. Отец, Борис Владимирович Шабат, был известным математиком, профессором МГУ по кафедре функционального анализа, автором известных учебников «Методы теории функций комплексного переменного» и «Введение в комплексный анализ», мать, Макарова Елена Александровна, — старшим научным сотрудником Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга МГУ.

В 1959 г. окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, защитил дипломную работу по кафедре дифференциальных уравнений под руководством профессора М.И. Вишика.

Научная деятельность Шабата А.Б. начинается в студенческие годы. Его первые работы посвящены краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, теории эллиптических уравнений и решению ряда задач классической гидродинамики.

В 1963 г. защитил кандидатскую диссертацию «О склеивании потенциального и вихревого течений несжимаемой жидкости» в Институте математики СО АН СССР (г. Новосибирск) под руководством академика М.А. Лаврентьева. В 1975 г. защитил докторскую диссертацию «Операторы преобразования и нелинейные уравнения» на механико-математическом факультете МГУ.

В разное время он работал в Институте гидродинамики Сибирского отделения АН СССР и Новосибирском государственном университете (1959 – 1973 гг.); в Отделе физики и математики Уральского Отделения АН СССР и Башкирском государственном университете (Уфа, 1974 – 1990 гг.); в Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН (Черноголовка, 1990 — по настоящее время); в Карачаево-Черкесском государственном университете им. У.Д. Алиева (Карачаевск, 2007 — по настоящее время).

Мировую известность и признание не только математиков, но и физиков-теоретиков принесли ему основополагающие результаты в современной теории интегрируемых систем, связанные с развитием метода обратной задачи рассеяния — жемчужины математической физики XX столетия .

А.Б. Шабат внес фундаментальный вклад в развитие теории солитонов — нового метода современной математической физики. В 1970 – 1979 гг. им в соавторстве с В.Е. Захаровым была создана и разработана общая схема интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений методом обратной задачи рассеяния, известная во всем мире как «метод одевания», или метод Захарова — Шабата. Именно, после знаменитой работы [Захаров В.Е., Шабат А.Б. «Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах» ЖЭТФ, 1971, т.61, №1, с.118 – 134] «метод обратной задачи рассеяния» стал методом. В эти годы Шабат А.Б. также опубликовал ряд пионерских работ, развивающих метод обратной задачи рассеяния, и впервые использовал задачу сопряжения Римана — Гильберта для решения обратной задачи рассеяния.

В конце 70-х гг. он приступил к решению задач классификации интегрируемых уравнений. Ему принадлежит приоритет использования матричной задачи Римана — Гильберта для построения решений уравнений, интегрируемых методом обратной задачи. Для работы над этим проектом в Уфе была создана рабочая группа, в которой, кроме учеников А.Б. Шабата (А.В. Жибер, В.В. Соколов, И.Т. Хабибуллин, С.И. Свинолупов, Р.И. Ямилов, А.В. Адлер), принимали участие в разные годы Н.Х. Ибрагимов, А.Н. Лезнов, А.В. Михайлов. В результате работ этой группы были сформулированы простые и эффективные критерии интегрируемости, являющиеся необходимыми условиями существования высших симметрий и законов сохранения. А.Б. Шабатом в сотрудничестве с учениками полностью описаны и проклассифицированы интегрируемые системы уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и лагранжевы нелинейные цепочки с взаимодействием ближайших соседей.

В 1974 г. А.Б. Шабат организует широко известную, первую в России конференцию по теории солитонов и методу обратной задачи рассеяния. На ней собралась как плеяда выдающихся ученых, так и молодое поколение.

В 80-е годы на основе доказанной А.Б. Шабатом теоремы о существовании обобщенной лаксовой пары для эволюционных уравнений, обладающих высшими симметриями, был развит симметрийный подход к проблеме интегрируемости. В сотрудничестве с учениками были разработаны эффективные критерии интегрируемости, дано исчерпывающее описание и классификация интегрируемых нелинейных уравнений, обобщающих анизотропную модель Ландау — Лифшица. Отметим еще цикл работ

А.Б. Шабата (1987 – 2000 гг.), выполненных в соавторстве с его учениками Р.И. Ямиловым и В.А. Адлером, в котором завершена классификация лагранжевых нелинейных цепочек с взаимодействием ближайших соседей.

Работы, выполненные А.Б. Шабатом в 90-е гг., посвящены в основном развитию теории дискретных симметрий. Им разработана достаточно общая схема дискретизации спектральных задач и исследованы решеточные уравнения для основных спектральных задач. В качестве приложений этой теории А.Б. Шабатом указаны новые, точно решаемые задачи одномерной квантовой механики с «арифметическими» спектрами и установлен ряд интересных фактов для уравнений типа Пенлеве.

В 1996 – 1999 гг. А.Б. Шабат (совместно с В.Е. Захаровым) получает грант как руководитель направления «Математическая теория точно интегрируемых нелинейных моделей» ведущей научной школы «Теория нелинейных волн».

В настоящее время интересы А.Б. Шабата концентрируются вокруг классической задачи о коммутирующих дифференциальных операторах в многомерии.

А.Б. Шабат был координатором консорциума Einstein, который организовал и провел серию совместных конференций NEEDS в Италии и России.

В 2001 г. он получает приглашение в Математический Институт им. И. Ньютона в Кембридж как Rothschild Visiting Professor. В разные годы А.Б. Шабат работал в университетах Рима, Мадрида, Минессоты, Лавборо, Лидса, Монпелье и др.

А.Б. Шабат член редколлегий журналов «Теоретическая и математическая физика» (Москва) и «Уфимский математический журнал» (Уфа), эксперт Российского фонда фундаментальных исследований, член докторского диссертационного Совета Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН.

Среди его учеников более 10 кандидатов и 5 докторов наук. В настоящее время Алексей Борисович успешно руководит работой группы аспирантов на Северном Кавказе по тематике «Интегрируемые системы».

Поздравляем Алексея Борисовича с 75-летним юбилеем, желаем ему крепкого здоровья, семейного благополучия и новых творческих успехов.

Редакционная коллегия «Уфимского математического журнала»

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 6-16.

УДК 517.9

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА С КВАДРАТОМ

Р.А. АТНАГУЛОВА, И.З. ГОЛУБЧИК

Аннотация. Работа посвящена уравнению Янга- Бакстера с квадратом, то есть уравнению

$$R([R(a),b]-[R(b),a]) = R^2([a,b]) + [R(a),R(b)],$$

где $a,b \in g$, g — алгебра Ли и R — линейный оператор на пространстве g. Строятся две новых серии операторов R, удовлетворяющих этому уравнению. Для их построения используются подалгебры Ли в алгебре матриц, дополнительные к подпространству матриц с нулевой последней строкой.

Ключевые слова: уравнение Янга-Бакстера, интегрируемые дифференциальные уравнения, дополнительные подалгебры в алгебре рядов Лорана.

1. Введение

Основным вопросом, изучаемым в этой статье, является уравнение Янга-Бакстера с квадратом

$$R([R(a),b]-[R(b),a]) = R^2([a,b]) + [R(a),R(b)], \tag{1}$$

где $a,b \in g$, g — алгебра Ли и R — линейный оператор на пространстве g. Уравнение (1) играет важную роль в теории интегрируемых систем [1–4]. Главная цель настоящей статьи — построить новые серии решений уравнения Янга-Бакстера с квадратом (1).

В §3 будут построены два примера подалгебр Ли в алгебре матриц, дополнительных к подпространству матриц с нулевой последней строкой. Затем в §4 с использованием подалгебр из §3 строятся две серии решений уравнения Янга-Бакстера. Серия 2 опирается на метод, основанный на предложении 3 из работы [1]. Эта серия решений уравнения (1) связана с 3-градуированными алгебрами Ли. Серия 1 является принципиально новой. Соответствующая конструкция опирается на теорему 1 из §2.

2. Однородные дополнительные подалгебры в алгебре многочленов над матрицами

В настоящей работе уравнение (1) исследуется в предположении, что g — алгебра Ли матриц вида $g = C_m \oplus \ldots \oplus C_m$, являющаяся прямой суммой нескольких экземпляров алгебры Ли C_m. Алгебра Ли матриц g является прямой суммой алгебр Ли матриц $m \times m$ над полем C. Введем следующие определения:

1) подалгебру g_+ алгебры g назовем *диагональной*, если она состоит из всех элементов вида $\{(a,a,\ldots,a) | a \in C_m\}$;

2) подалгебру g_- алгебры g назовем *дополнительной к* g_+, если прямая сумма подпространств g_- и g_+ совпадает с алгеброй Ли g или, другими словами, выполнены следующие 2 условия:

$$g_+ \oplus g_- = g, \qquad g_+ \cap g_- = \{0\};$$

R.A. Atnagulova, I.Z. Golubchik, New solutions of the Yang-Baxter Equation with a square.

© Атнагулова Р.А., Голубчик И.З. 2012.

Поступила 19 декабря 2011 г.

3) подалгебру h в алгебре многочленов $C_m[x]$ назовем *однородной*, если подалгебра удовлетворяет условию $xh \subset h$.

Определим оператор $R : C_m \to C_m$ формулой

$$(\alpha_1 p, \alpha_2 p, \ldots, \alpha_m p)_+ = -(R(p), \ldots, R(p)). \tag{2}$$

Здесь

$$q = (p, p, \ldots, p) \in g_+, \qquad \lambda = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m),$$

где α_i — различны, а через $(\lambda q)_+$ обозначена проекция элемента λq на g_+ параллельно g_-.

Теорема 1. *Пусть g_+ — диагональная подалгебра алгебры g, g_- — однородная подалгебра, дополнительная к g_+. Тогда оператор R, задаваемый формулой (2) удовлетворяет уравнению* (1) *на g_+.*

Доказательство. Рассмотрим алгебру Ли $C_m[x]$ многочленов вида $\sum a_i x^i$, где коэффициенты a_i принадлежат кольцу комплексных матриц размером $m \times m$, x — скалярная переменная.

Пусть φ — линейный оператор, действующий из $C_m[x]$ в прямую сумму k экземпляров алгебры C_m по формуле

$$\varphi(\sum (a_i x^i) = \sum_i \lambda^i (a_i, \ldots, a_i) = \sum_i (\alpha_1^i a_i, \alpha_2^i a_i, \ldots, \alpha_m^i a_i). \tag{3}$$

Легко проверить, что φ — гомоморфизм алгебр Ли, то есть сохраняет коммутатор. Полный прообраз $\varphi^{-1}(g_-) = G_-$ подалгебры g_- при гомоморфизме φ является подалгеброй алгебры $C_m[x]$. Через G_+ обозначим подалгебру в $C_m[x]$, образуемую многочленами, независящими от x.

Докажем, что выполнены следующие три условия, аналогичные условиям для алгебры Ли g теоремы 1:

$$a)\, xG_- \subseteq G_-; \quad b)\, G_+ + G_- = C_m[x]; \quad c)\, G_+ \cap G_- = \{0\}.$$

Включение $xG_- \subseteq G_-$ — верно, т.к. по условию теоремы 1 $\lambda g_- \subseteq g_-$ и $\varphi^{-1}(\lambda g_-) = xG_- \subseteq G_-$.

Пусть $a = b + c$, $b \in G_+$, $c \in G_-$. Тогда $\varphi(a) = \varphi(b) + \varphi(c)$, где $\varphi(b) \in g_+$, $\varphi(c) \in g_-$. Таким образом, $\varphi(G_+ + G_-) = g_+ + g_- = C_m[x]$. Следовательно, $G_+ + G_- + Ker\varphi = C_m[x]$. Так как $Ker\varphi \subseteq G_-$, то $G_+ + G_- = C_m[x]$. Итак, условие b) также выполнено.

Далее, пусть a принадлежит $G_+ \cap G_-$. Тогда $\varphi(a) \in g_+ \cap g_- = 0$, т.е. $Ker\varphi \in G_-$. Значит $a \in Ker\varphi \cap G_+ = 0$. Следовательно, $\varphi(a) = (a, \ldots, a) = 0$ и условие c) выполнено.

Для того чтобы R удовлетворяло уравнению (1), достаточно доказать, что G_- представимо в виде

$$G_- = \sum_i x^i (x a_i + R(a_i)). \tag{4}$$

Так как по определению (3) функции φ имеем

$$\varphi(xp + R(p)) = \lambda(p, p, \ldots, p) + (R(p), R(p), \ldots, R(p)) \in g_-,$$

то $xp + R(p) \in G_-$. Обозначим через $G^- = \sum_i x^i (x a_i + R(a_i))$. Из условия $\lambda g_- \subseteq g_-$ следует, что $x^i (x a_i + R(a_i)) \subseteq G_-$. Получаем, что $G^- \subseteq G_-$, $G^- + G_+ = C_m[x]$, и так как $G_- \cap G_+ = \{0\}$, то $G_- \subseteq G^-$. Значит, $G^- = G_-$, и равенство (4) доказано. Выведем уравнение для оператора R. Для этого рассмотрим коммутатор

$$[xa + R(a), xb + R(b)] \in G_-.$$

Обозначим через $d = [a, b]$, тогда $[xa + R(a), xb + R(b)] = x(xd + R(d)) + x(c) + R(c)$,

$$x^2 [a, b] + x[a, R(b)] + x[R(a), b] + [R(a), R(b)] = x(xd + R(d)) + x(c) + R(c).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получим соотношения

$$[a,R(b)]+[R(a),b]=R(d)+c, \qquad R(c)=[R(a),R(b)],$$

$$c=[a,R(b)]+[R(a),b]-R(d), \qquad R(c)=R([a,R(b)]+[R(a),b]-R(d)).$$

Отсюда следует, что $R([R(a),b]-[R(b),a])=R^2([a,b])+[R(a),R(b)]$. Теорема 1 доказана.

В работе [1] показано также, что справедлива

Теорема 2. *Пусть оператор $R:G\to G$ диагонализуем, $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ — его спектр и G_i — соответствующие собственные подпространства. Тогда R удовлетворяет уравнению* (1)*, если и только если подпространства G_i и G_i+G_j являются подалгебрами Ли в G для всех различных i и j от 1 до k.*

3. Фробениусовы подпространства

Определение 1. Подпространство в пространстве матриц $C_{n\times n}$ назовем *фробениусовым подпространством*, если всё пространство матриц является прямой суммой этого подпространства и пространства матриц с нулевой последней строкой.

Для построения серии примеров операторов R, удовлетворяющих уравнению Янга-Бакстера с квадратом, в работе будут рассмотрены фробениусовы подпространства, являющиеся подалгебрами Ли.

Пример 1. Рассмотрим блочные матрицы вида

$$h=\{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda_s D_s & 0\\ 0 & \mu_1,\dots,\mu_{m_2} & \mu_m\end{pmatrix}|\lambda_s,\mu_s\in C\}. \tag{5}$$

Эти матрицы состоят из блоков размера $m_i\times m_j$, где $i=\{1,2,3\}, j=\{1,2,3\}$, индекс $s\in\{1,\dots,m_1\}$, m_3=1, $m=m_1+m_2+m_3$). Матрицы D_s в формуле (5) — фиксированные диагональные матрицы размера $m_2\times m_2$, λ_s,μ_t — произвольные параметры. При этом параметры λ_s в блоке (2,2) те же, что в блоке (1, 1).

Покажем, что множество H таких матриц h образуют алгебру Ли. Действительно, для коммутатора блочных матриц справедливы равенства

$$[\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda_s D_s & 0\\ 0 & \mu_1,\dots,\mu_{m_2} & \mu_m\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda'_t D'_t & 0\\ 0 & \mu'_1,\dots,\mu'_{m_2} & \mu'_m\end{pmatrix}]=$$

$$=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda_s D_s & 0\\ 0 & \mu_1,\dots,\mu_{m_2} & \mu_m\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum\lambda'_t D'_t & 0\\ 0 & \mu'_1,\dots,\mu'_{m_2} & \mu'_m\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda'_t D'_t & 0 \\ 0 & \mu'_1, \dots, \mu'_{m_2} & \mu'_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0 \\ 0 & \mu_1, \dots, \mu_{m_2} & \mu_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda'_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\lambda'_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\lambda'_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda_s\lambda'_t D_s D'_t & 0 \\ 0 & (\mu_1 \dots \mu_{m_2}) \sum \lambda'_t D'_t & \mu_m\mu'_m \end{pmatrix} -$$

$$-\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'_1\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda'_2\lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda'_{m_1}\lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda'_t D'_t D_s \lambda_s & 0 \\ 0 & (\mu'_1 \dots \mu'_{m_2}) \sum \lambda_s D_s & \mu'_m\mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\mu''_1 \dots \mu''_{m_2}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому такой коммутатор есть матрица вида (5) с $\lambda_i = 0$, получаем, что H есть алгебра Ли.

Рассмотрим матрицу

$$T = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ 1 \dots 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где E_{m_i} — единичная матрица размера $m_i \times m_i$. Легко видеть, что обратная к ней задается формулой

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ -1 \dots -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку H является подалгеброй Ли, подпространство THT^{-1} — также подалгебра Ли.

Предложение 1. *Подпространство THT^{-1} является фробениусовым (см. определение 1).*

Доказательство:

Справедливы соотношения

$$ThT^{-1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ 1 \dots 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0 \\ 0 & \mu_1 \dots \mu_{m_2} & \mu_m \end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0\\ 0 & E_{m_2} & 0\\ -1\dots-1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0\\ \lambda_1\dots\lambda_{m_1} & \mu_1\dots\mu_{m_1} & \mu_m\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0\\ 0 & E_{m_2} & 0\\ 1\dots1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0\\ 0 & \sum \lambda_s D_s & 0\\ \lambda_1-\mu_m\dots\lambda_{m_1}-\mu_m & \mu_1\dots\mu_{m_2} & \mu_m\end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Обозначим через I пространство матриц с нулевой последней строкой, т.е. пространство матриц вида

$$I=\begin{pmatrix} * & * & *\\ * & * & *\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Пусть $q\in I\cap h$. Нужно показать, что $q=0$. Из соотношения (6) следуют равенства $\mu_n=0$, $\lambda_j-\mu_n=0$ $(j=\overline{1,k})$. Поскольку $THT^{-1}\cap I=0$, то сумма размерностей пространств ThT^{-1} и I равна n^2, так как ThT^{-1} содержит n параметров, и размерность I равна n^2-n. Размерность этой суммы пространств $dim(ThT^{-1}+I)$ совпадает с размерностью пространства комплексных матриц $n\times n$. Значит эти пространства ThT^{-1} и I являются дополнительными подпространствами к друг другу. Таким образом, ThT^{-1} есть фробениусово подпространство, являющееся подалгеброй Ли. Лемма доказана.

Пример 2. Рассмотрим блочные матрицы вида

$$h=\{\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sum\lambda_s A_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_1\dots\mu_{m_2} & \mu_{m_2+1}\dots\mu_{m_3+m_2} & \mu_m\end{pmatrix}\mid \qquad (7)$$

$\lambda_i,\mu_i\in C\}$. Эти матрицы состоят из блоков размера $m_i\times m_j$ где $i=\{1,2,3,4\}$,$j=\{1,2,3,4\}$, индекс $s\in\{1,\dots,m_1\}$, m_4=1, $m=m_1+m_2+m_3+m_4$). Матрицы A_i в формуле (7) — постоянные матрицы, которые необязательно диагональны, λ_s,μ_t — произвольные параметры. При этом параметры λ_s в блоке (2,3) те же, что в блоке (1, 1).

Вычисления, аналогичные проделанным в примере 1, показывают, что

$$[\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}\end{pmatrix} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sum\lambda_s A_s & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu_1\dots\mu_{m_2} & \mu_{m_2+1}\dots\mu_{m_3+m_2} & \mu_m\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1}' \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_t' A_t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1' \dots \mu_{m_2}' & \mu_{m_2+1}' \dots \mu_{m_3+m_2}' & \mu_m' \end{matrix}\right)] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1'' \dots \mu_{m_2}'' & \mu_{m_2+1}'' \dots \mu_{m_2+m_3}'') & \mu_m'' \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица есть матрица вида (7) с $\lambda_i = 0$, т.е. множество H матриц вида (7) образует алгебру Ли.

Далее рассмотрим матрицу

$$T = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ 1 \dots 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратная к ней задается формулой

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ -1 \dots -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Докажем, что подалгебра Ли THT^{-1} является фробениусовым подпространством. Справедливы тождества

$$ThT^{-1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ 1 \dots 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 \dots \mu_{m_2} & \mu_{m_2+1} \dots \mu_{m_3+m_2} & \mu_m \end{matrix}\right) \times \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ -1 \dots -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 \dots \lambda_{m_1} & \mu_1 \dots \mu_{m_2} & \mu_{m_2+1} \dots \mu_{m_3+m_2} & \mu_m \end{matrix}\right) \times \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{m_3} & 0 \\ -1 \dots -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{m_1} \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum \lambda_s A_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 - \mu_m \dots \lambda_{m_1} - \mu_m & \mu_1 \dots \mu_{m_2} & \mu_{m_2+1} \dots \mu_{m_3+m_2} & \mu_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Обозначим через I— пространство матриц с нулевой последней строкой:

$$I = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $q \in I \cap h$. Тогда $q = 0$. Действительно из (8) следует, что справедливы следующие равенства: $\mu_n = 0$, $\lambda_j - \mu_n = 0$ $(j = \overline{1,k})$. Поскольку $THT^{-1} \cap I = 0$, то сумма размерностей THT^{-1} и I равна n^2, т.к. $dim(ThT^{-1}) = n$ и $dimI = n^2 - n$. Размерность этой суммы пространств $dim(ThT^{-1} + I)$ совпадает с размерностью пространства комплексных матриц $n \times n$. Значит эти пространства ThT^{-1} и I являются дополнительными подпространствами к друг другу. Таким образом, ThT^{-1} есть фробениусово подпространство, являющееся подалгеброй Ли.

4. Серии решений уравнений Янга-Бакстера с квадратом

На основе примеров предыдущего параграфа построим две серии решений уравнения Янга-Бакстера с квадратом (1).

4.1. Серия 1. Рассмотрим кольцо $m \times m$ матриц C_m над полем комплексных чисел. Элементы этого кольца будем записывать в виде блочных матриц с блоками, образуемыми матрицами размера $m_i \times m_j$ $(i = \{1,2,3\}, j = \{1,2,3\})$, где сумма $m_1 + m_2 + m_3 = m$.

Пусть H_1, H_2, H_3 — подалгебры Ли в алгебрах матриц $C_{m_1}, C_{m_2}, C_{m_3}$ соответственно и H_i — фробениусовы подпространства в этих алгебрах матриц (см. определение 1).

Обозначим через

$$L_1 = \begin{pmatrix} H_1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & H_2 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}, \qquad L_3 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & H_3 \end{pmatrix}$$

множества матриц, звездочками обозначены произвольные блочные матрицы соответствующих размеров. Ясно, что L_i — подалгебры Ли в матрицах C_m и $L = L_1 + L_2 + L_3 = C_m$.

Заметим, что

$$L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим L_4'— пространство матриц в G с нулевой последней строкой,

$$L_4 = T^{-1} L_4' T, \quad T = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 1 \end{pmatrix} & E_{m_3} \end{pmatrix}.$$

Тогда L_4—подалгебра Ли.

Предложение 2. *Пересечение пространств L_i нулевое:*

$$L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 = \{0\}. \tag{9}$$

Доказательство. Имеем

$$T \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix} T^{-1} \cap L_4' = \{0\},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots -1 \end{pmatrix} & E_{m_3} \end{pmatrix}.$$

При $q_i \in H_i$ справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} & E_{m_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_1 & \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_2 & q_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_1 & \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_2 & q_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & E_{m_2} & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots -1 \end{pmatrix} & E_{m_3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots -1 \end{pmatrix} q_3 & \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_2 + \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots -1 \end{pmatrix} q_3 & q_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Тем самым, если

$$q \in T \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix} T^{-1} \cap L_4',$$

то последняя строка матрицы q нулевая.

Из равенства (10) следует, что последние строки из элементов q_1, q_2, q_3, лежащих в алгебрах H_1, H_2, H_3, — нулевые. Поскольку подалгебры H_i — фробениусовы, то и сами элементы q_i — нулевые. Тем самым, нулевым является и искомое пересечение (9).

Далее воспользуемся результатами теоремы 1.

Предложение 3. *Пусть*

$$g = C_m \oplus \ldots \oplus C_m; \qquad g_+ = \{(a, a, \ldots, a) | a \in C_m\}; \qquad g_- = (L_1, L_2, L_3, L_4).$$

Тогда оператор, задаваемый формулой (2), удовлетворяет уравнению Янга- Бакстера с квадратом (1) *на* g_+.

Доказательство. Проверим, что g_- — однородная подалгебра, дополнительная к g_+. L_i — подалгебры Ли. Выполнение условия $g_+ \cap g_- = \{0\}$ вытекает из того, что, согласно предложению 2, $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 = \{0\}$.

Если $(a, a, \ldots, a) \in (L_1, L_2, L_3, L_4)$, то $a \in L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4 = \{0\}$. Поэтому выполнение условия однородности $xh \subset h$ ($h \in C_m[x]$) для g_- вытекает из того, что $\alpha_i L_i \subseteq L_i$

(L_i—подпространство). Осталось проверить выполнение условия $g_+ \oplus g_- = g$. Достаточно показать, что размерности пространств $g_- + g_+$ и g совпадают. Справедливы равенства $dimg = 4m^2$, $dimg_+ = m^2$,

$$dimg_- = dimL_1 + dimL_2 + dimL_3 + dimL_4$$
$$(m_2 + m_3)m + m_1 = dimL_1,$$
$$dimL_2 = (m_1 + m_3)m + m_2,$$
$$dimL_3 = (m_1 + m_2)m + m_3,$$
$$dimL_4 = m^2 - m,$$
$$dimg_- = m(m_2+m_3+m_1+m_3+m_1+m_2)+m_1+m_2+m_3+m^2-m = |m_1+m_2+m_3 = m| =$$
$$= 2m^2 + m + m^2 - m = 3m^2.$$

Справедливо равенство

$$dimg_+ + dimg_- = dim(g_+ + g_-),$$

так как пересечение $g_+ \cap g_- = \{0\}$. Поэтому

$$dimg = dim(g_+ + g_-) = 4m^2.$$

Значит условие $g_+ \oplus g_- = g$ выполнено. По теореме 1 оператор $R(q)$, заданный формулой (2), удовлетворяет уравнению Янга-Банкстера с квадратом (1).

Замечание 1. Серия 1 получается из предложений 2 и 3 в том случае, если H_1, H_2, H_3 — блочные матрицы вида (5) и (7) соответственно.

Замечание 2. Все выше изложенное в серии 1 остается справедливым, если блоков k, а подалгебры Ли $H_1, \ldots, H_k$, которые лежат в алгебрах матриц $C_{m_1}, \ldots, C_{m_k}$, являются фробениусовыми подпространствами в этих алгебрах матриц.

4.2. Серия 2. В работе [1] содержатся следующие предложения.

Предложение 4. *Пусть G — произвольная 3-градуированная алгебра Ли, p_1 — подалгебра Ли в g_0 и e — элемент из g_1, такие что $dimp_1 = dimg_1$ и $[p_1, e] = g_1$. Тогда $p_2 = exp(ad_e)(p_1 \oplus g_{-1})$ является дополнительной подалгеброй к g_0.*

Предложение 5. *Пусть $R : G \longrightarrow G$ диагонализуем, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$—его спектр и G_i—соответствующие собственные подпространства. Тогда R удовлетворяет уравнению Янга- Бакстера с квадратом (1), если и только если подпространства G_i и $G_i + G_j$ являются подалгебрами Ли в G для всех различных i и j от 1 до k.*

Нам также понадобится следующее замечание, сделанное в работе [1].

Замечание 3. Предложение 4 позволяет построить k-параметрическое семейство решений $R = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \prod_i$ (где $\prod_i$ — проектор на G_i) уравнения (1), если известно разложение алгебры Ли G в прямую сумму подпространств G_i, таких, что G_i и $G_i + G_j$ являются подалгебрами Ли в G. Параметрами служат числа λ_i, которые могут быть выбраны произвольно.

Для конкретных 3-градуированных алгебр Ли построим серию решений уравнения Янга-Бакстера с квадратом. Пусть G— алгебра матриц размера $(2m+n)\times(2m+n)$ над полем комплексных чисел. Элементы из G будем записывать в виде блочных матриц. Блоки образуются матрицами размера $m_i \times m_j$ $(i = \{1, 2, 3\}, j = \{1, 2, 3\}$, $m_1 = n$, $m_2 = m_3 = m$.

Обозначим через G_0, G_1, G_{-1} следующие подпространства, задающие градуировку:

$$g_0 = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in G_0, \qquad g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \in G_1, \qquad g_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G_{-1}.$$

Легко проверить, что $G = G_0 \oplus G_1 \oplus G_{-1}$ — 3-градуированная алгебра Ли.

Обозначим через P_1 подалгебру в G_0, образуемую матрицами следующего вида:

$$P_1 = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & 0 \\ I_1 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 \end{pmatrix},$$

где H_1, H_2— подалгебры Ли в алгебрах матриц C_n и C_m, являющиеся фробениусовыми подпространствами (примеры в § 3). I_1, I_2 состоят из блочных матриц, у которых последняя строка нулевая. Ясно, что P_1— подалгебра Ли.

Заметим, что $dimp_1 = dimH_1 + dimH_2 + dimI_1 + dimI_2 = n + m + (nm - n) + (m^2 - m) = = n + m + nm - n + m^2 - m = m^2 + mn = m(m+n) = dimg_1$.

Зададим элемент e из G_1 формулой

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} & E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Проверим справедливость условия $[P_1, e] = G_1$ из предложения 1. При $q_1 \in H_1, q_2 \in H_2$, $i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$ справедливы равенства

$$[P_1, e] = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ i_1 & i_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} & E_m & 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} & E_m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ i_1 & i_2 & 0 \\ & 0 & q_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_2 \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} & q_2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_1 + i_1 & i_2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_2 \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_1 - i_1 & q_2 - i_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Для того чтобы показать справедливость условия $[P_1, e] = G_1$, нам нужно показать, что на местах блоков (3,1) и (3,2) матрицы (11) стоят произвольные элементы. Подалгебры H_2 и I_2 —дополнительные друг к другу в пространстве матриц размера $m \times m$, кроме того, подпространства $\begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} H_1$ и I_1—дополнительные друг к другу в пространстве матриц размера $m \times n$. На местах блоков (3,1) и (3,2) матрицы (11) стоят произвольные элементы, т.к. $q_2 - i_2$ — произвольный элемент размера $m \times m$ и $\begin{pmatrix} 0\dots 0 \\ 0\dots 1 \end{pmatrix} q_1 + i_1$ — произвольный элемент размера $m \times n$, $q_1 \in H_1, q_2 \in H_2, i_1 \in I_1, i_2 \in I_2$.

Положим

$$P_2 = exp(ad_e)(P_1 \oplus G_{-1})$$

и

$$G^1 = G_0, \qquad G^2 = P_2 \cap (G_0 \oplus G_1), \qquad G^3 = P_2 \cap (G_0 \oplus G_{-1}).$$

Легко видеть, что P_i— подалгебры Ли в G и

$$G^1 + G^2 = G_0 + G_1, \qquad G^1 + G^3 = G_0 + G_{-1}, \qquad G^2 + G^3 = P_2$$

— также подалгебры Ли. Согласно замечанию к предложению 5 из [1], мы получили операторы, удовлетворяющие Янгу-Бакстеру с квадратом.

Авторы выражает благодарность В.В. Соколову и Б.И. Сулейманову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубчик И.З., Соколов В.В. *Ещё одна разновидность классического уравнения Янга-Бакстера* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 34, В. 6. 2000. С. 75–78.
2. Голубчик И.З., Соколов В.В. *Согласованные скобки Ли и интегрируемые уравнения типа модели главного кирального поля* // Функциональный анализ и его приложения. Т. 36, В. 3. 2002. С. 9–19.
3. Голубчик И.З., Соколов В.В. *Факторизация алгебры петель и интегрируемые уравнения типа волчков* // Теоретическая и математическая физика. Т. 141, № 1. 2004. С. 3–23.
4. Атнагулова Р.А. *Разновидность классического уравнения Янга-Бакстера* // VI Уфимская международная конференция "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения". Сборник тезисов. ИМВЦ УНЦ РАН. Уфа, 2011. С. 25.

Рушания Ахъяровна Атнагулова,
Башкирский государственный
педагогический университет,
ул. Октябрьской революции, 3А,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: rushano4ka@mail.ru

Игорь Захарович Голубчик,
Башкирский государственный
педагогический университет,
ул. Октябрьской революции, 3А,
450000, г. Уфа, Россия

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 17-85.

УДК 517.957

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА ЛИ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. ЖИБЕР, Р.Д. МУРТАЗИНА, И.Т. ХАБИБУЛЛИН, А.Б. ШАБАТ

Аннотация. Обзор посвящен систематическому изложению алгебраического подхода к исследованию нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных и их дискретных аналогов, основанного на понятии характеристического векторного поля. Особое внимание уделяется уравнениям, интегрируемым в смысле Дарбу, и солитонным уравнениям. Обсуждается проблема построения высших симметрий уравнений, а также их частных и общих решений. В частности показано, что уравнение в частных производных гиперболического типа интегрируется в квадратурах тогда и только тогда, когда его характеристические кольца Ли по обоим характеристическим направлениям имеют конечную размерность. Для гиперболических уравнений, интегрируемых методом обратной задачи, характеристические кольца имеют минимальный рост. Предложены пути применения метода характеристических колец к системам дифференциальных уравнений гиперболического типа с большим, чем два числом характеристических направлений, уравнениям эволюционного типа, а также к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Ключевые слова: характеристическое векторное поле, симметрия, интегрируемость по Дарбу.

СОДЕРЖАНИЕ

A.V. Zhiber, R.D. Murtazina, I.T. Habibullin, A.B. Shabat, Characteristic Lie rings and integrable models in mathematical physics.

© Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б. 2012.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-97005-р-поволжье-а, 10-01-00088-а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (соглашение №8499).

Поступила 25 ноября 2011 г.

1. Введение

Основополагающие идеи в изучении проблемы интегрирования уравнений в частных производных гиперболического типа восходят к классическим работам Лапласа, Лиувилля, Ли, Дарбу, Гурса, Вессио и др. При этом понимание интегрирования, как получения явной формулы для общего решения, почти сразу же было вытеснено другими, менее обременительными определениями. Например, метод Дарбу интегрирования гиперболического уравнения состоит в отыскании интегралов по каждому характеристическому направлению и последующему сведению его к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям. Ясно, что в общем случае довести дело до явных формул, выражающих совместное общее решение этих уравнений, весьма сложно.

Для отыскания интегралов (также как и для выяснения интегрируемости заданного уравнения) Дарбу пользовался каскадным методом Лапласа. В более поздних исследованиях (см. [49, 60, 61]) основным инструментом поиска интегралов становится алгебраический подход, использующий характеристические векторные поля (именно в рамках такого подхода были получены, по-видимому, первые списки уравнений, обладающих интегралами по обоим направлениям [49]). Другой подход к интегрированию нелинейных уравнений связан с однопараметрическими группами преобразований, т.е. с симметриями. Понятие симметрии, введенное более ста лет назад в трудах С.Ли и Э.Нетер, служит фундаментом современной теории интегрируемости. Открытие метода обратной задачи рассеяния и появление класса солитонных уравнений дало мощный толчок в развитии симметрийного подхода в теории интегрируемости. Стало ясно, что уравнения, интегрируемые при помощи метода обратной задачи рассеяния, обладают бесконечной иерархией высших симметрий.

В последние три десятилетия в рамках симметрийного подхода были созданы эффективные алгоритмы решения классификационных задач и составлены исчерпывающие списки интегрируемых представителей для очень важных классов нелинейных уравнений в частных производных и их дискретных аналогов (см. [2, 10, 11, 33, 34, 38–40, 46–48, 59]). При этом наибольшие успехи связаны с классификацией уравнений эволюционного типа. Однако в ряде случаев, таких как классификация интегрируемых уравнений размерности 1+2 и выше, а также классификация гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными и их дискретных аналогов симметрийный подход не столь эффективен. В последние годы появились новые методы классификации интегрируемых уравнений, такие как тест Пенлеве, метод алгебраической энтропии [55], условие 3D совместности [45] и др. Интерес для специалистов представляет также монография [24], посвященная детальному изложению некоторых аспектов теории интегрирования уравнений в частных производных.

В настоящей работе рассматривается альтернативный подход к задаче о классификации интегрируемых уравнений, восходящий к упомянутым выше классическим работам Гурса. Важной вехой в формировании этого подхода послужила работа [44], где исследовалась система гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = \exp(a_{i1}u^1 + a_{i2}u^2 + \ldots + a_{in}u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.1}$$

В этой работе было введено понятие характеристической алгебры Ли векторных полей и было показано, что характеристическая алгебра Ли системы (1.1) имеет конечную размерность тогда и только тогда, когда матрица $A = (a_{ij})$ является матрицей Картана простой алгебры Ли. Далее, в работе [30], для систем гиперболических уравнений более общего вида

$$u^i_{xy} = F^i(u^1, u^2, \ldots, u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

показано, что условием интегрируемости в квадратурах является конечномерность ее характеристической алгебры Ли.

Характеристические алгебры для гиперболических систем вида

$$u^i_x = c^i_{jk}u^j v^k + c^i_k u^k, \quad v^k_y = d^k_{jl}u^j v^l + d^k_j u^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.3}$$

исследовались в работе [13]. В частности, здесь было дано полное описание базиса характеристической алгебры для уравнения $u_{xy} = \sin u$.

Ниже в первом, третьем и четвертом разделах обзора будет дано определение и подробное описание понятия характеристического кольца Ли для уравнений (и систем уравнений) в частных производных гиперболического типа и их дискретных аналогов. Здесь мы кратко остановимся лишь на основных моментах излагаемого материала. Для скалярного гиперболического уравнения (как в непрерывном, так и дискретном варианте) характеристическое кольцо Ли по каждому характеристическому направлению порождается двумя операторами, обозначим их X_1 и X_2. Обозначим через V_j линейное пространство над полем локально аналитических функций, натянутое на X_1, X_2 и все кратные коммутаторы операторов X_1 и X_2 порядка меньшего или равного j, так что

$$V_0 = \{X_1, X_2\}, \quad V_1 = \{X_1, X_2, [X_1, X_2]\}, \quad \ldots.$$

Введем функцию $\Delta(k) = \dim V_{k+1} - \dim V_k$.

Глубокая связь между свойствами характеристического кольца Ли и свойством интегрируемости уравнения была осознана в работе [18]. В этой работе было обнаружено, что линейные пространства кратных коммутаторов образующих характеристического кольца для таких интегрируемых уравнений, как уравнение синус-Гордона, уравнение Цицейки и др. на первых шагах растут очень медленно, точнее говоря, $\Delta(1) = \Delta(2) = \Delta(3) = \Delta(4) = 1$. Была высказана гипотеза о том, что такое поведение функции $\Delta(k)$ присуще всем интегрируемым уравнениям. В дальнейшем эта мысль была уточнена и подтверждена многочисленными примерами интегрируемых непрерывных и дискретных моделей (см. [35, 53]). Затем в работах [42, 51] была сформулирована следующая

Гипотеза 1.1. *(алгебраический тест). Любое интегрируемое скалярное (непрерывное или дискретное) гиперболическое уравнение удовлетворяет следующему условию: найдется последовательность натуральных чисел $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\Delta(t_k) \leqslant 1$.*

Определение 1.1. *Характеристическое кольцо Ли, для которого существует такая последовательность натуральных чисел, называется кольцом минимального роста.*

Свойство минимальности роста кольца стало рассматриваться в качестве классификационного критерия для интегрируемых уравнений. Для специальных классов уравнений был решен ряд модельных классификационных задач ([18, 42, 51]). Эти результаты убеждают, что свойство минимальности роста характеристического кольца Ли является столь же универсальным свойством интегрируемых уравнений, как наличие бесконечной иерархии высших симметрий.

Статья представляет обзор результатов авторов, посвященных приложениям алгебраического метода, основанного на понятии характеристического векторного поля к нелинейным интегрируемым моделям.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе проведена классификация скалярных гиперболических уравнений специального вида с бесконечномерным характеристическим кольцом Ли минимального роста. Показано, что система уравнений $u_x = f(u, v)$, $v_y = \varphi(u, v)$, для которой выполнены первые три D и $\overline{D}$–условия наличия высших симметрий, имеет x- и y-характеристические кольца минимального роста. Описаны классы уравнений с конечномерным характеристическим кольцом Ли. С использованием образующих характеристических колец Ли построены высшие симметрии уравнений Лиувилля, синус-Гордон, Цицейки и модифицированного уравнения синус-Гордон.

В третьем разделе дается краткий обзор результатов авторов (см. [13, 44, 56]), посвященных классификации интегрируемых гиперболических систем уравнений на основе понятий характеристических алгебр Ли и колец Ли.

В четвертом разделе вводится определение характеристического кольца для дифференциально-разностного уравнения. Иллюстрируется применение характеристических векторных полей в задаче класификации уравнений лиувиллевского типа. Приводятся классификационные результаты. Подробно исследуется характеристическое кольцо дифференциально-разностного аналога уравнения синус-Гордон. Примечательно, что в этом случае кольцо имеет минимальный рост.

В пятом разделе рассматриваются полностью дискретные уравнения. Дается общее определение интеграла, вводится понятие характеристического кольца Ли и обсуждаются возможные способы применения этих понятий в задачах классификации интегрируемых дискретных уравнений.

Шестой раздел посвящен обсуждению открытых вопросов и перспектив излагаемого в статье алгебраического подхода. Например, предлагается схема исследования характеристического кольца систем дифференциальных уравнений гиперболического типа с большим чем два числом характеристических направлений. Характерным примером такой системы является система n-волн. Кратко обсуждаются возможности распространения излагаемого подхода к другим классам нелинейных уравнений, таким как уравнения эволюционного типа, обыкновенные дифференциальные уравнения (см. [8]).

2. Скалярные интегрируемые уравнения

2.1. Определение характеристического кольца Ли. Для исследования интегрируемости уравнений

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{2.4}$$

используется подход, основанный на понятии "характеристического" кольца.

На множестве локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $x, y, \overline{u}_1, u, u_1, u_2, \ldots$, оператор полного дифференцирования по y имеет вид

$$\overline{D} = \frac{\partial}{\partial y} + \overline{u}_2\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial u_1} + D(f)\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots,$$

а оператор полного дифференцирования по x —

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + \overline{D}(f)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + f\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots,$$

где $u_1 = u_x, \overline{u}_1 = u_y, u_2 = u_{xx}, \overline{u}_2 = u_{yy}, \ldots$.

Представим

$$\overline{D} = \overline{u}_2 X_2 + X_1, \tag{2.5}$$

где

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} + \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial u_1} + D(f)\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}.$$

Характеристическое уравнение

$$\overline{D}W(x, y, u, u_1, \ldots, u_m) = 0 \tag{2.6}$$

согласно (2.5) эквивалентно системе

$$X_1 W = 0, \quad X_2 W = 0. \tag{2.7}$$

Отметим, что решение уравнения (2.6) называется x-интегралом уравнения (2.4).

С уравнениями (2.7) естественным образом связано кольцо Ли, порожденное векторными полями X_1 и X_2. Аналогично вводится кольцо Ли, порожденное образующими Y_1 и Y_2 при рассмотрении характеристического уравнения $D\overline{W}(x, y, u, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_m) = 0$.

Пусть L_n – линейное пространство коммутаторов образующих длины $n - 1$, $n = 2, 3, \ldots$. Например, L_2 – линейная оболочка векторных полей X_1, X_2, а L_3 порождается элементом X_3=$[X_1, X_2]$, L_4 – коммутаторами X_4=$[X_2, X_3]$, X_5=$[X_1, X_3]$ и т.д. Тогда x-характеристическое кольцо Ли A представимо в виде

$$A = \sum_{i=2}^{\infty} L_i,$$

а y-характеристическое кольцо Ли $\overline{A}$ уравнения (2.4)

$$\overline{A} = \sum_{i=2}^{\infty} \overline{L}_i.$$

Введем обозначение: $\pounds_k = \sum_{i=2}^{k} L_i$.

Классификация интегрируемых уравнений основана на следующем утверждении:

Лемма 2.1. *Пусть u-решение уравнения* (2.4) *и векторные поля Z и $\overline{Z}$ имеют вид*

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial}{\partial u_i}, \ \alpha_i = \alpha_i(u, \overline{u}_1, u_1, u_2, \ldots, u_{n_i}),$$

$$\overline{Z} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\alpha}_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_i}, \ \overline{\alpha}_i = \overline{\alpha}_i(u, u_1, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_{n_i}), \ i = 1, 2, \ldots.$$

Если $[D, Z] = 0$, *то* $Z = 0$. *Аналогично, если* $[\overline{D}, \overline{Z}] = 0$, *то* $\overline{Z} = 0$.

Доказательство. Так как оператор полного дифференцирования по x на множестве локально-аналитических функций, зависящих от конечного набора переменных $\overline{u}_1, u, u_1, u_2, \ldots$

$$D = f\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots,$$

то

$$\begin{gathered}[D, Z] = (D(\alpha_1)\tfrac{\partial}{\partial u_1} + D(\alpha_2)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + D(\alpha_3)\tfrac{\partial}{\partial u_3} + \ldots) - \\ -(\alpha_1 f_{u_1}\tfrac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \alpha_1\tfrac{\partial}{\partial u} + \alpha_2\tfrac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_3\tfrac{\partial}{\partial u_2} + \ldots).\end{gathered}$$

По условию $[D, Z] = 0$, поэтому

$$\alpha_1 = 0, \quad D(\alpha_i) - \alpha_{i+1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

и, следовательно, $\alpha_i = 0$ для $i = 1, 2, 3, \ldots$. Аналогично, если $[\overline{D}, \overline{Z}] = 0$ и

$$\overline{D} = f\frac{\partial}{\partial u_1} + \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + \overline{u}_2\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \ldots,$$

то $\overline{Z} = 0$. Лемма доказана.

2.2. Классификация интегрируемых гиперболических уравнений с бесконечномерным характеристическим кольцом Ли. В случае $f = f(u)$ на множестве локально-аналитических функций, зависящих от переменных $u, u_1, u_2, \ldots, u_m$

$$\overline{D} = \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial u_1} + D(f)\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots = \overline{u}_1 X_2 + X_1.$$

2.2.1. Уравнение Клейна-Гордона. В этом пункте рассматриваются уравнения (см. [15, 16])

$$u_{xy} = f(u). \tag{2.8}$$

Имеем

$$[D, X_1] = -fX_2, \quad [D, X_2] = 0. \tag{2.9}$$

Отметим, что операторы X_1, X_2 – линейно независимы при $f(u) \neq 0$.

Пусть $X_3 = [X_2, X_1]$. Используя тождество Якоби и (2.9), получаем, что

$$[D, X_3] = -f_u X_2. \tag{2.10}$$

Лемма 2.2. *Размерность линейного пространства* $\pounds_3 = \sum_{i=2}^{3} L_i$ *равна двум тогда и только тогда, когда*

$$X_3 - cX_1 = 0.$$

При этом правая часть уравнения (2.8) *принимает вид*

$$f(u) = \alpha e^{cu},$$

где α, c *– постоянные,* $\alpha \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\dim \pounds_3 = 2$. Тогда, так как

$$X_3 = f'\frac{\partial}{\partial u_1} + f''u_1\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots,$$

то $X_3 = c(u)X_1$, согласно утверждению леммы 2.1 и формулам (2.9) и (2.10) имеем

$$[D, X_3 - cX_1] = -f'X_2 - D(c)X_1 + cfX_2 = 0.$$

Последнее соотношение эквивалентно следующей системе уравнений

$$f' - cf = 0, \quad D(c) = 0.$$

Следовательно c – $const$ и $f = \alpha e^{cu}$. Лемма доказана.

Таким образом, нелинейное уравнение (2.8) с двумерной характеристической алгеброй Ли A сводится к уравнению Лиувилля

$$u_{xy} = e^u. \tag{2.11}$$

Пусть $X_4 = [X_2, X_3]$, $X_5 = [X_1, X_3]$. Используя тождество Якоби и соотношения (2.9), (2.10), получаем

$$[D, X_4] = -f'' X_2, \quad [D, X_5] = f' X_3 - f X_4. \tag{2.12}$$

Далее будем предполагать, что размерность линейного пространства $\mathcal{L}_3$ равна трем (X_1, X_2, X_3 – линейно независимы), и покажем, что случай, когда $\dim \mathcal{L}_4 = 3$, не реализуется.

Действительно, если $\dim \mathcal{L}_4 = 3$, то

$$X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_3 \quad \text{и} \quad X_5 = \bar{c}_1 X_1 + \bar{c}_2 X_3, \tag{2.13}$$

где $c_i = c_i(u, u_1, u_2, \ldots, u_{n_i}), \bar{c}_i = \bar{c}_i(u, u_1, u_2, \ldots, u_{\bar{n}_i}), i = 1, 2$.

Первое соотношение (2.13), согласно утверждению леммы 2.1 и формулам (2.9)–(2.12), эквивалентно системе

$$D(c_1) = 0, \quad c_1 f - f'' + c_2 f' = 0, \quad D(c_2) = 0.$$

Поэтому c_1, c_2 – постоянные и

$$f'' - c_2 f' - c_1 f = 0.$$

Второе соотношение (2.13) эквивалентно системе вида

$$D(\bar{c}_1) + c_1 f = 0, \quad \bar{c}_1 f + \bar{c}_2 f' = 0, \quad D(\bar{c}_2) + c_2 f - f' = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $\bar{c}_2$ – постоянная, то есть $f' = c_2 f$. Тогда, как показано выше, $\dim \mathcal{L}_3 = 2$.

Лемма 2.3. *Размерность пространства $\mathcal{L}_4$, порожденного операторами X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5, равна 4 тогда и только тогда, когда функция f удовлетворяет уравнению вида*

$$f'' - pf' - qf = 0, \tag{2.14}$$

где p, q – постоянные и $f' \neq \beta f$. При этом $X_4 = pX_3 + qX_1$.

Доказательство. Используя лемму 2.1 и формулы (2.9)–(2.12), получаем, что либо

$$X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_3 + c_3 X_5,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} D(c_1) - c_1 c_3 f = 0, \quad f'' - c_1 f - c_2 f' = 0,& \\ D(c_2) + c_3 f' - c_2 c_3 f = 0,& \end{aligned} \tag{2.15}$$

либо

$$X_5 = \bar{c}_1 X_1 + \bar{c}_2 X_3 + \bar{c}_3 X_4,$$

и тогда

$$\begin{aligned} D(\bar{c}_1) = 0, \quad \bar{c}_1 f + \bar{c}_2 f' + \bar{c}_3 f'' = 0,& \\ D(\bar{c}_2) - f' = 0, \quad D(\bar{c}_3) + f = 0.& \end{aligned} \tag{2.16}$$

Согласно первому и третьему уравнениям (2.15) c_1, c_2 – постоянные, $c_3 = 0$ (иначе $f' = c_2 f$ и, тогда $\dim \mathcal{L}_3 = 2$), и функция f удовлетворяет уравнению (2.14). Если выполнено (2.16), то $f = 0$.

Обратно, если функция f удовлетворяет уравнению (2.14), то

$$[D, X_4] = -(pf' + qf) X_2 = p[D, X_3] + q[D, X_1] = [D, pX_3 + qX_1].$$

Следовательно, $X_4 = pX_3 + qX_1$ и $\dim \mathcal{L}_4 = 4$. Лемма доказана.

Замечание 2.1. *Если* $X_4 = 0$, *то* $p = q = 0$, *и уравнение* (2.8) *сводится к уравнению* $u_{xy} = u$.

Далее будем считать, что выполняется условие леммы 2.3. Введем операторы длины 4:

$$X_6 = [X_2, X_5] \quad \text{и} \quad X_7 = [X_1, X_5].$$

Используя тождество Якоби

$$[X_2, [X_1, X_3]] + [X_3, [X_2, X_1]] + [X_1, [X_3, X_2]] = 0,$$

нетрудно показать, что $X_6 = pX_5$. Поэтому $\dim \mathcal{L}_5 \leqslant 5$.

Замечание 2.2. *Если* $X_6 = 0$, *то* $p = 0$, *и равенство* (2.14) *принимает вид*

$$f'' - qf = 0.$$

Тогда уравнение (2.8) *сводится к уравнению синус-Гордона*

$$u_{xy} = e^u + e^{-u}. \tag{2.17}$$

С помощью формул (2.9)–(2.12) получаем, что

$$[D, X_7] = (f' - 2pf)X_5. \tag{2.18}$$

Проверим, что $\dim \mathcal{L}_5 = 5$. Допустим обратное: $\dim \mathcal{L}_5 = 4$ и $X_7 = c_1X_1 + c_2X_3 + c_3X_5$. Тогда

$$\begin{aligned} D(\bar{c}_1) - c_3qf &= 0,\\ \bar{c}_1 f + \bar{c}_2 f' &= 0,\\ D(\bar{c}_2) + c_3f' - c_3pf &= 0,\\ D(\bar{c}_3) + 2pf - f' &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Ясно, что c_i-постоянные, $i = 1, 2, 3$. Из последнего уравнения (2.19) видно, что $f' = 2pf$, т.е. $X_3 = 2pX_1$ (лемма 2.2).

Теперь введем операторы длины 5:

$$X_8 = [X_2, X_7], \quad X_9 = [X_1, X_7], \quad [X_3, X_5].$$

Легко проверить, что оператор $[X_3, X_5] = -pX_7 + X_8$, поэтому $\dim \mathcal{L}_6 \leqslant 7$.

Используя (2.9)–(2.12), (2.18), получаем, что

$$[D, X_8] = (q - 2p^2)fX_5, \quad [D, X_9] = -fX_8 + (f' - 2pf)X_7. \tag{2.20}$$

Если $\dim \mathcal{L}_6 = 5$, тогда выполняется следующие соотношения:

$$X_8 = \bar{c}_1X_1 + \bar{c}_2X_3 + \bar{c}_3X_5 + \bar{c}_4X_7,$$

$$X_9 = c_1X_1 + c_2X_3 + c_3X_5 + c_4X_7.$$

Первое соотношение согласно утверждению леммы 2.1 и формулам (2.10)–(2.12), (2.18), (2.20) перепишем в виде:

$$D(c_1) - qc_3f = 0, \quad c_1f + c_2f' = 0, \quad D(c_3) + c_3f' - pc_3f = 0,$$

$$D(c_3) + c_4f' - 2pc_4f = 0, \quad D(c_4) - f' + 2pf = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что $c_4 = 0$ и $f' = 2pf$. Значит $X_3 = 2pX_1$, то есть $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. Итак, $\dim \mathcal{L}_6 \geq 6$.

Справедливо утверждение.

Лемма 2.4. *Пусть* $\dim \mathcal{L}_i = i$, $i = 3, 4, 5$. *Тогда размерность пространства* $\mathcal{L}_6$ *равна 6 тогда и только тогда, когда*

$$X_8 = 0.$$

Доказательство. Пусть $\dim \mathcal{L}_6 = 6$. Тогда либо

$$X_9 = c_1X_1 + c_2X_3 + c_3X_5 + c_4X_7 + c_5X_8$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} D(c_1) - qc_3f = 0, \quad c_1f + c_2f' = 0, \quad D(c_2) + c_3f' - pc_3f = 0,\\ D(c_3) + c_4f' - 2pc_4f + c_5f'' - c_5pf' - 2c_5p^2f = 0,\\ D(c_4) - f' + 2pf = 0, \quad D(c_5) + f = 0, \end{aligned} \tag{2.21}$$

либо

$$X_8 = \overline{c}_1X_1 + \overline{c}_2X_3 + \overline{c}_3X_5 + \overline{c}_4X_7 + \overline{c}_5X_9,$$

и тогда

$$\begin{aligned} D(\overline{c}_1) - \overline{c}_3qf - \overline{c}_1\overline{c}_5f = 0, \quad \overline{c}_1f + \overline{c}_2f' = 0,\\ D(\overline{c}_2) + \overline{c}_3f' - \overline{c}_3pf - \overline{c}_2\overline{c}_5f = 0,\\ D(\overline{c}_3) - (q - 2p^2)f + \overline{c}_4(f' - 2pf) - \overline{c}_3\overline{c}_5f = 0,\\ D(\overline{c}_4) - \overline{c}_4\overline{c}_5f = 0, \quad D(\overline{c}_5) - \overline{c}_5^2f = 0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Из последнего уравнения (2.21) видно, что $f = 0$. Систему (2.22) перепишем так

$$\begin{gathered} \overline{c}_3q = 0, \quad \overline{c}_1f + \overline{c}_2f' = 0, \quad \overline{c}_3(f' - pf) = 0,\\ -(q - 2p^2)f + \overline{c}_4(f' - 2pf) = 0, \end{gathered}$$

где $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, $\overline{c}_3$, $\overline{c}_4$ – $const$, $\overline{c}_5$=0.

Если $\overline{c}_3 \neq 0$, то функция f удовлетворяет уравнению $f' = pf$, тогда $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. Если $\overline{c}_3 = 0$, то $\overline{c}_4 = 0$ (иначе $\dim \mathcal{L}_3 = 2$), и из четвертого уравнения следует, что $q = 2p^2$. Значит $X_8 = 0$. Таким образом, условие необходимости доказано.

Теперь докажем достаточность. Пусть $X_8 = 0$, тогда так как $[X_3, X_5] = -pX_7$, то $\dim \mathcal{L}_6 \leqslant 6$. Если $\dim \mathcal{L}_6 = 5$, то оператор X_9 должен выражаться через линейную комбинацию операторов X_1, X_3, X_5 и X_7, но в этом случае (как показано выше) $\dim \mathcal{L}_3 = 2$. Лемма доказана.

Замечание 2.3. *Итак, если $X_8 = 0$, то $q = 2p^2$, и уравнение* (2.8), (2.14) *приводится к уравнению Цицейки*

$$u_{xy} = e^u + e^{-2u}. \tag{2.23}$$

2.2.2. Гиперболические уравнения $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$. Рассматривается нелинейное уравнение

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{2.24}$$

В этом пункте получены условия на правую часть уравнения (2.24) (см. [16,18,35]), для которых

$$\dim \mathcal{L}_i = i, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6.$$

Мы исключаем уравнения (2.24) линейные по переменной u_x, либо по u_y.

Положим

$$X_1 = \overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + D^{n-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots, \qquad X_2 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1},$$

тогда

$$\overline{D} = X_1 + \overline{u}_2X_2. \tag{2.25}$$

Имеем

$$[D, X_1] = -(\overline{u}_1f_u + ff_{u_1})X_2, \qquad [D, X_2] = -f_{\overline{u}_1}X_2. \tag{2.26}$$

Используя тождество Якоби

$$[D, X_3] = [D, [X_2, X_1]] = -[X_1, [D, X_2]] - [X_2, [X_1, D]]$$

и соотношения (2.26), получаем

$$[D, X_3] = -(f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1}) X_2 - f_{\overline{u}_1} X_3. \tag{2.27}$$

А для операторов X_4, X_5 выполняются соотношения

$$\begin{gathered}[D, X_4] = -f_{u_1} f_{\overline{u}_1\overline{u}_1} X_2 - f_{\overline{u}_1\overline{u}_1} X_3 - 2 f_{\overline{u}_1} X_4, \\ [D, X_5] = (f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - \overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} - f f_{u_1\overline{u}_1})(f_{u_1} X_2 + X_3) - \\ -(\overline{u}_1 f_u + f f_{u_1}) X_4 - f_{\overline{u}_1} X_5.\end{gathered} \tag{2.28}$$

Теорема 2.1. *Пусть размерность пространства $\pounds_4$, порожденного операторами длины $1, 2$ и 3, равна четырем. Тогда*

$$X_4 + c_1(X_1 - \overline{u}_1 X_3) + c_2 X_5 = 0,$$

и выполняется одно из следующих соотношений для правой части уравнения (2.24): либо

$$\begin{gathered}f = \overline{c}\left(u_1 \int \tfrac{\overline{c}_u}{\overline{c}^2} d\overline{u}_1 + B\right), \quad \overline{c}_{\overline{u}_1} + \tfrac{\delta \overline{u}_1}{\overline{c}} = \lambda, \\ B = B(u, u_1), \quad \overline{c} = \overline{c}(u, \overline{u}_1),\end{gathered} \tag{2.29}$$

$$\text{где} \quad c_1 = \frac{1}{\overline{c}^2}, \quad c_2 = 0, \quad \delta, \lambda - const;$$

либо функция f удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - \overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} - f f_{u_1\overline{u}_1} - c f_{\overline{u}_1\overline{u}_1} = 0, \\ D(c) - c f_{\overline{u}_1} - (\overline{u}_1 f_u + f f_{u_1}) = 0, \quad c = c(u, \overline{u}_1),\end{gathered} \tag{2.30}$$

$$\text{где} \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{c}, \quad c_2 \neq 0.$$

Рассматривая y–характеристическое кольцо, получим "симметричный" вариант теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Если размерность пространства $\overline{\pounds}_4$ равна четырем, то*

$$Y_4 + \overline{c}_1(Y_1 - u_1 Y_3) + \overline{c}_2 Y_5 = 0,$$

и выполняется одно из следующих соотношений для правой части уравнения (2.24):

либо

$$\begin{gathered}f = c\left(\overline{u}_1 \int \tfrac{c_u}{c^2} du_1 + \overline{B}\right), \quad c_{u_1} + \tfrac{\overline{\delta} u_1}{c} = \overline{\lambda}, \\ \overline{B} = \overline{B}(u, \overline{u}_1), \quad c = c(u, u_1),\end{gathered} \tag{2.31}$$

$$\text{где} \quad \overline{c}_1 = \frac{1}{c^2}, \quad \overline{c}_2 = 0, \quad \overline{\delta}, \overline{\lambda} - const;$$

либо функция f удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered}f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - u_1 f_{uu_1} - f f_{u_1\overline{u}_1} - \overline{c} f_{u_1 u_1} = 0, \\ \overline{D}(\overline{c}) - \overline{c} f_{u_1} - (u_1 f_u + f f_{\overline{u}_1}) = 0, \quad \overline{c} = \overline{c}(u, u_1),\end{gathered} \tag{2.32}$$

$$\text{где} \quad \overline{c}_1 = 0, \quad \overline{c}_2 = \frac{1}{\overline{c}}, \quad \overline{c}_2 \neq 0.$$

Отметим, что соотношения (2.31), (2.32) получаются из уравнений (2.29), (2.30) заменой u_1 на $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_1$ на u_1.

Лемма 2.5. *Пусть правая часть уравнения (2.24) удовлетворяет равенствам (2.29), (2.31). Тогда*

$$\begin{gathered}u_{xy} = K(u) L(u_x) \overline{B}(u_y), \quad L' + \eta\left(\tfrac{u_x}{L}\right) = \widetilde{\lambda}, \quad \overline{B}' + \delta\left(\tfrac{u_y}{\overline{B}}\right) = \lambda, \\ \widetilde{\lambda}, \lambda, \eta, \delta - const.\end{gathered} \tag{2.33}$$

Отметим, что для уравнения (2.33) операторы X_4 и Y_4 имеют вид

$$X_4 + \frac{\delta}{\overline{B}^2}(X_1 - u_y X_3) = 0, \quad Y_4 + \frac{\eta}{L^2}(Y_1 - u_x Y_3) = 0.$$

Введем операторы длины 4:

$$X_6 = [X_2, X_5], \quad X_7 = [X_1, X_5].$$

Нетрудно показать, что $X_6 = \frac{\delta \overline{u}_1}{\overline{B}^2} X_5$.

Положим

$$\alpha = -(\overline{u}_1 f_u + f f_{u_1}), \quad \beta = -f_{\overline{u}_1}, \quad \gamma = -(f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1}), \quad p = -f_{\overline{u}_1\overline{u}_1},$$
$$q = f_{u_1} p, \quad r = f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - \overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} - f f_{u_1\overline{u}_1}, \quad s = f_{u_1} r.$$

Используя тождество Якоби и соотношения (2.26), (2.27) и (2.28), имеем

$$\begin{gathered}[D, X_7] = -\tfrac{\delta}{\overline{B}^2}(\overline{u}_1\alpha_u + f\alpha_{u_1})(X_1 - \overline{u}_1 X_3) + (\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - \\ -s)(f_{u_1} X_2 + X_3) + (2\alpha \tfrac{\delta \overline{u}_1}{\overline{B}^2} + \overline{u}_1\beta_u + f\beta_{u_1} + r) X_5 + \beta X_7.\end{gathered} \tag{2.34}$$

Видно, что размерность пространства $\mathcal{L}_5$ растет не более чем на единицу, т.е. $\dim \mathcal{L}_5 \leqslant 5$.

Пусть для уравнения (2.33) размерность пространства $\mathcal{L}_5$ равна пяти, т.е. операторы X_1, X_2, X_3, X_5, X_7 линейно независимы. Теперь введем операторы длины 5: $X_8 = [X_2, X_7]$, $X_9 = [X_1, X_7]$, $[X_3, X_5]$. Используя тождество Якоби, имеем

$$[X_3, X_5] = -\frac{\delta \overline{u}_1}{\overline{B}^2} X_7 + X_8,$$

т.е. $\dim \mathcal{L}_6 \leqslant 7$.

Согласно (2.26), (2.27), (2.28) и (2.34) получаем

$$\begin{gathered}[D, X_8] = (\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)_{\overline{u}_1}(f_{u_1} X_2 + X_3) - (\tfrac{\delta}{\overline{B}^2}(\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s) + \\ + \left(\tfrac{\delta}{\overline{B}^2}(\overline{u}_1\alpha_u + f\alpha_{u_1})\right)_{\overline{u}_1} + \tfrac{\delta^2}{\overline{B}^4}\overline{u}_1(\overline{u}_1\alpha_u + f\alpha_{u_1}))(X_1 - \overline{u}_1 X_3) + \\ + \Big(\left(2\delta\alpha \tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2} + \overline{u}_1\beta_u + f\beta_{u_1} + r\right)_{\overline{u}_1} + \delta \tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2}(2\delta\alpha\tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2} + \\ + \overline{u}_1\beta_u + f\beta_{u_1} + r)\Big) X_5 + \beta_{\overline{u}_1} X_7 + 2\beta X_8,\end{gathered} \tag{2.35}$$

$$\begin{gathered}[D, X_9] = (\overline{u}_1(\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)_u + f(\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s)_{u_1} - \\ -f_{u_1}(\overline{u}_1 r_u + f r_{u_1} - s))(f_{u_1} X_2 + X_3) + (2\overline{u}_1 r_u + 2 f r_{u_1} - s + \\ + \overline{u}_1(3\delta\tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2}\alpha_u + \overline{u}_1\beta_{uu} + f_u\beta_{u_1}) + 2\overline{u}_1 f\beta_{uu_1} + \\ + f\left(3\delta\tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2}\alpha_{u_1} + f_{u_1}\beta_{u_1} + f\beta_{u_1u_1}\right)) X_5 + (2\delta\tfrac{\overline{u}_1}{\overline{B}^2}\alpha + 2\overline{u}_1\beta_u + \\ + 2f\beta_{u_1} + r) X_7 + \alpha X_8 + \beta X_9 - \tfrac{\delta}{\overline{B}^2}(2\overline{u}_1 f\alpha_{uu_1} + \\ + \overline{u}_1(\overline{u}_1\alpha_{uu} + f_u\alpha_{u_1}) + f(f_{u_1}\alpha_{u_1} + f\alpha_{u_1u_1}))(X_1 - \overline{u}_1 X_3).\end{gathered} \tag{2.36}$$

Лемма 2.6. *Если размерность пространства $\mathcal{L}_6$ для уравнения (2.33) равна шести, то функции $K(u)$, $L(u_x)$ и $\overline{B}(u_y)$ удовлетворяют соотношениям вида*

$$K'' = 4\lambda^2 k_2^2 K^3 + 2k_2\lambda K K', \quad L' = k_2(1 + 2k_2\frac{u_x}{L}), \quad \overline{B}' = \lambda(1 + 2\lambda\frac{u_y}{\overline{B}}). \tag{2.37}$$

При этом

$$X_8 + d_1(X_1 - u_y X_3) + d_3 X_7 = 0,$$

где

$$d_1 = 2\lambda k_2(1 + \lambda\frac{u_y}{\overline{B}})(2\lambda k_2 K^2 + K'), \quad d_3 = 2\lambda\frac{1}{\overline{B}}(1 + \lambda\frac{u_y}{\overline{B}}).$$

Замечание 2.4. *Для уравнения (2.33), (2.37) постоянная λ не равна нулю, иначе $\overline{B}' = 0$.*

Замечание 2.5. *Уравнение* (2.33), (2.37) *точечной заменой*

$$K = \frac{1}{\lambda k_3}\widetilde{K}, \quad L = k_2\widetilde{L}, \quad \overline{B} = \lambda\widetilde{B}$$

приводится к уравнению

$$u_{xy} = \widetilde{K}\widetilde{L}\widetilde{B}, \quad \widetilde{K}'' = 4\widetilde{K}^3 + 2\widetilde{K}\widetilde{K}', \quad \widetilde{L}' = 1 + 2\frac{u_x}{\widetilde{L}}, \quad \widetilde{B}' = 1 + 2\frac{u_y}{\widetilde{B}},$$

которое связано с уравнением Цицейки $v_{xy} = e^v + e^{-2v}$ *дифференциальной подстановкой (см. [4, 20])*

$$v = -\frac{1}{2}\ln(u_x - \widetilde{L}) - \frac{1}{2}(u_y - \widetilde{B}) + P(u),$$

где функция P *определяется из обыкновенного дифференциального уравнения*

$$P'^2 - 2\widetilde{K}P' - 3\widetilde{K}' - 2\widetilde{K}^2 = 0.$$

Для уравнения (2.33) ($\lambda = \widetilde{\lambda} = 0$)

$$u_{xy} = K(u)\sqrt{1 - u_1^2}\sqrt{1 - \overline{u}_1^2} \tag{2.38}$$

размерность линейного пространства L_6 равна 2, т.е. пространство $\mathcal{L}_6$ порождено образующими $X_1, X_2, X_3, X_5, X_7, X_8, X_9$ ($\dim \mathcal{L}_6 = 7$).

Введем операторы длины 6:

$$X_{10} = [X_2, X_8] = \tfrac{3\overline{u}_1}{1-\overline{u}_1^2}X_8, \quad X_{11} = [X_1, X_8],$$
$$X_{12} = [X_2, X_9], \quad X_{13} = [X_1, X_9].$$

Теорема 2.3. *Пусть размерность пространства* $\mathcal{L}_7$ *для уравнения* (2.38) *равна девяти. Тогда*

$$X_{11} = -3KK'\overline{u}_1(X_1 - \overline{u}_1X_3) + (3K^2 + \mu)\overline{u}_1X_5 + \frac{\overline{u}_1}{1 - \overline{u}_1^2}X_9.$$

А функция K *удовлетворяет соотношению вида*

$$K'' - 2K^3 - \mu K = 0, \quad \mu - const. \tag{2.39}$$

Уравнение (2.38), (2.39) в значительно более громоздкой форме впервые возникло в работе [3]. Последнее заменой (см. [20])

$$v = \arcsin u_x + \arcsin u_y + P(u), \quad P'^2 = 2K' - 2K^2 - \lambda,$$

сводится к уравнению синус-Гордона $v_{xy} = e^v + e^{-v}$.

2.3. Система уравнений $u_x = f(u, v), \quad v_y = \varphi(u, v)$.

В данном разделе рассматривается система уравнений

$$u_x = f(u, v), \quad v_y = \varphi(u, v). \tag{2.40}$$

В работе [21] для классификации интегрируемых уравнений применен симметрийный метод и было показано, что если выполнены первые три D и $\overline{D}$–условия существования высших симметрий, то система (2.40) приводится к одной из следующих

$$\begin{gathered}
u_x = v, \quad v_y = \sin u,\\
u_x = v, \quad v_y = e^u + e^{-2u},\\
u_x = \sin v, \quad v_y = \sin u,\\
u_x = \alpha(v), \quad v_y = e^u,\\
u_x = \tfrac{1}{v}, \quad v_y = uv + 1,\\
u_x = v, \quad v_y = e^u v + e^{2u},\\
u_x = uv + 1, \quad v_y = uv + 1.
\end{gathered} \tag{2.41}$$

На множестве локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $u, v, \overline{u}_1, v_1, \overline{u}_2, v_2, \overline{u}_3, v_3, \ldots$, оператор полного дифференцирования по x имеет вид

$$D = v_1 \frac{\partial}{\partial v} + f \frac{\partial}{\partial u} + \overline{D} f \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{D}^2 f \frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots,$$

где $\overline{u}_1 = u_y, v_1 = v_x, \overline{u}_2 = u_{yy}, v_2 = v_{xx}, \ldots$.

Тогда

$$D = v_1 X_1 + X_2, \tag{2.42}$$

где

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial v}, \quad X_2 = f \frac{\partial}{\partial u} + \overline{D} f \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \overline{D}^2 f \frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots.$$

Таким образом, с системой уравнений (2.40) естественным образом связано кольцо Ли, порожденное векторными полями X_1 и X_2.

Пусть $\dim \mathcal{L}_3 \leqslant 3$, $\dim \mathcal{L}_4 \leqslant 4$. Тогда выполнено одно из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad X_3 = c_1 X_1 + c_2 X_2, \quad c_1 = c_1(v),\, c_2 = c_2(v);\\
&(ii) \quad X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,\; X_5 = \widetilde{c}_1 X_1 + \widetilde{c}_2 X_2 + \widetilde{c}_3 X_3,\\
&\qquad c_i = c_i(v),\, \widetilde{c}_i = \widetilde{c}_i(v),\, i = 1, 2, 3;\\
&(iii) \quad X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_5 X_5,\\
&\qquad c_i = c_i(v),\, i = 1, 2, 3, 5;\\
&(iv) \quad X_5 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + c_4 X_4,\\
&\qquad c_i = c_i(v),\, i = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Оператор $\overline{D} = \varphi \frac{\partial}{\partial v} + \overline{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + \overline{u}_2 \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \ldots$ совпадает с оператором полного дифференцирования по y на множестве функций, зависящих от переменных $v, u, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \ldots$.

Лемма 2.7. *Пусть u и v — решения системы уравнений* (2.40) *($\varphi'_u \neq 0$), и векторное поле Z имеет вид*

$$Z = \alpha_0(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + \alpha_1(u, v, \overline{u}_1) \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \alpha_2(u, v, \overline{u}_1, \overline{u}_2) \frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots.$$

Если $[\overline{D}, Z] = 0$, то $Z = 0$.

Имеем

$$[\overline{D}, X_1] = -\varphi_v X_1, \quad [\overline{D}, X_2] = -f \varphi_u X_1. \tag{2.44}$$

Используя тождество Якоби и соотношения (2.44), получаем также

$$\begin{gathered}
[\overline{D}, X_3] = [\overline{D}, [X_1, X_2]] = -[X_2, [\overline{D}, X_1]] - [X_1, [X_2, \overline{D}]] = \\
= [X_2, \varphi_v X_1] - [X_1, f \varphi_u X_1] = -f_v \varphi_u X_1 - \varphi_v X_3,\\
[\overline{D}, X_4] = [\overline{D}, [X_1, X_3]] = -f_{vv} \varphi_u X_1 - \varphi_{vv} X_3 - 2\varphi_v X_4,\\
[\overline{D}, X_5] = [\overline{D}, [X_2, X_3]] = \varphi_u \left(f_u f_v - f f_{uv}\right) X_1 + \\
+ \left(f_v \varphi_u - f \varphi_{uv}\right) X_3 - f \varphi_u X_4 - \varphi_v X_5.
\end{gathered} \tag{2.45}$$

Пусть размерность характеристического кольца равна двум. Тогда $X_3 = c_1 X_1 + c_2 X_2$. Согласно лемме 2.7 и соотношениям (2.44) и (2.45) имеем

$$c_1 = 0, \quad (f_v - c_2 f)\varphi_u = 0, \quad \overline{D}(c_2) + c_2 \varphi_v = 0. \tag{2.46}$$

Если операторы X_1, X_2 и X_3 линейно независимы, и размерность характеристического кольца равна трем, то $X_4 = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$, $X_5 = \widetilde{c}_1 X_1 + \widetilde{c}_2 X_2 + \widetilde{c}_3 X_3$. Последние равенства, используя лемму 2.7 и соотношения (2.44) и (2.45), перепишем в эквивалентной форме

$$\begin{gathered}
c_1 = \widetilde{c}_1 = 0, \quad \left(c_2 f + c_3 f_v - f_{vv}\right) \varphi_u = 0,\\
c_{2v} \varphi + 2 c_2 \varphi_v = 0, \quad c_{3v} \varphi + \varphi_{vv} + c_3 \varphi_v = 0,\\
\widetilde{c}_2 f + \widetilde{c}_3 f_v + f_u f_v - f f_{uv} = 0, \quad \widetilde{c}_{2v} \varphi + \widetilde{c}_2 \varphi_v + c_2 f \varphi_u = 0,\\
\widetilde{c}_{3v} \varphi + c_3 f \varphi_u - f_v \varphi_u + f \varphi_{uv} = 0.
\end{gathered} \tag{2.47}$$

Теперь рассмотрим случаи, когда характеристическое кольцо минимального роста, т.е. $\dim \mathcal{L}_4 = 4$. Если операторы X_1, X_2, X_3 и X_4 линейно независимы, а $X_5 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4$, тогда

$$\begin{gathered} c_1 = \widetilde{c}_1 = 0, \quad (c_2 f + c_3 f_v + c_4 f_{vv} + f_u f_v - f f_{uv})\,\varphi_u = 0, \\ c_{2v}\varphi + c_2\varphi_v = 0, \quad c_{3v}\varphi - c_4\varphi_{vv} - f_v\varphi_u + f\varphi_{uv} = 0, \\ c_{4v}\varphi - c_4\varphi_v + f\varphi_u = 0. \end{gathered} \tag{2.48}$$

Если операторы X_1, X_2, X_3 и X_5 линейно независимы, а $X_4 = c_1X_1 + c_2X_2 + c_3X_3 + c_5X_5$, тогда

$$\begin{gathered} c_1 = \widetilde{c}_1 = 0, \quad (c_2 f + c_3 f_v - f_{vv} - c_5(f_u f_v - f f_{uv}))\,\varphi_u = 0, \\ c_{2v}\varphi + 2c_2\varphi_v - c_2c_5 f\varphi_u = 0, \\ c_{3v}\varphi + c_3\varphi_v + \varphi_{vv} + c_5(f_v\varphi_u - f\varphi_{uv}) - c_3c_5 f\varphi_u = 0, \\ c_{5v}\varphi + c_5\varphi_v - c_5^2 f\varphi_u = 0. \end{gathered} \tag{2.49}$$

Аналогично вводится y-характеристическое кольцо Ли системы уравнений (2.40). Из условия "медленного" роста следует, что выполнено одно из соотношений

$$\begin{aligned} &(i')\quad Y_3 = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2, \quad \beta_1 = \beta_1(u),\, \beta_2 = \beta_2(u); \\ &(ii')\quad Y_4 = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \beta_3Y_3,\, Y_5 = \widetilde{\beta}_1Y_1 + \widetilde{\beta}_2Y_2 + \widetilde{\beta}_3Y_3, \\ &\qquad \beta_i = \beta_i(u),\, \widetilde{\beta}_i = \widetilde{\beta}_i(u),\, i = 1,2,3; \\ &(iii')\quad Y_4 = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \beta_3Y_3 + \beta_5Y_5, \\ &\qquad \beta_i = \beta_i(u),\, i = 1,2,3,5; \\ &(iv')\quad Y_5 = \beta_1Y_1 + \beta_2Y_2 + \beta_3Y_3 + \beta_4Y_4, \\ &\qquad \beta_i = \beta_i(u),\, i = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Для систем уравнений (2.41) выполнено одно из условий (2.43) и (2.50). А именно, для первой, второй, шестой и седьмой систем (2.41) $X_4 = 0$. А также, для первой системы имеем $Y_4 = -Y_2$, для второй $Y_4 = 2Y_2 - Y_3$, для шестой $Y_4 = -2Y_2 + 3Y_3$, для седьмой $Y_4 = 0$.

Для третьей системы $X_4 = -X_2$ и $Y_4 = -Y_2$.

Y-характеристическое кольцо Ли четвертой системы уравнений $u_x = \alpha(v)$, $v_y = e^u$ трехмерно ($Y_3 = Y_2$), а x-характеристическое кольцо для каждого из случаев (i)–(iv) определяет функцию $\alpha(v)$ следующим образом: при $X_3 = c_2X_2$ функция $\alpha = \gamma e^{c_2 v}$ (c_2, γ – постоянные); в случае (ii) функция α удовлетворяет соотношениям вида

$$\begin{gathered} c_2\alpha + c_3\alpha' - \alpha'' = 0, \quad \widetilde{c}_2\alpha + \widetilde{c}_3\alpha' = 0, \\ \widetilde{c}_2' + c_2\alpha = 0, \quad \widetilde{c}_3' + c_3\alpha - \alpha' = 0, \quad c_1 = \widetilde{c}_1 = 0, \end{gathered}$$

где c_2, c_3 – постоянные, $\widetilde{c}_2 = \widetilde{c}_2(v)$, $\widetilde{c}_3 = \widetilde{c}_3(v)$.

В случае (iii) функция α удовлетворяет соотношениям вида

$$\begin{gathered} c_2\alpha + c_3\alpha' - \alpha'' = 0, \quad c_2' - c_2c_5\alpha = 0, \\ c_3' + c_5\alpha' - c_3c_5\alpha = 0, \quad c_5' - c_5^2\alpha = 0, \quad c_i = c_i(v),\, i = 2,3,5. \end{gathered}$$

При этом $X_4 = c_2X_2 + c_3X_3 + c_5X_5$.

А в случае (iv) $X_5 = c_2X_2 + c_3X_3 + c_4X_4$ и функция α такая, что

$$\begin{gathered} c_2\alpha + c_3\alpha' + c_4\alpha'' = 0, \quad c_3' = \alpha', \\ c_4' = -\alpha, \quad c_2 - const, \quad c_i = c_i(v),\, i = 3,4. \end{gathered}$$

Замечание 2.6. *Нетривиальные симметрии существуют лишь при $\frac{\alpha''}{\alpha} = const$ (см. [21]).*

Пятая система уравнений $u_x = \frac{1}{v}$, $v_y = uv + 1$ ($Y_4 = 0$) заменой $v = e^{-w}$ приводится к виду

$$u_x = e^w, \quad w_y = u + e^w.$$

Для последней системы уравнений $X_4 = 0$.

Итак показано, что системы уравнений (2.41) имеют кольца минимального роста, то есть удовлетворяют (2.43) и (2.50).

2.4. Нелинейные интегрируемые уравнения с конечномерным характеристическим кольцом. В этом пункте рассматриваются уравнения (2.24) с характеристическим кольцом A размерности 2 и 3 (см. [16, 18, 35]) и уравнение (2.33) при $\dim A = 4$.

Видно, что операторы X_1 и X_2 линейно независимы, т.е. $\dim L_2 = 2$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.8. *Размерность характеристического кольца A равна двум если и только если правая часть f уравнения* (2.24) *имеет вид*

$$f = A(u, u_x)u_y.$$

При этом $X_3 = \frac{1}{u_y}X_1$.

Пусть размерность кольца A равна трем. В этом случае выполняются соотношения вида

$$X_4 + c(X_1 - \overline{u}_1 X_3) = 0, \quad X_5 + \overline{c}(X_1 - \overline{u}_1 X_3) = 0,$$
$$c = c(u, \overline{u}_1, u_1, u_2, \ldots), \quad \overline{c} = \overline{c}(u, \overline{u}_1, u_1, u_2, \ldots).$$

Тогда

$$[D, X_4 + c(X_1 - \overline{u}_1 X_3)] = 0, \quad [D, X_5 + \overline{c}(X_1 - \overline{u}_1 X_3)] = 0.$$

Последние соотношения, согласно (2.26), (2.27) и (2.28), эквивалентны следующей системе уравнений

$$\begin{gathered} D(c) + 2cf_{\overline{u}_1} = 0, f_{\overline{u}_1\overline{u}_1} + c(f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}) = 0, \\ D(\overline{c}) + c(\overline{u}_1 f_u + f f_{u_1}) + \overline{c} f_{\overline{u}_1} = 0, \\ f_u + f_{u_1} f_{\overline{u}_1} - \overline{u}_1 f_{u\overline{u}_1} - f f_{u_1\overline{u}_1} - \overline{c}(f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}) = 0. \end{gathered} \tag{2.51}$$

Ясно, что $c = c(u, \overline{u}_1)$, $\overline{c} = \overline{c}(u, \overline{u}_1)$.

Справедливо утверждение.

Лемма 2.9. *Уравнение* (2.24) *с характеристическим кольцом Ли A размерности* 3 *точечной заменой приводится к одному из следующих*

$$u_{xy} = -\frac{1}{B_{u_x}}(B_u u_y + 1), \quad B = B(u, u_x), \quad c = \overline{c} = 0;$$

либо

$$u_{xy} = e^u \Psi(u_x), \quad c = 0, \quad \overline{c} = \overline{c}(u, u_y);$$

либо

$$u_{xy} = \frac{1}{u} p(u_x)\overline{r}(u_y), \quad \overline{r}' + \frac{u_y}{\overline{r}} = \lambda, \quad p' + \frac{u_x}{p} = \lambda,$$
$$\textit{где} \quad \lambda - const, \quad \lambda \neq 0, \quad c = \frac{1}{\overline{r}^2}, \quad \overline{c} = -\frac{1}{u};$$

либо

$$u_{xy} = q(u)p(u_x)\overline{r}(u_y), \quad (\ln q)'' = q^2, \quad \overline{r}' + \frac{u_y}{\overline{r}} = 0, \quad p' + \frac{u_x}{p} = 0,$$
$$\textit{где} \quad c = \frac{1}{\overline{r}^2}, \quad \overline{c} = \frac{q'}{q};$$

либо

$$u_{xy} = \overline{F}(u, u_y)u_x,$$
$$\textit{где} \quad c = \frac{1}{u_y}(\ln(\overline{F} - u_y \overline{F}_{u_y}))'_{u_y}, \quad \overline{c} = (\ln(\overline{F} - u_y \overline{F}_{u_y}))'_u,$$

функция $\overline{F}$ удовлетворяет соотношению

$$u_y e^{-\varphi} + (\overline{F} - \varphi' u_y) \int e^{-\varphi} du = \Phi(\overline{F} - \varphi' u_y), \quad \varphi = \varphi(u).$$

Здесь B, Ψ, Φ–произвольные функции своих аргументов. При этом

$$X_4 = -c(X_1 - u_y X_3), \quad X_5 = -\overline{c}(X_1 - u_y X_3).$$

Теперь рассмотрим уравнение (2.33), для которого $\dim \mathcal{L}_4 = 4$.

Лемма 2.10. *Пусть размерность пространства $\mathcal{L}_4$ равна четырем. Для уравнения* (2.33) $\dim \mathcal{L}_5 = 4$ *только тогда, когда функция K удовлетворяет соотношению*

$$\left(\frac{K'}{K}\right)' = \kappa K^2, \quad \kappa - const. \tag{2.52}$$

Отметим, что размерности x- и $y-$характеристических колец Ли A и $\overline{A}$ уравнения (2.33), (2.52) равны четырем (см. [20]). Поэтому это уравнение является уравнением лиувиллевского типа.

2.5. Уравнение $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$ с x- и y-интегралами второго порядка. В работе [36] предложен метод классификации нелинейных гиперболических уравнений (2.24) с x- и y-интегралами второго порядка, основанный на исследовании пары характеристических колец Ли. Характеристические кольца таких уравнений трехмерны.

Теорема 2.4. *Пусть характеристические кольца A и $\overline{A}$ уравнения* (2.24) *трехмерны. Тогда выполнены следующие соотношения:*

$$A_{u_1} = 0, \quad A_u u_1 + A_{\overline{u}_1} f = -2 f_{\overline{u}_1} A, \tag{2.53}$$

$$B_{u_1} = 0, \quad B_u u_1 + B_{\overline{u}_1} f = -(f_u \overline{u}_1 + f f_{u_1}) A - f_{\overline{u}_1} B, \tag{2.54}$$

где $A = \frac{f_{\overline{u}_1 \overline{u}_1}}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}}, \quad B = \frac{\overline{u}_1 f_{u \overline{u}_1} + f f_{u_1 \overline{u}_1} - f_u - f_{u_1} f_{\overline{u}_1}}{f - \overline{u}_1 f_{\overline{u}_1}}.$

$$\overline{A}_{\overline{u}_1} = 0, \quad \overline{A}_u \overline{u}_1 + \overline{A}_{u_1} f = -2 f_{u_1} \overline{A}, \tag{2.55}$$

$$\overline{B}_{\overline{u}_1} = 0, \quad \overline{B}_u \overline{u}_1 + \overline{B}_{u_1} f = -(f_u u_1 + f f_{\overline{u}_1}) \overline{A} - f_{u_1} \overline{B}, \tag{2.56}$$

где $\overline{A} = \frac{f_{u_1 u_1}}{f - u_1 f_{u_1}}, \quad \overline{B} = \frac{u_1 f_{u u_1} + f f_{u_1 \overline{u}_1} - f_u - f_{u_1} f_{\overline{u}_1}}{f - u_1 f_{u_1}}.$

Соотношения (2.53)–(2.56) позволяют составить полный список уравнений с интегралами второго порядка (см., например, [6]).

2.6. Линеаризованное уравнение. Для классификации нелинейных интегрируемых уравнений вместо кольца Ли исходного уравнения можно использовать характеристическое кольцо его линеаризации.

Рассмотрим линеаризацию

$$(D\overline{D} - f_{u_x} D - f_{u_y} \overline{D} - f_u) v = 0 \tag{2.57}$$

уравнения (2.4). Для данного уравнения можем определить последовательность инвариантов Лапласа (см. [20]).

Определение 2.1. *Уравнение* (2.4) *называется интегрируемым по Дарбу, если существуют функции ω, $\overline{\omega}$, зависящие от конечного числа переменных*

$$x, y, u, u_1, u_2, u_3, \ldots, \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \ldots \tag{2.58}$$

такие, что на решениях уравнения (2.4) *функция ω не зависит от переменной y, а функция $\overline{\omega}$ – от x.*

Приведем критерий интегрируемости по Дарбу (см. [19, 32, 41, 49]):

Теорема 2.5. *Нелинейное уравнение* (2.4) *интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда последовательность инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения* (2.57) *обрывается с двух сторон.*

В работах [14, 17], используя понятие характеристического кольца Ли, показано, что последовательность инвариантов Лапласа линеаризованного уравнения (2.57) обрывается с двух сторон только в том случае, когда характеристические кольца Ли конечномерны.

2.7. Высшие симметрии интегрируемых уравнений. В данном параграфе проводится описание высших симметрий интегрируемых уравнений на основе образующих характеристического кольца Ли (см. [10, 32, 37]).

Правая часть нелинейного уравнения $u_{xy} = f(u)$, допускающего нетривиальную группу преобразований Ли-Беклунда, приводится к одному из видов: $e^u, e^u + e^{-u}, e^u + e^{-2u}$.

2.7.1. Симметрии уравнения Лиувилля. X–характеристческое кольцо Ли порождается операторами

$$X_1 = e^u \frac{\partial}{\partial u_1} + D(e^u)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u}.$$

Положим

$$X = e^{-u}\sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(e^u)\frac{\partial}{\partial u_k} = e^{-u}X_1,$$

а оператор $\overline{X}$ получим заменой $u_k \leftrightarrow \overline{u}_k$, $D \leftrightarrow \overline{D}$.

Известно (см. [22]), что любая симметрия представима в виде

$$F = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) + \overline{\varphi}(\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_m),$$

где φ, $\overline{\varphi}$ являются симметриями.

Теперь определяющее уравнение

$$D\overline{D}\varphi = e^u\varphi$$

примет вид

$$(D + u_1)X\varphi = \varphi. \tag{2.59}$$

Применяя к уравнению (2.59) оператор X, получаем

$$(D + u_1)X^2\varphi = 0.$$

Следовательно, $h = X\varphi \in Ker\overline{D}$, аналогично $\overline{h} = \overline{X}\overline{\varphi} \in KerD$, и из формулы (2.59) получаем, что любая симметрия уравнения Лиувилля представима в виде

$$f = (D + u_1)h + (\overline{D} + \overline{u}_1)\overline{h}, \tag{2.60}$$

где $h(\overline{h})$– произвольный элемент $Ker\overline{D}(D)$. Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Симметрии уравнения Лиувилля вычисляются по формуле*

$$f = (D + u_1)h(w, w_1, \dots) + (\overline{D} + \overline{u}_1)\overline{h}(\overline{w}, \overline{w}_1, \dots),$$

где $w = u_2 - \frac{u_1^2}{2}$ $(\overline{w} = \overline{u}_2 - \frac{\overline{u}_1^2}{2})$, $h(\overline{h})$*–произвольная функция своих аргументов.*

2.7.2. Симметрии уравнения синус-Гордон. Векторное поле x-характеристического кольца уравнения синус-Гордон

$$X_1 = (e^u + e^{-u})\frac{\partial}{\partial u_1} + D(e^u + e^{-u})\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots$$

представим в виде (см. [11])

$$X_1 = e^u X + e^{-u} Y.$$

Тогда определяющее уравнение $D\overline{D}F = (e^u - e^{-u})F$ эквивалентно системе

$$(D + u_1)XF = F, \quad (D - u_1)YF = F. \tag{2.61}$$

Так как коммутатор $[D, \overline{D}] = 0$, то справедливы следующие соотношения

$$(D + u_1)X = XD, \quad (D - u_1)Y = YD. \tag{2.62}$$

Применяя к уравнениям (2.61) дифференцирования X и Y, и используя при этом (2.62), приходим к формулам

$$\begin{gathered} DYXF=(Y-X)F, \quad (D+u_1)XYXF=YXF, \\ (D-u_1)Y^2XF=-YXF. \end{gathered} \tag{2.63}$$

Из (2.61) – (2.63) следует, что если F–симметрия порядка n, то YXF–симметрия порядка $n-2$. Действительно, так как

$$\begin{gathered} (Y-X)F=-2\left(u_1\tfrac{\partial}{\partial u_2}+u_2\tfrac{\partial}{\partial u_3}+\ldots+(u_{n-1}+\ldots)\tfrac{\partial}{\partial u_n}\right)(u_n+ \\ +cu_{n-1}+g(u_1,\ldots,u_{n-2})), \end{gathered}$$

то $\operatorname{ord}(Y-X)F=n-1$, и поэтому из первого соотношения (2.63) получаем, что $\operatorname{ord}YXF=n-2$. Следовательно, если исходное уравнение допускает симметрию четного порядка, то оно должно иметь симметрию второго порядка. А симметрия второго порядка отсутствует.

Из формул (2.61) получаем, что

$$2F=(D-u_1D^{-1}u_1)(X-Y)F.$$

Последняя с учетом (2.63) записывается в виде

$$2F=(-D^2+u_1D^{-1}u_1D)YXF=-LYXF.$$

Таким образом, алгебра симметрий уравнения синус-Гордон вычисляется по рекуррентной формуле

$$F^{(n+2)}=(D^2-u_1^2+u_1D^{-1}u_2)F^{(n)}, \quad F^{(1)}=u_1, \quad n=1,3,5,\ldots. \tag{2.64}$$

2.7.3. Симметрии уравнения Цицейки. Определим дифференцирования X и Y соотношением $e^uX+e^{-2u}Y=X_1$, где

$$X_1=(e^u+e^{-2u})\frac{\partial}{\partial u_1}+D(e^u+e^{-2u})\frac{\partial}{\partial u_2}+\ldots.$$

Тогда для функций вида $F(u_1,\ldots,u_n)$ определяющее уравнение

$$D\overline{D}F=(e^u-2e^{-2u})F$$

эквивалентно системе:

$$(D+u_1)XF=F, \quad (D-2u_1)YF=-2F. \tag{2.65}$$

Последовательное применение операторов X и Y к уравнениям (2.65) приводит к формулам:

$$\begin{gathered} (D-u_1)YXF=(Y-X)F, \quad DXYXF=3YXF, \\ (D+u_1)X^2YXF=3XYXF, \quad (D+2u_1)X^3YXF=2X^2YXF, \\ (D-u_1)YX^2YXF=-X^2YXF, \\ DYX^3YXF=2(YX^2YX-X^3YX)F, \\ (D+u_1)X(YX^3YXF)=YX^3YXF, \\ (D-2u_1)Y(YX^3YXF)=-2YX^3YXF. \end{gathered} \tag{2.66}$$

Пусть F–симметрия порядка n. Тогда из формул (2.65), (2.66) следует, что YX^3YXF–симметрия исходного уравнения порядка $n-6$. Далее перепишем уравнения (2.65) следующим образом

$$D(2X+Y)F+2u_1(X-Y)F=0, \quad D(X-Y)F+u_1(X+2Y)F=3F.$$

Из последнего нетрудно получить формулу:

$$3F=(D-u_1-2u_1D^{-1}u_1)(X-Y)F. \tag{2.67}$$

Теперь, используя (2.66), получаем новое представление симметрии (2.67)

$$27F=(D-u_1-2u_1D^{-1}u_1)(D-u_1)D(D+u_1)X^2YXF. \tag{2.68}$$

Четвертое и пятое равенства (2.66) запишем в виде

$$[D,(X^3YX+2YX^2YX)+2u_1(X^3YX-YX^2YX)]F=0,$$
$$[D(X^3YX-YX^2YX)+u_1(2X^3YX+YX^2YX)-3X^2YX]F=0.$$

Из последних соотношений получаем, что

$$3X^2YXF=\left((D+u_1-2D^{-1}u_1)(X^3YX-YX^2YX)\right)F. \tag{2.69}$$

И, наконец, используя шестое равенство (2.66) и (2.69), формулу (2.68) можно записать в виде

$$162F=LYX^3YXF,$$

где оператор рекурренции L определен формулой

$$L=(D-u_1-2u_1D^{-1}u_1)(D-u_1)D(D+u_1)(D+u_1-2u_1D^{-1}u_1)D. \tag{2.70}$$

Последнее соотношение дает рекуррентную формулу для симметрий

$$F^{(n+6)}=LF^{(n)}. \tag{2.71}$$

Полагая $F^{(1)}=u_1$, а $F^{(5)}=u_5+5(u_2-u_1^2)u_3-5u_1u_2^2+u_1^5$, получим из (2.71) две последовательности симметрий

$$\left\{F^{(1+6k)}\right\} \quad \text{и} \quad \left\{F^{(5+6k)}\right\}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

уравнения Цицейки.

2.7.4. Симметрии модифицированного уравнения синус-Гордона. Модифицированное уравнение синус-Гордона (2.38), (2.39) (мСГ) представим в виде

$$u_{xy}=s(u)b(u_1)\overline{b}(\overline{u}_1), \quad \text{где} \quad s''-2s^3-\mu s=0 \quad b'=-\frac{u_1}{b}, \quad \overline{b}'=-\frac{\overline{u}_1}{\overline{b}}, \quad \mu-const. \tag{2.72}$$

На множестве локально-аналитических функций из $\Im$

$$\overline{D}F(u,u_1,u_2,\ldots)=\overline{u}_1\tfrac{\partial}{\partial u}+sb\overline{b}\tfrac{\partial}{\partial u_1}+D(sb\overline{b})\tfrac{\partial}{\partial u_2}+\ldots=$$
$$=\overline{u}_1\tfrac{\partial}{\partial u}+sb\overline{b}\tfrac{\partial}{\partial u_1}+(s'u_1b\overline{b}-s\tfrac{u_1u_2}{b}\overline{b}-s^2b^2\overline{u}_1)\tfrac{\partial}{\partial u_2}+\ldots.$$

Поэтому образующие x-характеристической алгебры Ли A уравнения (2.72) имеют вид

$$X=\frac{\partial}{\partial u}-s^2b^2\overline{u}_1\frac{\partial}{\partial u_2}+\ldots, \qquad Y=sb\frac{\partial}{\partial u_1}+(s'u_1b-s\frac{u_1u_2}{b})\frac{\partial}{\partial u_2}+\ldots. \tag{2.73}$$

Тогда $\overline{D}=\overline{u}_1X+\overline{b}Y$.

Теорема 2.7. *Дифференциальный оператор*

$$Y^2+s^2$$

переводит высшие симметрии порядка n в симметрии порядка $n-2$. Оператор рекурренции

$$D^2+2\frac{u_1u_2}{b^2}D-u_1D^{-1}(\frac{u_3}{b^2}D+\frac{u_1u_2^2}{b^4}D+3s^2u_1D+$$
$$+3ss'u_1^2-ss'+\lambda u_2)+s^2+\lambda u_1^2$$

определяет алгебру симметрий уравнения мСГ (см. [37]).

Отметим, что оператор рекурренции был получен в работе [28] с использованием преобразования Беклунда.

Если $\mu=0$, т.е. $s'^2-ss''+s^4=0$. Тогда функция s определяется так

$$s=\frac{\sqrt{\lambda}}{\cos(\sqrt{\lambda}u-c)}, \quad \lambda,c-const.$$

Оказывается существует оператор, который симметрии уравнения

$$u_{xy} = \frac{1}{\cos u}\sqrt{1-u_1^2}\sqrt{1-\overline{u}_1^2}. \tag{2.74}$$

переводит в y-интеграл.

Теорема 2.8. *Оператор*

$$\frac{b}{s}Y + u_1$$

симметрию F переводит в интеграл W уравнения (2.74). *А оператор*

$$\left(\frac{s'}{s}+\frac{u_2}{b^2}\right)^{-1}\left(D-\frac{s}{b}D\left(\frac{b}{s}\right)\right)$$

интеграл — в симметрию.

3. Системы гиперболических уравнений

3.1. Симметрии. Характеристическое кольцо.

3.1.1. Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Интегрируемость системы уравнений $u_{z\bar z} = F(u)$ определяется свойствами характетристической алгебры Ли, задаваемой векторным полем $F(u)$ (см. [30]). В связи с этим возникает задача о классификации конечномерных (тип I) и допускающих конечномерное представление (тип II) характеристических алгебр. Мы рассмотрим экспоненциальные системы уравнений. Экспоненциальная система с матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$ записывается в виде

$$u^i_{z\bar z} = e^{v^i}, \quad v^i = a_{i1}u^1 + \ldots + a_{ir}u^r, \quad i = 1, \ldots, r. \tag{3.75}$$

Если A–матрица Картана простой алгебры Ли, то эта система интегрируется в квадратурах (см. [29, 57]).

Относительно системы уравнений (3.75) с произвольной матрицей A в работе [30] высказана гипотеза о совпадении характеристической алгебры $\mathcal{X}(A)$ с порожденной положительными корнями подалгеброй $G_+(A)$ контрагредиентной алгебры Ли канонически ассоциированной с матрицей A. Известно (см. [25]), что контрагредиентная алгебра Ли конечномерна тогда и только тогда, когда матрица A эквивалентна одной из матриц Картана простой алгебры Ли.

Нашей целью является описание конечномерных характеристических алгебр $\mathcal{X}(A)$, соответствующих невырожденным матрицам A. Элементами алгебры $\mathcal{X}(A)$ являются операторы вида $\sum_{i,j} f_{ij}(u_1, u_2, \ldots)\frac{\partial}{\partial u^i_j}$ в пространстве переменных $u_j = (u^1_j, \ldots, u^r_j)$, $j \geq 1$. Образующие $X_1, \ldots, X_r$ алгебры Ли $\mathcal{X}(A)$ определяются соотношениями

$$X_jD = (D + a_j)\,X_j, \quad X_ju^k_1 = \delta^k_j, \tag{3.76}$$

где $D: u_j \to u_{j+1}$, $a_j = a_{j1}u^1_1 + \ldots + a_{jr}u^r_1$. Как векторное пространство, характеристическая алгебра порождается кратными коммутаторами следующего специального вида

$$X_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = ad_{\alpha_1}\ldots ad_{\alpha_{n-1}}X_{\alpha_n}, \quad ad_j : Y \to [X_j, Y]. \tag{3.77}$$

Условие невырожденности матрицы A системы уравнений (3.75) удобно заменить условиями

$$\begin{gathered} a_{ii} = 2, \quad a_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = 0, \\ a_{ij} = 0, -1, -2, \ldots \quad (i, j = 1, \ldots, r, i \neq j). \end{gathered} \tag{3.78}$$

Матрицу, удовлетворяющую этим условиям (возможно вырожденную), будем называть обобщенной матрицей Картана. Покажем, что соотношения (3.78) являются следствием конечномерности алгебры $\mathcal{X}(A)$ и условия $\det A \neq 0$.

Конечномерность характеристической алгебры означает равенство нулю коммутаторов (3.77) достаточно большого порядка n. Это следует из разложения

$$\mathcal{X}(A) \equiv \mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_n \oplus \ldots,$$

где $\mathcal{X}_j$–линейное подпространство, натянутое на коммутаторы порядка j. $\mathcal{X}_j \cap \mathcal{X}_k = \{0\}$, так как коэффициенты $X_\alpha u_m^i$ оператора $X_\alpha \in \mathcal{X}_n$ являются обобщенно однородными полиномами степени $m-n$. Для операторов $X_1, \ldots, X_r \in \mathcal{X}_1$ это справедливо в силу формулы (3.76), а для коммутаторов (3.77) в силу общей формулы

$$\begin{gathered} X_\alpha D = \left(D + a_{\alpha_1} + \ldots + a_{\alpha_n}\right) X_\alpha + X_{[\alpha]}, \\ X_{[\alpha]} = -a_{\alpha_{n-1}\alpha_n} X_{\alpha/\alpha_n} + \sum_{j=1}^{n-1} c_j X_{\alpha/\alpha_j}, \quad c_j = \sum_{k=j+1}^{n} a_{\alpha_k\alpha_j}. \end{gathered} \tag{3.79}$$

где α/α_j–мультииндекс, полученный из α зачеркиванием компоненты с номером j.

Формула (3.79) дает, в частности, соотношение

$$X_{\alpha_1\ldots\alpha_n} u_n = X_{[\alpha]} u_{n-1}, \quad n \geq 2, \tag{3.80}$$

из которого следует, что при $n \geq 1$

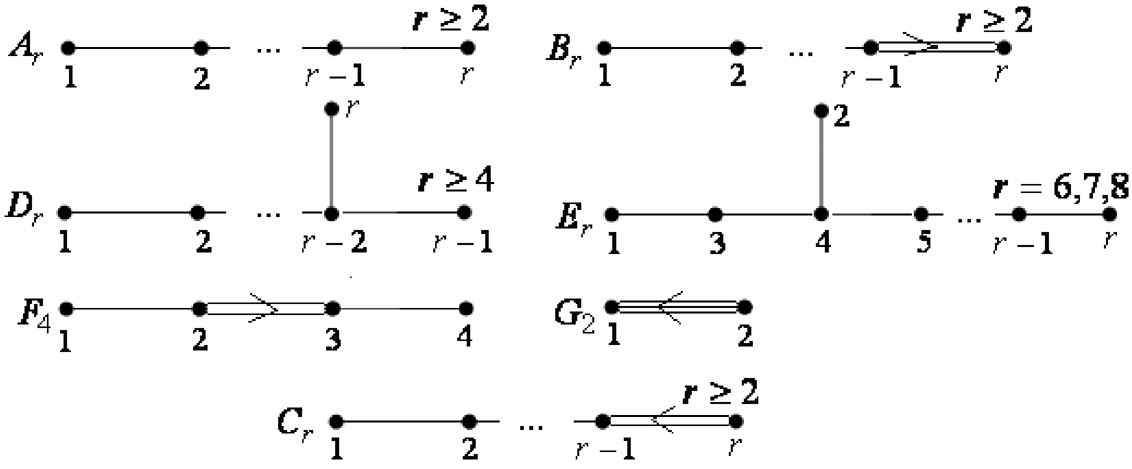
$$\begin{gathered} \left(ad_j^n X_k\right) u_{n+1}^i = n\left(a_{kj} + \tfrac{n-1}{2} a_{jj}\right) ad_j^{n-1} X_k u_n^i = \ldots = \\ = n! \prod_{p=2}^{n} \left(a_{kj} + \tfrac{p-1}{2} a_{jj}\right), \\ X_{jk} u_2^i = n! \prod_{p=2}^{2} \left(a_{kj} + \tfrac{p-1}{2} a_{jj}\right)\left(a_{kj}\delta_k^i - a_{jk}\delta_j^k\right). \end{gathered} \tag{3.81}$$

Полагая $a_{jj} = 0$, получаем $ad_j^n X_k u_{n+1}^\alpha = n! \left(a_{kj}\right)^{n-1}$. Таким образом, для конечномерной алгебры из $a_{jj} = 0$ следует $a_{1j} = a_{2j} = \ldots = a_{rj} = 0$, что противоречит невырожденности матрицы A. Итак, можно положить $a_{jj} = 2$, $\forall j = 1, \ldots, r$. Формула (3.81) при $i = j$ дает $a_{jk}(a_{kj}+1)(a_{kj}+2)\ldots(a_{kj}+n) = 0$, $n \gg 1$. Соотношения (3.78) доказаны.

Матрица A порядка r называется разложимой, если для некоторого разбиения множества индексов $\{1, \ldots, r\} = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ элементы матрицы A удовлетворяют условиям $a_{ij} = a_{ji} = 0$, $\forall i \in I_1, j \in I_2$. Система уравнений (3.75) с разложимой матрицей A распадается на две независимые подсистемы. Матрицы систем уравнений (3.75), отличающихся только нумерацией переменных, будем называть эквивалентными.

Теорема 3.1. Описание конечномерных характеристических алгебр. *Неразложимая обобщенная матрица Картана с конечномерной характеристической алгеброй эквивалентна матрице Картана простой алгебры Ли (табл. 1).*

Таблица 1.



В табл. 1 приведены графы (схемы Дынкина) матриц Картана. Вершины графа пронумерованы. Ребро $\{i, j\}$ соединяет вершины с номерами i, j, если $a_{ij}a_{ji} \neq 0$. Указанные в таблице графы однозначно определяют матрицы Картана (см. [5]). Кратность ребра $\{i, j\}$ указывает на величину произведения $a_{ij}a_{ji} = 1, 2, 3$. Стрелка определяет место элемента, не равного -1. Отметим, что перестановке $u^i \leftrightarrow u^j$ переменных соответствует перестановка $i \leftrightarrow j$ вершин графа.

Замечание 3.1. *Конечномерность характеристической алгебры, соответствующей одной из матриц Картана, следует из соотношений (см.* (3.81)*)*

$$ad_j^{1-a_{kj}} X_k = 0, \quad j \neq k.$$

Действительно, аналогичные соотношения полностью определяют порожденную положительными корнями подалгебру G_+ контрагредиентной алгебры Ли, которая является конечномерной в случае матриц Картана (см. [25]).

Уравнение

$$\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \omega\left(u_1, \ldots, u_n\right) = 0 \tag{3.82}$$

называется характеристическим уравнением системы $u^i_{z\bar{z}} = F^i(u^1, \ldots, u^r), \quad i = 1, 2, \ldots, r$. Оператор

$$\tfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = F(u) \tfrac{\partial}{\partial u_1} + F_z(u) \tfrac{\partial}{\partial u_2} + F_{zz}(u) \tfrac{\partial}{\partial u_3} + \ldots \tag{3.83}$$

определяет характеристическую алгебру Ли $\mathcal{X}(F)$ этой системы. Образующими алгебры $\mathcal{X}(F)$ являются операторы вида (3.83), соответствующие различным значениям параметра $u = (u^1, \ldots, u^r)$. Легко видеть, что в случае экспоненциальной системы (3.75), соответствующей обобщенной матрице Картана, так определенная характеристическая алгебра совпадает с алгеброй Ли, порожденной операторами (3.76).

Лемма 3.1. *Характеристическое уравнение* (3.82) *системы с конечномерной алгеброй* $\mathcal{X}(F)$, $F = (F^1, \ldots, F^r)$ *имеет* r *решений*

$$\omega^k = \omega^k\left(u_1, \ldots, u_{n_k}\right), \quad k = 1, \ldots, r,$$

удовлетворяющих условию независимости в главном

$$\det\left[\frac{\partial \omega^1}{\partial u_{n_1}}, \ldots, \frac{\partial \omega^r}{\partial u_{n_r}}\right] \neq 0.$$

Основное свойство конечномерных характеристических алгебр $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \ldots$.

Лемма 3.2. *Пусть* A *– обобщенная матрицы Картана,* $\dim \mathcal{X}(A) < \infty$*. Тогда любой конечный набор* $\{X_\alpha = X_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}\} \subset \mathcal{X}_m$ *удовлетворяет условию:*

$$\sum_\alpha c_\alpha X_{[\alpha]} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_\alpha c_\alpha \left(\sum_{k=1}^m a_{\alpha_k}\right) X_\alpha u^i_m = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Покажем, что для любой, не содержащейся в таблице 1, матрицы A (неразложимой, удовлетворяющей условиям (3.78)), либо при некотором $n \leqslant 4 \quad \dim \mathcal{X}_{n+1}(A) > \dim \mathcal{X}_n(a)$, и применима лемма 3.2, либо характеристическая алгебра $\mathcal{X}(A)$ имеет бесконечномерную подалгебру, соответствующую вырожденной матрице.

Пусть A – неразложимая обобщенная матрица Картана порядка $r = 2$. В силу формулы (3.79)

$$X_{[112]} = 2\left(1 + a_{21}\right) X_{12}, \quad X_{[212]} = 2\left(1 + a_{12}\right) X_{12}.$$

Лемма 3.2 дает

$$\begin{gathered}\left(1 + a_{12}\right)\left(2a_1 + a_2\right) X_{112} u_3 - \left(1 + a_{21}\right)\left(a_1 + 2a_2\right) X_{212} u_3 = \\ = \left(1 + a_{12}\right) a_1 X_{112} u_3 - \left(1 + a_{21}\right) a_2 X_{212} u_3 = 0.\end{gathered}$$

В силу формулы (3.80)

$$X_{112} u_3 = 2\left(1 + a_{21}\right) X_{12} u_2, \quad X_{212} u_3 = 2\left(1 + a_{12}\right) X_{12} u_2.$$

Поэтому

$$(1 + a_{12})\,(1 + a_{21})\,(a_1 - a_2)\,X_{12}u_2 = 0.$$

Так как неразложимость матрицы A означает $X_{12}u_2 \neq 0$, то

$$(1 + a_{12})\,(1 + a_{21}) = 0.$$

Полагая, для определенности, $a_{12} = -1$, получаем $X_{212} = X_{2112} = 0$ и

$$X_{[11112]} = 4\,(3 + a_{21}X_{1112})\,, \quad X_{[21112]} = -X_{[1112]}.$$

Лемма 3.2 дает

$$(1 + a_{21})\,(2 + a_{21})\,(3 + a_{21}) = 0.$$

Полученный результат обобщается. Рассматривая подалгебры с двумя образующими, убеждаемся, что справедливо следующее.

Замечание 3.2. *Элементы обобщенной матрицы Картана $A = (a_{ij})$ с конечномерной характеристической алгеброй удовлетворяют условию*

$$\forall i \neq j \quad a_{ij}a_{ji} = 0, 1, 2, 3.$$

Доказанное утверждение исчерпывает вопрос о классификации матриц второго порядка (см. табл. 1).

Замечание 3.3. *Элементы неразложимой обобщенной матрицы Картана $A = (a_{ij})$ $(r > 2,\ \dim \mathcal{X}(A) < \infty)$ удовлетворяют условию: $a_{ij}a_{ji} \neq 3$.*

Замечание 3.4. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неразложимая обобщенная матрица Картана порядка $r \geq 3, \quad \dim \mathcal{X}(A) < \infty$. Тогда*

$$a_{ij}a_{ji} = 2 \quad \Rightarrow \quad a_{ik}a_{ki},\, a_{jk}a_{kj} \neq 2, \quad k \neq i, j.$$

Доказательство классификационной теоремы сводится к отысканию бесконечных подалгебр. В процессе доказательства выясняется, что любая бесконечная характеристическая алгебра, удовлетворяющая перечисленным в замечаниях 3.2 – 3.4 условиям, содержит подалгебру, соответствующую одной из матриц табл. 2,3.

Матрицы условно разделены на две таблицы. Бесконечность алгебр матриц табл. 2 доказывается при помощи леммы 3.2. Матрицы, для которых применение леммы 3.2 затруднительно или невозможно, отнесены в табл. 3 вырожденных матриц (бесконечномерность соответствующих алгебр проверяется отдельно).

Имея в виду табл. 2, выпишем соотношения $\sum c_\alpha X_{[\alpha]} = 0$, указывающие на применимость леммы 3.2. При использовании леммы 3.2 некоторые коэффициенты не существенны (см. доказательство замечания 3.4), они не выписаны в явном виде.

Таблица 2.

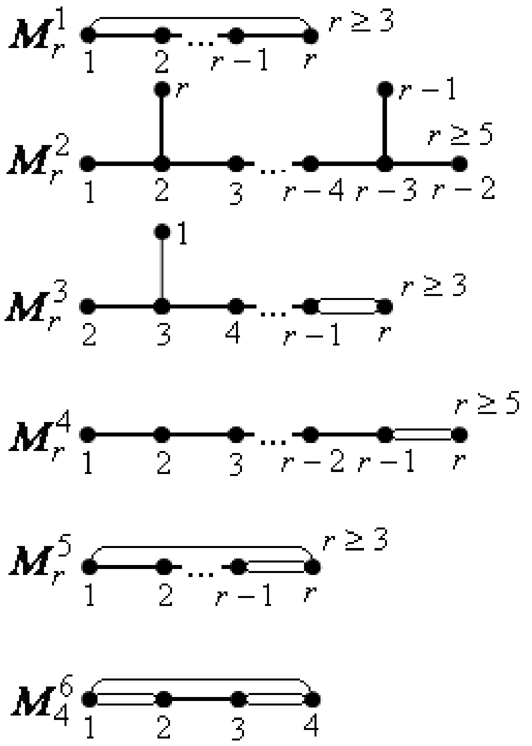
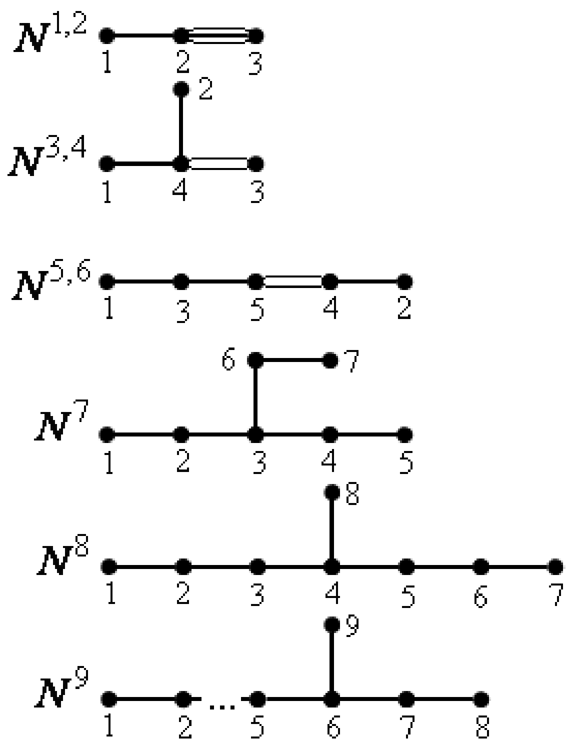


Таблица 3.



$$M_r^1: \quad X_{[r,1]} + \sum_{k=1}^{r-1} X_{[k,k+1]} = 0,$$

$$M_r^2: \quad \sum_{k=3}^{r-4} X_{[k-1,k,k+1]} + \frac{1}{2}\left(X_{[123]} + X_{[32r]} - X_{[12r]}\right) -$$

$$- \frac{1}{2}\left(X_{[r-1,r-3,r-2]} + X_{[r-1,r-3,r-4]} - X_{[r-4,r-3,r-2]}\right) = 0, \quad r \geq 6,$$

$$M_5^2: \quad X_{[312]} + X_{[512]} + X_{[423]} - X_{[524]} = 0,$$

$$M_r^3: \quad X_{[123]} + X_{[134]} + X_{[234]} + 2\sum_{k=4}^{r-2} X_{[k-1,k,k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[r-2,r-1,r]} + c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]} + X_{[r,r,r-1]}\right) = 0,$$

$$M_r^4: \quad -(3+2a_{21})^{-1}\left(X_{[112]} + X_{[221]}\right) + 2X_{[123]} + 2a_{21}\sum_{k=3}^{r-2} X_{[k-1,k,k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[r-2,r-1,r]} + c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]} + X_{[r,r,r-1]}\right) = 0,$$

$$M_r^5: \quad X_{[21r]} + \frac{1}{a_{r,r-1}} X_{[r-1,1,r]} + \sum_{k=2}^{r-2} X_{[k-1,k,k+1]} +$$

$$+ c_1 X_{[r-2,r-1,r]} + c_2\left(X_{[r-1,r-1,r]} + X_{[r,r,r-1]}\right) = 0, \quad r \geq 4,$$

$$M_4^6: \quad -\frac{a_{34}}{6+4a_{21}}\left(X_{[112]} + X_{[221]}\right) + a_{34} X_{[123]} + a_{21} X_{[234]} +$$

$$+ c\left(X_{[334]} + X_{[443]}\right) = 0.$$

3.1.2. Квадратичные системы. Системы уравнений вида
$$p^i_x = c^i_{jk}p^jq^k + c^i_kq^k, \quad q^k_y = d^k_{jl}p^jq^l + d^k_jp^j \tag{3.84}$$
будем называть квадратичными. Здесь $p^i = p^i(x,y), q^k = q^k(x,y)$, $i = 1,2,\dots,n$, $k = 1,2,\dots,m$ – неизвестные функции; $c^i_{jk}, c_k, d^k_{jl}, d_j$ – постоянные.

Например, уравнение Лиувилля можно записать в виде:
$$p_x = pq, \quad q_y = p \quad (p = e^u, q = u_x). \tag{3.85}$$
Уравнение синус-Гордон допускает запись:
$$p^1_x = p^1q, \quad p^2_x = -p^2q, \quad q_y = p^1 + p^2 \quad (p^1 = e^u, p^2 = e^{-u}, q = u_x). \tag{3.86}$$

Обозначим через a алгебру гладких функций, зависящих от конечного набора переменных $p^i, q^k, p^i_1, q^k_1, \dots, p^i_l, q^k_l, \dots$, $i = 1,2,\dots,n$, $k = 1,2,\dots,m$, где
$$p^i_{l+1} = \overline{D}p^i_l, \quad q^k_{l+1} = Dq^k_l, \quad p^i_0 = p^i, \quad q^k_0 = q^k.$$
Через a_x обозначим алгебру гладких функций,зависящих от переменных q^k_l, $k = 1,2,\dots,m$, $l = 0,1,2,\dots$. Аналогично определяется алгебра a_y. Если функция $f \in a_x$, то $\overline{D}f = f_0 + \sum_{j=1}^n p^jf_j$, где $f_j \in a_x$, $j = 1,2,\dots,n$. Отображения Y_i, определяемые равенствами $Y_if = f_i$, являются дифференцированиями алгебры a_x. Точно также задаются дифференцирования X_i алгебры a_y.

Определение 3.1. *Порожденная образующими Y_i подалгебра L_x алгебры $Der\, a_x$ называется характеристической алгеброй системы* (3.84) *вдоль x.*

Аналогично определяется характеристическая алгебра Ли L_y. Для определения полной алгебры системы (3.84) рассмотрим соотношения
$$\begin{gathered}[\overline{X}_0, \overline{Y}_i] = \textstyle\sum_{l=1}^m d^l_i\overline{X}_l, \quad [\overline{X}_l, \overline{Y}_0] = -\sum_{i=1}^n c^i_l\overline{Y}_i,\\ [\overline{X}_0, \overline{Y}_0] = 0, \quad [\overline{X}_l, \overline{Y}_i] = -\textstyle\sum_{j=1}^n c^j_{il}\overline{Y}_j + \sum_{k=1}^m d^k_{il}\overline{X}_k,\end{gathered} \tag{3.87}$$
где $i = 1,2,\dots,n$, $l = 1,2,\dots,m$.

Определение 3.2. *Пусть алгебра Ли $\overline{L}$, порожденная образующими $\overline{X}_l, \overline{Y}_i$, $l = 0,1,\dots,m, i = 0,1,2,\dots,n$, как векторное пространство является прямой суммой $\overline{L} = \overline{L}_x \oplus \overline{L}_y$ своих подалгебр, порожденных образующими $\overline{Y}_i$ и $\overline{X}_l$ соответственно. Если соответствия $X_l \to \overline{X}_l$ ($Y_i \to \overline{Y}_i$) порождают изоморфизмы алгебр Ли $L_y \to \overline{L}_y$ ($L_x \to \overline{L}_x$), то алгебра $\overline{L}$ называется полной алгеброй квадратичной системы* (3.84).

Отметим, что соотношения (3.87) эквивалентны равенству
$$[D + \overline{X}_0 + q^k\overline{X}_k, \overline{D} + \overline{Y}_0 + p^i\overline{Y}_i] = 0, \tag{3.88}$$
если p^i, q^k являются решениями системы (3.84). С другой стороны, соотношения (3.87) и (3.88) при условии линейной независимости элементов $\overline{X}_l$, $\overline{Y}_i$ порождают систему (3.84). В этом случае уравнение (3.88) называют представлением нулевой кривизны ($L - A$–парой) для системы уравнений (3.84).

Определение 3.3. *Набор функций $f^i, g^k \in a$ называют симметрией системы* (3.84), *если уравнения*
$$p^i_\tau = f^i, \quad q^k_\tau = g^k, \quad i = 1,2,\dots,n, k = 1,2,\dots,m$$
совместны с ней.

Продифференцировав систему (3.84) по параметру τ, получаем систему уравнений для определения симметрий:
$$\begin{aligned}Df^i &= c^i_{jk}(q^kf^j + p^jg^k) + c^i_kg^k,\\ \overline{D}g^k &= d^k_{jl}(q^lf^j + p^jg^l) + d^k_jf^j,\end{aligned} \tag{3.89}$$

где $i=1,2,\ldots,n,\ l=1,2,\ldots,m$.

Пусть S–линейное пространство симметрий, а S_x (S_y) подмножество симметрий вида

$$f^i=f^i_0+f^i_jp^j,\quad g^k\quad (f^i,\quad g^k=g^k_0+g^k_jq^j),$$

для которых $f^i_j,g^k\in a_x$ $(f^i,g^k_j\in a_y)$.

По-видимому, пространство симметрий уравнений S является прямой суммой своих подпространств S_x и S_y.

Для симметрий системы уравнений (3.84) из пространства S_x определяющаяся система (3.89) приобретает вид:

$$\begin{gathered}Df^i_0+c^i_kq^kf^i_l=c^i_{jk}q^kf^j_0+c^i_kg^k,\quad Df^i_l+c^r_{lk}q^kf^i_r=c^i_{jk}q^kf^j_l+c^i_{lk}g^k,\\ Y_0g^k=d^k_{jl}q^lf^j_0+d^k_jf^j_0,\quad Y_1g^k=d^k_{ji}q^if^j_l+d^k_{li}g^i+d^k_jf^j_l,\end{gathered}\tag{3.90}$$

$i=1,2,\ldots,n,\ l=1,2,\ldots,n,\ k=1,2,\ldots,m$.

После обозначений $p^1=e^{2u},p^2=e^uv,q^1=u_x,q^2=w$ система уравнений

$$u_{xy}=\alpha e^{2u}+e^uvw,\quad v_x=e^uw,\quad w_y=e^uv$$

принимает квадратичный вид

$$p^1_x=2p^1q^1,\quad p^2_x=p^2p^1+p^1q^2,\quad q^1_y=\alpha p^1+p^2q^2,\quad q^2_y=p^2.\tag{3.91}$$

Для системы (3.91) при $\alpha=\frac49$ в работе [31] получено представление нулевой кривизны в алгебре Вирасоро. Точнее говоря, система (3.91) при $\alpha=\frac49$ является следствием недоопределенной системы уравнений, вытекающих из представления нулевой кривизны. В статье приведено иное представление нулевой кривизны, эквивалентное данной системе.

При описании характеристической алгебры полезны следующие соотношения:

$$[D,Y_i]=c^j_{ik}q^kY_j,\quad [D,Y_0]=c^i_kq^kY_i,\tag{3.92}$$

$$[\overline{D},X_k]=d^l_{ki}p^iX_1,\quad [\overline{D},X_0]=d^l_ip^iX_1,\tag{3.93}$$

вытекающие из $[D,\overline{D}]=0,\ \overline{D}=Y_0+p^iY_i,\ D=X_0+q^iX_1$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Если $Q\in Dera_x,\ [D,Q]=fQ$ и $Q(q^k)=0$,$k=1,2,\ldots,m$, то $Q=0$.*

Доказательство. Имеем

$$Q(q^k_1)=QD(q^k)=(DQ-fQ)(q^k)=0.$$

Далее индукцией по i получаем $Q(q^k_i)=0$. Следовательно, $Q=0$. Лемма доказана.

Система уравнений (3.91)**.**

Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая $\alpha=\frac49$.

Уравнения (3.92), (3.93) для системы (3.91) запишутся в виде

$$\begin{gathered}[\overline{D},X_0]=\tfrac49p^1X_1+p^2X_2,\quad [\overline{D},X_1]=0,\quad [\overline{D},X_1]=p^2X_1,\\ [D,Y_1]=-2q^1Y_1-q^2Y_2,\quad [D,Y_2]=-q^1Y_2,\quad Y_0=0.\end{gathered}\tag{3.94}$$

При описании алгебры L_y будут использоваться значения ее образующих X_k на функциях p^i

$$\begin{gathered}X_0(p^1)=0,\quad X_1(p^1)=2p^1,\quad X_2(p^1)=0,\\ X_0(p^2)=0,\quad X_1(p^2)=p^2,\quad X_2(p^2)=p^1.\end{gathered}\tag{3.95}$$

Из равенства $[\overline{D},[X_1,X_2]]=p^2X_1$ при помощи формул (3.94), (3.95) и леммы 3.3 получаем, что $[X_1,X_2]=X_2$. Совершенно аналогично, используя соотношение $[\overline{D},[X_1,X_0]]=$ $=\frac89p^1X_1+2p^2X_2$, устанавливаем, что $[X_1,X_0]=2X_0$.

Далее положим

$$U_0=X_1,\quad U_1=X_2,\quad U_2=-X_0,\quad U_{i+2}=(adX_2)^iU_2,\ i=1,2,\ldots.\tag{3.96}$$

Лемма 3.4. *Справедливы следующие формулы:*

$$U_{i+2} = \frac{3i(i-1)}{2(i-2)}[X_0, U_i], \quad i = 3, 4, \ldots. \tag{3.97}$$

Из равенств (3.96)–(3.97) следует, что элементы $U_0, U_1, U_2, \ldots$ образуют базис характеристической алгебры L_y. Для описания алгебры L_x введем элементы

$$V_1 = Y_2, \quad V_2 = Y_1, \quad V_{i+2} = (adY_2)^i V_2, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{3.98}$$

Лемма 3.5. *Справедливы формулы*

$$V_{i+2} = \frac{3i(i-1)}{2(i-2)}[Y_1, V_i], \quad i = 3, 4, \ldots. \tag{3.99}$$

Из формул (3.98) и (3.99) следует, что элементы V_i, $i = 1, 2, \ldots$ образуют базис характеристической алгебры L_x.

Соотношения (3.87) для системы уравнений (3.91) при $\alpha = \frac{4}{9}$ имеет вид:

$$\begin{gathered}[\overline{X}_0, \overline{Y}_1] = \tfrac{4}{9}\overline{X}_1, \quad [\overline{X}_0, \overline{Y}_2] = \overline{X}_2, \quad [\overline{X}_1, \overline{Y}_1] = -2\overline{Y}_1; \\ [\overline{X}_1, \overline{Y}_2] = -\overline{Y}_2, \quad [\overline{X}_2, \overline{Y}_1] = -\overline{Y}_2, \quad [\overline{X}_2, \overline{Y}_2] = \overline{X}_1.\end{gathered}$$

Далее структура алгебр L_x и L_y указывает, что представление образующих $\overline{X}_0, \overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{Y}_1, \overline{Y}_2$ следует искать в алгебре Вирасоро ($[e_i, e_j] = (j-1)e_{i+j},\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

$$\overline{X}_0 = \frac{2}{3}\lambda^2 e_2, \quad \overline{X}_1 = e_0, \quad \overline{X}_2 = \lambda e_1, \quad \overline{Y}_2 = -\frac{1}{2\lambda}e_{-1}, \quad \overline{Y}_1 = -\frac{1}{6\lambda^2}e_{-2}.$$

Элементы $\overline{U}_i, \overline{V}_i$, вычисленные по формулам (3.96) и (3.98), имеют вид

$$\overline{U}_i = \frac{2}{3}(i-2)!\lambda^i e_i, \quad \overline{V}_i = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}(i-2)!\lambda^i e_{-1}, \quad i = 2, 3, \ldots.$$

Легко проверить, что для них выполняются соотношения (3.97) и (3.99). Таким образом, элементы $\overline{U}_0, \overline{U}_i, \overline{V}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ образуют базис полной алгебры системы (3.91) при $\alpha = \frac{4}{9}$. Эта алгебра изоморфна алгебре Вирасоро.

Представление нулевой кривизны (3.88) для этой системы имеет вид:

$$[D + \frac{2}{3}\lambda^2 e_2 + q^1 e_0 + q^2\lambda e_1, \overline{D} - \frac{1}{2\lambda}p^2 e_{-1} - \frac{1}{6\lambda^2}p^1 e_{-2}] = 0.$$

Симметрии системы (3.91)**.**

Пусть f^i, g^i, $i = 1, 2$ симметрия системы уравнений (3.91) из пространства S_x. Тогда из соотношений (3.90) нетрудно получить, используя формулы (3.94), что

$$f^1 = 2p^1 Y_2 g^2, \quad f^2 = (p^1 Y_1 + p^2 Y_2)g^2, \quad g^1 = DY_2 g^2, \tag{3.100}$$

где функция g^2–решение следующей системы уравнений:

$$\begin{gathered}(Y_1 - Y_2)g^2 = 0, \quad \left((D + 2q^1)Y_1Y_2 - 2\alpha Y_2\right)g^2 = 0, \\ \left((D + q^1)Y_2^2 - q_2 Y_2 - 1\right)g^2 = 0.\end{gathered} \tag{3.101}$$

Применяя к последнему уравнению (3.101) дифференцирование Y_2, будем иметь

$$\left((D + 2q^1)Y_2^3 - 2Y_2\right)g^2 = 0. \tag{3.102}$$

Из (3.101) и (3.102) следует, что

$$(\alpha Y_2^3 - Y_1Y_2)g^2 = 0. \tag{3.103}$$

Далее применим к уравнению (3.102) дважды дифференцирование X_2. Получим, что

$$\left((D + 4q^1)Y_2^5 + 5q^2 Y_2^4\right)g^2 = 0. \tag{3.104}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.6. *Пусть функция $\psi \in a_x$–решение уравнения*
$$\left((D+4q^1)Y_2^2+5q^2Y_2\right)\psi=0. \tag{3.105}$$
Тогда $Y_2\psi=0$.

Используя формулы (3.100)–(3.102), получаем, что симметрии системы (3.91) из пространства S_x вычисляются по формулам
$$\begin{gathered} f^1=p^1\left(D+2q^1\right)\psi, \quad f^2=p^1q^2\psi+\tfrac{1}{2}p^2\left(D+2q^1\right)\psi, \\ g^1=\tfrac{1}{2}D\left(D+2q^1\right)\psi, \quad g^2=\left(D+2q^1\right)q^2\psi-\tfrac{1}{2}q^2\left(D+2q^1\right)\psi. \end{gathered} \tag{3.106}$$

3.2. Характеристические кольца Ли и критерий интегрируемости по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений. В данном параграфе рассматривается система уравнений
$$u_{xy}=F(u,u_x,u_y)\ (u^i_{xy}=F^i,\ i=1,2,\dots,n), \tag{3.107}$$
обладающая полным набором x- и y-интегралов.

Известно (см. [7]), что максимальное число независимых $x-$интегралов равно порядку n исходной системы.

Определение 3.4. *Система уравнений* (3.107) *называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует максимальное число независимых x- и y-интегралов.*

Определим x- и y-характеристические кольца Ли системы уравнений (3.107). Оператор $\overline{D}$ на функциях из пространства локально аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $\overline{u}_1,u,u_1,u_2,\dots,u_k\dots$, действует по правилу
$$\overline{D}=\overline{u}_2^iX_i+X_{n+1},$$
где
$$X_i=\frac{\partial}{\partial\overline{u}_1^i},\ i=1,2,\dots,n,$$
$$X_{n+1}=\overline{u}_1^i\frac{\partial}{\partial u^i}+F^i\frac{\partial}{\partial u_1^i}+D(F^i)\frac{\partial}{\partial u_2^i}+\ldots+D^{k-1}(F^i)\frac{\partial}{\partial u_k^i}+\ldots.$$
$X-$характеристическое кольцо Ли уравнения (3.107) есть кольцо A, порожденное векторными полями $X_1,X_2,\dots,X_{n+1}$. Аналогично определяется $y-$характеристическое кольцо Ли $\overline{A}$.

В статье [27] приведены примеры систем с характеристическими кольцами Ли A и $\overline{A}$ размерности 5. В статьях [30, 44] показано, что система $u^i_{xy}=F^i(u)$, $\quad 1,2,\dots,n$ обладает полным набором $x-$интегралов тогда и только тогда, когда характеристическое кольцо конечномерно.

Теорема 3.2. *Система уравнений* (3.107) *интегрируема по Дарбу, если и только если характеристические кольца Ли A и $\overline{A}$ конечномерны. При этом если n_k – число x-интегралов k-го порядка, $k=1,2,\dots,m$, то*
$$\dim A=n+\sum_{i=1}^m in_i. \tag{3.108}$$

Замечание 3.5. *Для системы уравнений*
$$u^i_{xy}=F^i(x,y,u,u_x,u_y), \quad i=1,2,\dots,n \tag{3.109}$$
x-характеристическое кольцо Ли порождается операторами
$$\begin{gathered} X_i=\tfrac{\partial}{\partial\overline{u}_1^i}, \quad i=1,2,\dots,n, \\ X_{n+1}=\tfrac{\partial}{\partial y}+\overline{u}_1^i\tfrac{\partial}{\partial u^i}+F^i\tfrac{\partial}{\partial u_1^i}+D(F^i)\tfrac{\partial}{\partial u_2^i}+\ldots+D^{k-1}(F^i)\tfrac{\partial}{\partial u_k^i}+\ldots. \end{gathered}$$

Тогда система уравнений (3.109) *интегрируема по Дарбу, если и только если характеристические кольца Ли A и $\overline{A}$ конечномерны. При этом, если s_i-порядок i-го x-интеграла, $i = 1, 2, \ldots, n$, то*

$$\dim A = n + 1 + \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

3.3. Нелинейные гиперболические системы уравнений с интегралами первого порядка. Рассмотрим систему уравнений (3.107) с полным набором x- и y-интегралов $\omega^i(u, u_1)$, $\overline{\omega}^i(u, \overline{u}_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то есть с x- и y-характеристическими кольцами Ли A и $\bar{A}$ размерности $2n$.

Из уравнений

$$\overline{D}(\omega_i) = 0,\ D(\bar{\omega}_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

следует, что правая часть системы (3.107) имеет вид

$$F^i(u, u_1, \bar{u}_1) = -\Gamma^i_{kj}(u) u_1^k \overline{u}_1^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.110}$$

где $\Gamma^i_{kj}(u)$–символы Кристоффеля. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Система уравнений* (3.107), (3.110) *обладает максимальным числом x- и y-интегралов первого порядка, если и только если выполнены соотношения*

$$\begin{aligned} \tilde{R}^i_{pqj} &= \frac{\partial}{\partial u^q}\Gamma^i_{pj} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{pq} + \Gamma^s_{pj}\Gamma^i_{sq} - \Gamma^i_{vj}\Gamma^v_{pq} = 0, \\ R^i_{qpj} &= \frac{\partial}{\partial u^p}\Gamma^i_{jq} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{pq} + \Gamma^i_{ps}\Gamma^s_{jq} - \Gamma^i_{jv}\Gamma^v_{pq} = 0. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Здесь R^i_{qpj} – тензор Римана, а $\tilde{R}^i_{pqj}$ – сопряженный тензор Римана.

Отметим, что x- интегралы системы (3.107), (3.110) задаются формулами

$$\omega^i(u, u_1) = A^i_s(u) u_1^s,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где функции $A^i_s(u)$ — решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^k} A^i_s(u) - \Gamma^j_{sk} A^i_j(u) = 0.$$

Условие совместности последней системы уравнений записывается так $\tilde{R}^i_{pqj} = 0$.

Теорема 3.4. *Любая система уравнений* (3.107) *($n = 2$) с полным набором x- и y-интегралов первого порядка точечным преобразованием $u = \phi(v)$ приводится к следующей*

$$v^i_{xy} = v_x^2 v_y^1 - v_x^k v_y^k \frac{\partial}{\partial v^k} \ln\left(p(v^1) + q(v^2)\right),\ i = 1, 2. \tag{3.112}$$

Интегралы системы (3.112) вычисляются по формулам

$$\omega_1 = v_x^1 - v_x^2,\ \omega_2 = \left[e^{-v^1} p(v^1) + s(v^1)\right] v_x^1 + \left[e^{-v^1} q(v^2) - s(v^1)\right] v_x^2,$$

$$\bar{\omega}_1 = v_y^1 - v_y^2,\ \bar{\omega}_2 = \left[e^{-v^2} p(v^1) - r(v^2)\right] v_y^1 + \left[e^{-v^2} q(v^2) + r(v^2)\right] v_y^2,$$

где функции $s(v^1)$, $r(v^2)$, $p(v^1)$ и $q(v^2)$ связаны соотношениями

$$s^{'}(v^1) = e^{-v^1} p(v^1),\ r^{'}(v^2) = e^{-v^2} q(v^2).$$

3.4. Двухкомпонентные системы уравнений с интегралами первого и второго порядка. В работе [12] показано, что любая невырожденная система уравнений (3.107) при $n=2$ с интегралами

$$\omega^1(u,u_1),\ \omega^2(u,u_1,u_2),\ \bar\omega^1(u,\bar u_1),\ \bar\omega^2(u,\bar u_1) \tag{3.113}$$

точечной заменой приводится к одному из следующих видов:

$$u^i_{xy}=-\Gamma^i_{kj}(u)u^k_1\bar u^j_1,\ i=1,2 \tag{3.114}$$

или

$$u^1_{xy}=u^1_1\bar u^2_1,\ u^2_{xy}=\bar r(u^1,\bar u^1_1,\bar u^2_1)u^1_1. \tag{3.115}$$

Здесь рассматривается задача классификации систем уравнений (3.114) и (3.115) с интегралами (3.113).

Лемма 3.7. *Систем уравнений* (3.114) *с интегралами* (3.113) *не существует. А система уравнений* (3.115) *обладает интегралами вида* (3.113) *тогда и только тогда, когда функция $\bar r$ является решением следующего уравнения*

$$\frac{\partial\bar r}{\partial u^1}+\bar u^2_1\frac{\partial\bar r}{\partial\bar u^1_1}+\bar r\frac{\partial\bar r}{\partial\bar u^2_1}+\bar u^1_1\frac{P'(u^1)}{2}+P(u^1)\bar u^2_1=0. \tag{3.116}$$

При этом

$$\omega^1=e^{-u^2}u^1_1,\ \omega^2=u^2_2-u^2_1\frac{D\omega^1}{\omega}-\frac{(u^2_1)^2}{2}+\frac12P(u^1)e^{2u^2}(\omega^1)^2, \tag{3.117}$$

а y-интегралы $\bar\omega^1$ и $\bar\omega^2$ определяются из уравнений в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1}+\bar u^2_1\frac{\partial}{\partial\bar u^1_1}+\bar r\frac{\partial}{\partial\bar u^2_1}\right)\bar\omega=0,\ \frac{\partial}{\partial u^2}\bar\omega=0. \tag{3.118}$$

Далее приведем условия, при которых система уравнений (3.107) при $n=2$ обладает интегралами

$$\omega^1(u,u_1),\ \omega^2(u,u_1,u_2),\ \bar\omega^1(u,\bar u_1),\ \bar\omega^2(u,\bar u_1,\bar u_2). \tag{3.119}$$

Лемма 3.8. *Система уравнений* (3.107) *при $n=2$ с полным набором интегралов* (3.119) *приводится к одной из следующих*

$$u^i_{xy}=A_i(u,u_1)\bar A_i(u,\bar u_1)+\Phi^i_{kj}(u)u^k_1\bar u^j_1,\ i=1,2, \tag{3.120}$$

$$\begin{cases} u^1_{xy}=B_1(u,u_1)\bar B_1(u,\bar u_1)+\Psi^1_{kj}(u)u^k_1\bar u^j_1\\ u^2_{xy}=\bar u^k_1\alpha_k(u)B_2(u,u_1)+u^k_1\beta_k(u)\bar B_2(u,\bar u_1)+\Psi^2_{kj}(u)u^k_1\bar u^j_1,\end{cases} \tag{3.121}$$

$$u^i_{xy}=\bar u^k_1\gamma_k(u)C_i(u,u_1)+u^k_1\delta_k(u)\bar C_i(u,\bar u_1)+\Sigma^i_{kj}(u)u^k_1\bar u^j_1,\ i=1,2. \tag{3.122}$$

Далее, на интегралы первого порядка мы накладываем условия

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial u^1_1}\left(\frac{\omega^1_{u^1_1}}{\omega^1_{u^2_1}}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial u^2_1}\left(\frac{\omega^1_{u^1_1}}{\omega^1_{u^2_1}}\right)\right)^2\neq0,\\ \left(\frac{\partial}{\partial\bar u^1_1}\left(\frac{\bar\omega^1_{\bar u^1_1}}{\bar\omega^1_{\bar u^2_1}}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial\bar u^2_1}\left(\frac{\bar\omega^1_{\bar u^1_1}}{\bar\omega^1_{\bar u^2_1}}\right)\right)^2\neq0,\end{gathered} \tag{3.123}$$

которые означают, что интегралы ω^1 и $\bar\omega^1$ точечной заменой $u^1=\varphi(p,q)$, $u^2=\psi(p,q)$ не приводятся к виду $\omega^1=W(p,q,p_1)$, $\bar\omega^1=\bar W(p,q,\bar p_1)$.

При выполнении условий (3.123) с использованием уравнений $\bar{D}\omega^1 = 0$, $D\bar{\omega}^1 = 0$ можно уточнить правые части систем (3.120)–(3.122). А именно, системы (3.120), (3.121) сводятся к виду

$$\begin{cases} u^1_{xy} = & A(u,u_1)\bar{A}(u,\bar{u}_1) + \tilde{\Phi}^1_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1 \\ u^2_{xy} = & \mu(u)A(u,u_1)\bar{A}(u,\bar{u}_1) + \bar{u}^k_1\varphi_k(u)A(u,u_1) + u^k_1\psi_k(u)\bar{A}(u,\bar{u}_1)+ \\ & + \tilde{\Phi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1, \end{cases} \tag{3.124}$$

а система (3.122) к виду

$$\begin{cases} u^1_{xy} = & \bar{u}^k_1\chi^1_k(u)B(u,u_1) + u^k_1\epsilon^1_k(u)\bar{B}(u,\bar{u}_1) + \tilde{\Psi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1 \\ u^2_{xy} = & \lambda(u)B(u,u_1)\bar{B}(u,\bar{u}_1) + \bar{u}^k_1\chi^2_k(u)B(u,u_1) + u^k_1\epsilon^2_k(u)\bar{B}(u,\bar{u}_1)+ \\ & + \tilde{\Psi}^2_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1. \end{cases} \tag{3.125}$$

Лемма 3.9. *Системы уравнений* (3.124), (3.125) *с полным набором интегралов* (3.119), *удовлетворяющих условию* (3.123), *точечными заменами сводятся к уравнениям вида*

$$u^i_{xy} = -\Gamma^i_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1, \quad i = 1,2. \tag{3.126}$$

Для системы (3.126) x-характеристическое кольцо Ли порождается операторами

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i_1}, \quad X_3 = \bar{u}^p_1 Y_p,$$

где

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial u^i} - \Gamma^p_{ki}u^k_1\frac{\partial}{\partial u^p_1} + \ldots, \quad i = 1,2.$$

Согласно теореме 3.2, если система уравнений (3.126) обладает x-интегралами вида (3.119), то $\dim A = 5$, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что векторные поля Y_1, Y_2 и Y_3 ($Y_3 = [Y_1, Y_2]$) линейно независимые и

$$[Y_i, Y_3] = A_i(u,u_1,\bar{u}_1)Y_3. \tag{3.127}$$

Равенство (3.127) можно переписать в виде

$$[D,[Y_i,Y_3]] = A_i[D,Y_3] + D(A_i)Y_3. \tag{3.128}$$

Используя уравнение $[D,\bar{D}] = 0$, находим

$$\begin{aligned} &[D,Y_i] = \Gamma^p_{kj}u^k_1Y_p, \quad i=1,2, \\ &[D,Y_3] = \tilde{R}^p_{k12}u^k_1Y_p + (\Gamma^1_{k1}+\Gamma^2_{k2})u^k_1Y_3. \end{aligned} \tag{3.129}$$

Теперь, учитывая соотношения (3.127) и (3.129), получаем, что равенство (3.128) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u^i}\tilde{R}^p_{k12} + \tilde{R}^q_{k12}\Gamma^q_{qi} - \tilde{R}^p_{q12}\Gamma^q_{ki} = A_i(u)\tilde{R}^p_{k12}, \\ &\tilde{R}^2_{k12} + \frac{\partial}{\partial u^1}(\Gamma^1_{k1}+\Gamma^2_{k2}) - \Gamma^q_{k1}(\Gamma^1_{q1}+\Gamma^2_{q2}) = \frac{\partial}{\partial u^k}A_1(u) - \Gamma^q_{k1}A_q(u), \\ &-\tilde{R}^1_{k12} + \frac{\partial}{\partial u^2}(\Gamma^1_{k1}+\Gamma^2_{k2}) - \Gamma^q_{k2}(\Gamma^1_{q1}+\Gamma^2_{q2}) = \frac{\partial}{\partial u^k}A_2(u) - \Gamma^q_{k2}A_q(u). \end{aligned}$$

Последние соотношения являются необходимыми условиями для существования x-интегралов (3.119) у системы уравнений (3.126). Аналогично получаются условия существования y-интегралов.

3.5. Квадратичные системы уравнений с интегралами первого и второго порядка. В данном параграфе рассматривается система уравнений (3.126) (см. [56]).

Отметим, что при преобразовании $u^i \to p^i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2$ система уравнений (3.126) не меняет вид, при этом функции p^i можно выбрать так, что $\Gamma^1_{21} = \Gamma^1_{22} = 0$. Кроме этого, будем предполагать, что $\Gamma^2_{11} = \Gamma^2_{21} = 0$. Таким образом, мы рассматриваем систему уравнений:

$$u^1_{xy} = \Gamma^1_{1j} u^1_1 \bar{u}^j_1, \quad u^2_{xy} = \Gamma^2_{i2} u^i_1 \bar{u}^2_1 \tag{3.130}$$

с полным набором интегралов

$$\omega^1(u^1, u^2, u^1_1, u^2_1),\ \omega^2(u^1, u^2, u^1_1, u^2_1, u^1_2, u^2_2), \tag{3.131}$$

$$\bar{\omega}^1(u^1, u^2, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1),\ \bar{\omega}^2(u^1, u^2, \bar{u}^1_1, \bar{u}^2_1, \bar{u}^1_2, \bar{u}^2_2). \tag{3.132}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Система уравнений* (3.130) *обладает набором x-интегралов* (3.131) *тогда и только тогда, когда справедливы соотношения:*

$$\frac{\partial^2 \Gamma^2_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} = \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \ln F}{\partial u^1}, \tag{3.133}$$

$$\frac{\partial^2 \Gamma^2_{22}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} \cdot \frac{\partial \ln F}{\partial u^2}, \tag{3.134}$$

$$-2\frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1} = \frac{\partial^2 \ln F}{\partial u^1 \partial u^2}, \tag{3.135}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11} - \frac{\partial \ln F}{\partial u^1}\right)\left(\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}\right) = 0, \tag{3.136}$$

$$-\Gamma^2_{22}\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\right) = \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\right), \tag{3.137}$$

$$\Gamma^2_{12}\left(F - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u^1}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial u^2} - \Gamma^2_{22} + \Gamma^1_{12} - \frac{\partial \ln F}{\partial u^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12}\right) = 0, \tag{3.138}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \Gamma^1_{12}\right)\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\right) + \Gamma^2_{12}\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\right) - F = 0, \tag{3.139}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\right)\left(\frac{\partial \ln F}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\right) + \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} = 0, \tag{3.140}$$

где

$$F(u^1, u^2) = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial u^2}. \tag{3.141}$$

Рассматривая y-характеристическое кольцо системы уравнений (3.130), получаем “симметричный” вариант теоремы 3.5:

Теорема 3.6. *Система уравнений* (3.130) *обладает набором интегралов* (3.132) *тогда и только тогда, когда справедливы соотношения:*

$$\frac{\partial^2\Gamma^1_{11}}{\partial u^2\partial u^2} = \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^2}, \tag{3.142}$$

$$\frac{\partial^2\Gamma^1_{11}}{\partial u^1\partial u^2} = \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^1}, \tag{3.143}$$

$$-2\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial u^2} = \frac{\partial^2\ln\bar F}{\partial u^1\partial u^2}, \tag{3.144}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22} - \frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12}\right) = 0, \tag{3.145}$$

$$-\Gamma^1_{11}\left(\frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\right) = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\right), \tag{3.146}$$

$$\Gamma^1_{12}\left(\bar F + \frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial u^2}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial u^1} - \Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} - \frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^1}\right)\cdot\left(\frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12}\right) = 0, \tag{3.147}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^1} + \Gamma^2_{12}\right)\left(\frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^2} + \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\right) + \Gamma^1_{12}\left(\frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^1} + \Gamma^1_{11}\right) + \bar F = 0, \tag{3.148}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\right)\left(\frac{\partial\ln\bar F}{\partial u^2} + \Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\right) + \frac{\partial\Gamma^1_{12}}{\partial u^2} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} = 0, \tag{3.149}$$

где

$$\bar F = \frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial\Gamma^2_{12}}{\partial u^2}. \tag{3.150}$$

Таким образом, согласно теоремам 3.5, 3.6 классификация интегрируемых систем уравнений (3.130) сводится к исследованию совместности уравнений (3.133)–(3.140), (3.142)–(3.149) относительно неизвестных $\Gamma^1_{11}, \Gamma^1_{12}, \Gamma^2_{12}, \Gamma^2_{22}$.

Теорема 3.7. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u^1} \neq 0. \tag{3.151}$$

Тогда система (3.130) *с полным набором интегралов* (3.131), (3.132) *приводится к одному из следующих видов:*

$$\begin{gathered} u^1_{xy} = \frac{u^1_1\bar u^1_1}{X} + \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{\alpha Y}\right)u^1_1\bar u^2_1, \quad u^2_{xy} = \frac{u^2_1\bar u^2_1}{Y} + \left(\frac{1}{\alpha X} + \frac{1}{\alpha^2 Y}\right)u^1_1\bar u^2_1, \\ X = u^1 + u^2 + c, \quad Y = \frac{u^1}{\alpha^2} + u^2 - c, \end{gathered} \tag{3.152}$$

либо

$$\begin{gathered} u^1_{xy} = \frac{u^2}{X}u^1_1\bar u^1_1 + \left(\frac{1}{X} + \frac{1}{\alpha Y}\right)u^1u^1_1\bar u^2_1, \quad u^2_{xy} = \frac{u^1}{Y}u^2_1\bar u^2_1 + \left(\frac{\alpha}{X} + \frac{1}{Y}\right)u^2u^1_1\bar u^2_1, \\ X = u^1u^2 + d_2, \quad Y = u^1u^2 + c_2, \quad \frac{\alpha+1}{\alpha}d_2 = (\alpha+1)c_2, \end{gathered} \tag{3.153}$$

где c – произвольная постоянная, c_2, d_2, α – ненулевые постоянные.

Для решения полной задачи классификации систем уравнений (3.130) осталось рассмотреть случай, когда условие (3.151) нарушено.

Лемма 3.10. *Пусть выполнено условие*

$$\frac{\partial\Gamma^2_{22}}{\partial u^1}\cdot\frac{\partial\Gamma^1_{11}}{\partial u^2} = 0,$$

тогда система уравнений (3.130) *с полным набором интегралов* (3.131), (3.132) *не существует.*

Теперь рассмотрим задачу построения $x-$ и $y-$интегралов систем уравнений (3.152), (3.153).

Отметим, что замена $u^1 \to u^1 + \dfrac{2\alpha^2}{1-\alpha^2}c$, $u^2 \to u^2 - \dfrac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}c$ систему уравнений (3.152) при $\alpha \neq 1$ приводит к системе с постоянной c, равной 0.

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 3.8. *Интегралы системы уравнений* (3.152) *задаются формулами: при* $\alpha = 1$

$$\omega^1 = 2u^2 - \frac{u_1^2}{z} + 2c\ \ln z,\ \bar{\omega}^1 = 2u^1 - \frac{\bar{u}_1^1}{\bar{z}} - 2c\ \ln \bar{z}, \tag{3.154}$$

$$\omega^2 = \frac{z_1}{z} - z,\quad \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}} - \bar{z}, \tag{3.155}$$

а при $\alpha \neq 1$ $(c = 0)$

$$\omega^1 = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) u^2 z^{1-\alpha} - u_1^2 z^{-\alpha},\quad \bar{\omega}^1 = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) u^1 \bar{z}^{1-\alpha} - \bar{u}_1^1 \bar{z}^{-\alpha}, \tag{3.156}$$

$$\omega^2 = \frac{z_1}{z} - \frac{z}{\alpha},\quad \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{\alpha}, \tag{3.157}$$

где

$$z = \frac{u_1^1}{X},\ \bar{z} = \frac{\bar{u}_1^2}{Y},\ z_1 = \frac{\partial z}{\partial x},\ \bar{z}_1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}.$$

Теорема 3.9. *Интегралы системы уравнений* (3.153) *задаются формулами: при* $\alpha = -1$

$$\omega^1 = \frac{(u^2)^2 z^2}{2}(d_2 - c_2) - c_2 u_1^2 z,\ \bar{\omega}^1 = \frac{(\bar{u}^1)^2 \bar{z}^2}{2}(c_2 - d_2) - d_2 \bar{u}_1^1 \bar{z}, \tag{3.158}$$

$$\omega^2 = \frac{z_1}{z} + \frac{d_2}{c_2} u^2 z,\ \bar{\omega}^2 = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}} + \frac{c_2}{d_2} u^1 \bar{z}, \tag{3.159}$$

а при $\alpha \neq -1$

$$\omega^1 = \frac{u_1^2 - (u^2)^2 z\alpha}{z^\alpha},\ \bar{\omega}^1 = \frac{\bar{u}_1^1 - \dfrac{(u^1)^2 \bar{z}}{\alpha}}{\bar{z}^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{3.160}$$

$$\omega^2 = u^2 z - \frac{z_1}{z},\ \bar{\omega}^2 = u^1 \bar{z} - \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}}, \tag{3.161}$$

где

$$z = \frac{u_1^1}{X},\ \bar{z} = \frac{\bar{u}_1^2}{Y},\ z_1 = \frac{\partial z}{\partial x},\ \bar{z}_1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial y}.$$

Теорема 3.10. *Общее решение системы уравнений* (3.152) *дается формулами: при* $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \tfrac{A(x)+B(y)}{(C(x)+D(y))^2} + c\ \ln \tfrac{1}{C(x)+D(y)} - \\ &- \tfrac{B'(y)}{D'(y)(C(x)+D(y))} + \tfrac{c}{2}, \\ u^2(x,y) &= \tfrac{A(x)+B(y)}{(C(x)+D(y))^2} - c\ \ln \tfrac{1}{C(x)+D(y)} - \\ &- \tfrac{A'(x)}{C'(x)(C(x)+D(y))} - \tfrac{c}{2}, \end{aligned} \tag{3.162}$$

а при $\alpha \neq 1$ $(c = 0)$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \frac{\alpha A(x)+B(y)}{\alpha(C(x)+D(y))^{\alpha+1}} - \frac{B'(y)}{\alpha D'(y)(C(x)+D(y))^{\alpha}}, \\ u^2(x,y) &= \frac{A(x)+\alpha B(y)}{\alpha(C(x)+D(y))^{\alpha+1}} - \frac{A'(x)}{\alpha C'(x)(C(x)+D(y))^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{3.163}$$

Теорема 3.11. *Общее решение системы уравнений* (3.153) *дается формулами: при* $\alpha = -1$ *и* $c_2 + d_2 = 0$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \left(\frac{B'(y)}{Y'(y)} + X(x)\right) e^{-A(x)-B(y)-X(x)Y(y)}, \\ u^2(x,y) &= -d_2\left(\frac{A'(x)}{X'(x)} + Y(y)\right) e^{A(x)+B(y)+X(x)Y(y)}, \end{aligned} \tag{3.164}$$

при $\alpha = -1$ *и* $c_2 + d_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= \left(\tfrac{2d_2}{c_2+d_2}\cdot\tfrac{X(x)}{X(x)Y(y)+c} - \tfrac{\bar W'(y)}{\bar W(y)Y'(y)}\right)\times \\ &\times (X(x)Y(y)+c)^{\frac{2c_2}{c_2+d_2}}\tfrac{\bar W(y)}{W(x)}, \\ u^2(x,y) &= \left(\tfrac{2c_2}{c_2+d_2}\cdot\tfrac{Y(y)}{X(x)Y(y)+c} - \tfrac{W'(x)}{W(x)X'(x)}\right)\times \\ &\times (X(x)Y(y)+c)^{\frac{2d_2}{c_2+d_2}}\tfrac{W(x)}{\bar W(y)}, \end{aligned} \tag{3.165}$$

где

$$c = \frac{c_2+d_2}{2},$$

а при $\alpha \neq -1$

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= -\left(A(y)-(1+\alpha)B(y)D(x)-(1+\alpha)E(x)\right)^{-\frac{1}{1+\alpha}}\times \\ &\times \tfrac{\alpha}{1+\alpha}\cdot\tfrac{c_2}{B'(y)}\left(A'(y)-(1+\alpha)B'(y)D(x)\right), \\ u^2(x,y) &= (A(y)-(1+\alpha)B(y)D(x) - \\ &-(1+\alpha)E(x))^{-\frac{\alpha}{1+\alpha}}\left(B(y)+\tfrac{E'(x)}{D'(x)}\right). \end{aligned} \tag{3.166}$$

3.6. Линеаризация экспоненциальных систем ранга 2. Рассматриваются системы уравнений (см. [26])

$$u_{xy} = a_{i1}e^{u^1} + \ldots + a_{in}e^{u^n},\ i = 1,2,\ldots,n. \tag{3.167}$$

В случае, когда $n = 2$

$$u_{xy} = a_{11}e^u + a_{12}e^v, \quad v_{xy} = a_{21}e^u + a_{22}e^v. \tag{3.168}$$

Для решения задачи классификации исследуется структура характеристического кольца линеаризации системы уравнений (3.168).

Линеаризация системы уравнений (3.168) имеет вид

$$p_{xy} = a_{11}e^u p + a_{12}e^v q, \quad q_{xy} = a_{21}e^u p + a_{22}e^v q. \tag{3.169}$$

Далее считаем, что u и v заданные функции и $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Определим $x-$ и $y-$характеристические кольца Ли системы уравнений (3.169). Оператор $\bar D$ на пространстве локально аналитических функций, зависящих от конечного числа независимых переменных $x, y, p, q, p_1, q_1, p_2, q_2 \ldots$, действует по правилу

$$\bar D = \bar p_1 Y_1^{(0)} + \bar q_1 Y_2^{(0)} + X_1,$$

где

$$Y_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial p},\ Y_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q},$$

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y} + (a_{11}e^u p + a_{12}e^v q)\frac{\partial}{\partial p_1} + (a_{21}e^u p + a_{22}e^v q)\frac{\partial}{\partial q_1} + \dots .$$

X-характеристическое кольцо Ли системы уравнений (3.169) есть кольцо A, порожденное векторными полями $Y_1^{(0)}$, $Y_2^{(0)}$, X_1. Аналогично определяется y-характеристическое кольцо Ли $\bar{A}$.

Лемма 3.11. *Пусть*

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \ \beta_i \frac{\partial}{\partial q_i}, \ \alpha_i, \beta_i \in F, \ i = 1, 2, \dots .$$

Тогда соотношение $[D, Z] = 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда* $Z = 0$.

Рассмотрим коммутаторы

$$Y_1^{(1)} = [Y_1^{(0)}, X_1] = e^u[a_{11}\frac{\partial}{\partial p_1} + a_{21}\frac{\partial}{\partial q_1} + a_{11}u_1\frac{\partial}{\partial p_2} + a_{21}u_1\frac{\partial}{\partial q_2} + \dots],$$

$$Y_2^{(1)} = [Y_2^{(0)}, X_1] = e^v[a_{12}\frac{\partial}{\partial p_1} + a_{22}\frac{\partial}{\partial q_1} + a_{12}v_1\frac{\partial}{\partial p_2} + a_{22}v_1\frac{\partial}{\partial q_2} + \dots].$$

Введем обозначения

$$Y_1^{(0)} = Z_1^{(0)}, \ Y_2^{(0)} = Z_2^{(0)},$$
$$Y_1^{(1)} = e^u Z_1^{(1)}, \ Y_2^{(1)} = e^v Z_2^{(1)}.$$

Далее, по определению положим

$$Z_1^{(n+1)} = [Z_1^{(n)}, X_1], \ Z_2^{(n+1)} = [Z_2^{(n)}, X_1], \ n = 1, 2, \dots .$$

Отметим, что векторные поля X_1, $Z_1^{(0)}$, $Z_2^{(0)}$, $Z_1^{(1)}$, $Z_2^{(1)}$ являются линейно независимыми.

С учетом последних обозначений оператор $\bar{D}$ будет иметь вид

$$\bar{D} = \bar{p}_1 Z_1^{(0)} + \bar{q}_1 Z_2^{(0)} + X_1.$$

Легко проверить, что

$$[D, Z_1^{(0)}] = [D, Z_2^{(0)}] = 0,$$
$$[Z_1^{(i)}, [D, X_1]] = [Z_2^{(i)}, [D, X_1]] = 0, \ i = 1, 2, \dots .$$

Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
&[D, X_1] = -(a_{11}e^u p + a_{12}e^v q)Z_1^{(0)} - (a_{21}e^u p + a_{22}e^v q)Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_1^{(1)}] = -u_1 Z_1^{(1)} - a_{11}Z_1^{(0)} - a_{21}Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_2^{(1)}] = -v_1 Z_2^{(1)} - a_{12}Z_1^{(0)} - a_{22}Z_2^{(0)},\\
&[D, Z_1^{(2)}] = -u_1 Z_1^{(2)} + a_{12}e^v Z_1^{(1)} - a_{21}e^v Z_2^{(1)},\\
&[D, Z_2^{(2)}] = -v_1 Z_2^{(2)} - a_{12}e^u Z_1^{(1)} + a_{21}e^u Z_2^{(1)}.
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Лемма 3.12. *Для операторов* $Z_1^{(2)}$ *и* $Z_2^{(2)}$ *верно соотношение*

$$e^u Z_1^{(2)} + e^v Z_2^{(2)} = 0. \tag{3.171}$$

Далее, для удобства введем обозначения

$$Z_1^{(0)} = W_1^{(0)},\ Z_2^{(0)} = W_2^{(0)},\ Z_1^{(1)} = W_1^{(1)},\ Z_2^{(1)} = W_2^{(1)},$$
$$Z_1^{(2)} = e^v W_1^{(2)},\ Z_2^{(2)} = e^u W_2^{(2)}.$$

По определению положим

$$W_1^{(n+1)} = [W_1^{(n)}, X_1],\ n = 2, 3, \dots.$$

При этом легко показать справедливость следующих равенств

$$[W_1^{(n)}, [D, X_1]] = 0,$$
$$[D, W_1^{(n+1)}] = -[X_1, [D, W_1^{(n)}]].$$

Отметим, что векторные поля X_1, $W_1^{(0)}$, $W_2^{(0)}$, $W_1^{(1)}$, $W_2^{(1)}$, $W_1^{(2)}$ являются линейно независимыми, а операторы $W_2^{(2)}$ и $W_1^{(2)}$ связаны формулой

$$W_2^{(2)} = -W_1^{(2)}.$$

Лемма 3.13. *Справедливо следующее соотношение*

$$\begin{aligned}[D, W_1^{(n)}] &= -(u_1 + v_1)W_1^{(n)} + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i-1} C_{n-2}^{i-2} X_1^{n-i} (u_1 + v_1) W_1^{(i)} + \\ &+ \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{n-i-1} C_{n-3}^{i-2} X_1^{n-i-1} (a_{12} e^v + a_{21} e^u) W_1^{(i)},\ n = 3, 4, \dots.\end{aligned} \tag{3.172}$$

Предположим теперь, что характеристическое кольцо Ли системы уравнений (3.169) конечномерно. Это означает, что найдется $n \geq 2$, для которого операторы $X_1, W_1^{(0)}$, $W_2^{(0)}$, $W_1^{(1)}$, $W_2^{(1)}$, $W_1^{(2)}$, $W_1^{(3)}, \dots$ $W_1^{(n)}$ образуют базис этого кольца. Тогда оператор $W_1^{(n+1)}$ есть линейная комбинация элементов базиса.

Поскольку

$$W_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial p},\quad W_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial q},$$

а операторы старших порядков имеют структуру

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial p_i} + \beta_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \dots,\ i = 1, 2, \dots,$$

то

$$W_1^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} A_k W_1^{(k)} + B_1 W_2^{(1)},$$

где $A_k,\ B_1$ – функции переменных $u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \dots$.
Последнее соотношение эквивалентно равенству

$$[D, W_1^{(n+1)}] = \sum_{k=1}^{n} D(A_k) W_1^{(k)} + D(B_1) W_2^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} A_k [D, W_1^{(k)}] + B_1 [D, W_2^{(1)}].$$

По лемме 3.13 получаем

$$\begin{gathered}D(A_1) W_1^{(1)} + D(B_1) W_2^{(1)} + A_1(-u_1 W_1^{(1)} - a_{11} W_1^{(0)} - a_{21} W_2^{(0)}) + \\ + A_2(a_{12} W_1^{(1)} - a_{21} W_2^{(1)}) + B_1(-v_1 W_2^{(1)} - a_{12} W_1^{(0)} - a_{22} W_2^{(0)}) = 0.\end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты правой и левой частей последнего равенства при векторных полях $W_1^{(0)}, W_2^{(0)}, W_1^{(1)}, W_2^{(1)}$, получаем систему

$$\begin{gathered}-a_{11}A_1 - a_{12}B_1 = 0,\\ -a_{21}A_1 - a_{22}B_1 = 0,\\ D(A_1) + a_{12}A_2 - u_1A_1 = 0,\\ D(B_1) - a_{21}A_2 - v_1B_1 = 0.\end{gathered}$$

Откуда находим $A_1 = B_1 = 0$ и $A_2 = 0$. Таким образом, доказано следующее предложение.

Лемма 3.14. *X - характеристическая алгебра A системы уравнений* (3.169) *конечномерна тогда и только тогда, когда либо $W_1^{(3)} = 0$, либо*

$$W_1^{(n+1)} = \sum_{k=3}^{n} A_k W_1^{(k)},\ A_k = A_k(u, v, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1, \ldots),\ n = 3, 4, \ldots .$$

При этом $\dim A = 6$, *либо* $\dim A = n + 4,\ n = 3, 4, \ldots$ *соответственно.*

Теперь, пользуясь леммами 3.13 и 3.14, выпишем необходимые и достаточные условия конечномерности характеристического кольца системы (3.169).

При $\dim A = 6$ получаем

$$X_1(u_1 + v_1) + a_{12}e^v + a_{21}e^u = 0, \tag{3.173}$$

а в случае $\dim A = n + 4$ $(n \geq 3)$ имеем

$$\begin{gathered}(-1)^{n-2}X_1^{n-2}((a_{11} + 2a_{21})e^u + (a_{22} + 2a_{12})e^v) =\\ = \sum_{p=3}^{n} A_p(-1)^{p-3}X_1^{p-3}((a_{11} + 2a_{21})e^u + (a_{22} + 2a_{12})e^v),\\ (-1)^{n-i}\left(C_{n-1}^{i-2}X_1^{n-i+1}(u_1 + v_1) + C_{n-2}^{i-2}X_1^{n-i}(a_{12}e^v + a_{21}e^u)\right) =\\ = \sum_{p=i+1}^{n} A_p(-1)^{p-i-1}\left(C_{p-2}^{i-2}X_1^{p-i}(u_1 + v_1) + C_{p-3}^{i-2}X_1^{p-i-1}(a_{12}e^v + a_{21}e^u)\right) +\\ +D(A_i),\ i = 3, 4, \ldots, n-1,\\ (n-1)X_1(u_1 + v_1) + a_{12}e^v + a_{21}e^u = D(A_n).\end{gathered} \tag{3.174}$$

Можно показать, что для системы (3.174) неизвестные A_i есть функции переменных $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \ldots, \bar{u}_{n-i+1}, \bar{v}_{n-i+1},\ i = 3, 4, \ldots, n-1$.

Теорема 3.12. *Если характеристическая алгебра Ли системы уравнений* (3.169) *конечномерна, то система* (3.168) *приводится к виду*

$$u_{xy} = 2e^u + a_{12}e^v, \quad v_{xy} = -e^u + 2e^v. \tag{3.175}$$

Теперь будем рассматривать системы уравнений вида (3.175).

Напомним, что алгебра Ли A линеаризованной системы уравнений (3.169) порождается векторными полями $X_1,\ W_1^{(0)},\ W_2^{(0)},\ W_1^{(1)},\ W_2^{(1)},\ W_1^{(2)}$, поэтому $\dim A \geq 6$.

Далее проведем исследование системы уравнений, для которых $\dim A \leqslant 9$.

Теорема 3.13. *Размерность x - характеристической алгебры A линеаризованной системы уравнений* (3.169) *не превышает* 9 *тогда и только тогда, когда коэффициент a_{12} принимает одно из следующих значений* $-1,\ -2$ *или* -3. *При этом* $\dim A = 6,\ 7,\ 9$ *соответственно.*

Получены все уравнения, для которых размерность характеристического кольца линеаризации не превышает 9. Показано, что правые части этих систем задаются матрицами Картана простой алгебры Ли.

4. Дифференциально-разностные уравнения гиперболического типа

В этом разделе рассматриваются цепочки дифференциально-разностных уравнений следующего вида

$$t_x(n+1) = f(t(n), t(n+1), t_x(n)), \tag{4.176}$$

где неизвестная функция $t = t(n, x)$ зависит от дискретной переменной n и непрерывной переменной x. Цепочку (4.176) можно интерпретировать как бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с последовательностью неизвестных функций $\{t(n)\}_{n=-\infty}^{n=+\infty}$. Функция $f(t, t_1, t_x)$ предполагается локально-аналитической по всем трем аргументам, причем в некоторой области выполняется условие

$$\frac{\partial f}{\partial t_x} \neq 0. \tag{4.177}$$

Мы используем нижний индекс для обозначения сдвига дискретного аргумента $t_k = t(n+k, x)$ $(t_0 = t)$, а также для обозначения производных по x:

$$t_x = \frac{\partial}{\partial x} t(n, x), \quad t_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} t(n, x).$$

Обозначим через D и D_x оператор сдвига и, соответственно, оператор полной производной по x. Например, $Dh(n, x) = h(n+1, x)$ и $D_x h(n, x) = \frac{\partial}{\partial x} h(n, x)$. В качестве динамических переменных выбираются переменные $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $\{D_x^m t\}_{m=1}^{\infty}$. Ниже мы считаем динамические переменные независимыми.

4.1. Дифференциально-разностные уравнения лиувиллевского типа. Функции I и F, зависящие от x и конечного числа динамических переменных, называются, соответственно, n- и x-интегралами уравнения (4.176), если выполняются равенства $DI = I$ и $D_x F = 0$. Интегралы вида $I = I(x)$, $F = const$ называются тривиальными интегралами.

Определение 4.1. *Цепочка* (4.176) *называется интегрируемой по Дарбу, если она имеет нетривиальные x- и n-интегралы.*

Следует отметить, что интегрируемая по Дарбу цепочка сводится к паре уравнений: обыкновенному разностному уравнению и обыкновенному дифференциальному уравнению. Действительно, из определения следует, что n-интеграл может зависеть только от x, а x-интеграл только от n. Поэтому любое решение цепочки (4.176) удовлетворяет следующим двум уравнениям

$$I(x, t, t_x, t_{xx}, \ldots) = p(x), \quad F(x, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots) = q(n)$$

с подходящим образом выбранными функциями $p(x)$ и $q(n)$.

В настоящее время дискретные нелинейные модели находят важные приложения в физике и активно исследуются. Подробное обсуждение приложений и обзор литературы можно найти в работах [1, 23, 58, 62].

В это главе мы предлагаем алгоритм классификации интегрируемых по Дарбу дискретных цепочек (4.176), основанный на понятии характеристического кольца Ли (см. [43, 50–54]).

Введем понятие характеристического кольца L_n цепочки (4.176) в направлении n. Заметим, что

$$D^{-j} \frac{\partial}{\partial t_1} D^j I = 0 \tag{4.178}$$

для любого n-интеграла и $j \geq 1$. Действительно, равенство $DI = I$ может быть переписано в развернутой форме

$$I(x, t_1, f, f_x, f_{xx}, \ldots) = I(x, t, t_x, t_{xx}, \ldots). \tag{4.179}$$

Левая часть последнего равенства зависит от переменной t_1, а правая не зависит от нее. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t_1} DI = 0,$$

что дает

$$D^{-1}\frac{\partial}{\partial t_1} DI = 0.$$

Продолжая это рассуждение, легко получить формулу (4.178). Введем в рассмотрение векторные поля

$$Y_j = D^{-j}\frac{\partial}{\partial t_1} D^j, \quad j \geq 1 \tag{4.180}$$

и

$$X_j = \frac{\partial}{\partial t_{-j}}, \quad j \geq 1. \tag{4.181}$$

Таким образом, мы видим, что всякий n-интеграл I лежит в ядре операторов X_j и Y_j для любого $j \geq 1$. Следующая теорема содержит определение характеристического кольца L_n для (4.176) (см. [43]).

Теорема 4.1. *Если уравнение* (4.176) *допускает нетривиальный n-интеграл, то выполняются следующие два условия:*

- линейная оболочка операторов $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеет конечную размерность. Обозначим эту размерность N.

- кольцо Ли L_n над полем локально дифференцируемых функций, порожденное операторами $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N, X_1, X_2, \ldots, X_N$, имеет конечную размерность. Назовем L_n характеристическим кольцом Ли по направлению n.

Введем понятие характеристического кольца L_x цепочки (4.176) по направлению x. Для этого отметим, что в силу условия (4.177) цепочку (4.176) можно переписать в виде

$$t_x(n-1) = g(t(n), t(n-1), t_x(n)).$$

По определению, x-интеграл $F(x, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots)$ удовлетворяет уравнению $D_x F = 0$, т.е. $K_0 F = 0$, где

$$K_0 = \frac{\partial}{\partial x} + t_x \frac{\partial}{\partial t} + f\frac{\partial}{\partial t_1} + g\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + f_1\frac{\partial}{\partial t_2} + g_{-1}\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \ldots. \tag{4.182}$$

Но, поскольку F не может зависеть от t_x, то имеем $XF = 0$, где

$$X = \frac{\partial}{\partial t_x}. \tag{4.183}$$

Тогда очевидно, что F лежит в ядре любого оператора из кольца Ли, порожденного над полем локально-аналитических функций парой операторов X и K_0.

Можно доказать следующее важное утверждение (см. [9]).

Теорема 4.2. *Цепочка* (4.176) *допускает нетривиальный x-интеграл тогда и только тогда, когда ее характеристическое кольцо Ли L_x имеет конечную размерность.*

4.2. Классификация интегрируемых по Дарбу цепочек частного вида. Рассмотрим задачу описания всех цепочек вида

$$t_{1x} = t_x + d(t, t_1), \tag{4.184}$$

допускающих нетривиальные x- и n-интегралы. Полный список цепочек (4.184), допускающих x-интегралы, дается в следующей теореме:

Теорема 4.3. *Цепочка (4.184) допускает нетривиальный x-интеграл тогда и только тогда, когда $d(t,t_1)$ принадлежит одному из классов:*

(1) $d(t,t_1) = A(t-t_1)$,

(2) $d(t,t_1) = c_0(t-t_1)t + c_2(t-t_1)^2 + c_3t - c_3t_1$,

(3) $d(t,t_1) = A(t-t_1)e^{\alpha t}$,

(4) $d(t,t_1) = c_4(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t}) + c_5(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t})$,

где $A = A(t-t_1)$, $c_i - const, i = 0,\ldots,5$, $c_0 \neq 0, c_4 \neq 0, c_5 \neq 0$ *и* $\alpha - const$, $\alpha \neq 0$.

При этом x-интегралы имеют вид соответственно

(i) $F = x + \int^{\tau} \frac{du}{A(u)}$, *если* $A(u) \neq 0$ *и* $F = t_1 - t$, *если* $A(u) \equiv 0$,

(ii) $F = \frac{1}{-c_2-c_0}\ln|\frac{-(c_2+c_0)\tau_1}{\tau_2} + c_2| + \frac{1}{c_2}\ln|\frac{c_2\tau_1}{\tau} - c_2 - c_0|$ *для* $c_2(c_2+c_0) \neq 0$, $F = \ln\tau_1 - \ln\tau_2 + \frac{\tau_1}{\tau}$ *для* $c_2 = 0$ *и* $F = \frac{\tau_1}{\tau_2} - \ln\tau + \ln\tau_1$ *для* $c_2 = -c_0$,

(iii) $F = \int^{\tau} e^{-\alpha u}\frac{du}{A(u)} - \int^{\tau_1}\frac{du}{A(u)}$,

(iv) $F = \frac{(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_2})(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t_3})}{(e^{\alpha t} - e^{\alpha t_3})(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t_2})}$,

где $\tau = t - t_1$, $\tau_1 = t_1 - t_2$, $\tau_2 = t_2 - t_3$.

Обсудим некоторые необходимые условия существования x-интеграла. Обозначим через F класс локально-аналитических функций, каждая из которых зависит от конечного числа динамических переменных. В частности, мы получаем, что $f(t,t_1,t_x) \in F$. Ниже мы будем иметь дело с векторными полями, заданными в виде формальных рядов

$$Y = \sum_{-\infty}^{\infty} y_k \frac{\partial}{\partial t_k} \tag{4.185}$$

с коэффициентами $y_k \in F$. Уточним, как понимается линейная зависимость и линейная независимость векторных полей вида (4.185). Пусть P_N оператор проектирования, определенный в классе формальных рядов (4.185)

$$P_N(Y) = \sum_{-N}^{N} y_k \frac{\partial}{\partial t_k}. \tag{4.186}$$

Рассмотрим сначала векторные поля, заданные конечной суммой вида

$$Z = \sum_{-N}^{N} z_k \frac{\partial}{\partial t_k}. \tag{4.187}$$

Векторные поля $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ вида (4.187) линейно зависимы в некоторой открытой области Ω, если существует набор функций $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, определенных в Ω так, что функция $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \ldots + |\lambda_m|^2$ не является тождественным нулем, и для всех точек области Ω выполняется равенство

$$\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \ldots + \lambda_m Z_m = 0. \tag{4.188}$$

Назовем набор векторных полей $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ вида (4.185) линейно зависимым в области Ω, если для любого натурального N следующий набор векторных полей $P_N(Y_1), P_N(Y_2), \ldots, P_N(Y_m)$, заданных конечными суммами, линейно зависим в этой области. В противном случае набор $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ называется линейно независимым.

Из определения линейной зависимости векторных полей очевидным образом получаем следующее утверждение:

Замечание 4.1. *Если векторное поле Y является линейной комбинацией вида*

$$Y = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_m Y_m, \tag{4.189}$$

где векторные поля $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ линейно независимы в Ω, и коэффициенты всех векторных полей $Y, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ принадлежат F и определены в Ω, то коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ также принадлежат F.

Вернемся к цепочкам (4.184). В этом случае кольцо L_x распадается в прямую сумму двух подколец. Действительно, поскольку $f = t_x + d$ и $g = t_x - d_{-1}$, то $f_k = t_x + d + \sum_{j=1}^{k} d_j$ и $g_{-k} = t_x - \sum_{j=1}^{k+1} d_{-k}$ для $k \geq 1$, где $d = d(t, t_1), d_j = d(t_j, t_{j+1})$. Поэтому легко видеть, что $K_0 = t_x \widetilde{X} + Y$, где

$$\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_{-1}} + \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots \tag{4.190}$$

и

$$Y = \frac{\partial}{\partial x} + d\frac{\partial}{\partial t_1} - d_{-1}\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + (d + d_1)\frac{\partial}{\partial t_2} - (d_{-1} + d_{-2})\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots. \tag{4.191}$$

Из соотношений $[X, \widetilde{X}] = 0$ и $[X, Y] = 0$ имеем $\widetilde{X} = [X, K_0] \in L_x$ так, что $Y \in L_x$. Следовательно, $L_x = \{X\} \oplus L_{x1}$, где L_{x1} является кольцом Ли, порожденным операторами $\widetilde{X}$ и Y.

Лемма 4.1. *Если уравнение* (4.184) *имеет нетривиальный x-интеграл, тогда оно имеет x-интеграл, не зависящий явно от x.*

Доказательство. Допустим, что существует нетривиальный x-интеграл цепочки (4.184). Тогда кольцо Ли L_x конечномерно. Выберем в нем базис в следующем виде:

$$T_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{1,k}\frac{\partial}{\partial t_k}, \quad T_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{j,k}\frac{\partial}{\partial t_k}, \quad 2 \leqslant j \leqslant N.$$

Причем существует x-интеграл $F(x, t, t_1, \dots, t_{N-1})$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{k=0}^{N-1} a_{1,k}\frac{\partial F}{\partial t_k} = 0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} a_{j,k}\frac{\partial F}{\partial t_k} = 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant N.$$

В силу известной теоремы Якоби (см. [30]) существует замена переменных $\theta_j = \theta_j(t, t_1, \dots, t_{N-1})$, приводящая систему к виду

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{a}_{1,k}\frac{\partial F}{\partial \theta_k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta_k} = 0, \quad 2 \leqslant j \leqslant N-2,$$

что равносильно уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \widetilde{a}_{1,N-1}\frac{\partial F}{\partial t_{N-1}} = 0$$

для $F = F(x, \theta_{N-1})$.

Здесь возможны два случая: (1) $\widetilde{a}_{1,N-1} = 0$ и (2) $\widetilde{a}_{1,N-1} \neq 0$. В случае (1) находим $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, во втором –

$$F = x + H(\theta_{N-1}) = x + H(t, t_1, \dots, t_{N-1})$$

для некоторой функции H. Очевидно, что $F_1 = DF = x + H(t_1, t_2, \dots, t_N)$ также является x-интегралом. Поэтому $F_1 - F$ – есть нетривиальный x-интеграл, не зависящий явно от x. Лемма доказана.

В силу леммы 4.1 можно искать x-интеграл, зависящий только от переменных $t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \dots$. Другими словами, можно ограничиться изучением кольца Ли, порожденного векторными полями $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$

$$\widetilde{Y} = d\frac{\partial}{\partial t_1} - d_{-1}\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + (d + d_1)\frac{\partial}{\partial t_2} - (d_{-1} + d_{-2})\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \dots. \tag{4.192}$$

Можно доказать, что линейный оператор, действующий по правилу $Z \to DZD^{-1}$, определяет автоморфизм характеристического кольца L_x. Этот автоморфизм играет ключевую роль при изучении цепочек. Прямое вычисление показывает, что

$$D\widetilde{X}D^{-1} = \widetilde{X}, \quad D\widetilde{Y}D^{-1} = -d\widetilde{X} + \widetilde{Y}. \tag{4.193}$$

Лемма 4.2. *Пусть векторное поле вида* $Z = \sum a(j)\frac{\partial}{\partial t_j}$ *с коэффициентами* $a(j) = a(j, t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots)$*, зависящими от конечного числа динамических переменных, удовлетворяет условию* $DZD^{-1} = \lambda Z$ *и пусть* $a(j) = 0$ *для некоторого* $j = j_0$*, тогда* $Z = 0$*.*

Доказательство. Применяя автоморфизм сдвига к оператору Z, получаем $DZD^{-1} = \sum D(a(j))\frac{\partial}{\partial t_{j+1}}$. Теперь, для завершения доказательства сравним коэффициенты при $\frac{\partial}{\partial t_j}$ в равенстве $DZD^{-1} = \lambda Z$. Лемма доказана.

Построим бесконечную последовательность кратных коммутаторов векторных полей $\widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$

$$\widetilde{Y}_1 = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \quad \widetilde{Y}_k = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}_{k-1}] \quad \text{для} \quad k \geq 2. \tag{4.194}$$

Лемма 4.3. *Имеет место равенство*

$$D\widetilde{Y}_k D^{-1} = -\widetilde{X}^k(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_k, \quad k \geq 1. \tag{4.195}$$

Доказательство леммы проведем по индукции. При $k = 1$ из (4.193) и (4.194) следует, что

$$D\widetilde{Y}_1 D^{-1} = D[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]D^{-1} = [D\widetilde{X}D^{-1}, D\widetilde{Y}D^{-1}] = [\widetilde{X}, -d\widetilde{X} + \widetilde{Y}] = -\widetilde{X}(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_1.$$

Теперь предположим, что утверждение верно для $k-1$, и получим

$$D\widetilde{Y}_k D^{-1} = [D\widetilde{X}D^{-1}, D\widetilde{Y}_{k-1}D^{-1}] = [\widetilde{X}, -\widetilde{X}^{k-1}(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_{k-1}] = -\widetilde{X}^k(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_k.$$

Лемма доказана.

Поскольку векторные поля $X, \widetilde{X}$ и $\widetilde{Y}$ линейно независимы, то размерность кольца Ли L_x не может быть меньше трех. В силу (4.195) случай $\widetilde{Y}_1 = 0$ означает $\widetilde{X}(d) = 0$ или $d_t + d_{t_1} = 0$, что дает $d = A(t - t_1)$. Здесь $A(\tau)$– произвольная функция одной переменной.

Допустим, что цепочка (4.184) допускает нетривиальный x-интеграл и $\widetilde{Y}_1 \neq 0$. Рассмотрим последовательность векторных полей $\{\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \widetilde{Y}_3, \ldots, \}$. Поскольку L_x имеет конечную размерность, то существует натуральное число N такое, что

$$\widetilde{Y}_{N+1} = \gamma_1\widetilde{Y}_1 + \gamma_2\widetilde{Y}_2 + \ldots + \gamma_N\widetilde{Y}_N, \quad N \geq 1, \tag{4.196}$$

причем $\widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \ldots, \widetilde{Y}_N$ линейно независимы. Следовательно,

$$D\widetilde{Y}_{N+1}D^{-1} = D(\gamma_1)D\widetilde{Y}_1D^{-1} + D(\gamma_2)D\widetilde{Y}_2D^{-1} + \ldots + D(\gamma_N)D\widetilde{Y}_ND^{-1}, \quad N \geq 1.$$

По лемме 4.3 и в силу (4.196) последнее уравнение можно переписать в виде

$$\begin{gathered}-\widetilde{X}^{N+1}(d)\widetilde{X} + \gamma_1\widetilde{Y}_1 + \gamma_2\widetilde{Y}_2 + \ldots + \gamma_N\widetilde{Y}_N = D(\gamma_1)(-\widetilde{X}(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_1) + \\ +D(\gamma_2)(-\widetilde{X}^2(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_2) + \ldots + D(\gamma_N)(-\widetilde{X}^N(d)\widetilde{X} + \widetilde{Y}_N).\end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты перед линейно независимыми операторами $\widetilde{X}, \widetilde{Y}_1, \widetilde{Y}_2, \ldots, \widetilde{Y}_N$, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{gathered}\widetilde{X}^{N+1}(d) = D(\gamma_1)\widetilde{X}(d) + D(\gamma_2)\widetilde{X}^2(d) + \ldots + D(\gamma_N)\widetilde{X}^N(d), \\ \gamma_1 = D(\gamma_1), \quad \gamma_2 = D(\gamma_2), \ldots, \gamma_N = D(\gamma_N).\end{gathered}$$

Так как коэффициенты векторных полей $\widetilde{Y}_j$ зависят только от переменных $t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots$, то и коэффициенты γ_j могут зависеть только от этих переменных (см. замечание 4.1). Более того, из последней системы уравнений следует, что коэффициенты γ_k — постоянны для всех $1 \leqslant k \leqslant N$, а функции $d = d(t, t_1)$ удовлетворяют следующему дифференциальному уравнению

$$\widetilde{X}_{N+1}(d) = \gamma_1\widetilde{X}(d) + \gamma_2\widetilde{X}^2(d) + \ldots + \gamma_N\widetilde{X}^N(d), \quad \widetilde{X}(d) = d_t + d_{t_1}. \tag{4.197}$$

Используя замену переменных $s = t$ и $\tau = t - t_1$, перепишем уравнение (4.197) в виде

$$\frac{\partial^{N+1} d}{\partial s^{N+1}} = \gamma_1 \frac{\partial d}{\partial s} + \gamma_2 \frac{\partial^2 d}{\partial s^2} + \ldots + \gamma_N \frac{\partial^N d}{\partial s^N}. \tag{4.198}$$

Следовательно, справедливо утверждение:

Теорема 4.4. *Искомая функция $d = d(t, t_1)$ имеет следующий вид*

$$d(t, t_1) = \sum_k \left(\sum_{j=0}^{m_k - 1} \lambda_{k,j}(t - t_1) t^j \right) e^{\alpha_k t}, \tag{4.199}$$

где $\lambda_{k,j}(t - t_1)$–некоторые функции, α_k–характеристические корни кратности m_k уравнения (4.198).

Пусть $\alpha_0 = 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ – несовпадающие корни характеристического уравнения. Тогда уравнение (4.197) можно представить в виде

$$\begin{gathered} \Lambda(\widetilde{X}) d = \widetilde{X}^{m_0} (\widetilde{X} - \alpha_1)^{m_1} (\widetilde{X} - \alpha_2)^{m_2} \ldots (\widetilde{X} - \alpha_s)^{m_s} d = 0, \\ m_0 + m_1 + \ldots + m_s = N + 1, \quad m_0 \geq 1. \end{gathered} \tag{4.200}$$

Отталкиваясь от формулы (4.192), введем в рассмотрение отображение $h \to Y_h$, которое ставит в соответствие функции $h = h(t, t_{\pm 1}, t_{\pm 2}, \ldots)$ векторное поле

$$Y_h = h \frac{\partial}{\partial t_1} - h_{-1} \frac{\partial}{\partial t_{-1}} + (h + h_1) \frac{\partial}{\partial t_2} - (h_{-1} + h_{-2}) \frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \ldots.$$

Для любого полинома с постоянными коэффициентами $P(\lambda) = c_0 + c_1 \lambda + \ldots + c_m \lambda^m$ имеем формулу

$$P(ad_{\widetilde{X}}) \widetilde{Y} = Y_{P(\widetilde{X}) d}, \quad ad_X Y = [X, Y], \tag{4.201}$$

которая устанавливает изоморфизм между линейным пространством V всех решений уравнения (4.198) и линейной оболочкой $\widetilde{V}$ векторных полей $\widetilde{Y}, \widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_N$.

Представим функцию (4.199) в виде суммы $d(t, t_1) = P(t, t_1) + Q(t, t_1)$ полиномиального слагаемого $P(t, t_1) = \sum_{j=0}^{m_0 - 1} \lambda_{0,j}(t - t_1) t^j$ и "экспоненциального" слагаемого $Q(t, t_1) = \sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{m_k - 1} \lambda_{k,j}(t - t_1) t^j \right) \mathrm{e}^{\alpha_k t}$.

Лемма 4.4. *Пусть уравнение* (4.184) *допускает нетривиальный x-интеграл. Тогда, по крайней мере, одна из функций $P(t, t_1)$ и $Q(t, t_1)$ тождественно равна нулю.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. ни одна из функций не является тождественным нулем. Сначала мы покажем, что в этом случае кольцо L_x содержит векторные поля $T_0 = Y_{A(\tau) e^{\alpha_k t}}$ и $T_1 = Y_{B(\tau)}$ с некоторыми функциями $A(\tau)$ и $B(\tau)$. Выберем в качестве T_0 векторное поле $\Lambda_0(ad_{\widetilde{X}}) \widetilde{Y} = Y_{\Lambda_0(\widetilde{X}) d} \in L_x$, где $\Lambda_0(\lambda) = \frac{\Lambda(\lambda)}{\lambda - \alpha_k}$. Очевидно, что функция $\widetilde{A}(t, t_1) = \Lambda_0(\widetilde{X}) d$ удовлетворяет уравнению $(\widetilde{X} - \alpha_k) \widetilde{A}(t, t_1) = \Lambda(\widetilde{X}) d = 0$, из которого мгновенно следует, что $\widetilde{A}(t, t_1) = A(\tau) e^{\alpha_k t}$.

Аналогично можно построить поле $T_1 = Y_{B(\tau)} \in L_x$. Отметим, что согласно нашему предположению функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ отличны от тождественного нуля.

Рассмотрим бесконечную последовательность векторных полей, определенных по правилу

$$T_2 = [T_0, T_1], \quad T_3 = [T_0, T_2], \ldots, T_n = [T_0, T_{n-1}], \quad n \geq 3.$$

Можно показать, что

$$\begin{gathered} [\widetilde{X}, T_0] = \alpha_k T_0, \quad [\widetilde{X}, T_1] = 0, \quad [\widetilde{X}, T_n] = \alpha_k (n-1) T_n, \quad n \geq 2, \\ D T_0 D^{-1} = -A e^{\alpha_k t} \widetilde{X} + T_0, \quad D T_1 D^{-1} = -B \widetilde{X} + T_1, \ldots, \\ D T_n D^{-1} = T_n - \tfrac{(n-1)(n-2)}{2} \alpha_k A e^{\alpha_k t} T_{n-1} + b_n \widetilde{X} + \textstyle\sum_{k=0}^{n-2} a_k^{(n)} T_k, \quad n \geq 2. \end{gathered}$$

Поскольку алгебра конечномерна, и $\widetilde{X}, T_0, T_1, \ldots, T_N$ линейно независимы, то существует число N такое, что

$$T_{N+1} = \lambda\widetilde{X} + \mu_0 T_0 + \mu_1 T_1 + \ldots + \mu_N T_N. \tag{4.202}$$

Имеем

$$\begin{gathered} DT_{N+1}D^{-1} = D(\lambda)\widetilde{X} + D(\mu_0)\left(-Ae^{\alpha_k t}\widetilde{X} + T_0\right) + \ldots +, \\ +D(\mu_N)\left(T_N - \tfrac{(N-1)(N-2)}{2}\alpha_k Ae^{\alpha_k t}T_{N-1} + \ldots\right). \end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты перед оператором T_N в последнем уравнении, находим

$$\mu_N - \frac{N(N-1)}{2}\alpha_k A(\tau)e^{\alpha_k t} = D(\mu_N).$$

Отсюда следует, что μ_N является функцией, зависящей только от t. Применяя оператор $ad_{\widetilde{X}}$ к обеим частям уравнения (4.202), получаем

$$\begin{gathered} N\alpha_k T_{N+1} = [\widetilde{X}, T_{N+1}] = \widetilde{X}(\lambda)\widetilde{X} + \left(\widetilde{X}(\mu_0) + \mu_0\alpha_k\right)T_0 + \ldots + \\ + \left(\widetilde{X}(\mu_N) + \mu_N(N-1)\alpha_k\right)T_N. \end{gathered}$$

Снова, сравнивая коэффициенты перед T_N, находим

$$N\alpha_k\mu_N = \widetilde{X}(\mu_N) + (N-1)\alpha_k\mu_N \quad \text{или} \quad \widetilde{X}(\mu_N) = \alpha_k\mu_N.$$

Следовательно, $\mu_N = A_1 e^{\alpha_k t}$, где A_1–ненулевая константа, и поэтому $A(\tau)e^{\alpha_k t} = A_2 e^{\alpha_k t} - A_2 e^{\alpha_k t_1}$, $A_2 - const$.

Имеем $T_0 = A_2 e^{\alpha_k t}\widetilde{X} - A_2 S_0$, где $S_0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{\alpha_k t_j}\frac{\partial}{\partial t_j}$. А также

$$[\widetilde{X}, S_0] = \alpha_k S_0, \quad DS_0D^{-1} = S_0.$$

Рассмотрим новую последовательность векторных полей

$$P_1 = S_0, \quad P_2 = [T_1, S_0], \quad P_3 = [T_1, P_2], \quad P_n = [T_1, P_{n-1}], \quad n \geq 3.$$

Можно показать, что

$$\begin{gathered} [\widetilde{X}, P_n] = \alpha_k P_n, \quad DP_nD^{-1} = P_n - \alpha_k(n-1)BP_{n-1} + \\ +b_n\widetilde{X} + a_n S_0 + \textstyle\sum_{j=2}^{n-2} a_j^{(n)} P_j, \quad n \geq 2. \end{gathered}$$

Так как алгебра L_x конечномерна, то существует число M такое, что

$$P_{M+1} = \lambda^*\widetilde{X} + \mu_2^* P_2 + \ldots + \mu_M^* P_M, \tag{4.203}$$

где поля $\widetilde{X}, P_2, \ldots, P_M$ линейно независимы. Тогда

$$\begin{gathered} DP_{M+1}D^{-1} = D(\lambda^*)\widetilde{X} + D(\mu_2^*)(P_2 + \ldots) + \ldots + \\ +D(\mu_M^*)(P_M - \alpha_k(M-1)BP_{M-1} + \ldots). \end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты перед P_M в последнем соотношении, получим

$$\mu_M^* - M\alpha_k B(\tau) = D(\mu_M^*). \tag{4.204}$$

Значит μ_M^*–функция, зависящая только от t.

Подействуем оператором $ad_{\widetilde{X}}$ на обе части соотношения (4.203), тогда имеем

$$\begin{gathered} \alpha_k P_{M+1} = [\widetilde{X}, P_{M+1}] = \widetilde{X}(\lambda^*)\widetilde{X} + (\widetilde{X}(\mu_2^*) + \alpha_k\mu_2^*)P_2 + \\ + \ldots + (\widetilde{X}(\mu_M^*) + \alpha_k\mu_M^*)P_M. \end{gathered}$$

Снова, сравнивая коэффициенты перед P_M, и зная, что $\alpha_k\mu_M^*(t) = \widetilde{X}(\mu_M^*(t)) + +\alpha_k\mu_M^*(t)$, получаем μ_M^* – постоянная. Из уравнения (4.204) следует, что $B(\tau) = 0$. Из данного противоречия следует, что хотя бы одна из функций $P(t, t_1)$ и $Q(t, t_1)$ тождественно равна нулю. Лемма доказана.

Дальнейшее уточнение вида функции $d(t,t_1)$, а также полное доказательство теоремы 4.3 можно найти в работе [53].

Результат полной классификации уравнения (4.184) содержится в следующем утверждении (см. [52]).

Теорема 4.5. *Цепочка* (4.184), *допускающая одновременно нетривиальные* x- *и* n-*интегралы, принадлежит одному из типов:*

(1) $d(t,t_1) = A(t_1-t)$, *где* $A(t_1-t) = \frac{d}{d\theta}P(\theta)$, $t_1 - t = P(\theta)$, $P(\theta)$ – *квазимногочлен по* θ,
(2) $d(t,t_1) = C_1(t_1^2 - t^2) + C_2(t_1 - t)$,
(3) $d(t,t_1) = \sqrt{C_3 e^{2\alpha t_1} + C_4 e^{\alpha(t_1+t)} + C_3 e^{2\alpha t}}$,
(4) $d(t,t_1) = C_5(e^{\alpha t_1} - e^{\alpha t}) + C_6(e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t})$,

где $\alpha \neq 0$, C_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$ – *произвольные постоянные. Причем соответствующие интегралы минимального порядка можно привести к виду*

i) $F = x - \int^{t_1-t}\frac{ds}{A(s)}$, $I = L(D_x)t_x$, *где* $L(D_x)$ – *дифференциальный оператор, который обращает в нуль* $\frac{d}{d\theta}P(\theta)$. *Причем* $D_x\theta = 1$.

ii) $F = \frac{(t_3-t_1)(t_2-t)}{(t_3-t_2)(t_1-t)}$, $I = t_x - C_1t^2 - C_2t$,

iii) $F = \int^{t_1-t}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha s}ds}{\sqrt{C_3\mathrm{e}^{2\alpha s}+C_4\mathrm{e}^{\alpha s}+C_3}} - \int^{t_2-t_1}\frac{ds}{\sqrt{C_3\mathrm{e}^{2\alpha s}+C_4\mathrm{e}^{\alpha s}+C_3}}$, $I = 2t_{xx} - \alpha t_x^2 - \alpha C_3\mathrm{e}^{2\alpha t}$,

iv) $F = \frac{(\mathrm{e}^{\alpha t}-\mathrm{e}^{\alpha t_2})(\mathrm{e}^{\alpha t_1}-\mathrm{e}^{\alpha t_3})}{(\mathrm{e}^{\alpha t}-\mathrm{e}^{\alpha t_3})(\mathrm{e}^{\alpha t_1}-\mathrm{e}^{\alpha t_2})}$, $I = t_x - C_5e^{\alpha t} - C_6e^{-\alpha t}$.

4.3. S-интегрируемые дифференциально-разностные уравнения. Пользуясь координатными представлениями (4.182), (4.183) характеристических векторных полей, можно построить характеристическое кольцо Ли $L_x = \{X, K_0\}$, соответствующее произвольному дифференциально-разностному уравнению вида (4.176).

Ниже мы подробно исследуем характеристическое кольцо Ли цепочки вида

$$t_{1x} = t_x + A_1(\mathrm{e}^{\alpha t_1} + \mathrm{e}^{\alpha t}) + A_2(\mathrm{e}^{-\alpha t} + \mathrm{e}^{-\alpha t_1}), \tag{4.205}$$

которая является дифференциально-разностным аналогом уравнения синус-Гордон $u_{xy} = \sin u$. Поскольку уравнение (4.205) имеет вид (4.184), то в качестве образующих кольца можно выбрать операторы $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ (см. (4.190), (4.192)). Далее воспользуемся тождеством (4.201), в котором положим $d = A_1(\mathrm{e}^{\alpha t_1} + \mathrm{e}^{\alpha t}) + A_2(\mathrm{e}^{-\alpha t} + \mathrm{e}^{-\alpha t_1})$. Положим $P_0(\lambda) = \frac{1}{2\alpha A_1}(\lambda+\alpha)$, $P_1(\lambda) = -\frac{1}{2\alpha A_2}(\lambda - \alpha)$.

Введем два оператора $S_0^* = P_0(ad_{\widetilde{X}})\widetilde{Y}$ и $S_1^* = P_1(ad_{\widetilde{X}})\widetilde{Y}$:

$$\begin{gathered} S_0^* = (\mathrm{e}^{\alpha t_1} + \mathrm{e}^{\alpha t})\frac{\partial}{\partial t_1} - (\mathrm{e}^{\alpha t_{-1}} + \mathrm{e}^{\alpha t})\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + \\ +(\mathrm{e}^{\alpha t} + 2\mathrm{e}^{\alpha t_1} + \mathrm{e}^{\alpha t_2})\frac{\partial}{\partial t_2} - (\mathrm{e}^{\alpha t} + 2\mathrm{e}^{\alpha t_{-1}} + \mathrm{e}^{\alpha t_{-2}})\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \ldots, \end{gathered} \tag{4.206}$$

$$\begin{gathered} S_1^* = (\mathrm{e}^{-\alpha t_1} + \mathrm{e}^{-\alpha t})\frac{\partial}{\partial t_1} - (\mathrm{e}^{-\alpha t_{-1}} + \mathrm{e}^{-\alpha t})\frac{\partial}{\partial t_{-1}} + \\ +(\mathrm{e}^{-\alpha t} + 2\mathrm{e}^{-\alpha t_1} + \mathrm{e}^{-\alpha t_2})\frac{\partial}{\partial t_2} - (\mathrm{e}^{-\alpha t} + 2\mathrm{e}^{-\alpha t_{-1}} + \mathrm{e}^{-\alpha t_{-2}})\frac{\partial}{\partial t_{-2}} + \ldots. \end{gathered} \tag{4.207}$$

Из очевидных равенств $[\widetilde{X}, S_0^*] = \alpha S_0^*$, $[\widetilde{X}, S_1^*] = -\alpha S_1^*$, $\widetilde{Y} = A_1S_0^* + A_2S_1^*$ вытекает, что $L_{x1} = \{\widetilde{X}\} \oplus L_{x2}$, где L_{x2} – кольцо Ли, порожденное операторами S_0^*, S_1^*.

Построим базис линейного пространства, состоящего из элементов кольца L_{x2}. Заменим зависимые переменные следующим образом $\tau_j = t_j - t_{j+1}$, тогда τ_j и $t = t_0$ новые переменные, при этом имеют место равенства $\frac{\partial}{\partial t_j} = -\frac{\partial}{\partial \tau_{j-1}} + \frac{\partial}{\partial \tau_j}$, которые позволяют переписать операторы S_0^*, S_1^* в виде $S_0^* = -\mathrm{e}^{\alpha t}S_0$, $S_1^* = -\mathrm{e}^{-\alpha t}S_1$, где

$$S_0 = \sum_j A(\tau_j)\mathrm{e}^{\alpha\rho(j)}\frac{\partial}{\partial\tau_j}, \quad S_1 = \sum_j B(\tau_j)\mathrm{e}^{-\alpha\rho(j)}\frac{\partial}{\partial\tau_j}, \tag{4.208}$$

причем

$$A(\tau) = 1 + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}, \quad B(\tau) = 1 + \mathrm{e}^{\alpha\tau}, \tag{4.209}$$

$$\rho(j) = \begin{cases} -\tau - \tau_1 - \ldots - \tau_{j-1}, & \text{если} \quad j \geq 1; \\ 0, \quad \text{если} \quad j = 0; & \\ \tau_{-1} + \tau_{-2} + \ldots + \tau_j, & \text{если} \quad j \leqslant -1. \end{cases} \tag{4.210}$$

Пользуясь равенством $D\rho(j) = \rho(j+1) + \tau$, легко можно проверить, что

$$DS_0D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}S_0, \quad DS_1D^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}S_1. \tag{4.211}$$

Как и следовало ожидать, характеристическое кольцо L_{x2} имеет бесконечную размерность. Кольцо L_{x2} (так же, как и L_{x1}, L_x) является кольцом минимального роста. Иначе говоря, размерность линейного пространства кратных коммутаторов с ростом кратности растет на единицу, и на два в зависимости от четности. Например, если V_j линейное пространство всех коммутаторов кратности не выше j, то базис V_{2k} состоит из операторов $\{S_0, S_1, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2k}, Q_2, Q_4, \ldots, Q_{2k}\}$, а базис V_{2k+1} – из операторов $\{S_0, S_1, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2k+1}, Q_2, Q_4, \ldots, Q_{2k}\}$. Здесь операторы P_j, Q_j определяются последовательно

$$\begin{array}{ll} P_1 = [S_0, S_1] + \alpha S_0 + \alpha S_1, & Q_1 = P_1, \\ P_2 = [S_1, P_1], & Q_2 = [S_0, Q_1], \\ P_3 = [S_0, P_2] + \alpha P_2, & Q_3 = [S_1, Q_2] - \alpha Q_2, \\ P_{2j} = [S_1, P_{2j-1}], & Q_{2j} = [S_0, Q_{2j-1}], \\ P_{2j+1} = [S_0, P_{2j}] + \alpha P_{2j}, & Q_{2j+1} = [S_1, Q_{2j}] - \alpha Q_{2j}, \end{array}$$

для $j \geq 1$. Вычисления показывают, что

$$\begin{gathered} DP_1D^{-1} = P_1 - 2\alpha(S_0 + S_1), \\ DP_2D^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}(P_2 + 2\alpha P_1 - 2\alpha^2(S_0 + S_1)), \\ DP_3D^{-1} = P_3 + 2\alpha Q_2 - 2\alpha P_2 - 4\alpha^2 P_1 + 4\alpha^3(S_0 + S_1), \\ DP_4D^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}(P_4 + 2\alpha Q_3 - 4\alpha^2 P_2 + 4\alpha^2 Q_2 - \\ -4\alpha^3 P_1 + 4\alpha^4(S_0 + S_1)), \\ DQ_2D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}(Q_2 - 2\alpha P_1 + 2\alpha^2(S_0 + S_1)), \\ DQ_3D^{-1} = Q_3 + 2\alpha Q_2 - 2\alpha P_2 - 4\alpha^2 P_1 + 4\alpha^3(S_0 + S_1), \\ DQ_4D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}(Q_4 - 2\alpha P_3 + 2\alpha^2(P_2 - Q_2) + \\ +4\alpha^3 P_1 - 4\alpha^4(S_0 + S_1)), \\ P_3 = Q_3, \quad [S_1, P_2] = -\alpha P_2, \quad [S_0, Q_2] = \alpha Q_2, \\ [S_1, P_4] = -\alpha P_4, \quad [S_0, Q_4] = \alpha Q_4. \end{gathered} \tag{4.212}$$

Коэффициент при $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ во всех векторных полях DP_iD^{-1}, DQ_iD^{-1}, $1 \leqslant i \leqslant 4$ равен нулю.

Лемма 4.5. *Для любого $j \geq 1$ имеют место равенства*

(1) $DP_{2j+1}D^{-1} + 2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j}D^{-1} = P_{2j+1} + 2\alpha Q_{2j}$,
(2) $\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1} - \alpha DP_{2j+1}D^{-1} = P_{2j+2} + \alpha Q_{2j+1}$,
(3) $DQ_{2j+1}D^{-1} - 2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DQ_{2j}D^{-1} = Q_{2j+1} - 2\alpha P_{2j}$,
(4) $\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DQ_{2j+2}D^{-1} + \alpha DQ_{2j+1}D^{-1} = Q_{2j+2} - \alpha P_{2j+1}$,
(5) $P_{2j+1} = Q_{2j+1}$,
(6) $[S_1, P_{2j+2}] = -\alpha P_{2j+2}$,
(7) $[S_0, Q_{2j+2}] = \alpha Q_{2j+2}$.

Более того, коэффициент перед $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ во всех векторных полях DP_kD^{-1}, DQ_kD^{-1} равен нулю.

Доказательство. Индукцией по j. Из (4.212) ясно, что утверждение леммы верно при $j = 1$. Допустим, что (1) – (7) верно при всех j, $1 \leqslant j \leqslant k$. Покажем, что (1) верно при

$j = k + 1$.

$$
\begin{aligned}
DP_{2j+3}D^{-1} &= D([S_0, P_{2j+2}] + \alpha P_{2j+2})D^{-1} = [\mathrm{e}^{\alpha\tau} S_0, DP_{2j+2}D^{-1}] + \alpha DP_{2j+2}D^{-1} = \\
&= [\mathrm{e}^{\alpha\tau} S_0, \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau} DP_{2j+1}D^{-1} + \mathrm{e}^{-\alpha\tau} P_{2j+2} + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau} Q_{2j+1}] + \alpha DP_{2j+2}D^{-1} = \\
&= -\alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})DP_{2j+1}D^{-1} + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}[\mathrm{e}^{\alpha\tau} S_0, DP_{2j+1}D^{-1}] - \alpha(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+2} - \\
&- \alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})Q_{2j+1} + P_{2j+3} - \alpha P_{2j+2} + \alpha Q_{2j+2} + \alpha DP_{2j+2}D^{-1} = \\
&= -\alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})DP_{2j+1}D^{-1} + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau} D[S_0, Q_{2j+1}]D^{-1} - \alpha(2+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+2} - \\
&- \alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})Q_{2j+1} + P_{2j+3} + \alpha Q_{2j+2} + \alpha DP_{2j+2}D^{-1} = \\
&= -\alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})DP_{2j+1}D^{-1} + \alpha Q_{2j+2} - \alpha^2 P_{2j+1} - \alpha^2 DQ_{2j+1}D^{-1} - \\
&- \alpha(2+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+2} - \alpha^2(1+\mathrm{e}^{-\alpha\tau})Q_{2j+1} - 2\alpha^2 Q_{2j+1} - 2\alpha P_{2j+2} + P_{2j+3} = \\
&= -2\alpha^2 DP_{2j+1}D^{-1} + 2\alpha Q_{2j+2} - 2\alpha^2 Q_{2j+1} - 2\alpha P_{2j+2} + P_{2j+3} = \\
&= 2\alpha P_{2j+2} + 2\alpha^2 Q_{2j+1} - 2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau} DP_{2j+2}D^{-1} + 2\alpha Q_{2j+2} - 2\alpha^2 Q_{2j+1} - \\
&- 2\alpha P_{2j+2} + P_{2j+3} = -2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau} DP_{2j+2}D^{-1} + 2\alpha Q_{2j+2} + P_{2j+3}.
\end{aligned}
$$

Условие (3) доказывается точно так же, как и (1). Покажем, что (5) верно при $j = k + 1$. Очевидно, имеем

$$
\begin{aligned}
DP_{2j+3}D^{-1} &= -2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau} DP_{2j+2}D^{-1} + 2\alpha Q_{2j+2} + P_{2j+3} = \\
&= -2\alpha(\alpha DP_{2j+1}D^{-1} + P_{2j+2} + \alpha Q_{2j+1}) + 2\alpha Q_{2j+2} + P_{2j+3},
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
DQ_{2j+3}D^{-1} &= 2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau} DQ_{2j+2}D^{-1} - 2\alpha P_{2j+2} + Q_{2j+3} = \\
&= 2\alpha(-\alpha DQ_{2j+1}D^{-1} + Q_{2j+2} - \alpha P_{2j+1}) - 2\alpha P_{2j+2} + Q_{2j+3}.
\end{aligned}
$$

В силу (5) $P_{2j+1} = Q_{2j+1}$, и поэтому

$$
D(P_{2j+3} - Q_{2j+3})D^{-1} = -2\alpha P_{2j+2} - 2\alpha Q_{2j+2} + 2\alpha Q_{2j+2} + 2\alpha P_{2j+2} = 0.
$$

Следовательно, $P_{2j+3} = Q_{2j+3}$.

Покажем, что (2) верно при $j = k + 1$. Имеем

$$
\begin{gathered}
\mathrm{e}^{\alpha\tau} DP_{2j+1}D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau} D[S_1, P_{2j+3}]D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}[\mathrm{e}^{-\alpha\tau} S_1, DP_{2j+3}D^{-1}] = \\
= \mathrm{e}^{\alpha\tau}[\mathrm{e}^{-\alpha\tau} S_1, -2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau} DP_{2j+2}D^{-1} + 2\alpha Q_{2j+2} + P_{2j+3}] = \\
= \mathrm{e}^{\alpha\tau}(-2\alpha^2(1+\mathrm{e}^{\alpha\tau})DP_{2j+2}D^{-1}) - 2\alpha\mathrm{e}^{2\alpha\tau}[\mathrm{e}^{-\alpha\tau} S_1, DP_{2j+2}D^{-1}] + \\
+ P_{2j+4} + 2\alpha Q_{2j+3} + 2\alpha^2 Q_{2j+2} = -2\alpha^2(\mathrm{e}^{\alpha\tau} + \mathrm{e}^{2\alpha\tau})DP_{2j+2}D^{-1} + \\
+ 2\alpha^2\mathrm{e}^{2\alpha\tau} DP_{2j+2}D^{-1} + P_{2j+4} + 2\alpha Q_{2j+3} + 2\alpha^2 Q_{2j+2} = \\
= -2\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha\tau} DP_{2j+2}D^{-1} + P_{2j+4} + 2\alpha Q_{2j+3} + 2\alpha^2 Q_{2j+2} = \\
= \alpha DP_{2j+3}D^{-1} - \alpha P_{2j+3} - 2\alpha^2 Q_{2j+2} + P_{2j+4} + 2\alpha Q_{2j+3} + \\
+ 2\alpha^2 Q_{2j+2} = \alpha DP_{2j+3}D^{-1} + \alpha Q_{2j+3} + P_{2j+4}.
\end{gathered}
$$

Доказательство (4) аналогично доказательству (2).

Докажем (6) при $j = k + 1$.

$$\begin{gathered}
D[S_1, P_{2j+4}]D^{-1} = [\mathrm{e}^{-\alpha\tau}S_1, \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DP_{2j+3}D^{-1} + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+4} + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}Q_{2j+3}] = \\
= [\mathrm{e}^{-\alpha\tau}S_1, \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}(-2\alpha\mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j+2}D^{-1} + P_{2j+3} + 2\alpha Q_{2j+2})+ \\
+\mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+4} + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}Q_{2j+3}] = [\mathrm{e}^{-\alpha\tau}S_1, -2\alpha^2DP_{2j+2}D^{-1}+ \\
+2\alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+3} + 2\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}Q_{2j+2} + \mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+4}] = -2\alpha^2D[S_1, P_{2j+2}]D^{-1}- \\
-2\alpha^2\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}(1 + \mathrm{e}^{\alpha\tau})P_{2j+3} - 2\alpha^3\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}(1 + \mathrm{e}^{\alpha\tau})Q_{2j+2} + 2\alpha\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}P_{2j+4}+ \\
+2\alpha^2\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}Q_{2j+3} + 2\alpha^3\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}Q_{2j+2} - \alpha\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}(1 + \mathrm{e}^{\alpha\tau})P_{2j+4}+ \\
+\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}] = 2\alpha^3DP_{2j+2}D^{-1} - 2\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+3} + \alpha(\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}- \\
-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+4} - 2\alpha^3\mathrm{e}^{-\alpha\tau}Q_{2j+2} + \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}] = \\
= \alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+3} + 2\alpha^3\mathrm{e}^{-\alpha\tau}Q_{2j+2} - \alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DP_{2j+3}D^{-1} - 2\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+3}+ \\
+\alpha(\mathrm{e}^{-2\alpha\tau} - \mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+4} - 2\alpha^3\mathrm{e}^{-\alpha\tau}Q_{2j+2} + \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}] = \\
= -\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+3} + \alpha(\mathrm{e}^{-2\alpha\tau} - \mathrm{e}^{-\alpha\tau})P_{2j+4} - \alpha DP_{2j+4}D^{-1} + \alpha\mathrm{e}^{-\alpha\tau}P_{2j+4}+ \\
+\alpha^2\mathrm{e}^{-\alpha\tau}Q_{2j+3} + \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}].
\end{gathered}$$

Поэтому

$$\begin{gathered}
D[S_1, P_{2j+4}]D^{-1} = \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}[S_1, P_{2j+4}] + \alpha\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}P_{2j+4} - \alpha DP_{2j+4}D^{-1} \\
D([S_1, P_{2j+4}] + \alpha P_{2j+4})D^{-1} = \mathrm{e}^{-2\alpha\tau}([S_1, P_{2j+4}] + \alpha P_{2j+4}).
\end{gathered}$$

Следовательно, $[S_1, P_{2j+4}] = -\alpha P_{2j+4}$.

Доказательство (7) аналогично доказательству (6). Лемма доказана.

Замечание 4.2. *Имеют место равенства*

$$\begin{gathered}
\mathrm{e}^{-\alpha\tau}DQ_{2j}D^{-1} + \mathrm{e}^{\alpha\tau}DP_{2j}D^{-1} = Q_{2j} + P_{2j}, \\
DP_{2j+1}D^{-1} = P_{2j+1} + \sum_{k=1}^{j}(\mu_{2k}^{(2j+1)}P_{2k} + \nu_{2k}^{(2j+1)}Q_{2k})+ \\
+\textstyle\sum_{k=0}^{j-1}\mu_{2k+1}^{(2j+1)}P_{2k+1} + \mu_0^{(2j+1)}S_0 + \nu_0^{(2j+1)}S_1, \\
DP_{2j}D^{-1} = \mathrm{e}^{-\alpha\tau}(P_{2j} + \sum_{k=1}^{j-1}(\mu_{2k}^{(2j)}P_{2k} + \nu_{2k}^{(2j)}Q_{2k})+ \\
+\textstyle\sum_{k=0}^{j-1}\mu_{2k+1}^{(2j)}P_{2k+1} + \mu_0^{(2j)}S_0 + \nu_0^{(2j)}S_1), \\
DQ_{2j}D^{-1} = \mathrm{e}^{\alpha\tau}(Q_{2j} - \sum_{k=1}^{j-1}(\mu_{2k}^{(2j)}P_{2k} + \nu_{2k}^{(2j)}Q_{2k})- \\
-\textstyle\sum_{k=0}^{j-1}\mu_{2k+1}^{(2j)}P_{2k+1} - \mu_0^{(2j)}S_0 - \nu_0^{(2j)}S_1).
\end{gathered}$$

Более того, $\mu_{2j}^{(2j+1)} = -2\alpha$, $\nu_{2j}^{(2j+1)} = 2\alpha$, $\mu_{2j-1}^{(2j)} = 2\alpha$.

Пусть L_x конечномерно. Тогда имеется три возможности:

1) $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j-1}$–линейно независимы и $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j-1}, P_{2j}$–линейно зависимы,
2) $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j-1}, P_{2j}$–линейно независимы и $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2n-1}, P_{2j}, Q_{2j}$–линейно зависимы,
3) $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j}, Q_{2j}$–линейно независимы и $S_0, S_1, P_1, P_2, Q_2, P_3, P_4, Q_4, \ldots, P_{2j}, Q_{2j}, P_{2j+1}$–линейно зависимы.

В случае 1),

$$P_{2j} = \gamma_{2j-1}P_{2j-1} + \gamma_{2j-2}P_{2j-2} + \eta_{2j-2}Q_{2j-2} + \ldots$$

и

$$\begin{gathered}
DP_{2j}D^{-1} = D(\gamma_{2j-1})DP_{2j-1}D^{-1}+ \\
+D(\gamma_{2j-2})DP_{2j-2}D^{-1} + D(\eta_{2j-2})DQ_{2j-2}D^{-1} + \ldots.
\end{gathered} \tag{4.213}$$

Воспользуемся замечанием 4.2 для сравнения коэффициентов при P_{2j-1} в (4.213) и получим противоречивое уравнение

$$\mathrm{e}^{-\alpha\tau}(\gamma_{2j-1} + 2\alpha) = D(\gamma_{2j-1}).$$

Оно показывает, что случай 1) не реализуется.

В случае 2),

$$Q_{2j} = \gamma_{2j}P_{2j} + \gamma_{2j-1}P_{2j-1} + \eta_{2j-2}Q_{2j-2} + \dots$$

и

$$\begin{gathered} DQ_{2j}D^{-1} = D(\gamma_{2j})DP_{2j}D^{-1}+ \\ +D(\gamma_{2j-1})DP_{2j-1}D^{-1} + D(\eta_{2j-2})DQ_{2j-2}D^{-1} + \dots . \end{gathered} \tag{4.214}$$

снова воспользуемся замечанием 4.2 для сравнения коэффициентов перед P_{2j-1} в (4.214) и придем к противоречивому условию

$$\mathrm{e}^{\alpha\tau}(\gamma_{2j-1} - 2\alpha) = D(\gamma_{2j-1}),$$

которое показывает, что случай 2) невозможен.

В случае 3)

$$P_{2j+1} = \eta_{2j}Q_{2j} + \gamma_{2j}P_{2j} + \dots$$

и

$$DP_{2j+1}D^{-1} = D(\eta_{2j})DQ_{2j}D^{-1} + D(\gamma_{2j})DP_{2j}D^{-1} + \dots . \tag{4.215}$$

Воспользуемся замечанием 4.2 для сравнения коэффициентов при P_{2j} в (4.215) и придем к противоречию

$$(\gamma_{2j} - 2\alpha) = D(\gamma_{2j})\mathrm{e}^{-\alpha\tau}.$$

Поэтому случай 3) невозможен. Следовательно, характеристическое кольцо Ли L_x имеет бесконечную размерность.

5. Полностью дискретные уравнения

В настоящее время дискретные модели вида

$$u_{1,1} = f(m, n, u, u_1, \overline{u}_1), \tag{5.216}$$

называемые также уравнениями на квадратном графе, интенсивно исследуются в связи с их важными приложениями в физике, дискретной геометрии, архитектуре, биологии и т.д. В уравнении (5.216) искомая функция $u = u(m, n)$ зависит от двух независимых дискретных переменных. Нижние индексы и черта над буквой обозначают сдвиги аргументов:

$$u_k = u(m+k, n), \quad \overline{u}_k = u(m, n+k), \quad u_{i,j} = u(m+i, n+j).$$

Функция f предполагается гладкой функцией, определенной в некоторой области $\mathbb{R}^3$. Предполагается также, что уравнение (5.216) может быть разрешено, по крайней мере локально, относительно любого из трех переменных $u, u_1, \overline{u}_1$, то есть существуют функции $f^{i,j}$ такие, что

$$\begin{gathered} u = f^{-1,-1}(m, n, u_{1,1}, \overline{u}_1, u_1), \\ u_1 = f^{1,-1}(m, n, \overline{u}_1, u_{1,1}, u), \\ \overline{u}_1 = f^{-1,1}(m, n, u_1, u, u_{1,1}). \end{gathered}$$

5.1. Дискретные уравнения лиувиллевского типа. В этом разделе рассматриваются уравнения вида (5.216), допускающие интегралы.

Определение 5.1. *Назовем n-интегралом уравнения* (5.216) *последовательность функций $\{I_{(i)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\ldots,u_k)\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, зависящих от m, n и конечного числа динамических переменных $\{u_i\}$, таких, что выполняется соотношение*

$$\overline{D}I_{(i)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\ldots,u_k)=I_{(i+1)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\ldots,u_k),$$

где $\overline{D}$–оператор сдвига аргумента n такой, что $\overline{D}h(m,n)=h(m,n+1)$.

Замечание 5.1. *По ходу доказательства теоремы* 5.1 *(см. ниже) выясняется, что n-интеграл можно представить в виде $I=I(m,n,G)$, где $G=G(u,u_1,\ldots,u_N)$ — некоторая функция.*

Пример 5.1. *Рассмотрим уравнение вида* (5.216)

$$u_{1,1}=\frac{1}{u_1},$$

для которого n-интегралом является последовательность функций $I_{(i)}=I_{(i)}(u_1)$ такая, что

$$I_{(i)}=\begin{cases} u_1, & i - \textit{четное};\\ \frac{1}{u_1}, & i - \textit{нечетное}.\end{cases}$$

Действительно,

$$\begin{array}{l}\overline{D}I_{(2m)}=\overline{D}u_1=u_{1,1}=\frac{1}{u_1}=I_{(2m+1)},\\ \overline{D}I_{(2m+1)}=\overline{D}\frac{1}{u_1}=\frac{1}{u_{1,1}}=u_1=I_{(2m+2)}.\end{array}$$

В координатном представлении уравнение $\overline{D}I_{(i)}=I_{(i+1)}$ имеет вид

$$I_{(i)}(m,n,r_{-j+1},r_{-j+2},\ldots,r,\overline{u}_1,f,f_1,\ldots,f_{k-1})=I_{(i+1)}(m,n,u_{-j},u_{-j+1},\ldots,u_k),\qquad(5.217)$$

где $r=f^{-1,1}(m,n,u,u_{-1},\overline{u}_1)$. Выберем в качестве динамических (независимых) переменных переменные $\{u_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ и $\{\overline{u}_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$. Тогда функцию $r_{-1}=D^{-1}(r)$ можно переписать в виде

$$r_{-1}=f^{-1,1}(m-1,n,u_{-1},u_{-2},u_{-1,1})=f^{-1,1}(m-1,n,u_1,u,f^{-1,1}(m,n,u,u_{-1},\overline{u}_1)).$$

Здесь D – оператор сдвига переменной m: $Dy(m,n)=y(m+1,n)$. Аналогично все сдвиги в (5.217) можно представить как композицию функций, зависящих только от динамических переменных. Заметим, что правая часть равенства (5.217) не зависит от переменной $\overline{u}_1$, а потому выполнено условие $\frac{\partial}{\partial\overline{u}_1}\overline{D}I_{(i)}=0$ или, что то же самое, $Y_1I_{(i)}=0$, где $Y_1=\overline{D}^{-1}\frac{\partial}{\partial\overline{u}_1}\overline{D}$. В развернутом виде оператор Y_1 имеет вид

$$\begin{array}{c}Y_1=\frac{\partial}{\partial u}+\overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_1}+\overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial r}{\partial\overline{u}_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_{-1}}+\\ +\overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\overline{u}_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_2}+\overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial r_{-1}}{\partial\overline{u}_1}\right)\frac{\partial}{\partial u_{-2}}+\ldots\end{array}\qquad(5.218)$$

Введем обозначения $x=\overline{D}^{-1}\frac{\partial f(u,u_1,\overline{u}_1)}{\partial\overline{u}_1}=-\frac{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\bar{u}_{-1})/\partial u}{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\bar{u}_{-1})/\partial u_1}$.

Лемма 5.1. *Имеют место следующие тождества:*

$$\begin{array}{c}\frac{\partial r}{\partial\overline{u}_1}=\frac{1}{D^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\right)},\\ \frac{\partial f_j}{\partial\overline{u}_1}=\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\cdot D\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\right)\cdot\ldots\cdot D^j\left(\frac{\partial f}{\partial\overline{u}_1}\right).\end{array}$$

Доказательство. Второе из соотношений леммы есть очевидное следствие формулы дифференцирования сложной функции. Например, при $j = 1$ имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial \overline{u}_1} = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} f(u_1, u_2 f(u, u_1, \overline{u}_1)) = D\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{u}_1}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{u}_1}.$$

Для доказательства первого соотношения леммы достаточно продифференцировать тождество

$$\overline{u}_1 = f^{-1,1}(u_1, u, f(u, u_1, \overline{u}_1))$$

по переменной $\overline{u}_1$ и получить

$$1 = D\left(\frac{\partial f^{-1,1}}{\partial \overline{u}_1}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \overline{u}_1}.$$

Лемма доказана.

Пользуясь леммой, оператор Y_1 можно переписать в виде

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u} + x\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{1}{x_{-1}}\frac{\partial}{\partial u_{-1}} + xx_1\frac{\partial}{\partial u_2} + \frac{1}{x_{-1}x_{-2}}\frac{\partial}{\partial u_{-2}} + \dots. \tag{5.219}$$

Назовем оператор Y_1 характеристическим векторным полем.

Ясно теперь, что n-интеграл является решением уравнения в частных производных первого порядка $Y_1 I_{(i)} = 0$, коэффициенты которого выражаются через переменную x и ее сдвиги и поэтому зависят, вообще говоря, от переменной $\overline{u}_{-1}$, в то время как сама функция $I_{(i)}$ от $\overline{u}_{-1}$ зависеть не может, то есть $X_1 I_{(i)} = 0$, где $X_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}}$. Примечательно, что в общем случае, кроме этих двух уравнений и их дифференциальных следствий, n-интеграл I удовлетворяет еще и другим уравнениям, что является отличительной чертой дискретного уравнения. Действительно, из тождества $\overline{D} I_{(i)} = I_{(i+1)}$ следует, что для любого целого k $\overline{D}^k I_{(i)} = I_{(i+k)}$. В последнем равенстве при выполнении условия $k > 0$ правая часть не зависит от переменной $\overline{u}_1$, в то время как в левую часть равенства $\overline{u}_1$ формально входит, поэтому имеем $\overline{D}^{-k} \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} \overline{D}^k I_{(i)} = 0$, $k \geq 0$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\overline{D}^{-k} \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} \overline{D}^k = X_{k-1} + Y_k, \quad k \geq 2,$$

где

$$\begin{gathered} Y_{j+1} = \overline{D}^{-1}(Y_j f)\tfrac{\partial}{\partial u_1} + \overline{D}^{-1}(Y_j r)\tfrac{\partial}{\partial u_{-1}} + \\ + \overline{D}^{-1}(Y_j f_1)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + \overline{D}^{-1}(Y_j r_{-1})\tfrac{\partial}{\partial u_{-2}} + \dots, \\ X_j = \tfrac{\partial}{\partial \overline{u}_{-j}}, \quad j \geq 1. \end{gathered} \tag{5.220}$$

Обозначим через N^* размерность линейного пространства, порожденного операторами $\{Y_j\}_1^\infty$. Кольцо Ли над полем локально аналитических функций, порожденное операторами $\{Y_j\}_1^{N^*} \cup \{X_j\}_1^{N^*}$, назовем характеристическим кольцом Ли L_n уравнения (5.216) в направлении n.

Теорема 5.1. *Уравнение* (5.216) *допускает нетривиальный n-интеграл тогда и только тогда, когда* $\dim L_n < \infty$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (5.216) допускает нетривиальный n-интеграл $I = I_{(i)}(m, n, u_{-j}, u_{-j+1}, \dots, u_k)$, где $\frac{\partial I}{\partial u_{-j}} \neq 0$, $\frac{\partial I}{\partial u_k} \neq 0$. Введем кольцо Ли M, порожденное векторными полями $\{Y_j\}_1^\infty \cup \{X_j\}_1^{N_2}$, где число N_2 будет определено позже. Положим

$$M^{(j,k)} = \{T^{j,k} = P_{j,k}(T) : T \in M\},$$

где $P_{j,k}$ – оператор проектирования, определенный следующим образом

$$P_{i,m}:\ \sum_{s=-N_2}^{-1} a_s\frac{\partial}{\partial \overline{u}_s}+\sum_{-\infty}^{+\infty} b_s\frac{\partial}{\partial u_s}\to \sum_{s=-N_2}^{-1} a_s\frac{\partial}{\partial \overline{u}_s}+\sum_{s=-i}^{m} b_s\frac{\partial}{\partial u_s},$$

$i,m=1,2,3,\ldots$.

Обозначим через N_1 размерность пространства $M^{(j,k)}$. Очевидно, что $N_1\leqslant N_2+k+j+1$. Пусть множество операторов $\{T_{01},T_{02},\ldots,T_{0N_1}\}$ образует базис в $M^{(j,k)}$. Обозначим через $T_i=\sum_{s=-N_2}^{-1}a_s(T_j)\frac{\partial}{\partial\overline{u}_s}+\sum_{-\infty}^{+\infty}b_s(T_j)\frac{\partial}{\partial u_s}$ векторное поле из M такое, что $P_{j,k}(T_j)=T_{0j}$, $j=1,2,\ldots,N_1$. Покажем теперь, что множество операторов $\{T_1,T_2,\ldots,T_{N_1}\}$ образует базис в M.

Возьмем произвольное векторное поле $T=\sum_{s=-N_2}^{-1}a_s(T)\frac{\partial}{\partial\overline{u}_s}+\sum_{-\infty}^{+\infty}b_s(T)\frac{\partial}{\partial u_s}$ из M. Так как $P_{j,k}(T)\in M^{(j,k)}$, то $P_{j,k}(T)=\sum_{m=1}^{N_1}\beta_mT_{0m}$. Проверим, что $T=\sum_{m=1}^{N_1}\beta_mT_{jm}$, что равносильно равенству $Z=0$, где $Z=T-\sum_{m=1}^{N_1}\beta_mT_{jm}$. По определению, имеем $P_{j,k}(Z)=0$. Так как I является n-интегралом, зависящим от $m,n,u_{-j},u_{-j+1},\ldots,u_k$, то DI есть n-интеграл, зависящий от $m,n,u_{-j+1},u_{-j+2},\ldots,u_{k+1}$. Действительно, $\overline{D}(DI)=D(\overline{D}I)=DI$. Следовательно,

$$\begin{aligned}0=Z(DI)=P_{j,k}(Z)DI+\left(a_{k+1}(T)-\textstyle\sum_{s=1}^{N_1}\beta_sa_{k+1}(T_s)\right)\frac{\partial}{\partial u_{k+1}}DI=\\=\left(a_{k+1}(T)-\textstyle\sum_{s=1}^{N_1}\beta_sa_{k+1}(T_s)\right)\frac{\partial}{\partial u_{k+1}}DI.\end{aligned}$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial u_{k+1}}DI=D\left(\frac{\partial}{\partial u_k}I\right)\neq0$, то $a_{k+1}(T)=\sum_{s=1}^{N_1}\beta_sa_{k+1}(T_s)$, а это означает, что $P_{j,k+1}(Z)=0$. Применяя оператор Z последовательно к интегралам D^2I, D^3I, …, а также к интегралам $D^{-1}I$, $D^{-2}I$, … найдем, что $P_{i,m}(Z)=0$ для любых натуральных чисел i,m. Следовательно, $Z=0$. Это доказывает, что кольцо M имеет конечную размерность при любом выборе числа N_2. Тогда линейная оболочка векторных полей $\{Y_j\}_1^\infty$ имеет конечную размерность, обозначим ее N. Уточним теперь значение числа N_2, выбрав $N_2\geq N$. Тогда имеем, что кольцо L_n, порожденное операторами $\{Y_j\}_1^N\cup\{X_j\}_1^N$, является подкольцом конечномерного кольца M. Поэтому кольцо L_n – конечномерно.

Предположим, что размерность характеристического кольца Ли L_n конечна, обозначим ее N_1. Пусть N – размерность линейной оболочки векторных полей $\{Y_j\}_1^\infty$. Тогда множество $\{Y_1,Y_2,\ldots,Y_N\}$ образует в ней базис. Положим $N_2=N_1-N$. Введем

$$L_n^{(N_2)}=\{T^{(m)}=P_{N_2}^{(N)}(T):T\in L_n\},$$

где оператор проектирования $P_{N_2}^{(N)}$ действует по правилу

$$\begin{aligned}P_{N_2}^{(N)}\left(\textstyle\sum_{s=-N}^{-1}a_s\frac{\partial}{\partial\overline{u}_s}+\sum_{s=0}^{\infty}b_s\frac{\partial}{\partial u_s}\right)=\\=\textstyle\sum_{s=-N}^{-1}a_s\frac{\partial}{\partial\overline{u}_s}+\sum_{s=0}^{N_2}b_s\frac{\partial}{\partial u_s}.\end{aligned}\tag{5.221}$$

Пусть $\{T_{0i}\}_{i=1}^{N_1}$ образует базис в линейном пространстве $L_n^{(N_2)}$. Тогда мы имеем N_1 уравнений вида $T_{0i}G=0$ на некоторую функцию G от N_1+3 переменных $m,n,u,u_1,\ldots,u_{N_2},\overline{u}_{-1},\overline{u}_{-2},\ldots,\overline{u}_{-N}$. Причем m и n входят как параметры в коэффициенты уравнения. Согласно теореме Якоби, рассматриваемая система уравнений имеет непостоянное решение G. В силу уравнений $X_jG=0$ эта функция не зависит от переменных $\overline{u}_1,\overline{u}_2,\ldots,\overline{u}_N$ и удовлетворяет условию $TG=0$ для любого $T\in L_n$. Функция G определена неоднозначно, любое другое решение системы, зависящее от тех же переменных $m,n,u,u_1,\ldots,u_{N_2}$, может быть представлено в виде $h(m,n,G)$ для некоторой функции h.

Так как $\overline{D}^{-1}Y_1\overline{D}=X_1+Y_2$, $\overline{D}^{-1}X_j\overline{D}=X_{j+1}$, $j\geq1$, $\overline{D}^{-1}Y_k\overline{D}=Y_{k+1}$, $k\geq2$, то для любого векторного поля Z из L_n мы имеем $\overline{D}^{-1}Z\overline{D}=Z^*+\lambda X_{N+1}$ для некоторого $Z^*\in L_n$

и некоторой функции λ. Следовательно,

$$Z\overline{D}G = \overline{D}(\overline{D}^{-1}Z\overline{D}G) = \overline{D}(Z^* + \lambda X_{N+1})G = 0$$

для любого $Z \in L_n$. Поэтому $\overline{D}G$ также является решением упомянутой выше системы дифференциальных уравнений в частных производных, откуда имеем $\overline{D}G = h(m,n,G)$.

Аналогично, можно показать, что $\overline{D}^{-1}G = g(m,n,G)$ для некоторой функции g. Для построения искомого n-интеграла I достаточно теперь положить

$$\begin{gathered} G(m,n,u,u_1,\ldots,u_N) = I_{(0)}(m,n,u,u_1,\ldots,u_N), \\ \overline{D}^i G(m,n,u,u_1,\ldots,u_N) = I_{(i)}(m,n,u,u_1,\ldots,u_N), \\ \overline{D}^{-i} G(m,n,u,u_1,\ldots,u_N) = I_{(-i)}(m,n,u,u_1,\ldots,u_N), \quad i \geq 1. \end{gathered}$$

Построенная таким образом последовательность функций $I_{(i)}(m,n,u,u_1,\ldots,u_N)$ является n-интегралом, так как удовлетворяет соотношению $\overline{D}I_{(i)} = I_{(i+1)}$.

5.2. Дискретные уравнения общего вида. Пользуясь явными выражениями (5.218) – (5.220) можно определить характеристические векторные поля $Z_k = X_{k-1} + Y_k$, $k \geq 2$ для произвольного уравнения вида (5.216). Согласно теореме 5.1 при отсутствии у уравнения n-интеграла кольцо L_n будет бесконечномерно. Очевидно, что операторы $\{Z_k\}_1^\infty$ линейно независимы.

Лемма 5.2. *Выполняются следующие коммутационные соотношения*

$$\begin{aligned} &1) \quad [Z_k, Z_j] = 0 \quad \textit{для всех} \quad k, j \geq 1; \\ &2) \quad [X_k, Z_j] = 0 \quad \textit{для всех} \quad k > j, \end{aligned}$$

где $Z_1 := Y_1$.

Доказательство. Пусть $j > k$, тогда имеет место равенство $[\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}, Z_{j-k}] = 0$, так как коэффициенты оператора Z_i, $i \geq 1$ не зависят от переменной $\overline{u}_1$. Применяя к этому равенству оператор сопряжения (не является автоморфизмом кольца)

$$Z \to \overline{D}^{-1} Z \overline{D} \tag{5.222}$$

k-раз, получим

$$[\overline{D}^{-k} \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} \overline{D}^k, \overline{D}^{-k} Z_{j-k} \overline{D}^k] = [Z_k, Z_j] = 0.$$

Вторая часть леммы следует из того, что $X_k = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-k}}$, а коэффициенты оператора Z_j не зависят от u_{-k} при $k > j$. Лемма доказана.

Ключевую роль при описании кольца L_n играет автоморфизм, определенный по правилу

$$Z \to DZD^{-1}, \tag{5.223}$$

где D — оператор сдвига аргумента n. Покажем, что X_1 и Y_1, рассматриваемые как операторы на множестве функций, зависящих от конечного числа переменных из суженного динамического набора $S_N = \{\overline{u}_{-N}, \overline{u}_{-N+1}, \ldots, \overline{u}_{-1}, u, u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \ldots\}$, удовлетворяют следующим соотношениям

$$DX_1D^{-1} = pX_1 + p(1)X_2 + \ldots + p(N-1)X_N, \tag{5.224}$$

$$DY_1D^{-1} = \frac{1}{x}Y_1, \tag{5.225}$$

где $p = DX_1 f^{-1,-1}$, $p(k) = DX_1\overline{D}^{-k} f^{-1,-1}$, причем $f^{-1,-1} = f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})$. Отметим, что коэффициенты операторов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ зависят только от переменных из множества S_N. Равенство (5.224) легко проверить, подействовав обеими частями равенства на динамические переменные из S_N. Точно таким же способом можно доказать (5.225).

Выведем аналогичные равенства для высших характеристических операторов Y_j, X_j, $j \geq 1$. Удобно начать с оператора $Y_0 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1}$. Сначала уточним действие оператора на функциях, зависящих от всех динамических переменных. Очевидно, имеем

$$DY_0D^{-1} = \xi(1)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_1} + \xi(2)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots + \xi(j)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_j}, \tag{5.226}$$

где $\xi(k) = DY_0\overline{D}^{k-1}f^{-1,1}$, $f^{-1,1} = f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_1)$. Последнее равенство легко проверяется применением к переменным $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_j, \ldots$. Ясно также, что все остальные динамические переменные лежат в ядре оператора (5.226). Подействуем теперь на равенство (5.226) оператором сопряжения (5.222) и в результате получим, с учетом равенств $D\overline{D} = \overline{D}D$, $\overline{D}^{-1}Y_0\overline{D} = Y_1$, $\overline{D}^{-1}\frac{\partial}{\partial \overline{u}_k}\overline{D} = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{k-1}}$ при $k \geq 2$, следующее соотношение

$$DY_1D^{-1} = \overline{\xi}_{-1}(1)Y_1 + \overline{\xi}_{-1}(2)Y_0 + \overline{\xi}_{-1}(3)\frac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots, \tag{5.227}$$

где $\overline{\xi}_{-1}(j) = \overline{D}^{-1}\xi(j)$, которая, в частности, доказывает формулу (5.225). Остается лишь проверить, что $\overline{\xi}_{-1}(1) = \frac{1}{x}$. Действительно, дифференцируя тождество $\overline{u}_1 = f(u_{-1}, u, f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_1))$ по переменной $\overline{u}_1$, находим $D^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{u}_1}\right) \cdot \frac{\partial f^{-1,1}}{\partial \overline{u}_1} = 1$. Откуда следует, что $\xi(1) \cdot \overline{x}_1 = 1$. Поэтому $\overline{D}^{-1}\xi(1) = \frac{1}{x}$. Применяя далее многократно оператор (5.222) к равенству (5.227), находим

$$\begin{aligned} &DZ_kD^{-1} = \overline{\xi}_{-k}(1)Z_k + \overline{\xi}_{-k}(2)Z_{k-1} + \ldots + \\ &+\overline{\xi}_{-k}(k)Y_1 + \overline{\xi}_{-k}(k+1)Y_0 + \overline{\xi}_{-k}(k+2)\tfrac{\partial}{\partial \overline{u}_2} + \ldots, \end{aligned} \tag{5.228}$$

где $Z_k = \overline{D}^{1-k}Y_1\overline{D}^{k-1} = Y_k + X_{k-1}$ при $k \geq 2$. На суженном наборе динамических переменных S_N равенство (5.228) принимает вид

$$DZ_kD^{-1} = \overline{\xi}_{-k}(1)Z_k + \overline{\xi}_{-k}(2)Z_{k-1} + \ldots + \overline{\xi}_{-k}(k)Y_1. \tag{5.229}$$

Например, при $k = 2$ имеем

$$DZ_2D^{-1} = \frac{1}{\overline{x}_{-1}}Z_2 + \overline{\xi}_{-2}(2)Y_1. \tag{5.230}$$

На весь набор динамических переменных формула (5.224) продолжается следующим образом

$$DX_1D^{-1} = pX_1 + \sum_{i=1}^{\infty} p(i)X_{i+1}.$$

Подействуем на это равенство оператором сопряжения (5.222) и, с учетом условий $\overline{D}^{-1}X_j\overline{D} = X_{j+1}$, $j \geq 1$, получим

$$DX_jD^{-1} = \overline{p}_{1-j}X_j + \overline{p}_{1-j}(1)X_{j+1} + \ldots + \overline{p}_{1-j}(k)X_{k+1} + \ldots,$$

сужение которой на S_N дает

$$DX_jD^{-1} = \overline{p}_{1-j}X_j + \overline{p}_{1-j}(1)X_{j+1} + \ldots + \overline{p}_{1-j}(N-1)X_N \tag{5.231}$$

при $j \leqslant N$.

Лемма 5.3. *Предположим, что* $Z = \sum_{-\infty}^{+\infty} b(j)\frac{\partial}{\partial u_j} \in L_n$ *удовлетворяет следующим двум условиям:* $DZD^{-1} = cZ$ *для некоторой функции* c *и* $b(j_0) \equiv 0$ *для некоторого фиксированного значения* $j = j_0$. *Тогда* $Z = 0$.

Доказательство проводится простым вычислением (см. [42]).

Пример 5.2. *В качестве примера рассмотрим одну из дискретных версий уравнения Лиувилля*

$$e^{u_{1,1}+u} = e^{u_1+\overline{u}_1} + 1. \tag{5.232}$$

Вычислим функции x и p для уравнения (5.232). Имеем

$$u_{1,-1} = \ln\left(e^{\overline{u}_{-1}+u_{+1}} - 1\right) - u. \tag{5.233}$$

Следовательно, $r = f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_1) = \ln\left(e^{\overline{u}_1+u_{-1}} - 1\right) - u$. Пользуясь равенством

$$x = \overline{D}^{-1}\left(\frac{\partial f(u, u_1, \overline{u}_1)}{\partial \overline{u}_1}\right) = -\frac{\frac{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\overline{u}_{-1})}{\partial u}}{\frac{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\overline{u}_{-1})}{\partial u_1}}, \tag{5.234}$$

находим $x = 1 - e^{-u_1-\overline{u}_{-1}}$. Далее находим $D^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x_{-1}} = 1 + e^{-u_{-1}-\overline{u}_{-1}}$.

Для описания p воспользуемся тождеством

$$p = D\left(\frac{\partial f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})}{\partial \overline{u}_{-1}}\right) = -\frac{1}{\frac{\partial f^{1,-1}(u,u_1,\overline{u}_{-1})}{\partial \overline{u}_{-1}}}. \tag{5.235}$$

В результате имеем $p = x$. Поэтому

$$DX_1D^{-1} = (1 - e^{-u_1-\overline{u}_{-1}})X_1, \quad DY_1D^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-u_1-\overline{u}_{-1}}}Y_1.$$

На операторы $R_1 = [X_1, Y_1]$, $P_1 = [X_1, R_1]$, $Q_1 = [Y_1, R_1]$ отображение (5.223) действует по правилу

$$\begin{gathered} DR_1D^{-1} = R_1 + \tfrac{x-1}{x}Y + (x-1)X_1, \\ DP_1D^{-1} = xP_1 + (x-1)R_1 - \tfrac{x-1}{x}Y - (x-1)X_1, \\ DQ_1D^{-1} = \tfrac{1}{x}Q_1 - \tfrac{x-1}{x}R_1 - \tfrac{x-1}{x}Y - (x-1)X_1. \end{gathered} \tag{5.236}$$

Из формул (5.236) имеем $D(P_1 + R_1)D^{-1} = x(P_1 + R_1)$ и $D(Q_1 + R_1) = \frac{1}{x}(Q_1 + R_1)$. Из последних соотношений, в силу леммы 5.3, вытекают равенства $P_1 = -R_1$, $Q_1 = -R_1$.

Аналогично можно проверить, что

$$Z_2 = X_1 - \left(1 + e^{u-\overline{u}_{-2}}\right)R_1. \tag{5.237}$$

Для этого достаточно сравнить равенство

$$DZ_2D^{-1} = \frac{1}{\overline{x}_{-1}}Z_2 + \left(\frac{1}{x\overline{x}_{-1}} - 1\right)Y_1$$

с первой из формул (5.236) с учетом равенства $DX_1D^{-1} = xX_1$.

Из (5.237) по лемме 5.3 следует, что $Y_2 = -\left(1 + e^{u-\overline{u}_{-2}}\right)R_1$. Следовательно, характеристическая алгебра L_n для уравнения (5.232) трехмерна, как линейное пространство, натянутое на векторы X_1, Y_1, R_1; n-интеграл минимального порядка зависит от трех переменных, например $I = I(u, u_1, u_{-1})$.

Для отыскания I решаем линейную систему $Y_1I = 0$, $R_1I = 0$, или в развернутом виде

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial I}{\partial u} + \left(1 - e^{-u_1-\overline{u}_{-1}}\right)\tfrac{\partial I}{\partial u_1} + \left(1 + e^{-u_{-1}-\overline{u}_{-1}}\right)\tfrac{\partial I}{\partial u_{-1}} = 0, \\ e^{-u_1-\overline{u}_{-1}}\tfrac{\partial I}{\partial u_1} - e^{-u_{-1}-\overline{u}_{-1}}\tfrac{\partial I}{\partial u_{-1}} = 0. \end{gathered}$$

Отсюда легко найти, что $I = e^{u_{-1}-u} + e^{u_1-u}$.

Выясним, как меняется характеристическая алгебра при замене переменных в дискретном уравнении. Наиболее общая точечная замена переменной в уравнении (5.216) задается функцией вида

$$u(m, n) = \phi(m, n, v(m, n)). \tag{5.238}$$

Замена (5.238) сведет (5.216) к уравнению

$$v_{1,1} = \widetilde{f}(m, n, v, v_1, \overline{v}_1), \tag{5.239}$$

где $\widetilde{f} = \phi^{-1}(m, n, f(m, n, \phi(m, n, v), \phi(m+1, n, v_1), \phi(m, n+1, \overline{v}_1)))$.

Выясним, как связаны характеристические векторные поля X_j, Z_j и $\widetilde{X}_j$, $\widetilde{Z}_j$ уравнений (5.238) и (5.239).

Лемма 5.4. *Имеют место равенства*

$$x = -\frac{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u_1}}, \quad \frac{1}{x_{-1}} = -\frac{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}}}.$$

Доказательство. Докажем второе равенство утверждения. Дифференцируя очевидное тождество

$$u_{-1} = f^{-1,-1}\left(\overline{u}_1, f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_1), u\right)$$

по переменной $\overline{u}_1$, найдем

$$0 = \overline{D}\left(\frac{\partial f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})}{\partial u}\right) + \overline{D}\left(\frac{\partial f^{-1,-1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})}{\partial u_{-1}}\right) \cdot \frac{\partial f^{-1,1}(u, u_{-1}, \overline{u}_{-1})}{\partial \overline{u}_1}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{x_{-1}} = \overline{D}^{-1}\frac{\partial f^{-1,1}}{\partial \overline{u}_1} = -\frac{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}}}.$$

Первое равенство утверждения доказывается аналогично дифференцированием тождества

$$u_1 = f^{1,-1}\left(\overline{u}_1, f(u, u_1, \overline{u}_1), u\right)$$

по $\overline{u}_1$. Лемма доказана. Из леммы 5.4 имеем

$$\widetilde{x} = -\frac{\frac{\partial \widetilde{f}^{1,-1}}{\partial v}}{\frac{\partial \widetilde{f}^{1,-1}}{\partial v_1}} = -\frac{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u} \cdot \phi'(v)}{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u_1} \cdot \phi'(v_1)} = \frac{\phi'(v)}{\phi'(v_1)} x,$$

$$\frac{1}{\widetilde{x}_{-1}} = -\frac{\frac{\partial \widetilde{f}^{-1,-1}}{\partial v}}{\frac{\partial \widetilde{f}^{-1,-1}}{\partial v_{-1}}} = -\frac{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u} \cdot \phi'(v)}{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}} \cdot \phi'(v_{-1})} = \frac{\phi'(v)}{\phi'(v_{-1})} \cdot \frac{1}{x_{-1}}$$

Поэтому $\frac{\partial}{\partial v} = \phi'(v)\frac{\partial}{\partial u}$, а также

$$\widetilde{x} \cdot \widetilde{x}_1 \cdot \ldots \cdot \widetilde{x}_j \frac{\partial}{\partial v_{j+1}} = \phi'(v) \cdot x \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_j \frac{\partial}{\partial u_{j+1}} \tag{5.240}$$

и

$$\frac{1}{\widetilde{x}_{-1}} \cdot \frac{1}{\widetilde{x}_{-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\widetilde{x}_{-j}} \frac{\partial}{\partial v_{-j}} = \phi'(v) \cdot \frac{1}{x_{-1}} \cdot \frac{1}{x_{-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_{-j}} \frac{\partial}{\partial u_{-j}}. \tag{5.241}$$

В силу (5.240), (5.241) из явного выражения (5.219) и формулы

$$\widetilde{Y}_1 = \frac{\partial}{\partial v} + \widetilde{x}\frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{1}{\widetilde{x}_{-1}}\frac{\partial}{\partial v_{-1}} + \widetilde{x}\widetilde{x}_1\frac{\partial}{\partial v_2} + \frac{1}{\widetilde{x}_{-1}\widetilde{x}_{-2}}\frac{\partial}{\partial v_{-2}} + \ldots$$

находим искомую связь

$$\widetilde{Y}_1 = \phi'(m, n, v) Y_1. \tag{5.242}$$

Очевидно, что $X_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}}$ и $\widetilde{X}_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{v}_{-1}}$ связаны равенством

$$\widetilde{X}_1 = \phi'(m, n-1, \overline{v}_{-1}) X_1. \tag{5.243}$$

Применяя к (5.242), (5.243) оператор сопряжения (5.222) и воспользовавшись равенствами

$$Z_{j+1} = \overline{D}^{-j} Y_1 \overline{D}^j, \quad X_{j+1} = \overline{D}^{-j} X_j \overline{D},$$

находим

$$\widetilde{Z}_{j+1} = \phi(m, n-j, \overline{v}_{-j}) Z_{j+1}, \quad \widetilde{X}_{j+1} = \phi(m, n-j-1, \overline{v}_{-j-1}) X_{j+1}. \tag{5.244}$$

5.3. S-интегрируемые дискретные уравнения. В этом разделе исследуются характеристические операторы S-интегрируемых дискретных уравнений вида (5.216), т.е. уравнений солитонного типа. Пусть кольцо Ли T порождается векторными полями X и Y. Обозначим через V_j, $j \geq 0$ линейное пространство над полем локально-аналитических функций, натянутое на X, Y и все кратные коммутаторы операторов X, Y порядка меньше или равного j так, что

$$V_0 = \{X, Y\}, \quad V_1 = \{X, Y, [X, Y]\},$$
$$V_2 = \{X, Y, [X, Y], [X, [X, Y]], [Y, [X, Y]]\}, \dots .$$

Введем функцию $\triangle(k) = \dim V_{k+1} - \dim V_k$.

Определение 5.2. *Назовем T кольцом минимального роста, если найдется последовательность натуральных чисел $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\triangle(t_k) \leqslant 1$.*

Обозначим через T_{kj} кольцо Ли, порожденное операторами X_k, Y_j. Следующая гипотеза представляется правдоподобной.

Предложение 5.1. *Пусть уравнение* (5.216) *S-интегрируемо, тогда для любых $k, j \geq 1$ соответствующее кольцо T_{kj} является кольцом минимального роста.*

В качестве примера рассмотрим дискретное потенциированное уравнение КдФ

$$u_{1,1} = u + \frac{1}{u_1 - \overline{u}_1}. \tag{5.245}$$

Представим (5.245) в двух различных формах $(u - u_{-1,-1})(\overline{u}_{-1} - u_{-1}) = 1$ и $(u_1 - \overline{u}_{-1})(u_{1,-1} - u) = 1$. Откуда имеем

$$u_{-1,-1} = u + \frac{1}{u_{-1} - \overline{u}_{-1}} := f^{-1,-1}, \quad u_{1,-1} = u + \frac{1}{u_1 - \overline{u}_{-1}} := f^{1,-1}.$$

Следовательно,

$$x = -\frac{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial u_1}} = (u_1 - \overline{u}_{-1})^2,$$
$$\frac{1}{x_{-1}} = -\frac{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u}}{\frac{\partial f^{-1,-1}}{\partial u_{-1}}} = (u_{-1} - \overline{u}_{-1})^2,$$
$$p = \frac{1}{\frac{\partial f^{1,-1}}{\partial \overline{u}_{-1}}} = (u_1 - \overline{u}_{-1})^2.$$

Поэтому

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u} + (u_1 - \overline{u}_{-1})^2 \frac{\partial}{\partial u_1} + (u_{-1} - \overline{u}_{-1})^2 \frac{\partial}{\partial u_{-1}} + \dots . \tag{5.246}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&Y_1 x = Y_1 (u_1 - \overline{u}_{-1})^2 = 2(u_1 - \overline{u}_{-1})^3 = 2x\sqrt{x},\\
&Y_1 x_{-1} = Y_1 (u_{-1} - \overline{u}_{-1})^{-2} = 2\sqrt{x_{-1}},\\
&X_1 x = \tfrac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}} (u_1 - \overline{u}_{-1})^2 = -2(u_1 - \overline{u}_{-1}) = -2\sqrt{x},\\
&X_1 x_{-1} = \tfrac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}} (u_{-1} - \overline{u}_{-1})^{-2} = -2(u_{-1} - \overline{u}_{-1})^{-3} = -2x_{-1}\sqrt{x_{-1}}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим кольцо $T_{1,1}$, порожденное операторами (см. (5.246)) Y_1 и $X_1 = \frac{\partial}{\partial \overline{u}_{-1}}$. Построим последовательность кратных коммутаторов

$$R_1 = [X_1, Y_1], \quad P_1 = [X_1, R_1], \quad Q_1 = [Y_1, R_1],$$
$$R_{k+1} = [X_1, Q_k], \quad P_k = [X_1, R_k], \quad Q_k = [Y_1, R_k], \quad k \geq 1.$$

Теорема 5.2. *Последовательность $X_1, Y_1, R_1, P_1, Q_1, R_2, P_2, Q_2, \dots$ образует базис кольца $T_{1,1}$ (см. [42]).*

Доказательство. Воспользуемся равенствами $DX_1D^{-1} = xX_1$ и $D(yY_1)D^{-1} = Y_1$, где $y = x_{-1}$, и запишем $[DX_1D^{-1}, D(yY_1)D^{-1}] = [xX_1, Y_1]$. Приведем последнее равенство к виду

$$D(R_1 - 2\sqrt{y}Y_1)D^{-1} = R_1 - 2\sqrt{x}X_1. \tag{5.247}$$

Симметричная форма записи наиболее проста и удобна. Прокоммутируем (5.247), сохраняя симметричность с $DX_1D^{-1} = xX_1$:

$$[D(R_1 - 2\sqrt{y}Y_1)D^{-1}, DX_1D^{-1}] = [R_1 - 2\sqrt{x}X_1, xX_1].$$

Последнее равенство приводится к виду

$$D(P_1 - 2\sqrt{y}R_1 + 2yY_1)D^{-1} = x(P_1 + 2X_1). \tag{5.248}$$

Коммутируя (5.247) с $D(yY_1)D^{-1} = Y_1$, получим

$$D(y(Q_1 - 2Y_1))D^{-1} = Q_1 + 2\sqrt{x}R_1 - 2xX_1. \tag{5.249}$$

Прокоммутируем $DX_1D^{-1} = xX_1$ с равенством (5.248), тогда

$$D\left([X_1, P_1] - 2\sqrt{y}P_1 + 4yR_1 - 4y\sqrt{y}Y_1\right)D^{-1} = x^2[X_1, P_1] - 2x\sqrt{x}P_1 - 4x\sqrt{x}X_1.$$

Вычтем из последнего равенства почленно равенство (5.248), помноженное на $2\sqrt{x}$, и в результате получим $D[X_1, P_1] = x^2[X_1, P_1]$. Из последнего, в силу леммы 5.3, следует, что $[X_1, P_1] = 0$. Аналогично проверяется, что $[Y_1, Q_1] = 0$.

Можно проверить, что действие автоморфизма (5.223) на операторы R_2, P_2, Q_2 записывается в виде

$$\begin{gathered}
D(R_2 - 2\sqrt{y}Q_1)D^{-1} = R_2 + 2\sqrt{x}P_1,\\
D(P_2 + 2\sqrt{y}R_2 - 2yQ_1)D^{-1} = x(P_2 - 2P_1),\\
D(y(Q_2 - 2Q_1))D^{-1} = Q_2 + 2\sqrt{x}R_2 + 2xP_1.
\end{gathered}$$

По индукции можно доказать, что при любом $j > 1$ выполнены соотношения

$$\begin{gathered}
D(R_j - 2\sqrt{y}Q_{j-1})D^{-1} = R_j + 2\sqrt{x}P_{j-1},\\
D(P_j + 2(-1)^j\sqrt{y}R_j + 2(-1)^{j-1}yQ_{j-1})D^{-1} = x(P_j - 2P_{j-1}),\\
D(y(Q_j - 2Q_{j-1}))D^{-1} = Q_j + 2\sqrt{x}R_j - 2xP_{j-1}X,
\end{gathered}$$

причем $[X_1, P_j] = 0$, $[Y_1, Q_j] = 0$, $[Y_1, P_j] = [X, Q_j]$, $[R_j, P_k] = P_{k+j}$, $[R_j, Q_k] = -Q_{k+j}$, $[R_j, R_k] = 0$, $[P_j, Q_k] = -R_{k+j+1}$, $[P_j, P_k] = 0$, $[Q_j, Q_k] = 0$. Теорема доказана.

Следствие 5.1. *Кольцо $T_{1,1}$ является кольцом минимального роста.*

Доказательство. По построению имеем $V_0 = \{X_1, Y_1\}$, $V_1 = V_0 \oplus \{R_1\}$, $V_2 = V_1 \oplus \{P_1, Q_1\}$, …, $V_{2k-1} = V_{2k-2} \oplus \{R_k\}$, $V_{2k} = V_{2k-1} \oplus \{P_k, Q_k\}$, …. Поэтому $\triangle(2k+1) = \dim V_{2k+2} - \dim V_{2k+1} = 2$, $\triangle(2k) = \dim V_{2k+1} - \dim V_{2k} = 1$ для любого $k \geq 0$.

В работах [42, 51] исследовалась связь свойства интегрируемости уравнения (5.216) и свойство минимального роста колец $T_{j,k}$.

В работе [42] доказано следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть для кольца Ли $T_{1,1}$ дискретного уравнения вида*

$$u_{1,1} = u + \phi(u_1 - \overline{u}_1) \tag{5.250}$$

выполняется условие: существует хотя бы одно натуральное число k такое, что $\Delta(k) \leqslant 1$. Тогда точечной заменой уравнение сводится к одному из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
&(1) \quad u_{1,1} = u + c(u_1 - \overline{u}_1 - \beta),\\
&(2) \quad (u_{1,1} - u - \alpha)(u_1 - \overline{u}_1 - \beta) = \gamma,\\
&(3) \quad (\alpha u_1 + \beta\overline{u}_1)u_{1,1} + u(\gamma u_1 - \delta\overline{u}_1) = 0.
\end{aligned}$$

Отметим, что в этой теореме на кольцо Ли накладывается очень слабое требование, существование последовательности натуральных чисел для которых выполняется $\Delta(k) \leqslant 1$, заменено требованием, что существует хотя бы одно такое число. При этом получен некий список уравнений, и все они интегрируемы. Уравнение (1) является линейным, уравнение (2) – дискретное потенциированное уравнение Кортевега де Фриза, а уравнение (3) принадлежит известному списку Адлера, Бобенко, Суриса (АБС) (см. [45]).

В работе [51] уравнение вида

$$u_{1,1} + u = \phi(u_1 + \overline{u}_1) \tag{5.251}$$

исследуется при аналогичном требовании.

Теорема 5.4. *Пусть для кольца $T_{1,1}$ дискретного уравнения* (5.251) *выполнено условие: существует хотя бы одно натуральное число k такое, что $\Delta(k) \leqslant 1$. Тогда уравнение* (5.251) *точечной заменой приводится к одному из уравнений:*

$$\begin{array}{ll} (1) & u_{1,1} + u = c(u_1 - \overline{u}_1 - \beta), \\ (2) & (u_{1,1} + u - \alpha)(u_1 + \overline{u}_1 - \beta) = \gamma, \\ (3) & \alpha_1 u\overline{u}_1 u_{1,1} + \alpha_2 u u_{1,1} + \alpha_3 u_1 \overline{u}_1 + \alpha_4 = 0. \end{array}$$

Отметим, что уравнение (2) интегрируемо при $\alpha = \beta$, так как сводится к потенциированному уравнению КдФ, а уравнение (3) при $\alpha_3 = \pm\alpha_2$ сводится к известному уравнению из списка АБС. В остальных случаях эти уравнения неинтегрируемы.

6. Перспективы алгебраического метода

6.1. Характеристические кольца уравнений „n-волн“. Рассматривается система уравнений гиперболического типа в частных производных

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_i \frac{\partial}{\partial x}\right) u^i = \phi_i(u^1, u^2, \ldots, u^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.252}$$

Здесь a_i – произвольные постоянные и ϕ_i – произвольные функции. Когда функции ϕ_i являются квадратичными, то имеем систему уравнений n-волн [63]. Для определения двух характеристических направлений введем независимые переменные ξ и η так

$$\frac{\partial}{\partial t} + a_{i_0}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} + a_{i_1}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

В новых переменных система принимает вид

$$\begin{aligned} p_\xi &= f(p, q, r), \\ q_\eta &= \phi(p, q, r), \\ r_\xi &= r_\eta A + \psi(p, q, r), \end{aligned} \tag{6.253}$$

где $f = (f^1, f^2, \ldots, f^s)$, $\phi = (\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^l)$, $\psi = (\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^m)$, $p = (u^{i_1}, u^{i_2}, \ldots, u^{i_s})$, $q = (u^{j_1}, u^{j_2}, \ldots, u^{j_l})$, $r = (u^{k_1}, u^{k_2}, \ldots, u^{k_m})$, $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, $\forall i\ \lambda_i \neq 0$, где $p = (p^1, p^2, \ldots, p^s)$, $q = (q^1, q^2, \ldots, q^l)$, $r = (r^1, r^2, \ldots, r^m)$. Обозначим через F ($\bar{F}$) множество локально-аналитических функций, зависимых от конечного числа переменных $p, q, r, q_1, r_1, q_2, r_2, \ldots, q_i, r_i, \ldots$ ($p, q, r, \bar{p}_1, \bar{r}_1, \bar{p}_2, \bar{r}_2, \ldots, \bar{p}_i, \bar{r}_i, \ldots$). Здесь $q_i = D^i q$, $r_i = D^i r$, $\bar{p}_i = \bar{D}^i p$, $\bar{r}_i = \bar{D}^i r$, $i = 1, 2, \ldots$, $D = \frac{d}{d\xi}$, $\bar{D} = \frac{d}{d\eta}$. Оператор полного дифференцирования $\bar{D}$

по переменной η на множестве F определяется следующим образом

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \sum_{i=1}^{s}\bar{p}_1^i\frac{\partial}{\partial p^i}+\sum_{i=1}^{l}\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_1^i-\frac{1}{\lambda_i}\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i}+\\ &+ \sum_{i=1}^{l}D\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_1^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_2^i-\frac{1}{\lambda_i}D\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_1^i}+\ldots \\ &+ \sum_{i=1}^{l}D^n\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_n^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_{n+1}^i-\frac{1}{\lambda_i}D^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_n^i}+\ldots .\end{aligned}\tag{6.254}$$

Рассматривая векторные поля $X_i=\frac{\partial}{\partial p^i}$, $i=1,2,\ldots,s$ и

$$\begin{aligned}X_{s+1} &= \sum_{i=1}^{l}\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_1^i-\frac{1}{\lambda_i}\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i}+\\ &+ \sum_{i=1}^{l}D\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_1^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_2^i-\frac{1}{\lambda_i}D\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_1^i}+\ldots \\ &+ \sum_{i=1}^{l}D^n\phi^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial q_n^i}+\sum_{i=1}^{m}[\frac{1}{\lambda_i}r_{n+1}^i-\frac{1}{\lambda_i}D^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r_n^i}+\ldots ,\end{aligned}\tag{6.255}$$

получаем, что $\bar{D}=\sum_{i=1}^{s}\bar{p}_1^iX_i+X_{s+1}$.

Определение 6.1. *Кольцо Ли R_ξ над полем F, порожденное векторными полями $X_1,X_2,\ldots,X_{s+1}$, называется характеристическим кольцом Ли по направлению ξ системы уравнений* (6.252).

Аналогично определим характеристическое кольцо Ли R_η в направлении η. Последнее порождается следующими векторными полями

$$\begin{aligned}Y_i &= \frac{\partial}{\partial q^i},\quad i=1,2,\ldots,l,\\ Y_{l+1} &= \sum_{i=1}^{s}f^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial p^i}+\sum_{i=1}^{m}[\lambda_i\bar{r}_1^i+\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial r^i}+\ldots \\ &+ \sum_{i=1}^{s}\bar{D}^nf^i(p,q,r)\frac{\partial}{\partial\bar{p}_n^i}+\sum_{i=1}^{m}[\lambda_i\bar{r}_{n+1}^i+\bar{D}^n\psi^i(p,q,r)]\frac{\partial}{\partial\bar{r}_n^i}+\ldots .\end{aligned}\tag{6.256}$$

В этом случае оператор полного дифференцирования D по переменной ξ на множестве $\bar{F}$ имеет вид $D=\sum_{i=1}^{l}q_1^iY_i+Y_{l+1}$.

6.2. Эволюционные уравнения.

6.2.1. Кольца Ли эволюционных уравнений. Рассмотрим уравнения эволюционного типа

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^n u}{\partial x^n}).\tag{6.257}$$

Для определения векторных полей, порождающих кольцо Ли уравнения (6.257), будем исследовать вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}=F(u,\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}}),\tag{6.258}$$

где $F = Df$, D–оператор полного дифференцирования по переменной x. Определим оператор $\bar{D}$ в пространстве локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $u, u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots$ $(u_n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n})$ по правилу

$$\bar{D} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + F\frac{\partial}{\partial u_1} + DF\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + D^{n-1}F\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots .$$

Введем векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = F\frac{\partial}{\partial u_1} + DF\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + D^{n-1}\frac{\partial}{\partial u_n} + \ldots .$$

Определение 6.2. *Кольцо Ли R, порожденное векторными полями X_1 и X_2, называется характеристическим кольцом Ли уравнения* (6.257).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 6.1. *Если* $\dim R < \infty$, *то правая часть* $F(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n+1} u}{\partial x^{n+1}})$ *уравнения* (6.258) *является квазиполиномом по переменной u.*

Доказательство. Так как $[D, \bar{D}] = 0$, то, используя $[D, \bar{D}] = [D, \frac{\partial u}{\partial t}X_1 + X_2]$, имеем

$$[D, X_1] = 0, \qquad [D, X_2] = FX_1. \tag{6.259}$$

Теперь положим $X_3 = [X_1, X_2]$ и, используя тождество Якоби и соотношения (6.259), получаем

$$[D, X_3] = \frac{\partial F}{\partial u}X_1. \tag{6.260}$$

Определим последовательность векторных полей X_i, $i = 4, 5, \ldots$ следующим образом: $X_i = [X_1, X_{i-1}]$. Как и выше, получаем, что

$$[D, X_i] = \frac{\partial^{i-2} F}{\partial u^{i-2}}X_1, \quad i = 4, 5, \ldots . \tag{6.261}$$

Пусть кольцо R конечномерно. Тогда найдется m такое, что векторные поля $X_2, X_3, \ldots, X_m$ линейно независимы, а

$$X_{m+1} = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i X_i, \tag{6.262}$$

где коэффициенты α_i, $i = 2, 3, \ldots, m$ являются функциями переменных $u, u_1, u_2, \ldots$.

В силу (6.262) имеем $[D, X_{m+1}] = \sum_{i=2}^{m} D(\alpha_i)X_i + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i[D, X_i]$. Последнее, согласно (6.261), перепишем так

$$\frac{\partial^{m-1} F}{\partial u^{m-1}}X_1 = \sum_{i=2}^{m} D(\alpha_i)X_i + \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{\partial^{i-2} F}{\partial u^{i-2}}X_1.$$

Так как векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_m$ линейно независимы, то получаем, что

$$D(\alpha_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, m, \tag{6.263}$$

$$\frac{\partial^{m-1} F}{\partial u^{m-1}} = \sum_{i=2}^{m} \alpha_i \frac{\partial^{i-2} F}{\partial u^{i-2}}. \tag{6.264}$$

Из этих уравнений следует, что α_i является постоянной и F – квазиполином по переменной u. Лемма доказана.

Замечание 6.1. *Если кольцо Ли R эволюционного уравнения конечномерно, то правая часть $f(u, u_1, \ldots, u_n)$ есть решение согласно* (3.141) *следующего уравнения в частных производных*

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial u^{m-1}}\left(\sum_{i=0}^{n} u_{i+1}\frac{\partial f}{\partial u_i}\right) = \sum_{i=2}^{m}\alpha_i\left(\frac{\partial^{i-2}}{\partial u^{i-2}}\sum_{k=0}^{n} u_{k+1}\frac{\partial f}{\partial u_k}\right).$$

Приведем примеры колец Ли уравнений эволюционного типа.

Пример 6.1. *Рассматриваем уравнение вида*

$$u_t = u_x + u^2.$$

Подействовав оператором D, получаем, что $u_{xt} = u_{xx} + 2uu_x$.

Из соотношения

$$D_tF(u, u_1, u_2, \ldots) = (u_t\frac{\partial}{\partial u} + f\frac{\partial}{\partial u_1} + Df\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots)F = (u_tX_1 + X_2)F$$

имеем

$$D_t = u_tX_1 + X_2, \tag{6.265}$$

где $f = u_{xx} + 2uu_x$.

Лемма 6.2. *Векторное поле $Y = a_1(u, u_1, \ldots, u_{n_1})\frac{\partial}{\partial u_1} + a_2(u, u_1, \ldots, u_{n_2})\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots$ коммутирует с оператором D если и только если $Y = 0$.*

Доказательство вытекает из формулы $[D, Y] = (Da_1\frac{\partial}{\partial u_1} + Da_2\frac{\partial}{\partial u_2} + Da_3\frac{\partial}{\partial u_3} + \ldots) - -a_1\frac{\partial}{\partial u} - a_2\frac{\partial}{\partial u_1} - a_3\frac{\partial}{\partial u_2} - \ldots$.

Согласно (6.265) и $[D, D_t] = 0$ имеем

$$fX_1 + u_t[D, X_1] + [D, X_2] = 0.$$

Последнее соотношение распадается на два уравнения $[D, X_1] = 0$ и $[D, X_2] = -fX_1$.

Введем операторы $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$, $X_5 = [X_2, X_3]$. Легко показать, что $[D, X_3] = -2u_1X_1$ и $[D, X_4] = 0$. Из утверждения леммы следует, что $X_4 = 0$.

Так как оператор $X_3 = 2u_1\frac{\partial}{\partial u_1} + 2u_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \ldots$., то

$$[D, X_5] = (X_3f)X_1 + [X_2, -2u_1X_1] = (4u_1u + 2u_2)X_1 + 2u_1X_3 - 2fX_1,$$

или $[D, X_5] = 2u_1X_3$.

Докажем, что базис кольца состоит из операторов X_1, X_2, X_3, X_5. Видно, что $[X_1, X_5] = 0$. Рассмотрим $X_7 = [X_2, X_5]$. Непосредственными вычислениями получим, что $[D, X_7] = -4u_1^2X_1 + 2u_1X_5 + 2fX_3$, поэтому $X_7 = 2u_1X_3 + 2uX_5$. Теперь рассмотрим оператор $X_8 = [X_3, X_5]$. Вычислим $[D, X_8]$:

$$[D, X_8] = -[X_5, [D, X_3]] + [X_3, [D, X_5]] = 2X_5(u_1)X_1 + 2X_3(u_1)X_3 = 4u_1X_3.$$

Сравнивая соотношения $[D, X_8] = 4u_1X_3$ и $[D, X_5] = 2u_1X_3$, имеем $X_8 = 2X_5$. Отсюда следует, что кольцо Ли данного уранения четырехмерно, и элементы X_1, X_2, X_3, X_5 линейно независимы.

Пример 6.2. *Уравнение Бюргерса*

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x.$$

Соответствующее уравнение (6.258) *имеет вид*

$$u_{xt} = u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2. \tag{6.266}$$

Характеристические векторные поля

$$X_1 = \tfrac{\partial}{\partial u}, \quad X_2 = (u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)\tfrac{\partial}{\partial u_1} + (u_4 + 2uu_3 + 6u_1u_2)\tfrac{\partial}{\partial u_2} + \ldots + \\ +(u_{n+1} + 2uu_n + \ldots)\tfrac{\partial}{\partial u_n} + \ldots.$$

Здесь

$$X_3 = [X_1, X_2] = 2D - 2u_1X_1, \tag{6.267}$$

где $D = u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + u_n\frac{\partial}{\partial u_{n-1}} + \ldots$.

Из соотношения $[D, \bar{D}] = 0$ *следует*

$$[D, u_tX_1 + X_2] = (u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)X_1 + u_t[D, X_1] + [D, X_2] = 0.$$

Тогда

$$[D, X_1] = 0 \quad \text{и} \quad [D, X_2] = -(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)X_1. \tag{6.268}$$

Используя (6.267) *и* (6.268), *получаем*

$$\begin{gathered} X_4 = [X_1, X_3] = [X_1, 2D - 2u_1X_1] = 0, \\ X_5 = [X_2, X_3] = [X_2, 2D - 2u_1X_1] = \\ = 2(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)X_1 - 2(u_3 + 2uu_2 + 2u_1^2)X_1 + 2u_1X_3. \end{gathered}$$

Откуда $X_4 = 0$, $X_5 = 2u_1X_3$. *Таким образом, базис характеристического кольца уравнения Бюргерса состоит из операторов* X_1, X_2, X_3.

Пример 6.3. *Рассмотрим уравнение Кортевега-де Фриза* $u_t = u_{xxx} + uu_x$. *Уравнение* (6.258) *примет вид*

$$u_{xt} = u_4 + uu_2 + u_1^2. \tag{6.269}$$

Для уравнения (6.269) *нетрудно показать, что* $X_4 = [X_1, X_3] = 0$, $X_5 = [X_2, X_3] = u_1X_3$. *Следовательно, базис характеристического кольца Ли уравнения Кортевега-де Фриза состоит из операторов* X_1, X_2, X_3.

Пример 6.4. *Для модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза* $u_t = u_{xxx} + u^2u_x$ *уравнение* (6.258) *имеет вид*

$$u_{xt} = u_4 + u^2u_2 + 2uu_1^2.$$

Операторы X_1, X_2, $X_3 = [X_1, X_2]$, $X_4 = [X_1, X_3]$ *образуют базис характеристического кольца Ли модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза.*

6.2.2. Присоединенные алгебры Ли. Как следует из примеров, приведенных в разделе 6.2.1, характеристическое кольцо Ли определяет зависимость правой части $f = f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n})$ уравнения (6.257) от переменной u. Здесь мы предполагаем ввести определение кольца Ли, которое бы учитывало также зависимость f от производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$. Для этого перепишем уравнение (6.257) в виде

$$u_t^1 = f^1(u^1, u^2, u^3, \ldots, u^n), \tag{6.270}$$

полагая $u^1 = u$, $u^2 = u_x$, $u^3 = u_{xx}, \ldots, u^n = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$.

Тогда из (6.270) последовательным дифференцированием по x получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} u_t^1 &= f^1(u^1, u^2, \ldots, u^n), \\ u_t^2 &= f^2(u^1, u^2, \ldots, u^n, u_x^n), \\ u_t^3 &= f^3(u^1, u^2, \ldots, u^n, u_x^n, u_{xx}^n), \\ &\ldots, \\ u_t^n &= f^n(u^1, u^2, \ldots, u^n, u_x^n, u_{xx}^n, \ldots, \frac{\partial^{n-1}u^n}{\partial x^{n-1}}). \end{aligned} \tag{6.271}$$

Таким образом, мы от уравнения (6.257) переходим к эволюционной системе уравнений (6.271) относительно неизвестных функций $u^1, u^2, \ldots, u^n$. Теперь, как и в разделе 6.2.1, для определения характеристического кольца Ли системы (6.271) рассмотрим систему вида

$$u_{xt}^i = F^i, \quad F^i = Df^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.272}$$

Характеристическое кольцо Ли системы (6.271) задается оператором $\overline{D}$:

$$\overline{D} = \frac{\partial u^k}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} + F^k \frac{\partial}{\partial u_1^k} + DF^k \frac{\partial}{\partial u_2^k} + \dots,$$

а, именно, векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \quad \dots, \quad X_n = \frac{\partial}{\partial u^n},$$
$$X_{n+1} = F^k \frac{\partial}{\partial u_1^k} + DF^k \frac{\partial}{\partial u_2^k} + \dots.$$

И, наконец, характеристическое кольцо Ли системы (6.271) мы будем называть присоединенным кольцом Ли эволюционного уравнения (6.257).

Так, для уравнения Бюргерса

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x$$

имеем $u_x = v$, $u_{xx} = w$. Тогда системы (6.271) и (6.272) принимают вид

$$\begin{aligned} u_t &= w + 2uv, \\ v_t &= w_x + 2u_x v + 2uv_x, \\ w_t &= w_{xx} + 4u_x v_x + 2u_{xx} v + 2uv_{xx}, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} u_{xt} &= w_x + 2uv_x + 2u_x v, \\ v_{xt} &= w_{xx} + 2u_{xx} v + 2uv_{xx} + 4u_x v_x, \\ w_{xt} &= w_{xxx} + 6u_{xx} v_x + 6u_x v_{xx} + 2u_{xxx} v \end{aligned}$$

соответственно.

6.3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du^i}{dy} = f_i(x, y, u^1, u^2, \dots, u^n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{6.273}$$

Для введения понятия характеристического кольца Ли для уравнений (6.273) будем предполагать, что решение $u^1, u^2, \dots, u^n$ зависит от параметра x. Тогда дифференцированием по переменной x уравнений (6.273) получаем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial u^k}{\partial x}. \tag{6.274}$$

Известно (см, например [56]), что гиперболическая система (6.274) обладает парой характеристических колец Ли, а именно x-характеристическое кольцо Ли X порождается векторными полями

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}, \dots, X_n = \frac{\partial}{\partial u^n},$$
$$X_{n+1} = \frac{\partial}{\partial y} + F_i \frac{\partial}{\partial u_1^i} + DF_i \frac{\partial}{\partial u_2^i} + D^2 F_i \frac{\partial}{\partial u_3^i} + \dots,$$

а y-характеристическое кольцо Ли Y – полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u_1^1}, \quad Y_2 = \frac{\partial}{\partial u_1^2}, \dots, Y_n = \frac{\partial}{\partial u_1^n},$$
$$Y_{n+1} = \frac{\partial}{\partial x} + u_1^i \frac{\partial}{\partial u^i} + F_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_1^i} + \overline{D} F_i \frac{\partial}{\partial \overline{u}_2^i} + \dots,$$

где $D(\overline{D})$ – оператор полного дифференцирования по переменной $x(y)$, $u^i_k = D^k u^i$, $\overline{u}^i_k = \overline{D}^k u^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$.

Теперь x и y – характеристические кольца Ли системы (6.274) будем называть кольцами Ли системы дифференциальных уравнений (6.273).

Исследование системы (6.273) основано на рассмотрении кольца X.

Отметим, что если $\dim X < \infty$, то правые части f_i системы (6.273) являются квазиполиномами переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$.

В качестве примера рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_y = f(y, u). \tag{6.275}$$

Нетрудно показать, что если характеристическое кольцо Ли уравнения (6.275) конечномерно, то правая часть $f(y, u)$ – квазиполином по переменной u.

Например, размерность кольца Ли уравнения

$$u_y = \alpha_0(y) + \alpha_1(y)u + \alpha_2 u^2 \tag{6.276}$$

равна 4, и если u-решение уравнения (6.276), зависящее от параметра x, то выражение $\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u^2_{xx}}{u^2_x}$ не зависит от y, то есть

$$\frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u^2_{xx}}{u^2_x} = f(x).$$

Приведем пример уравнения Риккати (6.276) с кольцом Ли размерности 3. Таким примером является уравнение

$$u_y = \alpha_1(y)u + u^2. \tag{6.277}$$

Для решения уравнения Риккати (6.277), зависящего от параметра x, справедливо соотношение

$$\frac{u_{xx}}{u_x} - 2\frac{u_x}{u} = f(x).$$

Замечание 6.2. *Другой способ определения характеристического кольца Ли системы* (6.273) *основан на замене вида*

$$u^i = \frac{\partial v^i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда система (6.273) *примет вид*

$$\frac{\partial^2 v^i}{\partial x \partial y} = f_i\left(x, y, \frac{\partial v^1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial v^n}{\partial x}\right). \tag{6.278}$$

X- и y-характеристические кольца Ли системы гиперболических уравнений (6.278) будем называть кольцами Ли исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.273).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер В.Э., Старцев С.Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // Теоретическая и математическая физика. Т. 121. № 2. 1999. С. 271–284.
2. Адлер В.Э., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к проблеме интегрируемости* // Теоретическая и математическая физика. Т. 125. № 3. 2000. С. 355–424.
3. Борисов А.Б., Зыков С.А. *Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений* // ТМФ. Т. 115. № 2. 1998. С. 199–214.
4. Борисов А.Б., Зыков С. А., Павлов М.В. *Уравнение Цицейки и размножение нелинейных интегрируемых уравнений* // ТМФ. Т. 131. № 1. 2002. С. 126–134.
5. Бурбаки Н. *Группы и алгебры Ли* Москва: Мир. 1972. 334 с.

6. Гареева Н.В., Жибер А.В. *Интегралы второго порядка гиперболических уравнений и эволюционные уравнения* // Труды международной конференции "Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений". Орел, ОГУ. 1996. С. 39–42.
7. Гурьева А. М., Жибер А. В. *О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений* // Вестник УГАТУ. Т. 6. № 2(13). 2005. С. 26–33.
8. Гюрсес М., Жибер А.В., Хабибуллин И.Т. *Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений*// Уфимск. матем. журн., Т. 4. № 1. 2012. С. 53–62.
9. Желтухина Н.А., Сакиева А.У., Хабибуллин И.Т. *Характеристическая алгебра Ли и интегрируемые по Дарбу дискретные цепочки* // Уфимск. матем. журн., Т. 2. № 4. 2010. С. 39–51.
10. Жибер А.В. *Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий* // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 58. № 4. 1994. С. 33–54.
11. Жибер А.В. *Симметрии и интегралы нелинейных дифференциальных уравнений* // Дисс. ... докт. физ.–мат. наук. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1994.
12. Жибер А.В., Костригина О.С. *Точно интегрируемые модели волновых процессов* // Вестник УГАТУ. Т. 9. № 7(25). 2007. С. 83–89.
13. Жибер А.В., Мукминов Ф.Х. *Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры* // Задачи математической физики и асимптотики их решений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР. 1991. С. 14–32.
14. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *Инварианты Лапласа и характеристические алгебры Ли* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-й Региональной молодежной конференции. 2008. С. 118–122.
15. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *О векторных полях интегрируемых уравнений Клейна-Гордона* // Межвузовский научный сборник, УГАТУ. 2004. С. 131–144.
16. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *О нелинейных гиперболических уравнениях с характеристической алгеброй медленного роста* // Вестник УГАТУ. Т. 7. № 2. 2006. С. 131–136.
17. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу* // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Уфа: РИЦ БашГУ. № 1. 2008. С. 84–92.
18. Жибер А.В., Муртазина Р.Д. *Характеристические алгебры Ли для уравнения* $u_{xy} = f(u, u_x)$ // ФПМ. Гамильтоновы и лагранжевы системы. Алгебры Ли. Т. 12. № 7. 2006. С. 65–78.
19. Жибер А.В., Соколов В.В. *Преобразования Лапласа в классификации интегрируемых квазилинейных уравнений* // Проблемы механики и управления. Уфа: Уфимский научный центр РАН. № 2. 1995. С. 51–65.
20. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. Т. 56. № 1(337). 2001. С. 63–106.
21. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Системы уравнений* $u_x = p(u, v)$, $v_y = q(u, v)$ *обладающие симметриями* // Доклады АН СССР. Т. 277. № 1. 1984. С. 29–33.
22. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой* // Доклады АН СССР. Т. 247. № 5. 1979. С. 1103–1107.
23. Забродин А.В. *Разностные уравнения Хироты* // Теоретическая и математическая физика. Т. 113. № 2. 1997. С. 179–230.
24. Капцов О.В. *Методы интегрирования уравнений в частных производных* М.: Физматлит. 2009. 184 с.
25. Кац В.Г. *Простые непроводимые градуированные алгебры Ли конечного роста* // Изв. АН СССР, сер. матем. № 32. 1968. С. 1323–1367.
26. Костригина О.С. *Двухкомпонентные гиперболические системы уравнений экспоненциального типа с конечномерной характеристической алгеброй Ли* // Уфимск. матем. журн. Т. 1. № 3. 2009. С. 57–64.
27. Костригина О. С. *О нелинейных гиперболических системах уравнений с конечномерной характеристической алгеброй Ли* Труды теоретической и математической физики. Труды 38-й Региональной молодежной конференции 29 января - 2 февраля 2007. УрО РАН ИММ. Екатеринбург. С. 164–168.

28. Кузнецова М.Н. *Симметрии уравнения эллиптического синуса* // Региональная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых по математике и физике: Том 1 – Математика. Уфа: БашГУ. 2007. С. 170–179.
29. Лезнов А.Н. *О полной интегрируемости одной нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных в двумерной пространстве* // ТМФ. Т. 42. № 3. 1980. С. 343–349.
30. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // Теоретическая и математическая физика. Т. 51. № 1. 1982. С. 10–22.
31. Лезнов А.Н., Савельев М.В., Лейтес Д.А. *О полной интегрируемости некоторых нелинейных уравнений струнных теорий* // Докл. Болгарской АН. Т. 35. № 4. 1982. С. 435–438.
32. А.В. Жибер, В.В. Соколов *Метод каскадного интегрирования Лапласа и уравнения, интегрируемые по Дарбу* Учебное пособие. Изд-е Башкирск. ун-та. Уфа. 1996. 56 с.
33. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Соколов В.В. *Симметрийный подход к классификации интегрируемых уравнений* // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев: Наукова думка. 1990. С. 213–279.
34. Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем* // Успехи математических наук. Т. 42. № 4. 1987. С. 3–53.
35. Муртазина Р.Д. *Нелинейные гиперболические уравнения и характеристические алгебры Ли* // Труды института математики и механики УрО РАН. Т. 13. № 4. 2007. С. 102–117.
36. Муртазина Р.Д. *Уравнение* $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$ *с* x*- и* y*-интегралами второго порядка* // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием „Дифференциальные уравнения и их приложения“. Уфа: Гилем. 2011. С. 109–112.
37. Муртазина Р.Д. *Характеристические алгебры Ли и симметрии уравнения мСГ* // Труды Института математики с ВЦ УНЦ РАН. Уфа: РИЦ БашГУ. № 1. 2008. С. 156–164.
38. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения* // Функц. анализ. Т.16. № .4. 1982. С. 86–87.
39. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями* // Деп.ВИНИТИ. 1982. С. 3927–82.
40. Свинолупов С.И. *Йордановы алгебры и обобщенные уравнения Кортевега–де Фриза* // ТМФ. Т.87. № 3. 1991. С. 391–403.
41. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных* М.: Ил. 1957. 443 с.
42. Хабибуллин И.Т., Гудкова Е.В. *Алгебраический метод классификации* S*-интегрируемых дискретных моделей* // Теоретическая и математическая физика. Т. 167. № 3. 2011. С. 407–419.
43. Хабибуллин И.Т., Пекан А. *Характеристическая алгебра Ли и классификация полудискретных моделей* // Теоретическая и математическая физика. Т. 151. № 3. 2007. С. 413–423.
44. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* Препринт БФАН СССР, Уфа. 1981. 23 с.
45. V.E. Adler , A.I. Bobenko and Yu.B. Suris *Classification of integrable equations on quad-graphs* // The consistency approach, Commun. Math. Phys. V. 233. 2003. P. 513–43.
46. M.Gürses and A. Karasu *Variable Coefficient Third Order KdV Type of Equations* // J. Math. Phys. V. 36. 1995. 3485.
47. M.Gürses, A. Karasu, and R. Turhan *Nonautonomous Svinolupov Jordan KdV Systems* // J. Phys. A. V. 34. 2001. P. 5705-5711; arXiv:nlin/0101031v1 [nlin.SI].
48. M.Gürses and A. Karasu *Integrable KdV Systems: Recursion Operators of Degree Four* // Phys. Lett. A. V. 214. 1996. P. 21-26 (1996); V. 251. 1999. P. 247-249; arXiv:solv-int/9811013v1 (1998).
49. E. Goursat *Lecons sur l'integration des equations aux derivees partielles du second ordre a deux variables independantes* Paris: Hermann. V. I,II. 1896, 1898. 226 p., 345 p.
50. I.T. Habibullin *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations* // Symmetry Integrability Geom.: Methods Appl. V. 1. Paper 023. 2005. 9 pages.
51. I.T. Habibullin, E.V. Gudkova, *Classification of integrable discrete Klein-Gordon models* // Physica Scripta. V. 83. 2011. 045003. (arXiv : nlin/1011.3364).
52. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. V. 50. № 102710. 2009. (23 pages)

53. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *On the classification of Darboux integrable chains* // J. Math. Phys. V. 49. № 10. 2008. (40 pages)
54. I.T. Habibullin, N. Zheltukhina, A. Pekcan *On Some Algebraic Properties of Semi-Discrete Hyperbolic Type Equations* // Turk. J. Math. V. 32. 2008. P. 1–17.
55. J. Hietarinta and C. Viallet *Discrete Painleve I and singulatity confinement in projective space Chaos Solitons Fractals*
№ 11. 2000. P. 29–32.
56. O.S. Kostrigina, A.V. Zhiber *Darboux-integrable two-component nonlinear hyperbolic system of equations* // J. Math. Phys. 52:033503 suppl. (2011) doi:10.1063/1.3559134 (32 pages).
57. A.N. Leznov, M.V. Saveliev *Representation of zero curvature for the system of nonlinear partial differential equations* $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp(Kx)_\alpha$ *and its integrability* // Lett. Math. Phys. № 3. 1973. P. 489–494.
58. F.W. Nijhoff, H.W. Capel *The discrete Korteweg-de Vries equation* // Acta.Appl.Math. V. 39. 1995. P. 133–158.
59. Svinolupov S.I. Svinolupov *On the analogues of the Burgers Equation* Phys. Lett. A. V. 135. № 1. 1989. P. 32–36.
60. E. Vessiot *Sur les equations aux derivees partialles du second order,* $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, *inteqrables par la methode de Darboux* // J. Math. Pure Appl. V. 18. № 9. 1939. P. 1–61.
61. E. Vessiot *Sur les equations aux derivees partialles du second order,* $F(x, y, p, q, r, s, t) = 0$, *inteqrables par la methode de Darboux* // J. Math. Pure Appl. V. 21. № 9. 1942. P. 1–68.
62. R. Yamilov *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. V. 39. 2006. R541-R623.
63. V.E. Zakharov, S.V. Manakov *The theory of resonance interaction of wave packets in nonlinear media* // Soviet Physics JETP. V. 42. 1975. P. 842.

Анатолий Васильевич Жибер,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: zhiber@mail.com

Регина Димовна Муртазина,
Уфимский государственный авиационный технический университет,
ул. Карла Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: ReginaUFA@yandex.ru

Исмагил Талгатович Хабибуллин,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: habibullinismagil@gmail.com

Алексей Борисович Шабат,
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН,
ул. Косыгина, 2,
119334, г. Москва, Россия
E-mail: shabatab@mail.ru

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 86-103.

УДК 517.95

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОДСТАНОВКАМИ С УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

М.Н. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. В настоящей работе проведена полная классификация нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$, сводящихся дифференциальными подстановками специального вида $v = \varphi(u, u_x)$ к уравнению Клейна-Гордона $v_{xy} = F(v)$.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические уравнения, дифференциальные подстановки, уравнение Клейна-Гордона.

1. Введение

В настоящей статье рассматриваются нелинейные гиперболические уравнения вида

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{1.1}$$

Дифференциальные подстановки широко применяются при исследовании интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений. Иногда, при помощи дифференциальных подстановок удается получить решение уравнения из решения другого, хорошо изученного уравнения. Отличительным признаком интегрируемости уравнения является наличие симметрий. В работе [1] было доказано, что нелинейное уравнение Клейна-Гордона

$$v_{xy} = F(v) \tag{1.2}$$

обладает высшими симметриями тогда и только тогда, когда оно эквивалентно либо уравнению Лиувилля

$$v_{xy} = \exp v, \tag{1.3}$$

либо уравнению синус-Гордона

$$v_{xy} = \sin v, \tag{1.4}$$

либо уравнению Цицейки

$$v_{xy} = \exp v + \exp(-2v). \tag{1.5}$$

В настоящей работе описан класс нелинейных гиперболических уравнений, связанных дифференциальными подстановками специального вида с уравнением Клейна-Гордона.

Для того чтобы сформулировать строгие утверждения и определения, отметим следующее. Поскольку, через u мы обозначаем любое решение уравнения (1.1), то все смешанные производные функции u выражаются через

$$u, \quad u_x, \quad u_y, \quad u_{xx}, \quad u_{yy}, \dots \tag{1.6}$$

M.N. Kuznetsova, On nonlinear hyperbolic differential equations related to the Klein-Gordon equation by differential substitutions.

© Кузнецова М.Н. 2012.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-97005-р-поволжье-а, 12-01-31208-мол-а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (соглашение №8499).

Поступила 26 марта 2012 г.

в силу уравнения (1.1) и его дифференциальных следствий и исключаются изо всех выражений. При этом, переменные (1.6) считаются независимыми, так как их нельзя связать между собой, пользуясь уравнением (1.1) и его дифференциальными следствиями.

Определение 1. *Соотношение*

$$v = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial y^m}\right) \tag{1.7}$$

называется дифференциальной подстановкой из уравнения (1.1) *в уравнение*

$$v_{xy} = g(v, v_x, v_y), \tag{1.8}$$

если для любого решения $u(x, y)$ *уравнения* (1.1) *функция* (1.7) *удовлетворяет уравнению* (1.8).

Прежде чем приступить к подробному изложению сути данной работы, кратко коснемся некоторых публикаций, посвященных дифференциальным подстановкам. Как известно (см. [2–4]), одним из критериев интегрируемости нелинейного уравнения является обрыв с двух сторон последовательности инвариантов Лапласа его линеаризации. Такие уравнения принято называть уравнениями лиувиллевского типа. В работах [5, 6] были описаны свойства обобщенных инвариантов Лапласа нелинейных уравнений, обладающих дифференциальными подстановками. Одним из наиболее полных обзоров, посвященных уравнениям лиувиллевского типа, является работа [7]. Необходимо отметить работу [8], которая посвящена нелинейным гиперболическим уравнениям, обладающим симметриями третьего порядка. Мы упоминаем здесь именно эти работы еще и потому, что в них представлено достаточно большое количество примеров дифференциальных подстановок, связывающих пары нелинейных гиперболических уравнений.

Дифференциальные подстановки могут быть частными случаями преобразований Беклунда (см., например, [9]). В статье [10] описаны пары нелинейных уравнений вида (1.1), линеаризации которых связаны преобразованиями Лапласа первого и второго порядка, и для каждой такой пары построено соответствующее преобразование Беклунда.

Цель данной работы — описать все нелинейные гиперболические уравнения (1.1), сводящиеся дифференциальными подстановками

$$v = \varphi(u, u_x) \tag{1.9}$$

к уравнению Клейна-Гордона (1.2). Другими словами, задача состоит в определении функций f, φ и F.

Полный список искомых уравнений и дифференциальных подстановок представлен во втором параграфе настоящей статьи. Третий параграф посвящен доказательству основного результата. Последний раздел посвящен в некотором смысле “обратной” задаче — описанию уравнений (1.2), сводящихся дифференциальными подстановками

$$u = \psi(v, v_y) \tag{1.10}$$

к уравнению (1.1). Кроме этого, для отдельных пар уравнений построены преобразования Беклунда, связывающие их решения.

2. Классификация уравнений, сводящихся к уравнению Клейна-Гордона

Основным результатом работы является следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1.1) *сводится дифференциальной подстановкой* (1.9) *к уравнению Клейна-Гордона* (1.2)*. Тогда уравнения* (1.1), (1.2) *и подстановка* (1.9) *с точностью до точечных преобразований* $u \to \theta(u)$, $v \to \kappa(v)$, $x \to \xi x$, $y \to \eta y$, *где* ξ *и* η —

постоянные, принимают следующий вид:

$$u_{xy} = uF'\bigl(F^{-1}(u_x)\bigr), \quad v_{xy} = F(v), \quad v = F^{-1}(u_x); \tag{2.1}$$

$$u_{xy} = \sin u\sqrt{1-u_x^2}, \quad v_{xy} = \sin v, \quad v = u + \arcsin u_x; \tag{2.2}$$

$$u_{xy} = \exp u\sqrt{1+u_x^2}, \quad v_{xy} = \exp v, \quad v = u + \ln\left(u_x + \sqrt{1+u_x^2}\right); \tag{2.3}$$

$$u_{xy} = \frac{\sqrt{2u_y}}{s'(u_x)}, \quad v_{xy} = F(v), \quad v = s(u_x); \tag{2.4}$$

$$u_{xy} = \frac{c - u_y\varphi_u(u,u_x)}{\varphi_{u_x}(u,u_x)}, \quad v_{xy} = 0, \quad v = \varphi(u,u_x); \tag{2.5}$$

$$u_{xy} = u_x\bigl(\psi(u,u_y) - u_y\alpha'(u)\bigr), \quad v_{xy} = \exp v, \quad v = \alpha(u) + \ln u_x; \tag{2.6}$$

$$u_{xy} = u_x\bigl(\psi(u,u_y) - u_y\alpha'(u)\bigr), \quad v_{xy} = 0, \quad v = \alpha(u) + \ln u_x; \tag{2.7}$$

$$u_{xy} = u, \quad v_{xy} = v, \quad v = c_1u + c_2u_x; \tag{2.8}$$

$$u_{xy} = \delta(u_y), \quad v_{xy} = 1, \quad v = c_1u + c_2u_x. \tag{2.9}$$

Здесь c — произвольная постоянная, c_1 и c_2 такие, что $(c_1,c_2) \neq (0,0)$, функция ψ удовлетворяет условию $(\psi_u, \psi_{u_y}) \neq (0,0)$. В случае (2.4) функции s и F связаны соотношением $s'(u_x)F\bigl(s(u_x)\bigr) = 1$; в случае (2.6) функции ψ и α удовлетворяют соотношению

$$\psi_u + \psi\psi_{u_y} - \alpha' u_y\psi_{u_y} = \exp\alpha,$$

а в случае (2.7) — соотношению

$$\psi_u + \psi\psi_{u_y} - \alpha' u_y\psi_{u_y} = 0;$$

в случае (2.9) функция δ является решением обыкновенного дифференциального уравнения $\delta(c_1 + c_2\delta') = 1$.

Теперь остановимся подробно на некоторых из полученных уравнениях.

Случай (2.1). При $F(v) = \exp v$ получаем уравнение

$$u_{xy} = uu_x, \tag{2.10}$$

которое сводится дифференциальной подстановкой $v = \ln u_x$ к уравнению Лиувилля (1.3). Симметрии третьего порядка, интегралы и общее решение уравнения (2.10) можно найти, например, в [8].

При $F(v) = \sin v$ получаем уравнение

$$u_{xy} = u\sqrt{1-u_x^2}, \tag{2.11}$$

сводящееся дифференциальной подстановкой $v = \arcsin u_x$ к уравнению синус-Гордона (1.4). Симметрии уравнения (2.11) приведены в [8].

При $F(v) = \exp v + \exp(-2v)$ при помощи точечных замен приходим к уравнению

$$u_{xy} = 3ub(u_x). \tag{2.12}$$

Здесь функция b определяется соотношением $(2u_x + b)^2(u_x - b) = 1$. Дифференциальная подстановка $v = -\frac{1}{2}\ln\bigl(u_x - b(u_x)\bigr)$, которая сводит уравнение (2.12) к уравнению Цицейки (1.5), является известной (см. [7]).

Случай (2.2). Уравнение $u_{xy} = \sin u\sqrt{1-u_x^2}$ обладает симметриями третьего порядка [8].

Случай (2.3). Интегралы и общее решение уравнения $u_{xy} = \exp u\sqrt{1+u_x^2}$ можно найти, например, в [8].

Случай (2.4). При $F(v) = v$ получаем известное уравнение Гурса

$$u_{xy} = 2\sqrt{u_xu_y}, \tag{2.13}$$

сводящееся подстановкой $v = \sqrt{2u_x}$ к уравнению Гельмгольца $v_{xy} = v$. Уравнение (2.13) обладает симметриями третьего порядка (см. [8]).

При $F(v) = \sin v$ приходим к S–интегрируемому уравнению [8]

$$u_{xy} = \sqrt{2u_y}\sqrt{1-u_x^2}, \tag{2.14}$$

сводящемуся подстановкой $v = \arccos(-u_x)$ к уравнению синус-Гордона (1.4).

Если $F(v) = \exp v$, то уравнение

$$u_{xy} = u_x\sqrt{2u_y} \tag{2.15}$$

сводится преобразованием $v = \ln u_x$ к уравнению Лиувилля (1.3). Симметрии, интегралы и общее решение для (2.15) можно найти в [8].

Интерес представляет уравнение, полученное при $F(v) = \exp v + \exp(-2v)$, которое после точечной замены может быть записано так:

$$u_{xy} = \sqrt{2u_y}a(u_x). \tag{2.16}$$

Здесь функция a определяется соотношением $2(a+2u_x)^2(a-u_x) = 27$. Дифференциальная подстановка

$$v = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2a(u_x)-2u_x}{3}\right)$$

преобразует решение уравнения (2.16) в решение уравнения Цицейки (1.5). Здесь необходимо отметить, что уравнение (2.16) и последняя подстановка приведены в работе [11]. Указанная подстановка позволяет строить высшие симметрии уравнения (2.16).

Случай (2.5). Уравнение $u_{xy} = \frac{c-u_y\varphi_u(u,u_x)}{\varphi_{u_x}(u,u_x)}$ при $c = 0$ обладает x-интегралом $W = \varphi(u,u_x)$, при $c \neq 0$ — x-интегралом $W = \varphi_{u_x}u_{xx} + \varphi_u u_x$.

Случай (2.6). После замены $v \to v + \ln 2c_2$, $\alpha \to \alpha + \ln 2c_2$ при $\psi = c_1\exp(-u) + c_2\exp(u) + u_y$, $\alpha = u$ получаем уравнение

$$u_{xy} = u_x\big(c_1\exp(-u) + c_2\exp(u)\big), \tag{2.17}$$

которое сводится подстановкой $v = u + \ln u_x$ к уравнению Лиувилля $v_{xy} = 2c_2\exp v$. Симметрии, интегралы и общее решение (2.17) можно найти в [8].

Далее, при $\alpha(u) = u$ приходим к уравнению

$$u_{xy} = u_x\frac{\exp(u) - \psi_u(u,u_y)}{\psi_{u_y}(u,u_y)}$$

с y-интегралом $\bar{W} = \psi(u,u_y) - \exp u$.

В общем случае первое уравнение (2.6) обладает y-интегралом

$$\bar{W} = \psi_{u_y}u_{yy} + \psi_u u_y - \frac{\psi^2}{2}$$

и x-интегралом

$$W = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x^2} + \left(\alpha''(u) - \frac{\alpha'^2(u)}{2}\right)u_x^2.$$

Случай (2.7). Первое уравнение (2.7) имеет интегралы

$$W = \frac{u_{xx}}{u_x} + \alpha'(u)u_x, \quad \bar{W} = \psi(u,u_y).$$

Все указанные выше уравнения, обладающие интегралами, содержатся в списке уравнений лиувиллевского типа, приведенном в обзоре [7].

3. Доказательство основного результата

Для доказательства теоремы 1 проведем следующие преобразования. Подставляем функцию (1.9) в уравнение (1.2), учитывая формулу (1.1)

$$\begin{aligned}\big(\varphi_{uu}u_x+\varphi_{uu_x}u_{xx}\big)u_y+\varphi_u f+\big(\varphi_{u_xu}u_x+\varphi_{u_xu_x}u_{xx}\big)f+\\ +\varphi_{u_x}\big(f_u u_x+f_{u_x}u_{xx}+f_{u_y}f\big)=F(\varphi).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Поскольку переменные u, u_x, u_y и u_{xx} являются независимыми, а все функции, фигурирующие в соотношении (3.1), не зависят от u_{xx}, последнее равенство эквивалентно следующей системе:

$$\begin{gathered}\varphi_{uu_x}u_y+\varphi_{u_xu_x}f+\varphi_{u_x}f_{u_x}=0,\\ \varphi_{uu}u_xu_y+\varphi_u f+\varphi_{uu_x}u_xf+\varphi_{u_x}f_uu_x+\varphi_{u_x}f_{u_y}f=F(\varphi).\end{gathered}\tag{3.2}$$

Интегрируя первое уравнение (3.2) по переменной u_x, приходим к системе

$$\varphi_u u_y+\varphi_{u_x}f=\psi(u,u_y),\quad u_x\psi_u+\big(\varphi_u+\varphi_{u_x}f_{u_y}\big)f=F(\varphi).\tag{3.3}$$

Итак, исходная задача (1.1), (1.2), (1.9) свелась к исследованию системы (3.3). Из первого соотношения (3.3) определям правую часть уравнения (1.1):

$$f=\frac{\psi-u_y\varphi_u}{\varphi_{u_x}}.\tag{3.4}$$

Подставляем функцию (3.4) во второе равенство (3.3)

$$u_x\varphi_{u_x}\psi_u+\psi\psi_{u_y}-u_y\psi_{u_y}\varphi_u=\varphi_{u_x}F(\varphi).\tag{3.5}$$

Применим к левой и правой части соотношения (3.5) оператор $\frac{\partial^2}{\partial u_x\partial u_y}$:

$$\psi_{uu_y}\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}-\varphi_{uu_x}\big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}=0.\tag{3.6}$$

Равенство (3.6) справедливо, если выполнено одно из следующих условий:

$$\psi_{uu_y}=0,\quad \varphi_{uu_x}=0,\tag{3.7}$$

$$\psi_{uu_y}=0,\quad \big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}=0,\tag{3.8}$$

$$\varphi_{uu_x}=0,\quad \big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}=0,\tag{3.9}$$

$$\psi_{uu_y}\varphi_{uu_x}\neq 0.\tag{3.10}$$

Отметим, что если $\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}=0$ и $\big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}=0$, то

$$\varphi=c_1(u)\ln u_x+c_3(u),\quad \psi=c_2(u)\ln u_y+c_4(u).$$

Легко видеть, что данный случай является частым по отношению к (3.8), (3.10).

Покажем теперь, что требование (3.10) приводит к условию (3.7). Действительно, согласно соотношению (3.6), имеем

$$\frac{\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}}{\varphi_{uu_x}}=\frac{\big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}}{\psi_{uu_y}}.\tag{3.11}$$

Так как переменные u_x, u_y независимые, равенство (3.11) эквивалентно системе

$$\frac{\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}}{\varphi_{uu_x}}=\alpha(u),\quad \frac{\big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}}{\psi_{uu_y}}=\alpha(u).$$

Пусть $\alpha\neq 0$, тогда

$$\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}=\alpha(u)\varphi_{uu_x},\quad \big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}=\alpha(u)\psi_{uu_y}.\tag{3.12}$$

Интегрируя каждое уравнение системы (3.12), определяем функции φ и ψ:

$$\varphi=\lambda(u)+h\big(\kappa(u)u_x\big),\quad \psi=\mu(u)+H\big(\kappa(u)u_y\big).\tag{3.13}$$

Требование (3.10) влечет $\kappa' \neq 0$. Теперь вернемся к формулам (1.1) и (3.4), которые дают

$$u_{xy} = \frac{\psi - u_y\varphi_u}{\varphi_{u_x}}$$

или

$$\varphi_{u_x}u_{xy} + u_y\varphi_u = \psi.$$

Последнее соотношение означает, что $\bar{D}(\varphi) = \psi$, где $\bar{D}$ обозначает оператор полного дифференцирования по переменной y. Подставляя сюда функции (3.13), получаем

$$\bar{D}\Big(\lambda(u) + h\big(\kappa(u)u_x\big)\Big) = \mu(u) + H\big(\kappa(u)u_y\big).$$

Сделаем в последнем равенстве точечную замену

$$\int \kappa(u)du = U,$$

после которой оно примет следующий вид:

$$\bar{D}\big(\chi(U) + h(U_x)\big) = \theta(U) + H(U_y).$$

Вводя функции $\phi(U, U_x) = \chi(U) + h(U_x)$, $\Psi(U, U_y) = \theta(U) + H(U_y)$, сводим данный случай к случаю (3.7).

Если же $\alpha = 0$, то соотношения (3.12) дают

$$\varphi = h(u)\ln u_x + \epsilon(u), \quad \psi = H(u)\ln u_y + \delta(u). \tag{3.14}$$

Подставляем функции (3.14) в равенство (3.5)

$$\big(H'\ln u_y + \delta'\big)h + \big(H\ln u_y + \delta\big)\frac{H}{u_y} - \big(h'\ln u_x + \epsilon'\big)H = \frac{h}{u_x}F(h\ln u_x + \epsilon).$$

Откуда $H = 0$, что противоречит условию $\psi_{uu_y} \neq 0$. Случай (3.10) исследован.

Далее, перейдем к описанию уравнений (1.1), (1.2) и дифференциальных подстановок, связывающих их решения в случаях (3.7) – (3.9). Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (3.7). *Тогда уравнения* (1.1), (1.2) *и подстановка* (1.9) *с точностью до точечных преобразований* $u \to \theta(u)$, $v \to \kappa(v)$, $x \to \xi x$, $y \to \eta y$, *где* ξ *и* η *— постоянные, принимают следующий вид:*

$$u_{xy} = \frac{c_1 - u_y q'(u)}{s'(u_x)}, \quad v_{xy} = 0, \quad v = q(u) + s(u_x); \tag{3.15}$$

$$u_{xy} = u_x\left(g(u) - u_y\frac{g''(u)}{g'(u)}\right), \quad v_{xy} = \exp v, \quad v = \ln g'(u) + \ln u_x; \tag{3.16}$$

$$u_{xy} = uF'\big(F^{-1}(u_x)\big), \quad v_{xy} = F(v), \quad v = F^{-1}(u_x); \tag{3.17}$$

$$u_{xy} = u, \quad v_{xy} = v, \quad v = c_1u + c_2u_x, ; \tag{3.18}$$

$$u_{xy} = \sin u\sqrt{1 - u_x^2}, \quad v_{xy} = \sin v, \quad v = u + \arcsin u_x; \tag{3.19}$$

$$u_{xy} = u_x\big(c_1\exp(-u) + c_2\exp(u)\big), \quad v_{xy} = 2c_2\exp v, \quad v = u + \ln u_x; \tag{3.20}$$

$$u_{xy} = \exp(u)\sqrt{1 + u_x^2}, \quad v_{xy} = \exp(v), \quad v = u + \ln\left(u_x + \sqrt{1 + u_x^2}\right); \tag{3.21}$$

$$u_{xy} = \frac{\sqrt{2u_y}}{S'(u_x)}, \quad v_{xy} = F(v), \quad v = S(u_x); \tag{3.22}$$

$$u_{xy} = 0, \quad v_{xy} = 0, \quad v = u + s(u_x); \tag{3.23}$$

$$u_{xy} = \frac{\big(p(u_y) - cu_y\big)c_3}{c_4}, \quad v_{xy} = c_3, \quad v = cu + \frac{c_4}{c_3}u_x. \tag{3.24}$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные, а c, c_3, c_4 — ненулевые постоянные. Функции S и p удовлетворяют уравнениям $S'(u_x)F\big(S(u_x)\big)=1$ и $p'(u_y)\big(p(u_y)-cu_y\big)=c_4$ соответственно.

Доказательство. Пусть выполнено условие (3.7), тогда

$$\varphi=q(u)+s(u_x),\quad \psi=g(u)+p(u_y). \tag{3.25}$$

Подставим функции (3.25) в соотношение (3.5)

$$u_xs'(u_x)g'(u)+\big(g(u)+p(u_y)\big)p'(u_y)-u_yp'(u_y)q'(u)=s'(u_x)F\big(q(u)+s(u_x)\big). \tag{3.26}$$

В силу независимости u_x и u_y, равенство (3.26) эквивалентно системе

$$p'(u_y)\big(u_yq'(u)-g(u)-p(u_y)\big)=\lambda(u),\quad s'(u_x)\big(u_xg'(u)-F(q(u)+s(u_x))\big)=\lambda(u). \tag{3.27}$$

Рассмотрим случай

$$q''(u)\neq 0. \tag{3.28}$$

Из условия (3.28) следует, что $q'(u)\neq 0$. Пусть

$$\lambda(u)=0, \tag{3.29}$$

тогда $p(u_y)=c_3$, где c_3 — произвольная постоянная. Кроме этого, обращаясь ко второму равенству (3.27), имеем

$$F\big(q(u)+s(u_x)\big)=u_xg'(u). \tag{3.30}$$

Дифференцируем последнее равенство по переменным u и u_x

$$F'\big(q(u)+s(u_x)\big)q'(u)=u_xg''(u),\quad F'\big(q(u)+s(u_x)\big)s'(u_x)=g'(u). \tag{3.31}$$

При $F'=0$, используя соотношения (3.31) получаем, что $g'(u)=0$ и $F=0$. Тогда $\psi=c_4$ и $\varphi=q(u)+s(u_x)$, и мы приходим к уравнениям (3.15).

Если же $F'\neq 0$, то из (3.31) следует

$$\frac{1}{s'(u_x)u_x}=\frac{g''(u)}{q'(u)g'(u)}=c\neq 0.$$

Откуда

$$s(u_x)=\frac{1}{c}\ln(c_1u_x),\quad g'(u)=\exp\big(cq(u)+c_2\big).$$

Подставим функции s и g' в формулу (3.30)

$$\begin{aligned}F\big(q(u)+s(u_x)\big)&=u_x\exp\big(cq(u)+c_2\big)=\\ =\exp\left(c\left(q(u)+\frac{1}{c}\ln(c_1u)-\frac{1}{c}\ln c_1\right)+c_2\right)&=\\ =\exp\Big(c\big(q(u)+s(u_x)\big)&+c_2-\ln c_1\Big).\end{aligned}$$

Последнее соотношение означает, что

$$F(v)=\exp\big(cv+c_2-\ln c_1\big).$$

Итак, мы приходим к уравнениям

$$u_{xy}=cu_x\left(g(u)-\frac{1}{c}u_y\frac{g''(u)}{g'(u)}\right),\quad v=\frac{1}{c}\ln g'(u)-\frac{c_2}{c}+\frac{1}{c}\ln(c_1u_x),$$
$$v_{xy}=\exp\big(cv+c_2-\ln c_1\big).$$

После замены $cv+c_2-\ln c_1\to v$ полученные уравнения принимают вид:

$$u_{xy}=u_x\left(cg(u)-u_y\frac{g''(u)}{g'(u)}\right),\quad v=\ln g'(u)+\ln u_x,\quad \frac{1}{c}v_{xy}=\exp v.$$

Замена $cg(u) \to g(u)$ преобразует последнюю систему к виду

$$u_{xy} = u_x \left(g(u) - u_y \frac{g''(u)}{g'(u)} \right),\ v = \ln g'(u) - \ln c + \ln u_x,\ v_{xy} = \exp(v + \ln c).$$

И, наконец, преобразование сдвига $v + \ln c \to v$ приводит к уравнениям (3.16).

Нетрудно показать, что случай $\lambda \neq 0$ не реализуется.

Теперь рассмотрим случай $q'(u) = c$, откуда

$$q(u) = cu + c_3. \tag{3.32}$$

Подставим функцию (3.32) в первое соотношение (3.27)

$$p'(u_y)\big(cu_y - g(u) - p(u_y)\big) = \lambda(u). \tag{3.33}$$

При $g'(u) \neq 0$ равенство (3.33) влечет

$$p'(u_y) = c_1. \tag{3.34}$$

Если $c_1 = 0$, то в силу (3.33) имеем $\lambda(u) = 0$ и $p(u_y) = c_2$. При этом, обращаясь ко второму уравнению (3.27), получаем

$$u_x g'(u) = F\big(cu + s(u_x) + c_3\big).$$

Замена $s(u_x) + c_3 \to s(u_x)$ дает

$$u_x g'(u) = F\big(cu + s(u_x)\big). \tag{3.35}$$

Положим $c = 0$, тогда функции (3.25) и соотношение (3.35) принимают вид:

$$\psi = g(u) + c_2, \quad \varphi = s(u_x), \quad u_x g'(u) = F\big(s(u_x)\big).$$

Замена $g(u) + c_2 \to g(u)$ приводит к формулам

$$\psi = g(u), \quad \varphi = s(u_x), \quad u_x g'(u) = F\big(s(u_x)\big). \tag{3.36}$$

В силу независимости переменных u, u_x и требования $g'(u) \neq 0$ из последнего равенства (3.36) заключаем, что $g'(u) = c_4 \neq 0$, откуда

$$g(u) = c_4 u + c_5. \tag{3.37}$$

Подставим функцию (3.37) в последнее соотношение (3.36)

$$F\big(s(u_x)\big) = c_4 u_x. \tag{3.38}$$

Используя соотношение (3.38), определяем функцию s:

$$s(u_x) = F^{-1}(c_4 u_x).$$

Таким образом, приходим к следующим уравнениям:

$$u_{xy} = \frac{c_4 u + c_5}{\big(F^{-1}(c_4 u_x)\big)' c_4}, \quad v = F^{-1}(c_4 u_x), \quad v_{xy} = F(v).$$

При помощи преобразований растяжения $c_4 u \to u$ и сдвига переменной $u + c_5 \to u$ приводим уравнения к (3.17).

Далее предположим, что $c \neq 0$. Дифференцируем равенство (3.35) по переменным u и u_x независимо

$$u_x g''(u) = cF'\big(cu + s(u_x)\big), \tag{3.39}$$

$$g'(u) = s'(u_x) F'\big(cu + s(u_x)\big). \tag{3.40}$$

Исключаем из соотношений (3.39) и (3.40) функцию F':

$$\frac{g''(u)}{g'(u)} = \frac{c}{u_x s'(u_x)}.$$

В силу независимости u и u_x, последнее равенство эквивалентно системе

$$\frac{g''(u)}{g'(u)} = \alpha, \quad \frac{c}{u_x s'(u_x)} = \alpha, \quad \alpha \neq 0. \tag{3.41}$$

Интегрируя уравнения (3.41) по переменным u, u_x соответственно, получаем

$$g(u) = \frac{1}{\alpha}\exp(\alpha u + \beta) + \delta, \quad s(u_x) = \frac{c}{\alpha}\ln(\gamma u_x). \tag{3.42}$$

Подставим функции (3.42) в (3.35)

$$F\big(cu + s(u_x)\big) = u_x \exp(\alpha u + \beta) = \exp\left(\frac{\alpha}{c}\left(cu + \frac{c}{\alpha}\ln(\gamma u_x) - \frac{c}{\alpha}\ln\gamma\right) + \beta\right) = \\ = \exp\left(\frac{\alpha}{c}\big(cu + s(u_x)\big) - \ln\gamma + \beta\right).$$

Последнее соотношение означает, что

$$F(v) = \exp\left(\frac{\alpha}{c}v - \ln\gamma + \beta\right).$$

Итак, мы приходим к уравнениям

$$u_{xy} = u_x\left(\frac{1}{c}\exp(\alpha u + \beta) + \frac{\alpha}{c}\delta - \alpha u_y\right), \quad v = cu + \frac{c}{\alpha}\ln(\gamma u_x), \\ v_{xy} = \exp\left(\frac{\alpha}{c}v - \ln\gamma + \beta\right).$$

Преобразования сдвига и растяжения $\alpha u \to u$, $\alpha v/c \to v$ дают

$$u_{xy} = u_x\left(\frac{1}{c}\exp(u + \beta) + \frac{\alpha}{c}\delta - u_y\right), \\ v = u + \ln u_x + \ln\gamma - \ln\alpha, \quad v_{xy} = \frac{\alpha}{c}\exp(v - \ln\gamma + \beta).$$

После преобразований $u + \beta - \ln c \to u$, $v - \ln\gamma + \beta + \ln\alpha - \ln c \to v$ полученные уравнения приобретают вид

$$u_{xy} = u_x\left(\exp u + \frac{\alpha}{c}\delta - u_y\right), \quad v = u + \ln u_x, \quad v_{xy} = \exp v.$$

Таким образом, мы получили случай, который является частным по отношению к (3.16).

Далее, при $c_1 \neq 0$, обращаясь к формуле (3.34), получаем, что

$$p(u_y) = c_1 u_y + c_2. \tag{3.43}$$

Подставляя функцию (3.43) в (3.33) после замены $g(u) + c_2 \to g(u)$, имеем

$$c_1\big(cu_y - g(u) - c_1 u_y\big) = \lambda(u).$$

Поскольку переменные u, u_y независимые, из последнего равенства заключаем, что $c = c_1$ и

$$\lambda(u) = -c_1 g(u). \tag{3.44}$$

Подставляем функцию (3.44) во второе соотношение (3.27)

$$s'(u_y)\big(u_x g'(u) - F(c_1 u + c_3 + s(u_x))\big) = -c_1 g(u).$$

После замены $c_3 + s(u_x) \to s(u_x)$ последнее равенство принимает вид

$$F\big(c_1 u + s(u_x)\big) = u_x g'(u) + \frac{c_1 g(u)}{s'(u_x)}. \tag{3.45}$$

Дифференцируем (3.45) по переменным u и u_x независимо

$$c_1 F'\big(c_1 u + s(u_x)\big) = u_x g''(u) + \frac{c_1 g'(u)}{s'(u_x)}, \tag{3.46}$$

$$s'(u_x)F'\big(c_1u+s(u_x)\big)=g'(u)-c_1g(u)\frac{s''(u_x)}{s'^2(u_x)}. \tag{3.47}$$

Из соотношений (3.46) и (3.47) исключаем функцию F':

$$\frac{g''(u)}{g(u)}=-c_1^2\frac{s''(u_x)}{u_xs'^3(u_x)}. \tag{3.48}$$

Поскольку u, u_x независимые, равенство (3.48) эквивалентно системе

$$\frac{g''(u)}{g(u)}=-c_1^2\alpha^2,\quad \frac{c_1^2s''(u_x)}{u_xs'^3(u_x)}=c_1^2\alpha^2,$$

где α — произвольная постоянная. Или

$$g''(u)+c_1^2\alpha^2g(u)=0,\quad \frac{s''(u_x)}{s'^3(u_x)}=\alpha^2u_x. \tag{3.49}$$

Если $\alpha=0$, то $g(u)=\epsilon u+\delta$, $s(u_x)=\gamma u_x+d$, $\epsilon\gamma\neq 0$. Кроме этого, соотношение (3.45) дает

$$F\big(c_1u+s(u_x)\big)=\epsilon u_x+c_1\frac{\epsilon u+\delta}{\gamma}=\frac{\epsilon}{\gamma}(c_1u+\gamma u_x+d)-\frac{\epsilon d}{\gamma}+\frac{c_1\delta}{\gamma}=$$
$$=\frac{\epsilon}{\gamma}\big(c_1u+s(u_x)\big)-\frac{\epsilon d}{\gamma}+\frac{c_1\delta}{\gamma}.$$

Последнее соотношение означает, что

$$F(v)=\frac{\epsilon}{\gamma}v-\frac{\epsilon d}{\gamma}+\frac{c_1\delta}{\gamma}.$$

Итак, мы получили уравнения

$$u_{xy}=\frac{\epsilon u+\delta}{\gamma},\quad v=c_1u+\gamma u_x+d,\quad v_{xy}=\frac{\epsilon}{\gamma}v-\frac{\epsilon d}{\gamma}+\frac{c_1\delta}{\gamma}.$$

Преобразования $y\to\epsilon y/\gamma$, $u+\frac{\delta}{\epsilon}\to u$, $v-d+c_1\delta/\epsilon\to v$ дают (3.18).

Если же $\alpha\neq 0$, то в силу уравнений (3.49) функции g и s' определяются следующим образом:

$$g(u)=A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u), \tag{3.50}$$
$$s'(u_x)=\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}}. \tag{3.51}$$

Пусть $\beta\neq 0$. Интегрируя (3.51) по переменной u_x, определяем функцию s:

$$s(u_x)=\frac{1}{i\alpha}\ln\left(i\alpha u_x+\sqrt{\beta-\alpha^2u_x}\right)+\gamma. \tag{3.52}$$

Тогда соотношение (3.45) можно записать так:

$$F\left(c_1u+s(u_x)\right)=c\exp\big(i\alpha(c_1u+s(u_x))\big)+D\exp\big(-i\alpha(c_1u+s(u_x))\big).$$

Таким образом, приходим к формулам:

$$u_{xy}=\frac{A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)}{s'(u_x)}, \tag{3.53}$$
$$v=c_1u+s(u_x), \tag{3.54}$$
$$v_{xy}=C\exp(i\alpha v)+D\exp(-i\alpha v), \tag{3.55}$$

где s удовлетворяет (3.51) и $CD=ABc_1^2\beta$. Возможны случаи:

$$CD\neq 0, \tag{3.56}$$
$$C=D=0, \tag{3.57}$$

$$C = 0, \quad D \neq 0, \tag{3.58}$$
$$D = 0, \quad C \neq 0. \tag{3.59}$$

Пусть верно равенство (3.56). Тогда в уравнениях (3.51) — (3.55), сделав замену $\alpha u \to u$, $\alpha v \to v$, $\alpha s(u_x) \to s(u_x)$, приходим к формулам:

$$u_{xy} = \big(A\exp(ic_1u) + B\exp(-ic_1u)\big)\sqrt{\beta - u_x^2},$$
$$v = c_1u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - u_x^2}},$$
$$v_{xy} = C\exp(iv) + D\exp(-iv), \quad CD = ABc_1^2\beta \neq 0.$$

Замена $u - b \to u$, $v - a \to v$ преобразует последнюю систему к виду:

$$u_{xy} = \big(A\exp(ic_1b)\exp(ic_1u) + B\exp(-ic_1b)\exp(-ic_1u)\big)\sqrt{\beta - u_x^2},$$
$$v + a = c_1(u + b) + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - u_x^2}},$$
$$v_{xy} = C\exp(ia)\exp(iv) + D\exp(-ia)\exp(-iv), \quad CD = ABc_1^2\beta \neq 0.$$

Выберем a и b такими, чтобы $A\exp(ic_1b) = B\exp(-ic_1b)$ и $C\exp(ia) = D\exp(-ia)$, тогда

$$\frac{1}{A\exp(ic_1b)2i}u_{xy} = \sin(c_1u)\sqrt{\beta - u_x^2},$$
$$v = c_1u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - u_x^2}},$$
$$\frac{1}{C\exp(ia)2i}v_{xy} = \sin v, \quad C^2\exp(2ia) = A^2\exp(2ic_1b)c_1^2\beta \neq 0.$$

Преобразование растяжения переменной $yA\exp(ic_1b)2i \to y$ приводит к уравнениям

$$c_1\sqrt{\beta}u_{xy} = \sin(c_1u)\sqrt{\beta - u_x^2}$$
$$v = c_1u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - u_x^2}},$$
$$v_{xy} = \sin v.$$

Далее, сделаем замену $uc_1 \to u$, $s(u_x/c_1) \to s(u_x)$, тогда

$$\sqrt{\beta}u_{xy} = \sin(u)\sqrt{\beta - \frac{u_x^2}{c_1^2}},$$
$$v = u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta c_1^2 - u_x^2}},$$
$$v_{xy} = \sin v.$$

Введем обозначение $c_1\sqrt{b} = a$ и после преобразований растяжения переменных $ax \to x$, $y/a \to y$ приходим к уравнениям (3.19).

Пусть выполнено условие (3.57). Подставим (3.54) в (3.55), учитывая (3.53)

$$c_1\big(A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)\big)\sqrt{\beta - \alpha^2u_x^2}+\big(A\exp(ic_1\alpha u)ic_1\alpha - Bic_1\alpha\exp(-ic_1\alpha u)\big)u_x = 0,$$

откуда $\beta = 0$, $A = 0$. Уравнения (3.51) – (3.55) принимают вид

$$u_{xy} = Bi\alpha u_x\exp(-ic_1\alpha u), \quad v = c_1u - \frac{i}{\alpha}\ln u_x + \gamma, \quad v_{xy} = 0.$$

При помощи замены $-ic_1\alpha u \to u$ преобразуем последнюю систему к виду

$$u_{xy} = Bi\alpha\exp(u)u_x, \quad v = -\frac{1}{i\alpha}u - \frac{i}{\alpha}\ln u_x + \frac{i}{\alpha}\ln(-ic_1\alpha) + \gamma, \quad v_{xy} = 0.$$

Далее преобразования $u+\ln(Bi\alpha)\to u$, $-i\alpha v+\ln(-ic_1\alpha)-\frac{\alpha\gamma}{i}+\ln(Bi\alpha)\to v$ дают

$$u_{xy}=\exp(u)u_x,\quad v=u-\ln u_x,\quad v_{xy}=0. \tag{3.60}$$

Таким, образом мы получили уравнения, которые представляют собой частные случаи уравнений (3.20).

Пусть выполнено условие (3.58). Подставляя (3.54) в (3.55), учитывая (3.53), приходим к равенствам

$$Ac_1\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}+ic_1\alpha u_xA=0. \tag{3.61}$$

$$c_1B\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}-Bic_1\alpha u_x=D\exp\bigl(-s(u_x)i\alpha\bigr). \tag{3.62}$$

Из (3.61) следует, что $A=0$. При этом, $B\neq 0$, т.к. $D\neq 0$. Перепишем соотношение (3.62), учитывая (3.52) так:

$$\frac{B}{D}c_1\bigl(\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}-i\alpha u_x\bigr)=\frac{1}{i\alpha u_x+\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}}.$$

Последнее равенство верно лишь при условии $Bc_1\beta/D=1$. Итак, систему (3.51) — (3.55), используя формулу (3.52), можно представить в виде

$$u_{xy}=B\exp(-ic_1\alpha u)\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2},$$
$$v=c_1u-\frac{1}{i\alpha}\ln\bigl(-i\alpha u_x+\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}\bigr)+c,$$
$$v_{xy}=D\exp(-i\alpha v),\quad \frac{B}{D}c_1\beta=1.$$

Преобразование растяжения переменной $-i\alpha u\to u$ приводит к уравнениям

$$u_{xy}=-i\alpha B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},$$
$$v=-\frac{c_1u}{i\alpha}-\frac{1}{i\alpha}\ln\bigl(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\bigr)+c,$$
$$v_{xy}=D\exp(-i\alpha v),\quad \frac{B}{D}c_1\beta=1.$$

После преобразования $-i\alpha v\to v$ получаем

$$u_{xy}=-i\alpha B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},$$
$$v=c_1u+\ln\bigl(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\bigr)+c,$$
$$v_{xy}=-i\alpha D\exp(v).$$

Или

$$u_{xy}=B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},$$
$$v=c_1u+\ln\bigl(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\bigr)+c,$$
$$v_{xy}=D\exp(v).$$

Подставляя функцию v в последнее уравнение, получаем, что $c_1B=D\exp(c)$, и полученные уравнения приобретают вид

$$u_{xy}=B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},\quad v=c_1u+\ln\left(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\right)+c,\quad v_{xy}=c_1B\exp(v-c).$$

Преобразование сдвига $v-c\to v$ дает

$$u_{xy}=B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},\quad v=c_1u+\ln\left(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\right),\quad v_{xy}=c_1B\exp(v).$$

Замена $c_1u\to u$, преобразование растяжения переменной $ax\to x$ при a, таком, что $\beta c_1^2/a^2=1$, преобразование сдвига $v+\ln c_1-\ln a\to v$ и, наконец, преобразование $u+\ln B\to u$, $v+\ln B\to v$ приводит к уравнениям (3.21).

Теперь рассмотрим случай (3.59). Уравнения (3.51)– (3.55) принимают вид

$$u_{xy}=\frac{A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)}{s'(u_x)},$$

$$v=c_1u+s(u_x),\quad s'(u_x)=\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}},$$

$$v_{xy}=C\exp(i\alpha v).$$

Подставим функцию v в последнее уравнение

$$c_1\big(A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)\big)\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}+$$

$$+ic_1\alpha\big(A\exp(ic_1\alpha u)-B\exp(-ic_1\alpha u)\big)u_x=C\exp\big(i\alpha(c_1u+s(u_x))\big).$$

Откуда

$$c_1A\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}+ic_1\alpha u_xA=C\exp(i\alpha),$$

$$c_1B\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}-ic_1\alpha u_xB=0.$$

Поскольку $\beta\neq0$, то $B=0$ и, следовательно

$$u_{xy}=A\exp(ic_1\alpha u)\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2},$$

$$v=c_1u+\frac{1}{i\alpha}\ln\left(\alpha iu_x+\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}\right),$$

$$v_{xy}=C\exp(i\alpha v).$$

Сводится к предыдущему.

Теперь рассмотрим случай $\beta=0$. Из формулы (3.51) получаем, что

$$s(u_x)=\frac{1}{i\alpha}\ln(c_2u_x).$$

Подставим функцию s в систему (3.53) — (3.55)

$$u_{xy}=\big(A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)\big)i\alpha u_x,\tag{3.63}$$

$$v=c_1u+\frac{1}{i\alpha}\ln(c_2u_x),\tag{3.64}$$

$$v_{xy}=C\exp(i\alpha v)+D\exp(-i\alpha v).\tag{3.65}$$

Подставим функцию (3.64) в (3.65), учитывя (3.63)

$$c_1\big(A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)\big)i\alpha u_x+$$

$$+ic_1\alpha u_x\big(A\exp(ic_1\alpha u)-B\exp(-ic_1\alpha u)\big)=Cc_2u_x\exp(i\alpha c_1u)+\frac{D}{c_2u_x}\exp(-i\alpha c_1u).$$

Отсюда получаем, что $D=0$, $Cc_2=2c_1\alpha Ai$, и уравнения (3.63)–(3.65) можно представить в виде:

$$u_{xy}=\big(A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)\big)i\alpha u_x,$$

$$v=c_1u+\frac{1}{i\alpha}\ln(c_2u_x),$$

$$v_{xy}=\frac{2c_1\alpha Ai}{c_2}\exp(i\alpha v).$$

Применим замену переменных $i\alpha v\to v$, $uc_1i\alpha\to u$ и после преобразования сдвига $v-\ln(c_2)+\ln(c_1i\alpha)\to v$ придем к уравнениям вида (3.20):

$$u_{xy}=\big(A\exp(u)+B\exp(-u)\big)u_x,\quad v=u+\ln u_x,\quad v_{xy}=2A\exp(v).$$

Теперь предположим, что $g(u)=c_1$, где c_1 — произвольная постоянная. В данном случае, вспоминая (3.32), перепишем (3.27)

$$p'(u_y)\big(cu_y-c_1-p(u_y)\big)=\lambda(u),\quad -s'(u_x)F\big(cu+s(u_x)\big)=\lambda(u).\tag{3.66}$$

Поскольку переменные u, u_x, u_y — независимые, из (3.66) делаем вывод, что $\lambda(u) = -c_2$, и переписываем (3.66)

$$p'(u_y)\big(cu_y - c_1 - p(u_y)\big) = -c_2, \quad -s'(u_x)F\big(cu + s(u_x)\big) = c_2. \tag{3.67}$$

Дифференцируем второе равенство (3.67) по переменной u:

$$s'(u_x)cF'\big(cu + s(u_x)\big) = 0.$$

Следовательно, $c = 0$ либо $F' = 0$.

Пусть $c = 0$, тогда второе равенство (3.67) дает

$$s'(u_x)F\big(s(u_x)\big) = c_2.$$

И мы приходим к уравнениям:

$$u_{xy} = \frac{c_1 + p(u_y)}{s'(u_x)}, \tag{3.68}$$

$$v = s(u_x), \tag{3.69}$$

$$v_{xy} = F(v). \tag{3.70}$$

Подставим (3.69) в (3.70), учитывая (3.68)

$$\frac{p'(u_y)(c_1 + p(u_y))}{s'(u_x)} = \frac{c_2}{s'(u_x)}.$$

Итак, имеем

$$\begin{gathered} u_{xy} = \frac{c_1 + p(u_y)}{s'(u_x)}, \quad v = s(u_x), \quad v_{xy} = F(v), \\ s'(u_x)F\big(s(u_x)\big) = c_2, \quad p'(u_y)\big(c_1 + p(u_y)\big) = c_2. \end{gathered} \tag{3.71}$$

Замена $p(u_y) + c_1 \to p(u_y)$ приводит к уравнению $p'(u_y)p(u_y) = c_2$, решением которого является

$$p(u_y) = \sqrt{2c_2u_y + c_3}.$$

Замена $u \to u - c_3y/(2c_2)$ преобразует систему (3.71) к виду

$$u_{xy} = \frac{\sqrt{2c_2u_y}}{s'(u_x)}, \quad v = s(u_x), \quad v_{xy} = F(v), \quad s'(u_x)F\big(s(u_x)\big) = c_2.$$

Применяя преобразование растяжения переменной $y \to c_2y$, затем, сделав замены $s(u_x) \to c_2s(u_x)$ и $F(c_2S) \to F(S)$, приходим к уравнениям (3.22).

Пусть $c \neq 0$, тогда $F = c_3$, где c_3 — произвольная постоянная. Второе соотношение (3.67) дает

$$s'(u_x)c_3 = c_2.$$

Если здесь $c_2 = 0$, то $c_3 = 0$ и из первого соотношения (3.67) получаем

$$p'(u_y)\big(cu_y - c_1 - p(u_y)\big) = 0.$$

Откуда $p(u_y) = cu_y - c_1$. Получаем

$$u_{xy} = 0, \quad v = cu + s(u_x), \quad v_{xy} = 0.$$

Преобразование растяжения переменной $cu \to u$ и замена $s(u_x/c) \to s(u_x)$ приводит к уравнениям (3.23). Если же $c_2 \neq 0$, то $F = c_3 \neq 0$, и получаем

$$\begin{gathered} u_{xy} = \frac{c_1 + p(u_y) - cu_y}{s'(u_x)}, \quad v = cu + s(u_x), \quad v_{xy} = c_3, \\ s'(u_x) = \tfrac{c_2}{c_3}, \quad p'(u_y)\big(cu_y - c_1 - p(u_y)\big) = -c_2. \end{gathered}$$

Или

$$u_{xy} = \frac{\big(c_1 + p(u_y) - cu_y\big)c_3}{c_2}, \quad v = cu + \frac{c_2}{c_3}u_x + c_4, \quad v_{xy} = c_3,$$
$$p'(u_y)\big(cu_y - c_1 - p(u_y)\big) = -c_2.$$

Преобразования сдвига $p + c_1 \to p$, $v - c_4 \to v$ приводят к уравнениям (3.24). Лемма доказана.

Итак, случай (3.7) исследован полностью. Теперь рассмотрим условие (3.8). Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (3.8) *и* $\varphi_{uu_x} \neq 0$. *Тогда уравнения* (1.1), (1.2), (1.9) *приобретают следующий вид:*

$$u_{xy} = \frac{\alpha(u)F'\Big(F^{-1}\big(u_x\alpha'(u)\big)\Big) - \alpha''(u)u_xu_y}{\alpha'(u)}, \quad v_{xy} = F(v), \quad v = \big(F^{-1}(u_x\alpha'(u))\big). \tag{3.72}$$

$$u_{xy} = \frac{c - u_y\varphi_u(u, u_x)}{\varphi_{u_x}(u, u_x)}, \quad v_{xy} = 0, \quad v = \varphi(u, u_x). \tag{3.73}$$

Доказательство. Пусть верно (3.8). Тогда нетрудно видеть, что

$$\psi = \alpha(u) + c\ln u_y. \tag{3.74}$$

После подстановки функции (3.74) в соотношение (3.5), последнее может быть представлено в виде:

$$u_x\varphi_{u_x}\alpha'(u) + \big(\alpha(u) + c\ln u_y\big)\frac{c}{u_y} - c\varphi_u = \varphi_{u_x}F(\varphi).$$

Поскольку функции, фигурирующие в полученном равенстве, не зависят от переменной u_y, то коэффициент при выражении $\ln u_y$ должен быть равен нулю, т.е. $c = 0$, и, следовательно

$$u_x\alpha'(u) = F\big(\varphi(u, u_x)\big).$$

Из последнего соотношения определяем функцию φ, задающую искомую дифференциальную подстановку

$$\varphi = F^{-1}\big(u_x\alpha'(u)\big).$$

При $\alpha' \neq 0$ приходим к уравнениям (3.72). Если же $\alpha' = 0$, то $F = 0$, и мы получаем уравнения (3.73). Лемма доказана.

И, наконец, для завершения классификации требуется исследовать случай (3.9). Имеет место следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (3.9) *и* $\psi_{uu_y} \neq 0$. *Тогда уравнения* (1.1), (1.2), (1.9) *точечной заменой вида* $v \to \kappa(v)$ *сводятся к уравнениям*

$$u_{xy} = u_x\big(\psi(u, u_y) - u_y\alpha'(u)\big), \quad v_{xy} = c_1\exp v, \quad v = \alpha(u) + \ln u_x \tag{3.75}$$

соответственно. Здесь c_1 *— произвольная постоянная, а функции* ψ *и* α *связаны соотношением* $\psi_u + \psi\psi_{u_y} - \alpha' u_y\psi_{u_y} = c_1\exp\alpha$.

Доказательство. Предположим, что выполнено требование (3.9), тогда

$$\varphi = \alpha(u) + c\ln u_x. \tag{3.76}$$

Здесь $c \neq 0$, поскольку мы рассматриваем такие подстановки, что $\varphi_{u_x} \neq 0$. Подставим функцию (3.76) в соотношение (3.5), тогда последнее можно представить в виде:

$$c\psi_u(u, u_y) + \psi(u, u_y)\psi_{u_y}(u, u_y) - u_y\alpha'(u)\psi_{u_y}(u, u_y) = \frac{c}{u_x}F\big(\alpha(u) + c\ln u_x\big). \tag{3.77}$$

В силу независимости переменных u_x и u_y (3.77) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} F\big(\alpha(u) + c\ln u_x\big) = \frac{1}{c}u_x\gamma(u), \\ c\psi_u(u,u_y) + \psi(u,u_y)\psi_{u_y}(u,u_y) - \alpha'(u)u_y\psi_{u_y}(u,u_y) = \gamma(u). \end{gathered} \tag{3.78}$$

Применим к левой и правой части соотношения (3.78) оператор $\frac{\partial}{\partial u_x}$:

$$F'\big(\alpha(u) + c\ln u_x\big) \cdot \frac{c}{u_x} = \frac{\gamma(u)}{c}. \tag{3.79}$$

Теперь перепишем (3.79), учитывая первое уравнение (3.78), так:

$$F'\big(\alpha(u) + c\ln u_x\big) = \frac{1}{c}F\big(\alpha(u) + c\ln u_x\big). \tag{3.80}$$

Используя соотношение (3.80), делаем вывод, что $cF'(v) - F(v) = 0$. Интегрируя последнее уравнение, определяем функцию F, задающую правую часть уравнения Клейна-Гордона (1.2):

$$F(v) = c_2\exp(v/c).$$

Подставляя функцию F в соотношение (3.78), получаем, что $\gamma(u) = cc_2\exp\big(\alpha(u)/c\big)$.

Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\begin{gathered} u_{xy} = \frac{u_x}{c}\big(\psi(u,u_y) - u_y\alpha'(u)\big), \quad v = \alpha(u) + c\ln u_x, \quad v_{xy} = c_2\exp(v/c), \\ c\psi_u + \psi\psi_{u_y} - \alpha' u_y\psi_{u_y} = cc_2\exp\big(\alpha/c\big). \end{gathered}$$

Замена $\psi/c \to \psi$, $\alpha/c \to \alpha$, $v/c \to v$, а затем $c_2/c \to c_1$ преобразует полученные уравнения к виду (3.75). Лемма доказана.

Итак, доказательство Теоремы 1 следует из Лемм 1–3.

4. Дифференциальные подстановки вида $u = \psi(v, v_y)$

В настоящем параграфе мы рассматриваем, как уже было сказано выше, задачу в некотором смысле "обратную" по отношению к задаче первой части работы. Наша цель найти все уравнения (1.2), сводящиеся дифференциальными подстановками (1.10) к уравнению (1.1). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть уравнение Клейна-Гордона* (1.2) *сводится дифференциальной подстановкой* (1.10) *к уравнению* (1.1). *Тогда уравнения* (1.2), (1.1) *и подстановка* (1.10) *с точностью до точечных преобразований $v \to \kappa(v)$, $u \to \theta(u)$, $x \to \xi x$, $y \to \eta y$, где ξ и η — постоянные, принимают следующий вид:*

$$v_{xy} = F(v), \quad u_{xy} = F'\big(F^{-1}(u_x)\big)u, \quad u = v_y; \tag{4.1}$$

$$v_{xy} = 1, \quad u_{xy} = \frac{\psi''\big(\psi^{-1}(u)\big)u_y}{\psi'\big(\psi^{-1}(u)\big)}, \quad u = \psi(v_y); \tag{4.2}$$

$$v_{xy} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u = cv + \mu(v_y); \tag{4.3}$$

$$v_{xy} = 0, \quad u_{xy} = -u_x\exp u, \quad u = \ln v_y - \ln v; \tag{4.4}$$

$$v_{xy} = v, \quad u_{xy} = u, \quad u = c_1v + c_2v_y; \tag{4.5}$$

$$v_{xy} = 1, \quad u_{xy} = 1, \quad u = v + cv_y. \tag{4.6}$$

Здесь c — произвольная постоянная, c_1 и c_2 такие, что $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

Схема доказательства. Подставим функцию (1.10) в соотношение (1.1), учитывая (1.2)

$$\begin{aligned}\big(\psi_{vv}v_y+\psi_{vv_y}v_{yy}\big)v_x+\psi_vF+\big(\psi_{v_yv}v_y+\psi_{v_yv_y}v_{yy}\big)F+\psi_{v_y}F'v_y=\\=f\big(\psi,\psi_vv_x+\psi_{v_y}F,\psi_vv_y+\psi_{v_y}v_{yy}\big).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Обозначим первый, второй и третий аргумент функции f через a, b и c соответственно. Применим к левой и правой части равенства (4.7) оператор $\frac{\partial}{\partial v_{yy}}$:

$$\psi_{vv_y}v_x+\psi_{v_yv_y}F=f_c\psi_{v_y}.\tag{4.8}$$

Применим к левой и правой части равенства (4.8) оператор $\frac{\partial}{\partial v_{yy}}$: $f_{cc}\psi_{v_y}^2=0$. Если $\psi_{v_y}=0$, то вместо дифференциальной подстановки получаем точечную замену $u=\psi(v)$. Поэтому

$$f(a,b,c)=\alpha(a,b)c+\beta(a,b).\tag{4.9}$$

Подставим функцию (4.9) в соотношение (4.8)

$$\psi_{vv_y}v_x+\psi_{v_yv_y}F=\alpha\big(\psi,\psi_vv_x+\psi_{v_y}F(v)\big)\psi_{v_y}.\tag{4.10}$$

Равенство (4.7) в силу (4.9), (4.10) принимает вид

$$\begin{aligned}\big(\psi_{vv}v_x+\psi_{vv_y}F\big)v_y+\psi_vF+\psi_{v_y}F'v_y\\=\alpha\big(\psi,\psi_vv_x+\psi_{v_y}F\big)\psi_vv_y+\beta\big(\psi,\psi_vv_x+\psi_{v_y}F\big).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Таким образом, задача (1.2), (1.1), (1.10) свелась к исследованию соотношений (4.10), (4.11). Применим к равенствам (4.10), (4.11) оператор $\frac{\partial^2}{\partial v_x^2}$:

$$\alpha_{bb}\psi_v^2\psi_{v_y}=0,\quad \alpha_{bb}\psi_v^3v_y+\beta_{bb}\psi_v^2=0.\tag{4.12}$$

Равенства (4.12) выполнены, если выполнено одно из следующих условий:

$$\psi_v=0,\tag{4.13}$$

$$\psi_v\neq0,\quad \alpha_{bb}=0,\quad \beta_{bb}=0.\tag{4.14}$$

Исследование условий (4.13), (4.14) приводит к уравнениям (4.1) – (4.6).

Используя Теоремы 1 и 2 для некоторых пар уравнений, можно построить преобразования Беклунда. Например, уравнения $u_{xy}=-u_x\exp u$, $v_{xy}=0$ связаны преобразованием Беклунда $v=\ln u_x-u$, $u=\ln(v_y/v)$. Далее, уравнения

$$u_{xy}=F'\big(F^{-1}(u_x)\big)u,\quad v_{xy}=F(v)\tag{4.15}$$

связаны преобразованием Беклунда

$$v=F^{-1}(u_x),\quad u=v_y.$$

Согласно работе [10], линеаризации уравнений (4.15) связаны преобразованием Лапласа первого порядка. В качестве примеров мы приведем уравнения

$$u_{xy}=\big(\lambda-\beta nb^{n-1}(u_x)\big)u,\quad v_{xy}=\lambda v-\beta v^n,\quad n>0,\tag{4.16}$$

где λ и β — произвольные постоянные, а функция b удовлетворяет уравнению $\lambda b(u_x)-\beta b^n(u_x)=u_x$. Преобразование Беклунда, связывающее решения уравнений (4.16), имеет вид

$$u=v_y,\quad v=b(u_x).$$

Необходимо отметить, что второе из уравнений (4.16) является вариантом [12] так называемого уравнения φ^4 в физике элементарных частиц. Уравнение φ^4 и соответствующее преобразование Беклунда получается при $n=3$. Эта модель важна в физике твердого тела и в физике частиц с высокой энергией [13].

Далее, мы получаем уравнения

$$u_{xy}=\pm\left(\cos b(u_x)+\frac14\cos\frac{b(u_x)}{2}\right)u,\quad v_{xy}=\pm\left(\sin v+\frac12\sin\frac{v}{2}\right),\tag{4.17}$$

где функция b удовлетворяет соотношению $\pm\left(\sin b(u_x) + \frac{1}{2}\sin\frac{b(u_x)}{2}\right) = u_x$. Преобразование Беклунда задается формулами $u = v_y$, $v = b(u_x)$. Второе из уравнений (4.17) — двойное уравнение синус-Гордона, со знаком плюс имеет применение в нелинейной оптике, со знаком минус применяется в нелинейной оптике и при изучении B-фазы жидкого гелия [13].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Жиберу А. В. за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // Доклады АН СССР. Т. 247, № 5. 1979. С. 1102–1107.
2. I.M. Anderson, N. Kamran *The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane* // Preprint. Montreal: Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal. 1994.
3. I.M. Anderson, N. Kamran *The variational bicomplex for hiperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane* // Duke Math. J. V. 87, № 2. 1997. Pp. 265–319.
4. Жибер А.В., Соколов В.В., Старцев С.Я. *О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу* // Докл. РАН. Т. 343, № 6. 1995. С. 746–748.
5. Старцев С.Я. *Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой* // ТМФ. Т. 120, № 2. 1999. С. 237–247.
6. Старцев С.Я. *О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки* // ТМФ. Т. 127, № 1. 2001. С. 63–74.
7. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. Т. 56, вып. 1. 2001. С. 63–106.
8. Мешков А.Г., Соколов В.В., *Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка* // ТМФ. Т. 166, № 1. 2011. С. 51–67
9. Хабиров С.В. *Бесконечно параметрические семейства решений нелинейных дифференциальных уравнений* // Математический сборник. Т. 183, № 11. 1992. С. 45–54.
10. Кузнецова М.Н. *Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения* // УМЖ. Т. 1, вып. 3. 2009. С. 87–96.
11. Искандарова М.Н. (Кузнецова М.Н.) *Нелинейные гиперболические уравнения и уравнение Цицейки* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых. Математика. Уфа, БГУ. Т. 1. 2009. С. 183–193.
12. A.A. Soliman, H.A. Abdo *New exact solutions of nonlinear variants of the RLN, the PHI-four and Boussinesq equations based on modified extended direct algebraic method* arXiv: 1207.5127v1 [math.NA]
13. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж, Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* — М.: Мир, 1988. — 694 с.

Мария Николаевна Кузнецова,
Уфимский государственный
авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: kuznetsova@matem.anrb.ru

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 104-154.

УДК 517.957

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СЕПАРАНТОЙ

А.Г. МЕШКОВ, В.В. СОКОЛОВ

Аннотация. В обзоре приведены результаты классификации интегрируемых однополевых эволюционных уравнений порядков 2, 3 и 5 с постоянной сепарантой. Классификация основана на необходимых условиях интегрируемости, вытекающих из существования у интегрируемых уравнений формального рекурсионного оператора. Впервые приведены рекуррентные формулы для всей бесконечной последовательности необходимых условий. Бóльшая часть классификационных утверждений может быть найдена в работах С.И. Свинолупова и В.В. Соколова, однако доказательства публикуются впервые. Результат, касающийся уравнений пятого порядка, является более сильным, чем полученные ранее.

Ключевые слова: эволюционное дифференциальное уравнение, интегрируемость, высшая симметрия, закон сохранения, классификация.

Введение

Этот обзор посвящен классификации интегрируемых эволюционных уравнений вида

$$u_t = u_n + F(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{n-1}), \qquad u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}. \tag{0.1}$$

Уравнения с таким характером вхождения старшей производной по x часто называют уравнениями с постоянной сепарантой.

Поясним, что понимается под интегрируемостью в настоящей статье. К сожалению, единого строгого определения интегрируемости дифференциальных уравнений в настоящий момент не существует (по поводу разных подходов см., например, [1–3]). Однако для некоторых типов дифференциальных уравнений имеются эффективные критерии интегрируемости, которые не только могут быть проверены для данного уравнения, но и позволяют найти все уравнения из данного класса, удовлетворяющие данному критерию.

Для эволюционных уравнений (0.1) с одной временной и одной пространственной переменной наиболее эффективным критерием интегрируемости является существование высших локальных симметрий. Определяющее соотношение для симметрии – это билинейное тождество, включающее в себя как правую часть уравнения, так и правую часть симметрии. В работах [4,7] был предложен способ «исключения симметрии» из этого соотношения и получения необходимых условий существования симметрий только в терминах правой части уравнения. Эти условия, которые мы называем условиями интегрируемости, записываются в виде так называемых канонических законов сохранения. Основными их

A.G. Meshkov, V.V. Sokolov, Integrable evolution equations with a constant separant.

© Мешков А.Г., Соколов В.В. 2012.

Авторы признательны А.В. Михайлову, С.И. Свинолупову и А.Б. Шабату за многочисленные полезные обсуждения. В. С. благодарен институту Макса Планка (Бонн) за гостеприимство. Исследования частично поддерживались грантом РФФИ 11-01-00341-а, грантом поддержки научных школ 6501.2010.2 и грантом Министерства образования и науки РФ (проект 1.2.11).

Поступила 20 января 2012 г.

достоинствами является независимость условий от порядка симметрии и инвариантность относительно любых точечных преобразований, не выводящих из класса уравнений (0.1).

В работах [4–7] было показано, как необходимые условия интегрируемости выводятся из наличия у уравнения (0.1) бесконечной серии высших симметрий или законов сохранения. Более подробно техника получения условий изложена в обзорах [8,9]. Здесь мы ее не касаемся. Отметим, что имеется альтернативный способ [10,11] для вычисления канонических законов сохранения через логарифмическую производную формальной собственной функции оператора линеаризации для уравнения (0.1) (см. приложение 3). Эквивалентность этих двух способов для скалярных уравнений следует из теоремы 2.9 обзора [12].

Опишем результаты работы. В главе 1 на простейших примерах мы показываем, как выглядят канонические законы сохранения и как с их помощью можно классифицировать интегрируемые уравнения. В частности, в этой главе решена задача классификации уравнений (0.1) при $n = 2$. Интегрируемые эволюционные уравнения второго порядка общего вида проклассифицированы в [13]. Результаты последней работы обобщены на случай слабо нелокальных симметрий в [14].

В главе 2 приведено решение задачи классификации интегрируемых уравнений вида

$$u_t = u_3 + F(x, u, u_1, u_2). \tag{0.2}$$

К этому классу принадлежит знаменитое уравнение Кортевега – де Фриза

$$u_t = u_3 + uu_1. \tag{0.3}$$

Случай, когда функция F не зависит от u_2 и x (см. раздел 1.2), рассматривался в [4, 15]. Результаты главы 2 были анонсированы в [5, 6], однако доказательство публикуется впервые. Также впервые найдена рекуррентная формула, описывающая всю бесконечную серию канонических плотностей. В работах [5,6] в явной форме были приведены только 4 первые плотности, которые реально использовались при классификации. Интегрируемые эволюционные уравнения третьего порядка, более общие, чем (0.2), изучались в [9,16,17].

В главе 3 рассматривается вычислительно сложная задача классификации интегрируемых уравнений вида

$$u_t = u_5 + F(u, u_1, u_2, u_3, u_4). \tag{0.4}$$

В заметке [18] анонсировалось решение этой задачи при дополнительном предположении, что четные канонические плотности тривиальны (см. замечание 2). Однако не только доказательство, но и полный список найденных уравнений, в [18] отсутствует. Впервые список уравнений (0.4), обладающих высшими законами сохранения, был опубликован в [9]. В настоящей работе условие тривиальности четных канонических плотностей не используется и, таким образом, решается технически более сложная задача классификации уравнений (0.4), обладающих высшими симметриями. Ответ по существу совпал со списком из [9]. Как и в случае уравнений 3-го порядка, впервые найдена общая формула для всей бесконечной серии канонических плотностей.

Результаты работ [5, 6, 9, 18] были получены с помощью тяжелых вычислений, выполненных «руками». Поэтому имелась ненулевая вероятность ошибок, которые могли привести к потере интегрируемых уравнений. С появлением компьютерных систем типа Maple, Mathematika и т.д. возникла возможность частично автоматизировать вычисления. Результаты настоящей статьи были получены с помощью пакета программ Jet, написанного первым автором. Существенных ошибок в списках интегрируемых уравнений обнаружено не было, однако было исправлено несколько типографских опечаток в работе [9].

На первый взгляд кажется, что задача классификации интегрируемых уравнений (0.1) с произвольным n весьма далека от полного решения. Это не совсем так. Всякое интегрируемое уравнение вместе со всеми своими симметриями образует так называемую иерархию интегрируемых уравнений. В случае уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния [19], все уравнения иерархии обладают одним и тем же L-оператором. Этот факт лежит в основе коммутативности потоков в иерархиях (каждое уравнение иерархии является симметрией для всех остальных). Общее утверждение о «почти» коммутативности локальных симметрий уравнения (0.1) содержится в [20].

В работах [21, 22] при предположении полиномиальности и однородности правой части уравнения (0.1) доказано, что его иерархия обязательно содержит уравнение второго, третьего или пятого порядка. Утверждение представляется чрезвычайно правдоподобным и без всяких дополнительных ограничений на правую часть уравнения. Доказательство в общем случае отсутствует, и утверждение имеет статус гипотезы, широко известной специалистам. Никаких контрпримеров к этой гипотезе неизвестно.

По модулю гипотезы, в обзоре описаны все иерархии интегрируемых уравнений вида (0.1). Другими словами, всякое интегрируемое уравнение порядка 4 или порядка > 5 эквивалентно высшей симметрии одного из уравнений, приведенных в настоящем обзоре. Отметим, что вычисление симметрий заданного уравнения является линейной задачей, для решения которой имеется несколько эффективных компьютерных программ. Кроме того, высшие симметрии могут быть найдены с помощью квазилокальных рекурсионных операторов (см. [23] и ссылки там).

Разнообразные результаты по классификации интегрируемых систем эволюционных уравнений можно найти в [8, 24–40]. Дальнейшие ссылки содержатся, например, в обзоре [41].

Отдельной сложной задачей является классификация интегрируемых гиперболических уравнений и систем [42–50].

1. Простейшие классификационные задачи

Все необходимые условия интегрируемости, которые мы будем использовать далее, имеют вид локальных законов сохранения. Напомним [51], что локальным законом сохранения для уравнения (0.1) называется пара функций ρ и θ, зависящих от конечного числа переменных $x, u, u_1, \dots$ такая, что

$$\frac{d}{dt}(\rho) = \frac{d}{dx}(\theta). \tag{1.1}$$

Здесь

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u_0} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_3\frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots, \qquad u_0 = u, \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + K_0\frac{\partial}{\partial u_0} + K_1\frac{\partial}{\partial u_1} + K_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots,$$

где

$$K_i = \frac{d^i}{dx^i}\Big(u_n + F(x, u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-1})\Big).$$

Операторы $\dfrac{d}{dx}$ и $\dfrac{d}{dt}$ часто называют полной производной по x и полной производной по t в силу уравнения (0.1). Функция ρ называется плотностью, а θ – током закона сохранения.

Соотношение (1.1) называется законом сохранения по следующей причине. Рассмотрим, например, уравнение Кортевега – де Фриза $u_t = u_3 + uu_1$. Известно, что оно обладает бесконечным набором законов сохранения. В частности, поскольку уравнение можно переписать в виде

$$u_t = (u_2 + \frac{1}{2}u^2)_x,$$

функция u является плотностью закона сохранения. Предположим, что решение $u(x,t)$ убывает при $|x| \to \infty$. Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = 0,$$

т.е. площадь под графиком решения не зависит от t. Аналогично, сохраняются интегралы и от остальных плотностей законов сохранения.

Ясно, что если ρ – плотность закона сохранения, то плотностью также является $\rho_1 = \rho + \dfrac{d}{dx}(h)$ для любой функции h. Две такие плотности мы называем эквивалентными и пишем $\rho \sim \rho_1$. Закон сохранения называется тривиальным, если $\rho \sim 0$.

Порядок старшей производной, от которой зависит функция $f(x, u, u_1, \ldots, u_k)$, называется **дифференциальным** порядком этой функции. Дифференциальный порядок обычно обозначают как $\operatorname{ord} f = k$. Порядком закона сохранения называется минимальный из **дифференциальных** порядков эквивалентных плотностей.

Вывод необходимых условий интегрируемости в виде бесконечной серии так называемых канонических законов сохранения подробно обсуждался в [8–11], альтернативный вариант см. в приложении 3. В этой статье мы часто приводим соответствующие формулы без доказательств. Зато мы подробно останавливаемся на том, как из этих необходимых условий извлечь полный список интегрируемых уравнений вида (0.2), и описываем точечные преобразования, необходимые для приведения произвольного интегрируемого уравнения к одной из канонических форм.

1.1. Интегрируемые уравнения типа Бюргерса. Рассмотрим эволюционные уравнения второго порядка:

$$u_t = u_2 + f(x,\, u,\, u_1). \tag{1.3}$$

Канонические плотности для этого уравнения задаются следующей рекуррентной формулой:

$$2\rho_{n+1} = \theta_n + \sum_{i=0}^{n} \rho_{n-i}\rho_i - \frac{\partial f}{\partial u_1}\rho_n + \frac{\partial f}{\partial u_1}\delta_{n,-1} + \frac{\partial f}{\partial u}\delta_{n0} - \frac{d}{dx}\rho_n, \quad n \geqslant -1. \tag{1.4}$$

Здесь $\rho_{-1} = 0$, δ_{ij} – символ Кронекера. Один из способов получения подобных формул описан в приложении 3. Токи, соответствующие этим плотностям, вычисляются последовательно в процессе классификации. При этом препятствия к их существованию накладывают ограничения на правую часть уравнения (0.2), что в конечном итоге и позволяет найти все интегрируемые уравнения (1.3).

Полагая в (1.4) $n = -1, 0$, находим два первых канонических закона сохранения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{d}{dx}\sigma_1, \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma_1 + 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2\right) = \frac{d}{dx}\sigma_2, \tag{1.6}$$

где $\sigma_1 = 2\,\theta_0$ и $\sigma_2 = 4\,\theta_1 + \dfrac{d}{dx}\sigma_1$.

Первая из формул означает, что для любого интегрируемого уравнения (1.3) частная производная от его правой части по u_1 является плотностью закона сохранения. Например, для уравнения Бюргерса $u_t = u_2 + uu_1$ эта формула дает плотность $\rho = u$. Функция σ_1 в этом случае легко вычисляется:

$$\sigma_1 = u_2 + \frac{1}{2}u^2.$$

Общий алгоритм вычисления тока при заданной плотности приводится ниже (см. замечание 4).

Продемонстрируем основные приемы работы с условиями типа (1.5), (1.6). Для того чтобы определить характер зависимости правой части уравнения от u_1, проще всего исключить неизвестную функцию σ_1 в (1.5). Для этого применим к обеим частям (1.5) оператор Эйлера

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{d}{dx}\circ\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{d^2}{dx^2}\circ\frac{\partial}{\partial u_2} - \cdots$$

Хорошо известно [51], что

$$\frac{\delta}{\delta u}\circ\frac{d}{dx} = 0,$$

и поэтому

$$0 = \frac{\delta}{\delta u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) = -2u_4\frac{\partial^3 f}{\partial u_1^3} - 4u_3\frac{d}{dx}\frac{\partial^3 f}{\partial u_1^3} + O(2), \tag{1.7}$$

где символ $O(2)$ означает члены, имеющие по производным порядки не выше второго. Последнее равенство должно выполняться для любого решения (1.3). Поскольку не существует обыкновенного дифференциального уравнения по переменной x, которому удовлетворяют все решения уравнения (1.3), соотношение (1.7) должно выполняться тождественно по переменным $u, u_1, \ldots, u_4$. Приравнивая к нулю коэффициент при u_4, находим, что уравнение имеет вид

$$u_t = u_2 + A(x,u)u_1^2 + B(x,u)u_1 + C(x,u). \tag{1.8}$$

Итак, всякое интегрируемое уравнение (1.3) квадратично по u_1. Можно проверить, что для уравнения вида (1.8) условие (1.7) эквивалентно двум следующим уравнениям:

$$(C\varphi)_u = (B\varphi - \varphi_x)_x, \qquad \varphi_u = A\varphi,$$

где $\varphi = B_u - 2A_x$.

Учитывая, что интегрируемость всякого дифференциального уравнения сохраняется при точечных преобразованиях, упростим уравнение (1.8) точечным преобразованием $u = \psi(x,v)$, прежде чем продолжать исследование условий интегрируемости. Несложные вычисления приводят к следующему уравнению для v:

$$v_t = v_2 + v_1^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + A(x,\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2\right) + \bar{B}(x,v)v_1 + \bar{C}(x,v).$$

Очевидно, что уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + A(x,\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 = 0$$

имеет решение, зависящее от v при любой функции A. Поэтому точечным преобразованием можно сделать функцию A в уравнении (1.8) равной нулю. Это преобразование – первый шаг при приведении всякого интегрируемого уравнения к одной из канонических форм.

Условие (1.5) для уравнения

$$u_t = u_2 + B(x,u)u_1 + C(x,u) \tag{1.9}$$

принимает следующий вид:

$$B_u\big(u_2 + B(x,u)u_1 + C(x,u)\big) = \frac{d}{dx}\sigma_1. \tag{1.10}$$

Поскольку для использования условия (1.6) нам необходимо полностью или частично знать функцию σ_1, вместо применения вариационной производной к обеим частям (1.10) используем альтернативный прием, состоящий в выделении полной производной в левой части (1.10). Этот прием абсолютно алгоритмичен и может быть запрограммирован на любом языке символьных вычислений (см. замечание 4 на стр. 113).

Имеем

$$B_u u_2 + B_u B u_1 + B_u C = \frac{d}{dx}\left(B_u u_1 + \frac{1}{2}B^2\right) - u_1(B_{uu}u_1 + B_{ux}) - BB_x + B_u C =$$

$$= \frac{d}{dx}\left(B_u u_1 + \frac{1}{2}B^2 - B_x\right) - B_{uu}u_1^2 + B_{xx} - BB_x + B_u C.$$

Подставив последнее выражение в (1.10), получаем

$$-B_{uu}u_1^2 + B_{xx} - BB_x + B_u C = \frac{d}{dx}\left(\sigma_1 - B_u u_1 - \frac{1}{2}B^2 + B_x\right) \equiv \frac{d\psi}{dx}.$$

Поскольку левая часть зависит только от x, u, u_1, то функция ψ может зависеть только от x и u. Подставляя $\dfrac{d\psi}{dx} = \psi_x + \psi_u u_1$, и приравнивая коэффициенты при u_1^2 и u_1, получаем

$$B_{uu} = 0, \qquad \psi_u = 0, \qquad B_{xx} - BB_x + B_u C = \psi_x.$$

Полагая $B = \alpha(x)u + \beta(x)$, находим, что всякое интегрируемое уравнение (1.9) имеет вид

$$u_t = u_2 + \big(\alpha(x)u + \beta(x)\big)u_1 + C(x, u), \tag{1.11}$$

где

$$\alpha C(x, u) - \alpha\alpha' u^2 + (\alpha'' - \alpha\beta' - \alpha'\beta)u = \psi' + \beta\beta' - \beta''. \tag{1.12}$$

При этом

$$\sigma_1 = \psi + \alpha u_1 + \frac{1}{2}(\alpha u + \beta)^2 - \alpha' u - \beta'. \tag{1.13}$$

Если $\alpha \neq 0$, то из (1.12) определяется функция C. В этом случае уравнение (1.11) можно упростить точечным преобразованием $u \to u\,f_1(x) + f_2(x)$. Выбрав $f_1 = 1/\alpha$ $f_2 = 2\alpha'/\alpha^2 - \beta/\alpha$, мы получаем $\alpha = 1$, $\beta = 0$. При этом уравнение (1.11) принимает вид

$$u_t = u_{xx} + uu_x + \psi'(x). \tag{1.14}$$

Условия (1.5), (1.6), так же как и все остальные необходимые условия интегрируемости, для этого уравнения выполнены. Уравнение Бюргерса (1.14) сводится к линейному уравнению

$$v_t = v_{xx} + \varphi(x)v_x,$$

подстановкой Коула – Хопфа $u = 2v_x/v + \varphi(x)$, где φ и ψ связаны соотношением $\varphi'' + \varphi\varphi' = -\psi'$.

В случае $\alpha = 0$ в уравнении (1.10) левая часть обращается в нуль, поэтому σ_1 — постоянная. Далее из условия (1.6) имеем

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\sigma_1 + 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2\right)_t = 0,$$

что равносильно системе уравнений

$$C_{uuu} = 0, \quad CC_{uu} + C_{xuu} - (\beta C_u)_x + \psi'(x) = 0.$$

Отсюда $C = p(x)u + q(x)$, и мы приходим к линейному уравнению

$$u_t = u_{xx} + \beta(x)u_x + p(x)u + q(x). \tag{1.15}$$

Для этого уравнения все необходимые условия интегрируемости выполнены.

Замечание 1. Среди полученных нами интегрируемых уравнений второго порядка (1.14) и (1.15) отсутствует пропотенциированное уравнение Бюргерса $u_t = u_{xx} + u_x^2$. Причина в том, что это уравнение линеаризуется точечным преобразованием $u = \ln v$. Это преобразование — частный случай точечного преобразования, которое было применено к уравнению (1.8) для уничтожения функции A.

1.2. Интегрируемые уравнения типа КдФ. Полученный в предыдущем разделе список интегрируемых уравнений довольно беден. Рассмотрим более содержательную классификационную задачу. Найдем все интегрируемые эволюционные уравнения вида

$$u_t = u_3 + f(u_1, u). \tag{1.16}$$

Оказывается (см. раздел 2.1), что для всякого такого интегрируемого уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) = \frac{d}{dx}(\sigma_1), \tag{1.17}$$

где σ_1 — некоторая функция, зависящая от $u, u_x, ..., u_3$.

Пример 1. Для уравнения мКдФ $u_t = u_3 + u^2 u_1$ закон сохранения (1.17) имеет вид

$$(u^2)_t = (2uu_2 - u_1^2 + \frac{1}{2}u^4)_x. \qquad \square$$

Применяя к обеим частям (1.17) оператор Эйлера, получаем

$$0 = \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)_t = 3u_4\left(u_2\frac{\partial^4 f}{\partial u_1^4} + u_1\frac{\partial^4 f}{\partial u_1^3 \partial u}\right) + O(3). \tag{1.18}$$

Последнее равенство должно выполняться для любого решения (1.16) и поэтому должно быть тождеством по переменным $u, u_1, \ldots, u_4$. Приравнивая к нулю коэффициент при u_4, и пользуясь тем, что f не зависит от u_2, находим, что

$$f(u_1, u) = \mu u_1^3 + A(u)u_1^2 + B(u)u_1 + C(u)$$

с некоторой постоянной μ. Нетрудно проверить, что для такой функции f условие (1.18) эквивалентно системе ОДУ

$$\mu A' = 0, \qquad B''' + 8\mu B' = 0, \qquad (B'C)' = 0, \qquad AB' + 6\mu C' = 0.$$

Следующее необходимое условие интегрируемости имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{d}{dx}(\sigma_2)$$

откуда

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0. \tag{1.19}$$

Последнее условие приводит к дополнительным уравнениям

$$A' = 0, \qquad AC'' = 0, \qquad (C''' + 2\mu C')' = 0, \qquad (CC'')' = 0.$$

В случае $\mu \neq 0$ полученных уравнений достаточно для полного определения функций A, B и C. В результате, с точностью до растяжения $u \to const\, u$, мы приходим к уравнениям

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3 + (c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u} + c_3)\, u_x \tag{1.20}$$

и

$$u_t = u_{xxx} + c_1 u_x^3 + c_2 u_x^2 + c_3 u_x + c_4, \tag{1.21}$$

где c_i — произвольные постоянные.

Если $\mu = 0$, то, решая приведенную выше систему ОДУ для функций A, B, C, получаем, что уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xxx} + c_0 u_x^2 + (c_1 u^2 + c_2 u + c_3)u_x + c_4 u + c_5,$$

причем
$$c_0c_1 = 0, \qquad c_0c_2 = 0, \qquad c_4c_1 = 0, \qquad c_4c_2 = 0, \qquad c_1c_5 = 0.$$
Из третьего условия интегрируемости (см. раздел 2) находим дополнительные соотношения:
$$c_0c_4 = 0, \qquad c_2c_5 = 0.$$

В случае $c_0 \neq 0$ приходим к частному случаю уравнения (1.21). Если же $c_0 = 0$, то возможны два случая: а) $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, $c_4 = c_5 = 0$ и б) $c_1 = c_2 = 0$, приводящие к двум следующим уравнениям
$$u_t = u_{xxx} + (c_1u^2 + c_2u + c_3)u_x, \tag{1.22}$$
$$u_t = u_{xxx} + c_3u_x + c_4u + c_5. \tag{1.23}$$

Всякое линейное уравнение специалистами по нелинейным уравнениям по определению считается точно интегрируемым. Уравнения (1.20), (1.21) и (1.22) были найдены с помощью необходимых условий интегрируемости. Поэтому то, в каком смысле они действительно интегрируемы, следует обсуждать отдельно. Хорошо известно, что ко всем этим уравнениям применим метод обратной задачи рассеяния. Кроме того, все они связаны с уравнением КдФ $u_t = u_3 + uu_1$ дифференциальными подстановками типа преобразования Миуры [52].

Замечание 2. Условия (1.18), (1.19) выполнены для уравнений (1.16), обладающих высшими симметриями. Если уравнение обладает высшими законами сохранения (существование симметрий при этом не предполагается), условие (1.18) по-прежнему выполняется, а условие (1.19) может быть усилено:
$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0.$$
Это следует из общего утверждения [5], согласно которому для уравнений с высшими законами сохранения канонические плотности с четными номерами тривиальны.

1.3. О допустимых точечных преобразованиях. В процессе классификации интегрируемых уравнений мы, как правило, пользуемся точечными преобразованиями, приводя интегрируемое уравнение к той или иной канонической форме. Например, в разделе 1.1 мы использовали точечные преобразования при приведении уравнения (1.8) к виду (1.9), а также при нормировании функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в уравнении (1.11).

Опишем точечные преобразования, которые применяются при классификации уравнений (0.1).

Всякое уравнение вида (0.1) допускает преобразования
$$\tilde{u} = \varphi(u, x). \tag{1.24}$$
Здесь и далее, если формулы преобразования каких-либо переменных t, x или u не указываются, это означает, что соответствующие переменные не меняются. Допускаются также растяжения
$$\tilde{x} = ax, \qquad \tilde{t} = a^nt. \tag{1.25}$$
При этом
$$F(x, u, u_1, u_2, \dots) \to a^{-n}F(a^{-1}x, u, au_1, a^2u_2, \dots).$$

Для некоторых подклассов уравнений (0.1) допускаются дополнительные преобразования, зависящие от t. В частности, если $F(x, \lambda u, \lambda u_1, \dots, \lambda u_{n-1}) = \lambda F(x, u, u_1, \dots, u_{n-1})$, то при произвольных постоянных a и b допускается преобразование
$$\tilde{u} = u\exp(at + bx). \tag{1.26}$$
При этом преобразовании $u_n \to (\partial_x - b)^nu, \quad F \to F + au.$

Если, как в разделе 1.2, предполагается, что правая часть F уравнения (0.1) не зависит от переменной x, то класс допустимых преобразований меняется. Из (1.24) допускаются лишь преобразования вида

$$\tilde{u} = \varphi(u). \tag{1.27}$$

Одновременно возникают дополнительные точечные преобразования. В частности, всегда допускается преобразование Галилея

$$\tilde{x} = x + ct, \tag{1.28}$$

при котором $F \to F - cu_1$. Если функция F не зависит от u и x, то преобразование

$$\tilde{u} = u + c_1 x + c_2 t \tag{1.29}$$

является допустимым. При таком преобразовании

$$F(u_1, u_2, u_3, \dots) \to F(u_1 - c_1, u_2, u_3, \dots) + c_2.$$

Уравнения, связанные описанными выше преобразованиями, называются *эквивалентными*. Важно отметить, что наша классификация является чисто алгебраической. Такие свойства решений исследуемых уравнений, как вещественность, нас здесь не интересуют. Поэтому функции и постоянные, входящие в формулы (1.24)–(1.26) могут быть как вещественными, так и комплексными. К примеру, уравнения $u_t = u_3 - u_1^3$ и $u_t = u_3 + u_1^3$ считаются эквивалентными.

Интегрируемые уравнения могут содержать произвольные постоянные, которые устраняются тем или иным преобразованием. Рассмотрим в качестве примера уравнение (1.21), где $c_1 \neq 0$. С помощью (возможно комплексного) растяжения $u \to \lambda u$ зафиксируем нормировку $c_1 = 1$. Далее, преобразование $u \to u + \alpha x + \beta t$ приводит к уравнению

$$u_t + \beta = u_{xxx} + (u_x + \alpha)^3 + c_2(u_x + \alpha)^2 + c_3(u_x + \alpha) + c_4.$$

Легко видеть, что при $\alpha = -c_2/3$ и $\beta = c_4 + \alpha^3 + c_2\alpha^2 + c_3\alpha$ получаем $c_2 = 0$, $c_4 = 0$. Постоянная c_3 уничтожается преобразованием Галилея, и мы получаем потенциированное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза:

$$u_t = u_{xxx} + u_x^3.$$

Аналогично, несущественными являются параметры в уравнении (1.22).

2. Уравнения третьего порядка с постоянной сепарантой

2.1. Условия интегрируемости. Для уравнений вида (0.2) бесконечная цепочка канонических законов сохранения

$$\frac{d}{dt}(\rho_n) = \frac{d}{dx}(\theta_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2.1}$$

может быть задана формулами (вывод см. в приложении 3):

$$\rho_{n+2} = \frac{1}{3}\left[\theta_n - \delta_{n,0}F_u - F_{u_1}\rho_n - F_{u_2}\left(\frac{d}{dx}\rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_{s=0}^{n}\rho_s\,\rho_{n-s}\right)\right] - \sum_{s=0}^{n+1}\rho_s\,\rho_{n+1-s}$$

$$- \frac{1}{3}\sum_{0\leqslant s+k\leqslant n}\rho_s\,\rho_k\,\rho_{n-s-k} - \frac{d}{dx}\left[\rho_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}\rho_s\,\rho_{n-s} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\rho_n\right], \quad n \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где два первых элемента последовательности ρ_i имеют вид

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}F_{u_2}, \qquad \rho_1 = \frac{1}{9}F_{u_2}^2 - \frac{1}{3}F_{u_1} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}F_{u_2}.$$

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $F_{u_i} = \partial F/\partial u_i$, где $i = 0, 1, 2$. Токи θ_n вычисляются последовательно в процессе классификации. При этом препятствия к их существованию приводят к дифференциальным уравнениям, которым должна удовлетворять правая часть интегрируемого уравнения (0.2).

Нетрудно проверить, что первые четыре условия из этой серии эквивалентны условиям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{d}{dx}\sigma_0, \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(3\frac{\partial F}{\partial u_1} - \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)^2\right) = \frac{d}{dx}\sigma_1, \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(9\sigma_0 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)^3 - 9\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right) + 27\frac{\partial F}{\partial u}\right) = \frac{d}{dx}\sigma_2, \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_1 = \frac{d}{dx}\sigma_3, \tag{2.6}$$

приведенным в [6]. При этом $\sigma_0 = -3\theta_0,\ \sigma_1 = 3\dfrac{d}{dx}\sigma_0 - 9\theta_1, \ldots$ Как будет показано ниже, этих четырех условий «почти» хватает для получения полного списка интегрируемых уравнений (0.2).

Чтобы эффективно использовать каноническую серию для классификации, полезно сначала изучить возможную структуру плотностей локальных законов сохранения малых порядков для рассматриваемого класса уравнений.

Лемма 1. *Если плотность ρ закона сохранения для уравнения (0.2) имеет дифференциальный порядок* $\operatorname{ord}\rho = 2$, *то*

$$\rho = f_1 u_2^2 + f_2 u_2 + f_3, \tag{2.7}$$

где f_i — некоторые функции от x, u, u_1, причем

$$\frac{d}{dx}f_1 = \frac{2}{3}f_1\frac{\partial F}{\partial u_2}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Уничтожая вычитанием полных x-производных члены с u_5 и u_4, находим, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho = \frac{\partial\rho}{\partial u}(u_3 + F) + \frac{\partial\rho}{\partial u_1}\left(u_4 + \frac{d}{dx}F\right) + \frac{\partial\rho}{\partial u_2}\left(u_5 + \frac{d^2}{dx^2}F\right) \sim \\ \sim \frac{u_3^3}{2}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_2^3} + \frac{3}{2}u_3^2\left(\frac{\partial^3\rho}{\partial u_2^2\partial u_1}u_2 + \frac{\partial^3\rho}{\partial u_2^2\partial u}u_1 + \frac{\partial^3\rho}{\partial u_2^2\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_2^2}\right) + \cdots,\end{aligned} \tag{2.9}$$

где многоточие означает линейное по u_3 выражение. По определению закона сохранения, последнее выражение должно иметь вид $\dfrac{d}{dx}\sigma$. Ясно, что функция σ не может зависеть от производных выше, чем u_2, а функция $\dfrac{d}{dx}\sigma$ имеет по u_3 степень не выше единицы. Поэтому, приравняв к нулю коэффициенты при u_3^3 и u_3^2, получаем (2.7) и (2.8). $\square$

Замечание 3. Заметим, что в (2.7) возможно равенство $f_1 = 0$. Это относится и к другим аналогичным леммам.

Замечание 4. При доказательстве леммы 1 использовался следующий алгоритм проверки того, является ли данная функция $S(x, u, u_1, \ldots, u_n)$ полной производной по x (т.е. принадлежит $\operatorname{Im}\dfrac{d}{dx}$). Во-первых, S должна быть линейна по старшей производной u_n. Если это выполнено, то, как легко видеть, из S можно вычесть полную производную так, что разность имеет порядок, меньший, чем n. Продолжая эту процедуру понижения порядка, мы либо дойдем до ситуации, когда функция нелинейна по старшей производной, либо получим ноль.

Покажем, как можно использовать формулы (2.7) и (2.8) при классификации уравнений (0.2).

Лемма 2. *Пусть для уравнения* (0.2) *выполнено первое условие интегрируемости* (2.3). *Тогда F — многочлен по u_2 не выше второй степени.*

Доказательство. Согласно условию (2.3), функция $\dfrac{\partial F}{\partial u_2}$ должна быть плотностью закона сохранения. Применяя к ней лемму 1, запишем уравнения (2.7) и (2.8):

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = f_1 u_2^2 + f_2 u_2 + f_3,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_0} u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} u_2 = \frac{2}{3} f_1 (f_1 u_2^2 + f_2 u_2 + f_3).$$

Так как f_i не зависят от u_2, то, приравнивая коэффициенты при u_2^2, получаем $f_1 = 0$. Проинтегрировав уравнение $\dfrac{\partial F}{\partial u_2} = f_2 u_2 + f_3$ по u_2, приходим к требуемому результату. □

2.2. Список интегрируемых уравнений. Наша основная цель — доказать следующее утверждение [6].

Теорема 1. *С точностью до замен вида* (1.24)–(1.29) *всякое уравнение* (0.2), *удовлетворяющее условиям интегрируемости* (2.1), (2.2) *с* $n = 0, 1, ..., 5$, *принадлежит следующему списку:*

$$u_t = u_{xxx} + u u_x, \tag{2.10}$$

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_x, \tag{2.11}$$

$$u_t = u_{xxx} + u_x^2, \tag{2.12}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2} u_x^3 + (c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u}) u_x, \tag{2.13}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2+1)} + a_1 (u_x^2+1)^{3/2} + a_2 u_x^3, \tag{2.14}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_{xx}^2}{2 u_x} + \frac{1}{u_x} - \frac{3}{2} \wp(u) u_x^3, \tag{2.15}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2+1)} - \frac{3}{2} \wp(u) u_x (u_x^2+1), \tag{2.16}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_{xx}^2}{2 u_x}, \tag{2.17}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_{xx}^2}{4 u_x} + c_1 u_x^{3/2} + c_2 u_x^2, \quad c_1 \neq 0 \text{ или } c_2 \neq 0, \tag{2.18}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\, u_{xx}^2}{4\, u_x} + \alpha(x) u_x, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_{xxx} - \frac{3\, u_{xx}^2}{4\, u_x} + \frac{3}{\xi} u_{xx} (\sqrt{\alpha'\, u_x} + u_x) + \frac{3\, u_x^3}{\xi^2} + \frac{6}{\xi^2}\, u_x^{5/2} \sqrt{\alpha'} \\ + \frac{3\, u_x^{3/2}}{\xi^2 \sqrt{\alpha'}} \,(\xi \alpha'' - 2\alpha'^2) + f\, u_x + c_0 + c_1\, u + c_2\, u^2, \end{aligned} \tag{2.20}$$

где $\xi = \alpha(x) - u, \quad f = -\dfrac{\alpha'''}{\alpha'} + \dfrac{3\alpha''^2}{4\alpha'^2} + 3\dfrac{\alpha''}{\xi} - 3\dfrac{\alpha'^2}{\xi^2} - \dfrac{c_0 + c_1\,\alpha + c_2\,\alpha^2}{\alpha'}$,

$$u_t = u_{xxx} + 3\,u^2 u_{xx} + 9\,u u_x^2 + 3\,u^4 u_x + u_x \alpha(x) + \frac{1}{2}\,u\alpha'(x), \tag{2.21}$$

$$u_t = u_{xxx} + 3\,u u_{xx} + 3\,u_x^2 + 3\,u^2 u_x + (u\gamma(x))_x + \beta(x), \tag{2.22}$$

$$u_t = u_{xxx} + \alpha(x) u_x + \beta(x) u. \tag{2.23}$$

Здесь $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, $a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, g_2, g_3$ *— произвольные постоянные,* α, β *и* γ *— произвольные функции.*

Замечание 5. Часто вместо уравнений (2.15) и (2.16) рассматривают точечно эквивалентные им уравнения

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}\,\frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{Q}{u_x}, \tag{2.24}$$

и

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{8}\,\frac{\left((Q + u_x^2)_x\right)^2}{u_x\,(Q + u_x^2)} + \frac{1}{2} Q''\,u_x. \tag{2.25}$$

В обоих случаях $Q = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4$ — произвольный многочлен. Если $Q' \neq 0$, то в уравнениях (2.24) и (2.25) можно сделать подстановку $u = f(v)$, где $(f')^2 = Q(f)$. Тогда для v получатся уравнения (2.15) и (2.16), соответственно. При этом

$$g_2 = \frac{4}{3} c_2^2 - 4 c_1 c_3 + 16 c_0 c_4, \qquad g_3 = \frac{8}{27} c_2^3 - \frac{4}{3} c_1 c_2 c_3 - \frac{32}{3} c_0 c_2 c_4 + 4 c_0 c_3^2 + 4 c_1^2 c_4.$$

Отметим, что при дробно-линейных преобразованиях

$$u = \frac{z_1 \tilde{u} + z_2}{z_3 \tilde{u} + z_4} \tag{2.26}$$

многочлен Q меняется по закону

$$\tilde{Q}(\tilde{u}) = Q\left(\frac{z_1 \tilde{u} + z_2}{z_3 \tilde{u} + z_4}\right)(z_3 \tilde{u} + z_4)^4 (z_1 z_4 - z_2 z_3)^{-2}.$$

Выражения g_2, g_3 являются инвариантами группы преобразований (2.26). В зависимости от структуры кратных корней многочлен Q может быть приведен преобразованием (2.26) и растяжениями x и t к одной из следующих канонических форм: $Q(x) = x(x-1)(x-k)$, $Q(x) = x(x-1)$, $Q(x) = x^2$, $Q(x) = x$, $Q(x) = 1$ и $Q(x) = 0$. $\square$

Замечание 6. В уравнении (2.15) допускается вырожденный случай $\wp = const$, а в уравнении (2.16) такое же вырождение приводит к частному случаю уравнения (2.14). $\square$

Докажем теорему 1. Отметим, что приведенное ниже доказательство содержит алгоритм приведения произвольного интегрируемого уравнения (0.2) к одной из канонических форм (2.10)–(2.23) точечными преобразованиями.

Доказательство. Согласно лемме 2, всякое интегрируемое уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xxx} + A_2(u_x, u, x) u_{xx}^2 + A_1(u_x, u, x) u_{xx} + A_0(u_x, u, x). \tag{2.27}$$

Легко видеть, что плотность закона сохранения (2.4) имеет вид (2.7), где $f_1 = 3\,A_{2,u_1} - 4\,A_2^2$. Соотношение (2.8) приводит к двум следующим уравнениям:

$$9\frac{\partial^2 A_2}{\partial u_1^2} - 36\,A_2 \frac{\partial A_2}{\partial u_1} + 16\,A_2^3 = 0,$$

$$24\,A_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial u} u_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + 2\,A_1\left(3\frac{\partial A_2}{\partial u_1} - 4\,A_2^2\right) - 9\frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial u_1} - 9\frac{\partial^2 A_2}{\partial u \partial u_1} u_1 = 0.$$

Первое из уравнений имеет решение в виде

$$A_2 = -\frac{3}{4B}\frac{\partial B}{\partial u_1}, \qquad \text{где} \quad \frac{\partial^3 B}{\partial u_1^3} = 0, \tag{2.28}$$

при этом второе уравнение принимает следующий вид:

$$\left(2\,A_1 B + 3\,\frac{\partial B}{\partial x} + 3\,u_1\frac{\partial B}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 B}{\partial u_1^2} = 3\,B\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 B}{\partial u_1^2}. \tag{2.29}$$

Из формулы для функции A_2 ясно, что старший коэффициент многочлена $B(u_1)$ без ограничения общности можно считать единицей. Поэтому имеем три случая:

$$\mathbf{I}.\ B = u_1^2 + B_1(x,u)u_1 + B_0(x,u), \quad \mathbf{II}.\ B = u_1 + B_0(x,u), \quad \mathbf{III}.\ B = 1.$$

Уравнение (2.29) выполнено тождественно в случаях **II** и **III**, а в первом случае из него определяется функция A_1:

$$A_1 = -\frac{3}{2B}\left(\frac{\partial B}{\partial x} + u_1\frac{\partial B}{\partial u}\right).$$

Случай I. При точечном преобразовании $u = \varphi(x,v)$ функция B меняется по правилу

$$\tilde{B}(x,v) = (\varphi_v v_1 + \varphi_x)^2 + B_1(x,\varphi)(\varphi_v v_1 + \varphi_x) + B_0(x,\varphi).$$

Поэтому, выбрав в качестве φ любое решение уравнения $\varphi_x = -\frac{1}{2}B_1(x,\varphi)$, сведем дело к случаю $B_1 = 0$.

Возвращаясь к исследованию второго условия интегрируемости (2.4), находим, что

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim -\frac{u_2^4 B_{0,x}}{4\,(u_1^2+B_0)^3} - \frac{u_2^3}{6}\left[\frac{\partial^4 A_0}{\partial u_1^4} + \frac{3}{u_1^2+B_0}\left(u_1\frac{\partial^3 A_0}{\partial u_1^3} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial u_1^2}\right) + \Phi(B_0,u,u_1)\right] + \\ + Z_2 u_2^2 + Z_1 u_2 + Z_0, \tag{2.30}$$

где выражение Φ зависит от производных функции B_0 и обращается в нуль, когда B_0 — постоянная; Z_i — некоторые функции от x, u, u_1. Приравнивая к нулю коэффициент при u_2^4, находим, что $B_{0,x} = 0$ и, следовательно, $B = u_1^2 + B_0(u)$. Подходящим точечным преобразованием $u \to \varphi(u)$ превратим B_0 в постоянную c_0, равную либо единице (случай **I.1**), либо нулю (случай **I.2**).

Приравнивая теперь к нулю коэффициент при u_2^3 в (2.30), где $\Phi = 0$, $B_0 = c_0$, находим функцию A_0. В итоге, уравнение (2.27) принимает следующий вид:

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\,u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2+c_0)} + A_0(u_1,u,x), \tag{2.31}$$

где A_0 задается одной из двух следующих формул:

$$\mathbf{I.1}.\ c_0 = 1, \quad A_0 = a_0(u_1^2+1)^{3/2} + a_1 u_1(u_1^2+1) + a_2 u_1 + a_3,$$

$$\mathbf{I.2}.\ c_0 = 0, \quad A_0 = \frac{a_0}{u_1} + a_1 u_1^3 + a_2 u_1 + a_3.$$

В обоих случаях $a_i = a_i(x,u)$.

В случае **I.1** из дальнейших следствий второго условия интегрируемости вытекает, что a_0, a_2 и a_3 — постоянные, а функция a_1 зависит только от u. Кроме того, $a_1''' = -8a_1 a_1'$, $a_0 a_1' = a_3 a_1' = 0$. Если $a_1' \neq 0$, то, уничтожив постоянную a_2 преобразованием Галилея, получаем уравнение (2.16). Если $a_1' = 0$, то с точностью до преобразования Галилея имеем уравнение (2.14).

В случае **I.2**, приравнивая к нулю коэффициент при u_2^2 в (2.30), находим уравнение

$$5\frac{\partial a_1}{\partial x}\,u_1^4 - 4\frac{\partial a_2}{\partial u}\,u_1^3 - \frac{\partial a_2}{\partial x}\,u_1^2 + 2\frac{\partial a_3}{\partial x}\,u_1 + \frac{\partial a_0}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует, что a_2 — постоянная, а функции a_0, a_1 и a_3 зависят только от u. Постоянная a_2 уничтожается преобразованием Галилея, а одну из функций a_0, a_1 или a_3 можно сделать постоянной подходящим точечным преобразованием вида $u \to \varphi(u)$.

I.2.1. Если $a_0 \neq 0$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $a_0 = 1$. В таком случае второе условие интегрируемости равносильно трем уравнениям: $a_3' = 0$, $a_3 a_1' = 0$, $a_1''' + 8a_1 a_1' = 0$. Если $a_1' \neq 0$, то, положив $a_1 = -3/2\wp$, приходим к уравнению (2.15). Если $a_1' = 0$, то допускается преобразование $u \to u + a_3 t$, уничтожающее постоянную a_3. В этом случае получаем уравнение, совпадающее с (2.15) с постоянной функцией $\wp$.

I.2.2. Если $a_0 = 0$, то преобразованием $u \to \varphi(u)$ можно упростить a_3 или a_1. Если $a_3 = 0$, то указанным преобразованием можно уничтожить a_1, и мы получаем уравнение (2.17). Если $a_3 \neq 0$, то преобразованием $u \to \varphi(u)$ сделаем a_3 постоянной. Тогда из второго условия интегрируемости следует $a_1' = 0$, что позволяет применить преобразование $u \to u + a_3 t$, уничтожающее a_3. То есть мы пришли к случаю $a_3 = 0$, рассмотренному выше.

В случае **I** полная классификация была получена с использованием только условий (2.3) (лемма 2) и (2.4). Это оказалось возможным потому, что ρ_1 — плотность высокого (второго) порядка.

Случай II. В этом случае $B = u_x + B_0(x,u)$. Преобразованием вида $u \to \psi(x,u)$ можно уничтожить функцию B_0. Полагая $B_0 = 0$, находим, что

$$\rho_0 \sim A_1, \qquad \rho_2 \sim \frac{u_2^2}{u_1^2}\left(2\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2}\,u_1^2 - \frac{\partial A_1}{\partial u_1}\,u_1 + A_1\right) + O(1).$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{d}{dt}\rho_0 \sim \frac{u_2^3}{4\,u_1}\left(2\,u_1\frac{\partial^3 A_1}{\partial u_1^3} + 3\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2}\right) + h_2 u_2^2 + h_0, \tag{2.32}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_2 \sim \frac{u_3^2 u_2}{4\,u_1^3}\left(2u_1^3\frac{\partial^3 A_1}{\partial u_1^3} + u_1^2\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2} + u_1\frac{\partial A_1}{\partial u_1} - A_1\right) + g u_3^2 + O(2), \tag{2.33}$$

где h_i и g — некоторые функции от u_1, u, x. Приравняв к нулю первые члены в этих выражениях, получаем систему, сводящуюся к одному уравнению второго порядка

$$2u_1^2\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2} - u_1\frac{\partial A_1}{\partial u_1} + A_1 = 0.$$

Отсюда $A_1 = a_1(x,u)u_1 + a_2(x,u)\sqrt{u_1}$, и уравнение (2.27) имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\,u_{xx}^2}{4\,u_x} + (a_1 u_x + a_2\sqrt{u_x})u_{xx} + A_0(u_x,u,x). \tag{2.34}$$

Приравняв к нулю член при u_2^2 в (2.32), получаем два следуюших соотношения:

$$3\frac{\partial a_2}{\partial u} = a_1 a_2, \qquad 3\frac{\partial a_1}{\partial x} + a_2^2 = 0. \tag{2.35}$$

Для уравнения вида (2.34) имеем

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim Z_3 u_2^3 + Z_2 u_2^2 + Z_1 u_2 + Z_0, \tag{2.36}$$

где $Z_i = Z_i(u_1,u,x)$. Приравнивая к нулю выражение Z_3, получаем для A_0 линейное неоднородное уравнение четвертого порядка, из которого определяется зависимость функции A_0 от u_1:

$$A_0 = \frac{1}{9}\,{u_1}^3\left(6\,\frac{\partial a_1}{\partial u} + {a_1}^2\right) + \frac{2}{3}\,a_1\,a_2\,{u_1}^{5/2} + a_3\,{u_1}^2 + a_4\,{u_1}^{3/2} + a_5\,u_1 + a_6,$$

где $a_i = a_i(x, u)$. Теперь зависимость всех коэффициентов A_i от u_1 определилась, поэтому можно производить расщепление уравнений по u_1 в условиях интегрируемости. Например, коэффициент Z_2 при u_2^2 в (2.36) линеен по u_1, поэтому равенство $Z_2 = 0$ приводит к двум уравнениям. Эти уравнения имеют вид

$$3\frac{\partial a_4}{\partial u} = a_1 a_4 + 2a_2\frac{\partial a_1}{\partial x}, \qquad 6\frac{\partial a_5}{\partial u} - 3a_2 a_4 - 12\frac{\partial a_3}{\partial x} + 2\,a_2\frac{\partial a_2}{\partial x} = 0. \tag{2.37}$$

Расщепление по u_1 в условиях (2.3)–(2.5), с учетом уравнений (2.35) и (2.37), дает еще несколько уравнений. Самые простые из них имеют следующий вид:

$$a_2 a_3 = 0, \qquad a_2\left(3\frac{\partial a_5}{\partial u} - a_2 a_4\right) = 0, \tag{2.38}$$

$$27\frac{\partial^2 a_5}{\partial u^2} - 18a_1\frac{\partial a_5}{\partial u} + 2\,a_2^4 = 0, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial a_6}{\partial x} = 0, \qquad 3\frac{\partial a_3}{\partial u} = 2\,a_1 a_3, \qquad a_2\left(2\frac{\partial a_2}{\partial x} - a_4\right) = 0. \tag{2.40}$$

Для анализа уравнений (2.35)–(2.40) естественно рассмотреть два случая: **II.1** $a_2 = 0$ или **II.2** $a_2 \neq 0$.

II.1. Если $a_2 = 0$, то из (2.35) следует $a_1 = a_1(u)$. Точечное преобразование $u \to \varphi(u)$, где φ удовлетворяет уравнению $3\,\varphi'' + 2\,(\varphi')^2 a_1(\varphi) = 0$, обращает a_1 в нуль. Принимая во внимание соотношения (2.35)–(2.40), можно записать уравнение (2.34) в виде

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\,u_{xx}^2}{4\,u_x} + a_3(x)u_x^2 + a_4(x)u_x^{3/2} + a_5(x, u)u_x + a_6(u), \tag{2.41}$$

где $a_5 = \alpha(x) + 2\,u\,a_3'(x)$. Для этого уравнения условия (2.3)–(2.6) эквивалентны следующим простым соотношениям:

$$a_3 = c_3, \quad a_4 = c_4, \quad a_5 = \alpha(x), \quad a_6 = c_1 + c_2 u, \quad c_3 c_2 = c_4 c_2 = 0, \quad c_3\alpha' = c_4\alpha' = 0,$$

где c_i — произвольные постоянные, α — произвольная функция.

Если $c_3 \neq 0$ или $c_4 \neq 0$, то a_5 и a_6 будут постоянными, которые можно уничтожить преобразованием $x \to x + a_5 t$, $u \to u + a_6 t$. В результате получаем уравнение (2.18). Если же $c_3 = c_4 = 0$, то уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\,u_{xx}^2}{4\,u_x} + \alpha(x)u_x + c_1 + c_2 u.$$

Если здесь $c_2 = 0$, то преобразование $u \to u + c_1 t$ уничтожает постоянную c_1. Если $c_2 \neq 0$, то сдвигом $u \to u - c_1/c_2$ превращаем в нуль c_1, а затем преобразованием $u \to u\exp(c_2 t)$ уничтожаем c_2. Таким образом, в любом случае приходим к уравнению (2.19).

II.2. С учетом $a_2 \neq 0$ полагаем $a_2 = (3/\sqrt{2})\exp(\psi/2)$, тогда уравнения (2.35) сводятся к $a_1 = 3/2\psi_u$ и уравнению Лиувилля

$$\psi_{xu} + e^{\psi} = 0. \tag{2.42}$$

Далее из (2.38) и (2.40) находим

$$a_3 = 0, \quad a_6 = a_6(u), \quad a_4 = \frac{3\,e^{\psi/2}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_5}{\partial u} = \frac{3\,e^{\psi}}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2.43}$$

а уравнение (2.39) сводится к (2.42). Кроме приведенных выше соотношений, условия (2.3) – (2.6) дают ровно одно следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial u}(a_2^2 a_6) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}\right)^2 - 2\,a_2\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} - a_5 a_2^2\right] = 0. \tag{2.44}$$

Форма уравнения (2.42) слегка отличается от стандартной, поэтому приведем его решение

$$\psi = \ln\frac{2\alpha'\nu'}{(\alpha-\nu)^2}, \qquad \alpha'\nu' \neq 0.$$

Отсюда получаем формулу для a_2, которую запишем в следующем виде:

$$a_2 = 3\frac{\sqrt{\alpha'(x)\nu'(u)}}{\alpha-\nu}.$$

Тогда нетрудно найти a_1, a_4 и a_5:

$$a_5 = \frac{3\,\alpha''}{\alpha-\nu} - \frac{3\,\alpha'^2}{(\alpha-\nu)^2} + q(x),$$

где q — произвольная функция. Подставляя a_2 и a_5 в уравнение (2.44), находим функции a_6 и q:

$$a_6 = \frac{c_0+c_1\nu+c_2\nu^2}{\nu'}, \qquad q = \frac{3\,\alpha''^2}{\alpha'^2} - \frac{\alpha'''}{\alpha'} - \frac{c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2}{\alpha'},$$

где c_i — постоянные разделения переменных.

Поскольку $\nu' \neq 0$, то с помощью точечного преобразования $\tilde{u} = \nu(u)$ ответ можно несколько упростить. В результате приходим к уравнению (2.20).

Случай III. При $B = 1$ из (2.28) следует $A_2 = 0$. Тогда полная производная от ρ_0 по t приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}\rho_0 \sim u_2^3\frac{\partial^3 A_1}{\partial u_1^3} + u_2^2\left(3\frac{\partial^3 A_1}{\partial u\partial u_1^2}\,u_1 + 3\frac{\partial^3 A_1}{\partial x\partial u_1^2} - 2\,A_1\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2}\right) + O(1).$$

Приравняв к нулю выражения при u_2^3 и u_2^2, получаем соответственно

$$A_1 = a_0(x,u) + a_1(x,u)u_1 + a_2(x,u)u_1^2$$

и

$$3\frac{\partial a_2}{\partial u}\,u_1 + 3\frac{\partial a_2}{\partial x} - 2\,a_2(a_0+a_1u_1+a_2u_1^2) = 0.$$

Расщепляя последнее соотношение по u_1, находим, что $a_2 = 0$.

Таким образом, уравнение (2.27) принимает следующий вид:

$$u_t = u_{xxx} + \big(a_0(x,u) + a_1(x,u)\,u_x\big)\,u_{xx} + A_0(u_x,u,x). \tag{2.45}$$

Для этого уравнения преобразованием вида $u \to \varphi(x,u)$ можно свести дело к $a_1 = 0$. После этого упрощения нетрудно получить, что

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_2^3\frac{\partial^4 A_0}{\partial u_1^4} + u_2^2\left(3\frac{\partial^4 A_0}{\partial u\partial u_1^3}\,u_1 + 3\frac{\partial^4 A_0}{\partial x\partial u_1^3} - 2\,a_0\frac{\partial^3 A_0}{\partial u_1^3}\right) + O(1).$$

Отсюда, приравняв коэффициент при u_2^3 к нулю, находим

$$A_0 = a_2u_1^3 + a_3u_1^2 + a_4u_1 + a_5,$$

где $a_i = a_i(x,u)$. Тогда коэффициент при u_2^2 дает уравнение, расщепляющееся по u_1 на два следующих:

$$\frac{\partial a_2}{\partial u} = 0, \qquad 2\,a_0a_2 = 3\frac{\partial a_2}{\partial x}. \tag{2.46}$$

Возвращаясь к анализу условий (2.3)–(2.5), можем теперь производить расщепление также и по u_1. С учетом (2.46) это позволяет получить, в частности

$$\frac{\partial^3 a_0}{\partial u^3} = 0, \qquad \frac{\partial^2 a_3}{\partial u^2} = 0, \qquad a_2\left(3\frac{\partial a_2}{\partial x} - 2\frac{\partial a_3}{\partial u}\right) = 0. \tag{2.47}$$

Рассмотрим альтернативные варианты **III.1** $a_2 \neq 0$ или **III.2** $a_2 = 0$.

III.1. Преобразованием $u \to u\,\mu(x)$ можно нормировать $a_2(x)$: $a_2 = -1/2$, что дает $a_0 = 0,\ a_3 = \alpha(x)$. Далее из условия (2.4) находим

$$a_4 = f_0(x) + c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u}, \qquad a_5 = f_1(x) - \frac{u}{6}(4\,\alpha\alpha' + 3\,f_0'),$$

где c_1 и c_2 — постоянные и, кроме того, $c_i\alpha = c_i f_1 = c_i f_0' = 0,\ i = 1, 2$.

Если $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, то получаем уравнение, отличающееся от (2.13) преобразованием Галилея. Если $c_1 = c_2 = 0$, то из условия (2.6) определяются f_0 и f_1:

$$f_0 = k_1 - \frac{2}{3}\,\alpha^2, \qquad f_1 = k_2 - \frac{2}{3}(k_1\alpha + \alpha'') + \frac{4}{27}\,\alpha^3,$$

где k_1 и k_2 — постоянные. Выполнив в полученном уравнении преобразование $u \to u + \dfrac{2}{3}\displaystyle\int \alpha(x)dx$, приводим его к виду $u_t = u_3 - u_1^3/2 + k_1 u_1 + k_2$, эквивалентному частному случаю уравнения (2.13).

III.2. Из уравнений (2.47) находим $a_0 = b_1(x)u^2 + b_2(x)u + b_3(x),\ a_3 = b_4(x)u + b_5(x)$. В этом случае уравнение (2.45) упрощается преобразованием $u \to u\,f_1(x) + f_2(x)$. Имеются три неэквивалентных случая: **III.2.a** $a_0 = 3u^2 + b(x)$, **III.2.b** $a_0 = 3u$ и **III.2.c** $a_0 = 0$.

В двух первых случаях несложная проверка условий (2.3)–(2.6) приводит к уравнениям (2.21) и (2.22) соответственно.

В случае **III.2.c** вид уравнения устанавливается из трех условий (2.3)–(2.5):

$$u_t = u_{xxx} + a_3(x)u_x^2 + a_4(x,u)u_x + a_5(x,u),$$

где $a_4 = b_1u^2 + b_2u + b_3,\ a_5 = b_4u^3 + b_5u^2 + b_6u + b_7,\ b_i = b_i(x),\ 1 \leqslant i \leqslant 7$. Из условий интегрируемости (2.3)–(2.6) получается громоздкая система уравнений для функций b_i, исследование которой приводит к нескольким развилкам.

1. Если $a_3 \neq 0$, то $a_3 = c_0,\ b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = b_6 = 0,\ b_7 = c_1x + c_2 + \frac{1}{2}b_3'' + \frac{1}{4}b_3^2$. Преобразование $u \to u - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int b_3\,dx$ дает уравнение $u_t = u_3 + c_0u_x^2 + c_1x + c_2$. Из шестого условия интегрируемости следует $c_1 = 0$; затем преобразованием $u \to u + c_2t$ уничтожаем c_2 и получаем (2.12).

2. Если $a_3 = 0$, то $b_1 = \mathrm{const},\ b_4 = 0$. Далее вновь возникают развилки:

2.1. Если $b_1 \neq 0$, то b_3, b_5, b_6 и b_7 выражаются через $b_2(x)$ так, что преобразование $u \to u - b_2/(2b_1)$ приводит к уравнению, эквивалентному (2.11).

2.2. Если $b_1 = 0$, то получаем $b_2 = \mathrm{const},\ b_2(b_6 - b_3') = 0,\ b_2(b_3''' + b_3b_3' - b_2b_7) = 0$. Если $b_2 \neq 0$, то преобразование $u \to u - b_3/b_2$ приводит к уравнению, эквивалентному (2.10). В противном случае получаем линейное уравнение (2.23). □

2.3. Комментарии к списку интегрируемых уравнений. В предыдущем разделе показано, что всякое интегрируемое уравнение (0.2) приводится цепочкой точечных преобразований к одному из уравнений (2.10)–(2.23). Хотя ответ в виде списка не является инвариантным относительно точечных преобразований, условия интегрируемости (2.1), (2.2) таковыми являются. Поэтому для проверки интегрируемости данного уравнения не обязательно приводить его к одному из уравнений списка. Согласно доказательству теоремы 1, достаточно проверить четыре условия (2.3)–(2.6), если уравнение принадлежит классам **I** или **II**, и 6 условий (2.2), если уравнение принадлежит классу **III**. Можно показать, что если правая часть уравнения (0.2) не зависит явно от x, то и для уравнений класса **III** достаточно проверки условий (2.3)–(2.6).

Дискретными инвариантами группы точечных преобразований являются порядки канонических законов сохранения (2.1), (2.2). Анализ структуры этих законов сохранения показывает, что уравнения разбиваются на две группы. Для первой группы уравнений (назовем их S-интегрируемыми[1]) каноническая серия содержит законы сохранения как угодно высокого порядка. Отметим, что это свойство жестче, чем просто требование существования у уравнения бесконечной серии законов сохранения. Например, линейное уравнение $u_t = u_{xxx}$ обладает бесконечным набором законов сохранения с плотностями u_k^2, $k \in \mathbb{N}$. Однако все его канонические законы сохранения тривиальны.

Для уравнений второй группы (C-интегрируемые уравнения) среди канонических законов сохранения имеется только несколько нетривиальных. К C-интегрируемым принадлежат уравнения (2.19)–(2.23). Уравнения (2.19) и (2.23) не имеют нетривиальных канонических законов сохранения. Уравнение (2.20) имеет только один нетривиальный канонический закон сохранения первого порядка $\rho_0 \sim \dfrac{\sqrt{\alpha' u_1} + \alpha'}{u - \alpha(x)}$. Уравнения (2.21) и (2.22) имеют по одному каноническому закону сохранения нулевого порядка: $\rho_0 \sim u^2$ и $\rho_0 \sim u$ соответственно.

У S-интегрируемых уравнений все канонические законы сохранения с четными номерами тривиальны [7], а порядки нечетных законов возрастают с шагом единица, но начальные порядки в этих последовательностях различны. В табл. 1 приведены порядки первых четырех нечетных канонических законов сохранения для всех S-интегрируемых уравнений.

Таблица 1. Порядки канонических законов сохранения. Для законов сохранения нулевого порядка в скобках указано, чему эквивалентна плотность

ρ_i	(2.10)	(2.11)	(2.12)	(2.13)	(2.14)	(2.16)	(2.15)	(2.17)	(2.18)
ρ_1	0, $(\sim u)$	0, $(\sim u^2)$	0, (~ 0)	1	2	2	2	2	1
ρ_3	0, $(\sim u^2)$	1	1	2	3	3	3	3	2
ρ_5	1	2	2	3	4	4	4	4	3
ρ_7	2	3	3	4	5	5	5	5	4

Для уравнения (2.18) даны порядки плотностей в случае констант общего положения. В случае $c_1 = 0$ имеем $\rho_1 \sim 0$, а остальные порядки остаются без изменения. Если $c_2 = 0$, то порядки будут равны: 1, 0 ($\rho_3 \sim 0$), 2 и 3.

Замечание 7. Уравнения (2.10)–(2.18) интегрируемы методом обратной задачи рассеяния, в то время, как (2.19)–(2.22) линеаризуемы дифференциальными подстановками (см. раздел 2.4). $\square$

Если в постановке исходной классификационной задачи считать, что правая часть уравнения (0.2) не зависит явно от x, то ответ изменится только для C-интегрируемых уравнений. Для уравнений (2.19), (2.21), (2.23) произвольные функции заменяются произвольными постоянными, после чего эти постоянные могут быть уничтожены точечными преобразованиями.

Формула (2.20) содержит два C-интегрируемых уравнения, не зависящих явно от x:

$$\begin{aligned} u_t = u_{xxx} &- \frac{3}{4}\,\frac{u_{xx}^2}{u_x+1} - 3\,u_{xx}u^{-1}(\sqrt{u_x+1} + u_x + 1) \\ &+ 6\,u^{-2}u_x(u_x+1)^{3/2} + 3\,u^{-2}u_x\,(u_x+1)(u_x+2), \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_{xxx} &- \frac{3}{4}\,\frac{u_{xx}^2}{u_x+1} - 3\,\frac{u_{xx}\,(u_x+1)\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} + 3\,\frac{u_{xx}\sqrt{u_x+1}}{\operatorname{sh} u} \\ &- 6\,\frac{u_x(u_x+1)^{3/2}\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u} + 3\,\frac{u_x\,(u_x+1)(u_x+2)}{\operatorname{sh}^2 u} + u_x^2(u_x+3). \end{aligned} \tag{2.49}$$

[1]Терминология принадлежит F. Calogero

Уравнение (2.48) получается из (2.20) с $\alpha = x$, $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ преобразованием $u \to u + x$. Уравнение (2.49) получается в случае $\alpha = e^{2x}$, $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ преобразованием $u \to e^{2(u+x)}$. Других уравнений, не зависящих от x, получить из (2.20) нельзя. Это следует, например, из результатов независимой классификации уравнений вида (0.2), не содержащих явно x.

Ситуация с уравнением (2.22) довольно поучительна. Положим функции γ и β постоянными. Тогда константа γ уничтожается преобразованием Галилея. Нетрудно проверить, что если $\beta \neq 0$, то условия интегрируемости выполнены, но канонические законы сохранения зависят явно от x. Это невозможно если при классификации уравнений, обладающих высшими симметриями, требовать, чтобы высшие симметрии также не зависели от x. В этом случае $\beta = 0$ и уравнение (2.22) – это просто симметрия третьего порядка для уравнения Бюргерса. Если же зависимость симметрий от x допускается, то постоянная β в ответе должна быть сохранена.

2.4. Дифференциальные подстановки, связывающие уравнения списка. Говорят, что дифференциальная подстановка

$$\tilde{u} = \Phi(x, u, u_1, \ldots, u_k) \tag{2.50}$$

действует из уравнения

$$u_t = u_n + g(x, u, u_x, \ldots, u_{n-1}) \tag{2.51}$$

в уравнение

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_n + f(x, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \ldots, \tilde{u}_{n-1}), \tag{2.52}$$

если для любого решения $u(x,t)$ уравнения (2.51) формула (2.50) дает решение уравнения (2.52). Число k называется порядком подстановки. Поскольку при $k > 0$ преобразование (2.50) не допускает обратного преобразования того же вида, уравнения (2.51) и (2.52) в этом определении неравноправны. Если дифференциальная подстановка имеет вид (2.50), где $\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению (A), а u — уравнению (B), то мы изображаем это графически как $(B) \to (A)$.

Наиболее известной дифференциальной подстановкой является преобразование Миуры $\tilde{u} = u_x - u^2$, связывающее уравнения КдФ

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xxx} + 6\,\tilde{u}\,\tilde{u}_x$$

и мКдФ:

$$u_t = u_{xxx} - 6\,u^2\,u_x.$$

Другие подстановки, связывающие основные уравнения списка, были найдены в [52]. Вопрос об обратимости дифференциальных подстановок рассматривался в [53].

Порядки возможных дифференциальных подстановок, связывающих между собой S-интегрируемые уравнения, могут быть найдены из табл. 1. А именно, если уравнения (2.51) и (2.52) связаны подстановкой (2.50), то порядки канонических законов сохранения с достаточно большими номерами для (2.51) на k больше порядков канонических законов сохранения с теми же номерами для (2.52). Например, если уравнения (2.16) и (2.10) связаны дифференциальной подстановкой, то она действует из (2.16) в (2.10) и имеет третий порядок.

Ниже содержится информация о дифференциальных подстановках, связывающих различные интегрируемые уравнения списка. Поскольку композиция дифференциальной подстановки (2.50) и преобразования Галилея выводит из класса подстановок вида (2.50), то иногда, чтобы найти подстановку, нужно прибавлять член вида $c\,u_x$ к правой части уравнения (2.51). Все такие случаи оговорены в приведенном ниже тексте.

I. S-интегрируемые уравнения. Оказывается, что для всех S-интегрируемых уравнений, кроме уравнения Кричевера-Новикова (2.15), существуют подстановки, действующие в уравнение КдФ (2.10). Для уравнения (2.15) такая подстановка существует только когда функция Вейерштрасса вырождена или, что то же самое, многочлен Q в формуле (2.24) имеет кратные корни.

Приведем все подстановки в уравнение КдФ. Если из данного уравнения существует несколько подстановок в (2.10), то мы приводим их все. Уравнения (2.15) и (2.16) мы заменяем на (2.24) и (2.25) соответственно, так как после этого подстановки выглядят более симпатично.

(2.11)→(2.10): $\tilde{u} = \pm i\sqrt{6}\,u_1 + u^2 + \lambda$; при этом $u_t = u_{xxx} + u^2 u_x + \lambda u_x$.

(2.12)→(2.10): $\tilde{u} = 2\,u_1$.

(2.13)→(2.10): $\tilde{u} = 3\,u_2 - \dfrac{3}{2}\,u_1^2 + 2\sqrt{-6\,c_2}\,u_1\,e^{-u} + c_1 e^{2\,u} + c_2 e^{-2\,u}$.

(2.14)→(2.10): $$\tilde{u} = \frac{3\,u_3}{\sqrt{u_1^2+1}} - \frac{3\,u_1\,u_2^2}{(u_1^2+1)^{3/2}} - \frac{3\,u_2^2}{2(u_1^2+1)} - \frac{6\,c_0\,u_1\,u_2}{\sqrt{u_1^2+1}} + 6\,c_0\,u_2 + 3\,a_1\,u_1^2 + 3\,a_1\,u_1\sqrt{u_1^2+1},$$ где $c_0 = \sqrt{(a_1-a_2)/2}\,$.

(2.25)→(2.10): $$\tilde{u} = \frac{d}{dx}\left(6\,\frac{u_1+\sqrt{Q+u_1^2}}{u-a} - \frac{3}{2}\,\frac{Q'+2\,u_2}{\sqrt{Q+u_1^2}}\right) - \frac{3}{8}\,\frac{\left((Q+u_x^2)_x\right)^2}{u_1^2\,(Q+u_x^2)} + \frac{1}{2}Q'',$$ где $Q(a)=0$.

(2.18)→(2.10): $\tilde{u} = \sqrt{-3\,c_2}\,\dfrac{u_2}{\sqrt{u_1}} + 2c_2\,u_1 + \dfrac{3}{2}\,c_1\sqrt{u_1}$.

Приведенные выше подстановки высших порядков являются композициями подстановок первого порядка. Эти подстановки связывают между собой некоторые из S-интегрируемых уравнений. Подстановки первого порядка изображены на графе (рис. 1).

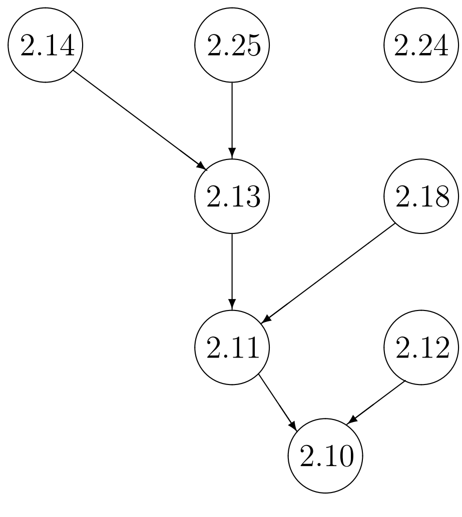


Рис. 1. Граф подстановок для S-интегрируемых уравнений третьего порядка

Стрелки графа соответствуют следующим подстановкам:

(2.14)→(2.13): $\tilde{u} = \ln\left(u_1 + \sqrt{1+u_1^2}\right)$. При этом в уравнении (2.14) должен присутствовать дополнительный член $\dfrac{3}{2}\,a_2 u_1$. Постоянные в уравнениях связаны формулами $c_1 = \dfrac{3}{4}(a_1+a_2),\ c_2 = \dfrac{3}{4}(a_2-a_1)$.

(2.25)→(2.13): $\tilde{u} = \ln\left(u_1 + \sqrt{Q+u_1^2}\right) - \ln(a_0 + 2\,a_1\,u + a_2\,u^2)$. При этом многочлен Q записывается в факторизованном виде: $Q(u) = (a_0 + 2\,a_1\,u + a_2\,u^2)(k_0 + 2\,k_1\,u + k_2\,u^2)$. Кроме того, в уравнении (2.25) должен присутствовать дополнительный член: $\dfrac{1}{2}(a_0 k_2 + a_2 k_0 - 2\,a_1 k_1)u_1$, а постоянные c_1 и c_2 в уравнении (2.13) задаются формулами $c_1 = \dfrac{3}{2}(a_0 a_2 - a_1^2),\ c_2 = \dfrac{3}{2}(k_0 k_2 - k_1^2)$.

(2.13)→(2.11): $\tilde u=\pm\dfrac{i}{2}\sqrt{6}\,u_1+\sqrt{c_1}\,e^{u}+\sqrt{c_2}\,e^{-u}$, при этом в уравнении (2.13) должен присутствовать дополнительный член: $2\sqrt{c_1c_2}\,u_1$.

(2.18)→(2.11): $\tilde u=a+b\sqrt{u_1}\,,\ b\neq 0$, где $c_1=\dfrac{4}{3}\,ab,\ c_2=\dfrac{1}{2}\,b^2$. При этом в уравнении (2.18) должен присутствовать дополнительный член a^2u_1.

Если в уравнении (2.24) многочлен Q имеет кратные корни, то существуют следующие не отраженные на графе подстановки из этого уравнения :

(2.24)→(2.10): 1) $\tilde u=\dfrac{d}{dx}\left(-3\dfrac{u_2}{u_1}+\dfrac{12\,u_1}{u-a}\right)-\dfrac{3\,u_2^2}{2\,u_1^2}-\dfrac{Q}{u_1^2},\qquad Q=(u-a)^2\big(c_0+c_1u+c_2u^2\big)$.
2) $\tilde u=\dfrac{d}{dx}\left(3\dfrac{u_2}{u_1}-\dfrac{12\,h}{u_1}\right)-\dfrac{3\,u_2^2}{2\,u_1^2}-\dfrac{Q}{u_1^2},\qquad h=c_0+c_1u+c_2u^2,\ Q=6\,h^2$.

(2.24)→(2.13): $\tilde u=\ln u_1-\ln h,\qquad h=a_0+a_1u+a_2u^2,\ \ Q=-c_2h^2,\ c_1=\dfrac{3}{2}(4\,a_0a_2-a_1^2)$.

В случае $Q=0$ уравнение (2.24) совпадает с уравнением Шварц-КдФ (2.17). Уравнение (2.17) связано тремя различными подстановками с уравнением КдФ:

(2.17)→(2.10): 1) $\tilde u=3\,\dfrac{u_3}{u_1}-\dfrac{9\,u_2^2}{2\,u_1^2}$; 2) $\tilde u=-3\,\dfrac{u_3}{u_1}+\dfrac{3\,u_2^2}{2\,u_1^2}$; 3) $\tilde u=-3\,\dfrac{u_3}{u_1}+\dfrac{3\,u_2^2}{2\,u_1^2}+12\left(\dfrac{u_2}{u}-\dfrac{u_1^2}{u^2}\right)$.
Все они являются суперпозициями подстановок первого порядка. Кроме приведенных выше, в этих суперпозициях участвуют следующие подстановки из уравнения (2.17):
(2.17)→(2.13): 1) $\tilde u=\ln(u_1),\ \ c_1=c_2=0,\ \ 2)\ \tilde u=\ln(u_1)-\ln(u^2+c_1/6),\ c_2=0$. Еще одна подстановка получается из 2) заменой $\tilde u\to-\tilde u,\ c_2\leftrightarrow c_1$.

II. C-интегрируемые уравнения.

(2.19)→(2.23): $\tilde u=\sqrt{u_1}$, при этом в уравнении (2.23) $\beta=\dfrac{1}{2}\alpha'$.
(2.19)→(2.21): $\tilde u=\sqrt{u_1/(2\,u)}$.
(2.23)→(2.22): $\tilde u=u_1/u$, при этом в уравнении (2.23) $\alpha=\gamma$.
(2.20)→(2.22): $\tilde u=\dfrac{1}{\xi}(\alpha'+\sqrt{u_x\alpha'}\,)-\dfrac{1}{2}\,\alpha''(\alpha')^{-1}$, где $\xi=\alpha(x)-u$. При этом в уравнении (2.22)

$$\gamma=\frac{1}{2}\,\alpha'''(\alpha')^{-1}-\frac{3}{4}\,(\alpha''/\alpha')^2-(c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2)/\alpha',$$
$$\beta=\frac{1}{2}\,\alpha^{(4)}(\alpha')^{-1}-2\,\alpha''\alpha'''(\alpha')^{-2}+\frac{3}{2}\,(\alpha''/\alpha')^3-\frac{1}{2}\,\alpha''(\alpha')^{-2}(c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2).$$

3. Уравнения пятого порядка

В этом разделе найдены все уравнения вида (0.4), имеющие бесконечные последовательности локальных высших симметрий. В ходе классификации использовались необходимые условия интегрируемости, которые вытекают из существования формальной симметрии [4, 7] и записываются в виде канонических законов сохранения. Нетрудно проверить, что каждое интегрируемое уравнение третьего порядка (2.10)–(2.23) имеет симметрию пятого порядка вида (0.4). Оказалось, что если исключить эти симметрии из рассмотрения, то список оставшихся интегрируемых уравнений совпадает (с точностью до эквивалентности) со списком, полученным в работах [9, 18], где изучались уравнения, обладающие высшими законами сохранения.

В разделе 3.1 приведен полный список интегрируемых уравнений (0.4), не являющихся симметриями уравнений более низких порядков. Уравнения списка по форме слегка отличаются от эквивалентных им уравнений из [9, 18]. В разделе 3.2 содержится новая рекуррентная формула для условий интегрируемости. Отметим, что в работах [9, 18] явно приведено только несколько простейших условий. Для конкретного уравнения (0.4) условия интегрируемости легко проверить одно за другим с помощью компьютера.

В разделе 3.3 приводится схематичное доказательство классификационной теоремы. Оно содержит алгоритм приведения интегрируемого уравнения (0.4) к одной из канонических форм из раздела 3.1 при помощи точечных преобразований (1.24)–(1.26). Другими словами, в каждом месте, где используются точечные преобразования, мы указываем, что́ мы с их помощью нормируем. Мы надеемся, что, следуя этому алгоритму и указаниям, содержащимся в тексте, читатель при желании без труда восстановит все детали довольно трудоемких вычислений. Из доказательства задним числом следует, что если уравнение (0.4) удовлетворяет первым десяти условиям интегрируемости, то оно интегрируемо. Отметим, что уравнение $u_t = u_5 + uu_1$ удовлетворяет первым девяти условиям интегрируемости, но не удовлетворяет десятому.

3.1. Список интегрируемых уравнений.

Теорема 2. *Предположим, что нелинейное уравнение* (0.4) *удовлетворяет двум условиям*: 1) *существует бесконечная последовательность высших симметрий*

$$u_{\tau_i} = G_i(u, ..., u_{n_i}), \qquad i = 1, 2, ..., \qquad n_{i+1} > n_i > \cdots > 5; \tag{3.1}$$

2) *не существует симметрий* (3.1) *с порядками* $1 < n_i < 5$. *Тогда уравнение эквивалентно некоторому уравнению из следующего списка:*

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 5u_1u_2 + 5u^2u_1, \tag{3.2}$$

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + \frac{25}{2}u_1u_2 + 5u^2u_1, \tag{3.3}$$

$$u_t = u_5 + 5u_1u_3 + \frac{5}{3}u_1^3, \tag{3.4}$$

$$u_t = u_5 + 5u_1u_3 + \frac{15}{4}u_2^2 + \frac{5}{3}u_1^3, \tag{3.5}$$

$$u_t = u_5 + 5(u_1 - u^2)u_3 + 5u_2^2 - 20uu_1u_2 - 5u_1^3 + 5u^4u_1, \tag{3.6}$$

$$u_t = u_5 + 5(u_2 - u_1^2)u_3 - 5u_1u_2^2 + u_1^5, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} u_t = {} & u_5 + 5(u_2 - u_1^2 + \lambda_1 e^{2u} - \lambda_2^2 e^{-4u})\, u_3 - 5u_1u_2^2 + 15(\lambda_1 e^{2u} + 4\lambda_2^2 e^{-4u})\, u_1u_2 \\ & + u_1^5 - 90\lambda_2^2 e^{-4u}\, u_1^3 + 5(\lambda_1 e^{2u} - \lambda_2^2 e^{-4u})^2\, u_1, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} u_t = {} & u_5 + 5(u_2 - u_1^2 - \lambda_1^2 e^{2u} + \lambda_2 e^{-u})\, u_3 - 5u_1u_2^2 - 15\lambda_1^2 e^{2u}\, u_1u_2 \\ & + u_1^5 + 5(\lambda_1^2 e^{2u} - \lambda_2 e^{-u})^2\, u_1, \quad \lambda_2 \neq 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} u_t = {} & u_5 - 5\frac{u_2u_4}{u_1} + 5\frac{u_2^2u_3}{u_1^2} + 5\left(\frac{\mu_1}{u_1} + \mu_2u_1^2\right)u_3 - 5\left(\frac{\mu_1}{u_1^2} + \mu_2u_1\right)u_2^2 \\ & - 5\frac{\mu_1^2}{u_1} + 5\mu_1\mu_2u_1^2 + \mu_2^2u_1^5, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} u_t = {} & u_5 - 5\frac{u_2u_4}{u_1} - \frac{15}{4}\frac{u_3^2}{u_1} + \frac{65}{4}\frac{u_2^2u_3}{u_1^2} + 5\left(\frac{\mu_1}{u_1} + \mu_2u_1^2\right)u_3 - \frac{135}{16}\frac{u_2^4}{u_1^3} \\ & - 5\left(\frac{7\mu_1}{4u_1^2} - \frac{\mu_2u_1}{2}\right)u_2^2 - 5\frac{\mu_1^2}{u_1} + 5\mu_1\mu_2u_1^2 + \mu_2^2u_1^5, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}u_t = u_5 &- \frac{5}{2}\,\frac{u_2u_4}{u_1} - \frac{5}{4}\,\frac{u_3^2}{u_1} + 5\frac{u_2^2u_3}{u_1^2} + \frac{5\,u_2u_3}{2\sqrt{u_1}} - 5(u_1 - 2\mu u_1^{1/2} + \mu^2)\,u_3 - \frac{35}{16}\,\frac{u_2^4}{u_1^3}\\ &- \frac{5}{3}\,\frac{u_2^3}{u_1^{3/2}} + 5\Big(\frac{3\mu^2}{4u_1} - \frac{\mu}{\sqrt{u_1}} + \frac{1}{4}\Big)\,u_2^2 + \frac{5}{3}\,u_1^3 - 8\mu u_1^{5/2} + 15\mu^2u_1^2 - \frac{40}{3}\,\mu^3u_1^{3/2},\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_5 + \frac{5}{2}\,\frac{f-u_1}{f^2}\,u_2u_4 + \frac{5}{4}\,\frac{2\,f-u_1}{f^2}\,u_3^2 + 5\,\mu\,(u_1+f)^2u_3\\ &+ \frac{5}{4}\,\frac{4\,{u_1}^2 - 8\,u_1f + f^2}{f^4}\,u_2^2u_3 + \frac{5}{16}\,\frac{2 - 9\,u_1^3 + 18\,u_1^2f}{f^6}\,u_2^4\\ &+ \frac{5\mu}{4}\,\frac{(4\,f - 3\,u_1)(u_1+f)^2}{f^2}\,u_2^2 + \mu^2(u_1+f)^2\big(2\,f(u_1+f)^2 - 1\big),\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_5 + \frac{5}{2}\,\frac{f-u_1}{f^2}\,u_2u_4 + \frac{5}{4}\,\frac{2\,f-u_1}{f^2}\,u_3^2 - 5\,\omega\,(f^2+u_1^2)u_3\\ &+ \frac{5}{4}\,\frac{4\,u_1^2 - 8\,u_1f + f^2}{f^4}\,u_2^2u_3 + \frac{5}{16}\,\frac{2 - 9\,u_1^3 + 18\,u_1^2f}{f^6}\,u_2^4\\ &+ \frac{5}{4}\,\omega\,\frac{5\,u_1^3 - 2\,u_1^2f - 11\,u_1f^2 - 2}{f^2}\,u_2^2 - \frac{5}{2}\,\omega'\,(u_1^2 - 2\,u_1f + 5\,f^2)u_1u_2\\ &+ 5\,\omega^2u_1f^2(3\,u_1+f)(f-u_1),\end{aligned}\tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_5 + \frac{5}{2}\,\frac{f-u_1}{f^2}\,u_2u_4 + \frac{5}{4}\,\frac{2\,f-u_1}{f^2}\,u_3^2 + \frac{5}{4}\,\frac{4\,u_1^2 - 8\,u_1f + f^2}{f^4}\,u_2^2u_3\\ &+ \frac{5}{16}\,\frac{2 - 9\,{u_1}^3 + 18\,{u_1}^2f}{f^6}\,u_2^4 + 5\,\omega\,\frac{2\,{u_1}^3 + {u_1}^2f - 2\,u_1f^2 + 1}{f^2}\,u_2^2\\ &- 10\,\omega\,u_3(3\,u_1f + 2\,u_1^2 + 2\,f^2) - 10\,\omega'(2\,f^2 + u_1f + {u_1}^2)\,u_1u_2\\ &+ 20\,\omega^2u_1({u_1}^3 - 1)(u_1 + 2\,f),\end{aligned}\tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}u_t &= u_5 + \frac{5}{2}\,\frac{f-u_1}{f^2}\,u_2u_4 + \frac{5}{4}\,\frac{2\,f-u_1}{f^2}\,u_3^2 - 5\,c\frac{f^2+u_1^2}{\omega^2}\,u_3\\ &+ \frac{5}{4}\,\frac{4\,u_1^2 - 8\,u_1f + f^2}{f^4}\,u_2^2u_3 + \frac{5}{16}\,\frac{2 - 9\,{u_1}^3 + 18\,u_1^2f}{f^6}\,u_2^4\\ &- 10\,\omega\,(3\,u_1f + 2\,u_1^2 + 2\,f^2)\,u_3 - \frac{5}{4}\,c\,\frac{11\,u_1f^2 + 2\,u_1^2f + 2 - 5\,u_1^3}{\omega^2f^2}\,u_2^2\\ &+ 5\,\omega\,\frac{2\,u_1^3 + u_1^2f - 2\,u_1f^2 + 1}{f^2}\,u_2^2 + 5\,c\,\omega'\,\frac{u_1^2 + 5\,f^2 - 2\,u_1f}{\omega^3}\,u_1u_2\\ &- 10\,\omega'\,(2\,f^2 + u_1f + {u_1}^2)\,u_1u_2 + 20\,\omega^2u_1(u_1^3 - 1)(u_1 + 2\,f)\\ &+ 40\,\frac{c\,u_1f^3(2\,u_1+f)}{\omega} + 5\,\frac{c^2u_1f^2(3\,u_1+f)(f-u_1)}{\omega^4}, \quad c \neq 0.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \mu, \mu_1, \mu_2$ и c — параметры, функция $f(u_1)$ является решением алгебраического уравнения

$$(f+u_1)^2(2f-u_1) + 1 = 0,\tag{3.17}$$

а $\omega(u)$ — это любое непостоянное решение дифференциального уравнения

$$\omega'^2 = 4\,\omega^3 + c. \qquad \square\tag{3.18}$$

Замечание 8. Все уравнения из списка теоремы 2 S-интегрируемы. В ходе доказательства теоремы установлено, что всякое C-интегрируемое уравнение (0.4) является симметрией некоторого C-интегрируемого уравнения третьего порядка из списка (2.10) – (2.23). □

Замечание 9. Если в уравнении (3.8) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то оно совпадает с (3.7). Если в уравнении (3.9) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то оно тоже совпадает с (3.7), а если $\lambda_2 = 0$, то (3.9) совпадает с (3.8) при $\lambda_2 = 0$ и замене $\lambda_1 \to -\lambda_1^2$ в последнем. □

Замечание 10. Если в уравнении (3.10) $\mu_2 \neq 0$, то подстановка $u = c^{-1}\ln v$ приводит его к виду:

$$v_t = v_5 - 5\frac{v_2 v_4}{v_1} + 5\frac{v_2^2 v_3}{v_1^2} + 5\mu\left(\frac{vv_3 - v_1 v_2}{v_1} - \frac{vv_2^2}{v_1^2}\right) - 5\mu^2\frac{v^2}{v_1}, \tag{3.19}$$

где $\mu = \mu_1 c,\ c = \sqrt{-\mu_2}$. □

Замечание 11. Если в уравнении (3.11) $\mu_2 \neq 0$, то преобразование $u = c^{-1}\ln v$ приводит его к виду

$$v_t = v_5 - 5\frac{v_2 v_4}{v_1} - \frac{15v_3^2}{4v_1} + 65\frac{v_2^2 v_3}{4v_1^2} - \frac{135v_2^4}{16v_1^3} + 5\mu\left(\frac{vv_3}{v_1} + \frac{1}{2}v_2 - \frac{7}{4}\frac{vv_2^2}{v_1^2}\right) - 5\mu^2\frac{v^2}{v_1}, \tag{3.20}$$

где $\mu = \mu_1 c,\ c = 2\sqrt{-\mu_2}$. □

3.2. Условия интегрируемости. Следующее утверждение можно извлечь из работ [9, 18]:

Лемма 3. Для любого нелинейного интегрируемого уравнения (0.4) первые четыре условия интегрируемости можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u_4} = \frac{d}{dx}\sigma_0, \tag{3.21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(2\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\right)^2 - 5\frac{\partial F}{\partial u_3}\right) = \frac{d}{dx}\sigma_1, \tag{3.22}$$

$$\frac{d}{dt}\left(15\frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial F}{\partial u_4} - 25\frac{\partial F}{\partial u_2} - 4\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\right)^3\right) = \frac{d}{dx}\sigma_2, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Bigg[25\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_4}\right)^2 + 5\frac{\partial F}{\partial u_4}\left(5\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_3} + 10\frac{\partial F}{\partial u_2} - 7\frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial F}{\partial u_4}\right) + {}\\ + 7\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\right)^4 + 25\left(\frac{\partial F}{\partial u_3}\right)^2 - 125\frac{\partial F}{\partial u_1}\Bigg] = \frac{d}{dx}\sigma_3,\end{aligned} \tag{3.24}$$

где $\dfrac{d}{dx}$ — оператор полной производной по x, а $\dfrac{d}{dt}$ — эволюционное дифференцирование по t в силу уравнения (0.4). □

Приведенные условия вытекают из существования формальной симметрии. Но технически удобнее воспользоваться изложенным в приложении 3 методом вычисления плотностей канонических законов сохранения

$$\frac{d}{dt}\rho_n = \frac{d}{dx}\theta_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.25}$$

при помощи логарифмической производной формальной собственной функции оператора линеаризации уравнения (0.4). Этот подход позволяет получить следующую рекуррентную формулу:

$$
\begin{aligned}
\rho_{n+4} = {}& \frac{1}{5}\theta_n - \frac{1}{5}\left[F_{u_0}\delta_{n,0} + F_{u_1}\delta_{n,-1} + F_{u_2}\delta_{n,-2} + F_{u_3}\delta_{n,-3} + F_{u_4}\delta_{n,-4} + F_{u_1}\rho_n\right] \\
& - 2\sum_0^{n+3}\rho_i\rho_j - 2\sum_0^{n+2}\rho_i\rho_j\rho_k - \frac{1}{5}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l\rho_m + \sum_0^{n+1}\left(\frac{d}{dx}\rho_i\right)\frac{d}{dx}\rho_j \\
& + \sum_0^{n}\rho_i\left(\frac{d}{dx}\rho_j\right)\frac{d}{dx}\rho_k - \sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l - \frac{1}{5}F_{u_2}\left[\frac{d}{dx}\rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_0^{n}\rho_i\rho_j\right] \\
& - \frac{1}{5}F_{u_3}\left[\frac{d^2}{dx^2}\rho_n + 3\frac{d}{dx}\rho_{n+1} + 3\rho_{n+2} + \frac{3}{2}\frac{d}{dx}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j + 3\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j + \sum_0^{n}\rho_i\rho_i\rho_k\right] \qquad (3.26) \\
& - \frac{1}{5}F_{u_4}\left[\frac{d^3}{dx^3}\rho_n + 4\frac{d^2}{dx^2}\rho_{n+1} + 6\frac{d}{dx}\rho_{n+2} + 4\rho_{n+3} + 2\frac{d^2}{dx^2}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j + 6\frac{d}{dx}\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j + \right. \\
& \left. + 6\sum_0^{n+2}\rho_i\rho_j + 4\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j\rho_k - \sum_0^{n}\left(\frac{d}{dx}\rho_i\right)\frac{d}{dx}\rho_j + 2\frac{d}{dx}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k + \sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l\right] - \\
& - \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}\frac{d^3}{dx^3}\rho_n + \frac{d^2}{dx^2}\rho_{n+1} + 2\frac{d}{dx}\rho_{n+2} + \sum_0^{n}\rho_i\frac{d^2}{dx^2}\rho_j + 2\frac{d}{dx}\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j + 3\sum_0^{n+2}\rho_i\rho_j \right. \\
& \left. + 2\rho_{n+3} + \frac{2}{3}\frac{d}{dx}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k + \frac{1}{2}\sum_0^{n}\left(\frac{d}{dx}\rho_i\right)\frac{d}{dx}\rho_j + 2\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j\rho_k + \frac{1}{2}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l\right],
\end{aligned}
$$

где $n \geqslant -4$, $\rho_k = 0, \forall k < 0$, δ_{ij} — символ Кронекера, $F_{u_i} = \partial F/\partial u_i$. В формуле (3.26) использовано следующее обозначение

$$
\sum_m^n a_i b_j \dots p_z = \sum_{\substack{i+j+\dots+z=n \\ i\geqslant m,\, j\geqslant m, \dots,\, z\geqslant m}} a_i b_j \dots p_z
$$

для кратных сумм. Все индексы суммирования в формуле (3.26) неотрицательны.

Рекуррентная формула (3.26) публикуется впервые. Нетрудно проверить, что первые четыре условия интегрируемости из последовательности (3.25) эквивалентны условиям (3.21) – (3.24).

Условия (3.26), (3.25) можно использовать для классификации более эффективно, если предварительно изучить структуру плотностей локальных законов сохранения для уравнений вида (0.4). Напомним, что символом $O(n)$ обозначается функция дифференциального порядка не выше n. Кроме того, мы используем символ $P_n(u_k)$ для обозначения полинома степени n от переменной u_k, коэффициенты которого имеют дифференциальный порядок меньше k. Далее систематически используется эквивалентность $f\dfrac{d}{dx}g \sim -g\dfrac{d}{dx}f$, вытекающая из $\dfrac{d}{dx}(fg) \sim 0$. В частности, имеем

$$
u_{n+1} f(u, \dots, u_n) \sim -\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i}\int f\, d\, u_n,
$$

откуда следует, в частности, что $u_{n+1}O(n) \sim O(n)$.

Лемма 4. Если плотность ρ локального закона сохранения для уравнения (0.4) имеет дифференциальный порядок $n \geqslant 3$, то справедливо следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} = \frac{2}{5}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_4}. \tag{3.27}$$

Доказательство. По определению имеем

$$\frac{d}{dt}\rho = \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial u_k}\left(u_{k+5} + \frac{d^k}{dx^k}\,F\right).$$

Используя отношение эквивалентности, можно понизить порядок этого выражения до $n+2$. Вначале покажем, что

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{\partial\rho}{\partial u_k}\left(u_{k+5} + \frac{d^k}{dx^k}\,F\right) \sim O(n+1).$$

Для этого достаточно преобразовать член высшего порядка. Считая, что $n \geqslant 3$, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial u_{n-2}}u_{n+3} &\sim -u_{n+2}\frac{d}{dx}\,\frac{\partial\rho}{\partial u_{n-2}} = -u_{n+2}u_{n+1}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-2}} + u_{n+2}O(n)\\ &\sim \frac{1}{2}\,u_{n+1}^2\frac{d}{dx}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-2}} - u_{n+1}\frac{d}{dx}O(n) = O(n+1).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\rho \sim \frac{\partial\rho}{\partial u_n}u_{n+5} + \frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}u_{n+4} + \frac{\partial\rho}{\partial u_n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,F + \frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,F + O(n+1). \tag{3.28}$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\begin{aligned}a_1 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\rho}{\partial u_n}u_{n+5} \sim u_{n+3}\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial u_n} = u_{n+3}\frac{d}{dx}\,\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_i}u_{i+1}\\ &= u_{n+3}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_i}u_{i+2} + \sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_n\partial u_i\partial u_j}u_{i+1}u_{j+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sim -\frac{1}{2}\,u_{n+2}^2\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} - u_{n+2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_i}u_{i+2} + \sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_n\partial u_i\partial u_j}u_{i+1}u_{j+1}\right)\\ &\sim -u_{n+2}^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-1}} + 2\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_n^2\partial u_i}u_{i+1}\right) + u_{n+2}O(n+1)\\ &\sim -\frac{5}{2}\,u_{n+2}^2\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-1}}\,u_{n+2}^2 + O(n+1).\end{aligned}$$

Второе слагаемое в (3.28) преобразуется аналогично предыдущему:

$$\begin{aligned}a_2 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}u_{n+4} \sim u_{n+2}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_{n-1}\partial u_i}u_{i+2} + \sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_{n-1}\partial u_i\partial u_j}u_{i+1}u_{j+1}\right)\\ &= \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-1}}u_{n+2}^2 + u_{n+2}O(n+1) \sim \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-1}}u_{n+2}^2 + O(n+1).\end{aligned}$$

Предыдущие выкладки верны, если $n \geqslant 2$. Для преобразования оставшихся двух членов из (3.28) важно, что $n \geqslant 3$:

$$
\begin{aligned}
a_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\rho}{\partial u_n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,F \sim \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial u_n}\right)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\,F \\
&= \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2}\,u_{n+2} + O(n+1)\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\,u_{n+2} + O(n+1)\right) \\
&= \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_4}\,u_{n+2}^2 + u_{n+2}O(n+1) + O(n+1) \sim \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_4}\,u_{n+2}^2 + O(n+1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,F \sim -\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}\right)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\,F = -\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\,u_{n+2} + O(n+1)\right) \\
&= u_{n+2}O(n+1) + O(n+1) \sim O(n+1).
\end{aligned}
$$

Сложив полученные выражения для $a_1, \ldots, a_4$, находим

$$
\frac{d}{dt}\rho \sim u_{n+2}^2\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_4} - \frac{5}{2}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2}\right) + O(n+1).
$$

Так как квадратичное по старшей производной выражение не может быть полной производной какой-либо функции, то получаем (3.27). □

Следствие. Если в условиях леммы 4 $n > 3$, то плотность ρ квадратична по u_n. В самом деле, левая часть уравнения (3.27) содержит слагаемое $\rho_{u_n u_n u_n} u_{n+1}$, дифференциальный порядок которого выше чем 4, если $n > 3$. Порядок остальных членов ниже и, следовательно, $\rho_{u_n u_n u_n} = 0$.

Применим полученный результат к классификации уравнений (0.4).

Лемма 5. Пусть уравнение (0.4) удовлетворяет условию (3.21). Тогда функция F квадратична по u_4.

Доказательство. Применив следствие леммы 4 к канонической плотности $\rho = F_{u_4}$, получаем

$$
\frac{\partial F}{\partial u_4} = f_1 + f_2 u_4 + f_3 u_4^2,
$$

где функции f_1, f_2 и f_3 не зависят от u_4. Подставив это выражение в (3.27), находим:

$$
\frac{d}{dx} f_3 = \frac{2}{5}\,f_3(f_1 + f_2 u_4 + f_3 u_4^2).
$$

Левая часть этого уравнения линейна по u_4, а правая часть квадратична, поэтому $f_3 = 0$. Это дает $F = f_0 + f_1 u_4 + \dfrac{1}{2}\,f_2 u_4^2$, где функции f_i не зависят от u_4. □

3.3. Схема доказательства основной теоремы.

Лемма 6. Пусть уравнение (0.4) удовлетворяет условиям интегрируемости (3.21), (3.22) и (3.23). Тогда функция F линейна по u_4.

Доказательство. Согласно лемме 5, функция F квадратична по u_4: $F = f_0 + f_1 u_4 + \dfrac{1}{2}\,f_2 u_4^2$. Отсюда нетрудно получить, что

$$
\rho_2 \sim u_4^3\,f_2\left(16\,f_2^2 - 15\,\frac{\partial f_2}{\partial u_3}\right) + Z_1 u_4^2 + O(3).
$$

Согласно следствию из леммы 4 кубичный по u_4 член должен быть нулем и, следовательно

$$
\frac{\partial f_2}{\partial u_3} = \frac{16}{15}\,f_2^2.
$$

С учетом этого уравнения находим

$$\rho_1 \sim u_4^2\, f_2^2 + O(3).$$

Для этой плотности соотношение (3.27) имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx}\, f_2 = \frac{1}{5}\, f_2(f_1 + f_2\, u_4).$$

Отсюда вытекает уравнение

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_3} = \frac{1}{5}\, f_2^2,$$

которое вместе с предыдущим дает $f_2 = 0$. □

Итак, если выполнены условия интегрируемости (3.21) – (3.23), то уравнение (0.4) имеет вид

$$u_t = u_5 + u_4 f_1(u, u_1, u_2, u_3) + f_0(u, u_1, u_2, u_3). \tag{3.29}$$

Лемма 7. Если функция третьего дифференциального порядка $\rho(u, u_1, u_2, u_3)$ является плотностью закона сохранения для уравнения (3.29), то она не более чем квадратична по u_3.

Доказательство. Полагая в (3.27) $n = 3$ и $F = f_0 + f_1 u_4$, получаем

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_3^2} = \frac{2}{5}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_3^2} f_1. \tag{3.30}$$

Учитывая, что f_1 не зависит от u_4, находим отсюда, что $\rho_{u_3u_3u_3} = 0$. □

Следствие 1. Функция f_1 в (3.29) линейна по u_3. В самом деле, из $F = f_0 + f_1 u_4$ и (3.21) следует, что f_1 — плотность закона сохранения для уравнения (3.29). Поэтому, по доказанному выше, эта функция имеет вид $f_1 = g_1 + g_2 u_3 + g_3 u_3^2$, где $g_i = g_i(u, u_1, u_2)$. Подставляя это выражение в (3.30) вместо ρ, получаем $g_3 = 0$. □

Следствие 2. Если в уравнении (3.29) $f_1 = g_1 + g_2 u_3$, где $g_i = g_i(u, u_1, u_2)$, и это уравнение имеет закон сохранения с плотностью ρ второго дифференциального порядка, то выполнено уравнение:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_2^2} = \frac{2}{5}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_2^2}(g_1 + g_2 u_3). \tag{3.31}$$

Утверждение легко проверяется прямым вычислением. □

Предложение 1. Если выполнены условия интегрируемости (3.21)–(3.23), то уравнение (0.4) имеет следующий вид

$$u_t = u_5 + A_1 u_2 u_4 + A_2 u_4 + A_3 u_3^2 + (A_4 u_2^2 + A_5 u_2 + A_6) u_3 + A_7 u_2^4 + A_8 u_2^3 + A_9 u_2^2 + A_{10} u_2 + A_{11}, \tag{3.32}$$

где $A_i = A_i(u, u_1)$.

Доказательство. В силу следствия 1 леммы 7, уравнение (0.4) имеет вид (3.29), где $f_1 = g_1(u, u_1, u_2) + g_2(u, u_1, u_2) u_3$. Рассмотрим далее плотность ρ_1 закона сохранения (3.22). Нетрудно проверить, что

$$\rho_1 \sim \frac{2}{5}\, f_1^2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_0} u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} u_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} u_3 - \frac{\partial f_0}{\partial u_3}.$$

В этом выражении все члены, кроме последнего, не более чем квадратичны по u_3. По лемме 7 рассматриваемая плотность должна быть квадратичной по u_3 и, следовательно, функция f_0 кубична по u_3:

$$f_0 = g_4 + g_5 u_3 + g_6 u_3^2 + g_7 u_3^3, \qquad g_i = g_i(u, u_1, u_2).$$

С учетом полученных результатов, плотности законов сохранения (3.22) и (3.23) эквивалентны следующим выражениям:

$$\rho_1 \sim u_3^2 \left(5\frac{\partial g_2}{\partial u_2} + 2\,g_2^2 - 15\,g_7\right) + O(2),$$
$$\rho_2 \sim u_3^3 \left(50\frac{\partial g_7}{\partial u_2} - 25\frac{\partial^2 g_2}{\partial u_2^2} + 30\,g_2\frac{\partial g_2}{\partial u_2} + 8\,g_2^3 - 90\,g_2 g_7\right) + P_2(u_3).$$

Согласно лемме 7, коэффициент при u_3^3 во второй формуле должен быть нулем. Кроме того, из условия $\dfrac{d}{dt}\rho_1 \sim 0$ возникают еще четыре уравнения, связывающих функции g_2, g_7 и их производные по u_2. Из этих уравнений нетрудно получить, что $g_2 = g_7 = 0$.

Таким образом, $F = g_1 u_4 + g_4 + g_5 u_3 + g_6 u_3^2$. Теперь плотность закона сохранения (3.21) равна g_1, и мы можем подставить $\rho = g_1$ и $g_2 = 0$ в (3.31):

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_2^2} = \frac{2}{5}\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_2^2} g_1.$$

Отсюда, как и выше, получаем линейную по старшей производной функцию $g_1 = A_1(u,u_1)u_2 + A_2(u,u_1)$.

С учетом полученных результатов, условие (3.23) дает $g_6 = A_3(u,u_1)$. Затем из условия (3.22) получаем $\dfrac{\partial^3 g_5}{\partial u_2^3} = 0$. И наконец, учитывая все полученные результаты, находим из условия (3.23), что $\dfrac{\partial^5 g_4}{\partial u_2^5} = 0$. $\square$

Для исследования уравнения (3.32) полезна следующая

Лемма 8. Уравнение (3.32) не изменяет своей формы при точечных преобразованиях вида $u = \varphi(v)$. $\square$

Некоторые из формул для преобразования коэффициентов A_i имеют простой вид:

$$\tilde A_1(v) = \varphi' A_1(u), \qquad \tilde A_2(v) = A_2(u) + \varphi'' v_1^2 A_1(u) + 5\varphi''(\varphi')^{-1} v_1,$$
$$\tilde A_3(v) = \varphi' A_3(u), \qquad \tilde A_4(v) = \varphi'^2 A_4(u), \qquad \tilde A_7(v) = \varphi'^3 A_7(u). \tag{3.33}$$

Другие формулы значительно сложнее, и мы их опускаем.

Можно проверить, что шесть первых плотностей канонических законов сохранения для уравнения (3.32) эквивалентны следующим:

$$\rho_0 = -\frac{1}{5}(A_1 u_2 + A_2), \qquad \rho_1 \sim R_1 = \psi_1 u_2^2 + \psi_2 u_2 + \psi_3, \tag{3.34}$$
$$\rho_2 \sim R_2 = \psi_4 u_2^3 + \psi_5 u_2^2 + \psi_6 u_2 + \psi_7, \qquad \rho_3 \sim R_3 = \psi_8 u_3^2 + \psi_9 u_2^4 + \psi_{10} u_2^3 + \dots, \tag{3.35}$$
$$\rho_4 \sim R_4 = \psi_{11} u_2 u_3^2 + \psi_{12} u_3^2 + \psi_{13} u_2^5 + \dots, \tag{3.36}$$
$$\rho_5 \sim R_5 = \psi_1 u_4^2 + \psi_{15} u_3^3 + (\psi_{16} u_2^2 + \psi_{17} u_2 + \psi_{18}) u_3^2 + \psi_{19} u_2^6 + \dots, \tag{3.37}$$

где коэффициенты ψ_k выражаются через функции A_i и их производные. Например, ψ_1 в (3.34) и (3.37) имеет вид

$$\psi_1 = \frac{1}{25}\left(2A_1^2 - 5A_4 + 10\frac{\partial A_3}{\partial u_1}\right).$$

Лемма 9. Если уравнение (3.32) имеет закон сохранения с плотностью $\rho(u,u_1,\dots,u_n)$, имеющей дифференциальный порядок $n \geqslant 2$, то

$$\rho \sim \alpha_1(u,u_1)u_n^2 + \alpha_2(u,u_1,\dots,u_{n-1}), \tag{3.38}$$

при этом
$$5\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} = 2\alpha_1 A_1, \qquad 5\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_0}\, u_1 = 2\alpha_1 A_2. \tag{3.39}$$

Для $n=3$ и $n=4$ вид плотностей нетрудно уточнить. Если $n=3$, то
$$\rho \sim \alpha_1 u_3^2 + \alpha_2 u_2^4 + \alpha_3 u_2^3 + \alpha_4 u_2^2 + \alpha_5, \quad \alpha_i = \alpha_i(u, u_1),$$
причем $\alpha_1(A_1 - 2A_3) = 0$. Если $n=4$, то
$$\rho \sim \alpha_1 u_4^2 + \alpha_2 u_3^3 + (\alpha_3 u_2^2 + \alpha_4 u_2 + \alpha_5)u_3^2 + \beta(u, u_1, u_2), \quad \alpha_i = \alpha_i(u, u_1),$$
где β — многочлен шестой степени по u_2. □

Следствие. Коэффициенты ψ_4 в (3.35), ψ_{11} и ψ_{13} в (3.36) равны нулю.

Форма уравнения (3.32) существенно зависит от порядков его канонических законов сохранения. Среди интегрируемых уравнений (3.32) возможны уравнения двух следующих типов:

I. Уравнения, не имеющие высших канонических законов сохранения. Другими словами, все канонические плотности для уравнений первого типа эквивалентны плотностям нулевого или первого дифференциального порядка.

II. Уравнения, имеющие высшие канонические законы сохранения с порядками $\geqslant 2$.

В случае **I** следует приравнять к нулю все нетривиальные члены высших порядков в плотностях канонических законов сохранения. Поэтому в выражениях (3.34)–(3.37) должно быть $\psi_1 = \psi_4 = \psi_5 = \psi_8 = \psi_9 = \psi_{10} = \cdots = 0$. В частности,
$$A_4 = \frac{2}{5}A_1^2 + 2\frac{\partial A_3}{\partial u_1}.$$
Из уравнения $\psi_4 = 0$ можно выразить A_7 через A_1 и A_3, а из $\psi_5 = 0$ выражается A_8 через A_1, A_2, A_3 и A_5. Из шести условий $\rho_i \sim h_i(u, u_1)$, $i = 1, \ldots, 6$ можно извлечь громоздкую систему дифференциальных уравнений для оставшихся функций A_i. В этой системе имеется следующая замкнутая подсистема уравнений для A_1 и A_3:
$$A_3 = \frac{1}{2}A_1, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial u_1} = \frac{2}{5}A_1^2. \tag{3.40}$$
Второе из этих уравнений имеет два решения $A_1 = 0$ и $A_1 = -\frac{5}{2}(u_1 + a(u))^{-1}$. Если $a(u) \neq 0$, то точечным преобразованием $u \to \varphi(u)$ можно нормировать $a = 1$. Таким образом, возможны три следующих случая:
$$\mathbf{I.a}.\ \ A_1 = 0; \qquad \mathbf{I.b}.\ \ A_1 = -\frac{5}{2}u_1^{-1}; \qquad \mathbf{I.c}.\ \ A_1 = -\frac{5}{2}(u_1+1)^{-1}.$$

Случай I.a. Из уравнений $\psi_i = 0$ следует, что $A_2 = g_1(u) + g_2(u)u_1$. Используя точечное преобразование $u \to \varphi(u)$, можно считать, что $g_2 = 0$ (см. (3.33)). После этого все оставшиеся функции $A_i(u, u_1)$ оказываются полиномами с постоянными коэффициентами. Для определения этих коэффициентов было проверено 10 условий интегрируемости (3.25). Выяснилось, что существует только три интегрируемых уравнения рассматриваемого типа:
$$u_t = u_5 + u_4 c_1 + c_2 u_3 + c_3 u_2 + c_4 u_1 + c_5 u + c_6,$$
$$u_t = u_5 + 5u^2 u_4 + 10u\, u_3(u^3 + 4u_1) + 25u\, u_2^2 + 10u_2(5u_1^2 + 12u^3 u_1 + u^6) + 140u^2 u_1^3 + 70u^5 u_1^2 + 5u^8 u_1,$$
$$u_t = u_5 + 5u\, u_4 + 10u^2 u_3 + 15u_1 u_3 + 10u_2^2 + 10u^3 u_2 + 50u\, u_1 u_2 + 5u^4 u_1 + 30u^2 u_1^2 + 15u_1^3.$$

Второе из этих уравнений является симметрией уравнения (2.21), где $\alpha = 0$. Третье уравнение — это симметрия уравнения Бюргерса $u_t = u_2 + 2uu_1$ (а также симметрия уравнения (2.22), где $\beta = \gamma = 0$).

Случай I.b. Существует только одно интегрируемое уравнение из этого класса

$$u_t = u_5 - \frac{5u_2u_4}{2u_1} + 5\frac{u_2^2u_3}{u_1^2} - \frac{5u_3^2}{4u_1} - \frac{35u_2^4}{16u_1^3} + k\,u.$$

Оно является симметрией уравнения (2.19) при $\alpha(x) = c$.

Случай I.c. Из условий интегрируемости можно найти $A_2 = f(u)(u_1+1)+g(u)\sqrt{u_1+1}$, где f и g — произвольные функции. Если $g = 0$, то все функции A_i не зависят от u, и поэтому возможно преобразование $u \to u - x$, приводящее к случаю **I.b.**

Если $g \neq 0$, то существуют два очень громоздких С-интегрируемых уравнения, являющихся симметриями уравнений (2.48) и (2.49), соответственно.

В случае **II** уравнение (3.32) имеет по меньшей мере один высший закон сохранения, поэтому, в соответствии с (3.39), можно записать A_1 и A_2 в виде

$$A_1 = \frac{5}{2f_0}\frac{\partial f_0}{\partial u_1}, \qquad A_2 = \frac{5}{2f_0}\frac{\partial f_0}{\partial u}u_1, \quad f_0 = f_0(u, u_1). \tag{3.41}$$

В результате уравнение (3.32) принимает следующий вид:

$$u_t = u_5 + \frac{5}{2}(\ln f_0)_x u_4 + A_3u_3^2 + (A_4u_2^2 + A_5u_2 + A_6)u_3 + A_7u_2^4 + A_8u_2^3 + A_9u_2^2 + A_{10}u_2 + A_{11}, \tag{3.42}$$

где $A_i = A_i(u, u_1)$. Первый канонический закон сохранения для этого уравнения тривиален:

$$\rho_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\ln f_0, \qquad \theta_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\ln f_0.$$

Второе условие интегрируемости (3.22) приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_4^2 f_0 \frac{d}{dx}\left(\frac{A_4}{f_0} - \frac{2}{f_0}\frac{\partial A_3}{\partial u_1} - \frac{5}{2\,f_0^3}\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2\right) + u_3^3\,Z_1 + u_3^2\,Z_2 + O(2) \sim 0.$$

Приравняв к нулю коэффициент при u_4^2, получаем

$$A_4 = 2\,\frac{\partial A_3}{\partial u_1} + \frac{5}{2f_0^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 + c_1 f_0, \tag{3.43}$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Функция Z_1 линейна по u_2, поэтому из равенства $Z_1 = 0$ следуют два уравнения:

$$c_1\left[25\,f_0\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 45\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 + 10\,A_3\,f_0\frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 14\,f_0^2\frac{\partial A_3}{\partial u_1} - 6\,c_1\,f_0^3\right] = 0, \tag{3.44}$$

$$c_1\left[25\,f_0\,u_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1\partial u} - 30\,u_1\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\frac{\partial f_0}{\partial u} + 5\,f_0\frac{\partial f_0}{\partial u}(3 + 2\,u_1A_3) - 2\,f_0^2\,u_1\frac{\partial A_3}{\partial u} - 3\,f_0^2A_5\right] = 0. \tag{3.45}$$

Функция Z_2 кубична по u_2, поэтому из равенства $Z_2 = 0$ получаются четыре уравнения, также содержащие множитель c_1. Поэтому естественно рассмотреть два случая: $c_1 = 0$ и $c_1 \neq 0$. Кроме того, ввиду леммы 9, возникает еще одна развилка: $A_1 - 2A_3 = 0$ или $A_1 - 2A_3 \neq 0$. Таким образом, имеем четыре следующих случая:

II.a. $c_1 = 0, \quad A_3 = \dfrac{1}{2}A_1;$ **II.c**. $c_1 = 0, \quad A_3 = \dfrac{1}{2}A_1 + f_1;$

II.b. $c_1 \neq 0, \quad A_3 = \dfrac{1}{2}A_1,$ **II.d**. $c_1 \neq 0, \quad A_3 = \dfrac{1}{2}A_1 + f_1,$

где $f_1 = f_1(u, u_1),\ f_1 \neq 0.$

Случай II.a. В этом случае плотность в условии (3.23) записывается в следующем виде

$$\rho_2 \sim u_2^3\, f_0^{-3} \left[5\, f_0^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} + 5\, f_0 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 5 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1} \right)^3 - 16\, A_7\, f_0^3 \right] + P_2(u_2).$$

В силу леммы 9 коэффициент при u_2^3 должен быть нулем, этим определяется функция A_7:

$$A_7 = \frac{5}{16\, f_0^3} \left[f_0^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} + f_0 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1} \right)^3 \right]. \tag{3.46}$$

С учетом (3.46) четвертое условие интегрируемости (3.24) приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}\rho_3 \sim u_5^2 f_0 \frac{d}{dx} \left[f_0^{-2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 2\, f_0^{-3} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1} \right)^2 \right] + P_1 u_4^3 + u_4^2 u_3 (P_2 u_2 + P_3) + u_4^2 O(2) + O(3) \sim 0,$$

где P_i – некоторые функции первого дифференциального порядка. Приравняв к нулю член при u_5^2, получаем $f_0 = \big(c\, u_1^2 + \alpha(u) u_1 + \beta(u)\big)^{-1}$, где c — постоянная, а α и β — произвольные функции. В результате уравнение $P_1 = 0$ выполнено автоматически, а $P_2 = 0$ дает $c = 0$. Таким образом,

$$f_0 = \big(\alpha(u) u_1 + \beta(u)\big)^{-1}, \quad A_1 = -\frac{5}{2} \frac{\alpha}{\alpha u_1 + \beta}, \quad A_2 = -\frac{5}{2} \frac{\alpha' u_1^2 + \beta' u_1}{\alpha u_1 + \beta}.$$

Из формул преобразования (3.33) для A_1 и A_2 видно, что замена $u \to \varphi(u)$ позволяет упростить f_0. Если $\alpha = 0$, то без ограничения общности $f_0 = 1$; если $\beta = 0$, то, не ограничивая общности, можем положить $\alpha = 1$; если $\alpha\beta \neq 0$, то можем считать, что $\beta = \alpha$.

Итак, возникают три следующих неэквивалентных случая:

$$\textbf{II.a.1}.\;\; f_0 = 1; \qquad \textbf{II.a.2}.\;\; f_0 = \frac{1}{u_1}; \qquad \textbf{II.a.3}.\;\; f_0 = \frac{a(u)}{u_1 + 1}.$$

Случай II.a.1. Равенства $c_1 = 0$, $f_0 = 1$ приводят к соотношениям $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_7 = 0$. Третье условие интегрируемости (3.23) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\rho_2 \sim u_4^2 \frac{d}{dx} \left(3\, A_8 - \frac{\partial A_5}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{5}\, u_3^3\, A_5 \left(3\, A_8 - \frac{\partial A_5}{\partial u_1} \right) + P_2(u_3) \sim 0.$$

В этом выражении коэффициенты при u_4^2 и u_3^3 следует приравнять к нулю. В то же время плотность в условии (3.24) имеет вид

$$\rho_3 \sim u_2^3 \left(2 \frac{\partial A_8}{\partial u_1} - \frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} \right) + P_2(u_2).$$

Коэффициент при u_2^3 должен быть нулем по лемме 9. Из указанных трех равенств следует $A_8 = A_8(u)$, $A_5 = 3\,(A_8 + c_2) u_1 + q_1(u)$; $c_2\,(A_8 + c_2) = 0$, $c_2\, q_1 = 0$, где c_2 — постоянная.

С учетом всех изложенных результатов находим

$$\rho_4 \sim u_2^3\, A_8' + P_2(u_2).$$

Это дает $A_8' = 0$ по лемме 9, поэтому получаем:

$$A_8 = c_3, \quad A_5 = 3\,(c_2 + c_3) u_1 + q_1(u); \quad c_2\,(c_2 + c_3) = 0, \quad c_2\, q_1 = 0.$$

Теперь условия (3.22) и (3.24) записываются в виде:

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_3^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 A_6}{\partial u_1^2} - 2\, q_1' \right) + P_5(u_2) \sim 0,$$

$$\frac{d}{dt}\rho_3 \sim u_4^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial A_9}{\partial u_1} - \frac{\partial^2 A_6}{\partial u_1^2} + \frac{9}{5}(c_2^2 - c_3^2) u_1^2 - \frac{6}{5}\, c_3\, q_1\, u_1 - \frac{1}{5}\, q_1^2 \right) + P_3(u_3) \sim 0.$$

Приравняв к нулю выражения при u_3^2 и u_4^2, находим A_6 и A_9:

$$A_6 = (q_1' + c_4)u_1^2 + q_2\, u_1 + q_3, \quad A_9 = \frac{3}{5}(c_3^2 - c_2^2)u_1^3 + \frac{3}{5}c_3\, q_1 u_1^2 + \frac{1}{5}(c_5 + 10\, q_1' + q_1^2)u_1 + q_4,$$

где $q_i = q_i(u)$ — произвольные функции.

Далее из третьего и пятого условий интегрируемости следует, что $c_3 = c_2 = 0$. Затем из третьего условия интегрируемости определяется функция A_{10} в виде многочлена третьей степени по u_1, а из четвертого условия интегрируемости определяется функция A_{11} в виде многочлена пятой степени по u_1. Для определения коэффициентов многочленов A_6, A_9, A_{10} и A_{11} были проверены 10 условий интегрируемости. Эта технически несложная работа требует перебора большого числа вариантов при решении уравнений. Результатом явились S-интегрируемые уравнения (3.2) – (3.9), а также интегрируемые уравнения, являющиеся симметриями уравнений (2.10) – (2.13).

Случай II.a.2. Полученные выше формулы для A_1, A_2, A_3, а также (3.43) и (3.46) остаются верными. Подставив в них $c_1 = 0$ и $f_0 = u_1^{-1}$, получаем:

$$A_1 = -\frac{5}{2\, u_1}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{5}{4\, u_1}, \quad A_4 = \frac{5}{u_1^2}, \quad A_7 = -\frac{35}{16\, u_1^3}.$$

Нетрудно проверить, что условие интегрируемости (3.23) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_2 \sim u_4^2 &\left[u_2\, u_1^{-1}\left(6\, A_8 + 6\, u_1\frac{\partial A_8}{\partial u_1} + \frac{\partial A_5}{\partial u_1} - 2\, u_1\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2}\right) + 6\, u_1\frac{\partial A_8}{\partial u} + 3\frac{\partial A_5}{\partial u} - 2\, u_1\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1 \partial u}\right] + \\ &+ \frac{1}{6}u_3^3 u_2 u_1^{-2}\left(78\, A_8 - 42\, u_1\frac{\partial A_8}{\partial u_1} - 60\, u_1^2\frac{\partial^2 A_8}{\partial u_1^2} + 20\, u_1^2\frac{\partial^3 A_5}{\partial u_1^3} - 16\, u_1\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} + 13\frac{\partial A_5}{\partial u_1}\right) + \\ &+ u_3^3\, Q(u, u_1) + P_3(u_3) \sim 0.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\rho_3 \sim u_2^3 u_1^{-2}\left(4\, u_1^2\frac{\partial A_8}{\partial u_1} + 12\, A_8\, u_1 - 2\, u_1^2\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} - 3\, u_1\frac{\partial A_5}{\partial u_1} + 4\, A_5\right) + P_2(u_2).$$

Коэффициенты при u_4^2 и $u_3^3\, u_2$ в (3.23), как и коэффициент при u_2^3 в ρ_3, должны обращаться в нуль. Это дает нам четыре уравнения, решение которых имеет вид

$$A_5 = q_1 + \frac{q_2}{\sqrt{u_1}}, \quad A_8 = -\frac{q_1}{2\, u_1} - \frac{2\, q_2}{3\, u_1^{3/2}},$$

где $q_i = q_i(u)$. Несколько более громоздкое условие интегрируемости (3.22) дает

$$A_6 = c_2 + q_3 u_1 + 2\, c_3\sqrt{u_1} + 2\, q_2' u_1^{3/2} + q_1' u_1^2.$$

С учетом этих результатов закон сохранения (3.24) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_3 \sim u_4^2 u_2 &\left(\frac{\partial^2 A_9}{\partial u_1^2} + \frac{3}{u_1}\,\frac{\partial A_9}{\partial u_1} - \frac{q_1^2 + 15\, q_1'}{5\, u_1} - \frac{5\, q_2' + q_1 q_2}{5\, u_1^{3/2}} - \frac{3}{4}(c_2 u_1^{-3} + c_3 u_1^{-5/2})\right) + \\ &+ u_4^2\left(\frac{\partial^2 A_9}{\partial u_1 \partial u}\, u_1 + 2\frac{\partial A_9}{\partial u} - \frac{2}{5}\sqrt{u_1}\,(5\, q_2' + q_1 q_2)' - \frac{1}{5}\, u_1(2\, q_1 q_1' + 15\, q_1'') - \frac{2}{5}\, q_2 q_2' + \frac{1}{4}\, q_3'\right) \\ &+ P_3(u_3) \sim 0.\end{aligned}$$

Члены с u_4^2 должны быть нулями, что дает

$$A_9 = c_4 - \frac{1}{8}\, q_3 + \frac{q_2^2}{10} + \frac{q_4}{u_1^2} + \frac{q_1^2}{15}\, u_1 + q_1' u_1 + \frac{4}{25}\sqrt{u_1}\,(5\, q_2' + q_1 q_2) - \frac{c_3}{\sqrt{u_1}} - \frac{3\, c_2}{4\, u_1}.$$

Далее из условий (3.22) – (3.24) находятся A_{10} и A_{11}, но эти выражения мы не приводим из-за их громоздкости.

Для уточнения постоянных коэффициентов и вида функций $q_i(u)$ было проверено десять условий интегрируемости. Этим условиям удовлетворяют уравнение (3.12), и уравнение, являющееся симметрией уравнения (2.18).

Случай II.a.3. Ход вычисления в этом случае в точности тот же, что и в **II.a.2**, но имеются небольшие различия в формулах. Общие для случая **II.a** формулы принимают здесь следующий вид:

$$A_1 = -\frac{5}{2\,\xi}, \quad A_2 = \frac{5\,a'\,u_1}{2\,a}, \quad A_3 = -\frac{5}{4\,\xi}, \quad A_4 = \frac{5}{\xi^2}, \quad A_7 = -\frac{35}{16\,\xi^3},$$

где $a = a(u)$ — произвольная функция, $\xi = u_1 + 1$.

Условие интегрируемости (3.23) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_2 \sim u_4^2 u_2\,\xi^{-1}\left(6\,A_8 + 6\,\xi\frac{\partial A_8}{\partial u_1} + \frac{\partial A_5}{\partial u_1} - 2\,\xi\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} + \frac{15\,a'}{2\,a\,\xi^2}\right) + u_4^2 u_1\left(6\frac{\partial A_8}{\partial u} + 3\,\xi^{-1}\frac{\partial A_5}{\partial u}\right.\\ \left. -2\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1\partial u} + \frac{2\,a'}{a}\frac{\partial A_5}{\partial u_1} - 6\frac{a'}{a}A_8 - \frac{3\,a'}{a\,\xi}\,A_5 + \frac{15}{2\,a^2\xi^2}\,(2\,a'^2 - aa'')\right) + \\ + Q_1(u,u_1)u_3^3 u_2 + Q_2(u,u_1)u_3^3 + P_2(u_3) \sim 0. \end{aligned}$$

Это условие вместе с формулой для плотности закона сохранения (3.24)

$$\rho_3 \sim u_2^3\xi^{-2}\left(4\,\xi^2\frac{\partial A_8}{\partial u_1} + 12\,\xi\,A_8 - 2\,\xi^2\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} - 3\,\xi\frac{\partial A_5}{\partial u_1} + 4\,A_5 - \frac{5\,a'}{a\,\xi}\right) + P_2(u_2)$$

и с учетом соотношения $Q_1 = 0$ приводит к четырем уравнениям, решение которых имеет следующий вид:

$$A_5 = q_1 + \frac{q_2}{\sqrt{\xi}}, \quad A_8 = -\frac{q_1}{2\,\xi} - \frac{2\,q_2}{3\,\xi^{3/2}} + \frac{4\,a'}{5\,a\,\xi^2},$$

где $q_i = q_i(u)$. Далее, из условия интегрируемости (3.22) определяется функция A_6, а из условия интегрируемости (3.24) – функция A_9. Затем из условий (3.22) – (3.24) находятся A_{10} и A_{11}. Все эти выражения, содержащие произвольные функции от u, довольно громоздки, и мы их опускаем.

Из пятого условия интегрируемости $\dfrac{d}{dt}\rho_4 \sim 0$ следует $a' = 0$, $q_1 = 0$, $q_2' = 0$ и т. д. Лишь в выражении A_{11} остаются две произвольные функции от u. Условия интегрируемости 5 – 7 приводят к обширной системе алгебраических уравнений для констант и двух оставшихся функций. Из этой системы следует, что все функции A_i не зависят от u. Поэтому можно выполнить преобразование $u \to u - x$, приводящее к случаю **II.a.2.** Таким образом, в рассматриваемом случае нет новых интегрируемых уравнений.

Случай II.b отличается от предыдущих тем, что канонический закон сохранения (3.22) имеет второй порядок. Из условия (3.22) следует, что

$$f_0 = -\frac{5}{2c_1}(u_1^2 + a(u)u_1 + b(u))^{-1}, \qquad ab' = 2a'b,$$

а функции A_5, A_7, A_8 и A_9 выражаются через f_0:

$$
\begin{aligned}
A_5 &= \frac{15}{2\,f_0}\frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial u_1}\,u_1 + \frac{5}{f_0^2}\frac{\partial f_0}{\partial u}\left(f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial u_1}\,u_1\right),\\
A_7 &= \frac{c_1}{4}\frac{\partial f_0}{\partial u_1} + \frac{5}{8\,f_0}\frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} - \frac{35}{32\,f_0^2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2}\frac{\partial f_0}{\partial u_1} + \frac{5}{8\,f_0^3}\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^3,\\
A_8 &= \frac{5}{24\,f_0^2}\left(14\,f_0 - 3\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\,u_1\right)\frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial u_1} + \frac{5\,u_1}{12\,f_0^2}\left(5\,f_0\frac{\partial^3 f_0}{\partial u \partial u_1^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2}\frac{\partial f_0}{\partial u}\right) +\\
&\quad + \frac{c_1}{3}\frac{\partial f_0}{\partial u}\,u_1 - \frac{5}{24\,f_0^3}\frac{\partial f_0}{\partial u}\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\left(3\,f_0 + 8\,\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\,u_1\right).
\end{aligned}
$$

Формула для A_9 опущена из-за ее громоздкости.

Принимая во внимание формулы (3.33) и явный вид функций A_1 и A_2, нетрудно заметить, что если функции a и b не равны нулю, то их можно превратить в постоянные точечным преобразованием $u \to \varphi(u)$. Если $a = 0$, то с точностью до точечного преобразования имеем либо $b = 0$, либо $b = 1$. Если $a \neq 0$, то, положив $a = 2$, получаем $b' = 0$. Таким образом, возникают три следующих возможных случая:

$$
\textbf{II.b.1}.\ \ f_0 = -\frac{5}{2c_1 u_1^2}; \qquad \textbf{II.b.2}.\ \ f_0 = -\frac{5}{2c_1(u_1^2+1)};
$$
$$
\textbf{II.b.3}.\ \ f_0 = -\frac{5}{2c_1}((u_1+1)^2 + c)^{-1},
$$

где c — постоянная.

Случай II.b.1. Из условий (3.22) и (3.24) получаем

$$
\begin{aligned}
&A_5 = A_8 = 0, \quad A_6 = c_2 + q_1 u_1^2 + q_2 u_1^{-2}, \quad A_7 = -\frac{45}{8}\,u_1^{-3},\\
&A_{10} = q_1' u_1^3 + q_2' u_1^{-1}, \quad A_9 = -\frac{1}{2}\,q_1 u_1 - \frac{3}{2}\,c_2 u_1^{-1} - \frac{5}{2}\,q_2 u_1^{-3},\\
&A_{11} = \frac{1}{5}\left(q_1'' + \frac{3}{10}\,q_1^2\right) + \frac{c_2}{5}\,q_1 u_1^3 - \frac{3}{5}\,c_2\,q_2 u_1^{-1} - \frac{1}{10}\,q_2^2 u_1^{-3} + \left(\frac{1}{15}\,q_1 q_2 - \frac{1}{3}\,q_2''\right) u_1 + q_3,
\end{aligned}
$$

где $q_i = q_i(u)$, c_2 — постоянная.

Проверка условий 6 – 10 показывает, что существуют только два интегрируемых уравнения, которые являются симметриями уравнений (2.15) и (2.17).

Случай II.b.2. Из условий (3.22) и (3.24) следует, что

$$
\begin{aligned}
&A_5 = A_8 = 0, \quad A_6 = q + c_2 u_1\sqrt{u_1^2+1} + (3\,q + c_3)u_1^2, \quad A_7 = \frac{5}{8}\,u_1\frac{19 - 9\,u_1^2}{(u_1^2+1)^3}, \quad q = q(u),\\
&A_9 = \frac{3}{2}\,u_1\frac{2\,q + c_3}{u_1^2+1} + \frac{c_2}{\sqrt{u_1^2+1}} - \frac{1}{2}\,c_2\sqrt{u_1^2+1} - \frac{1}{2}\,(3\,q + c_3)\,u_1, \quad A_{10} = q' u_1(3\,u_1^2 + 2),\\
&A_{11} = \frac{3}{25}\,c_2(3\,q + c_3)(u_1^2+1)^{5/2} - \frac{1}{5}\,c_2(2\,q + c_3)(u_1^2+1)^{3/2} + \frac{1}{10}(3\,q^2 + 2\,c_4\,q)\,u_1 +\\
&\quad + \frac{3}{50}\big(10\,q'' + (3\,q + c_3)^2 + c_2^2\big)u_1^5 + \frac{1}{10}\big(5\,q'' + 6\,q^2 + 5\,c_3\,q + c_2^2\big)\,u_1^3 + c_5, \quad c_2\,q' = 0.
\end{aligned}
$$

Проверка условий 6 – 10 показывает, что существуют только два интегрируемых уравнения, которые являются симметриями уравнений (2.14) и (2.16).

Случай II.b.3. Второе условие интегрируемости (3.22) позволяет показать, что все функции A_i не зависят от u. Поэтому преобразованием $u \to u - x$ уравнение (3.42) сводится к уравнениям из случаев **II.b.1**, если $c = 0$ и **II.b.2**, если $c \neq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае нет новых интегрируемых уравнений.

Случай II.c. Плотность в (3.23) эквивалентна кубичному по u_2 выражению (3.35). Условие $\psi_4 = 0$ позволяет выразить A_7 через f_0 и f_1. Далее находим

$$\frac{d}{dt}\rho_2 \sim (Z_1 u_2 + Z_2)\, u_4^2 + O(3).$$

Из уравнений $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$ находим два уравнения вида

$$\frac{\partial A_8}{\partial u_1} = F_1(f_0, f_1), \qquad \frac{\partial A_8}{\partial u} = F_2(f_0, f_1),$$

которые можно явно проинтегрировать. Подставив A_7 и A_8 во все выражения, находим $\rho_3 \sim \alpha\, u_3^2 + O(2)$. Так как $2\,A_3 - A_1 = 2\,f_1 \neq 0$, то по лемме 9 имеем $\alpha = 0$, что дает уравнение Риккати

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \varphi_1(f_0) f_1^2 + \varphi_2(f_0) f_1 + \varphi_3(f_0),$$

где φ_2 и φ_3 зависят как от f_0, так и от производных f_0 по u_1 первого и второго порядков.

Аналогично предыдущему находим $\rho_4 \sim u_3^2(Q_1 u_2 + Q_2) + O(2)$, и полагаем $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$. Второе из этих уравнений определяет A_5, а первое дает обыкновенное дифференциальное уравнение с производными f_0 по u_1, содержащее f_1. Из четвертого условия интегрируемости

$$\frac{d}{dt}\rho_3 \sim u_5^2(P_1\, u_2 + P_2) + u_4^3\, P_3 + u_4^2 u_3(P_4\, u_2 + P_5) + u_4^2(P_6\, u_2^2 + P_7\, u_2 + P_8) + u_3^4 P_9 + \\ + u_3^3(P_{10}\, u_2^3 + P_{11}\, u_2^2 + P_{12}\, u_2 + P_{13}) + u_3^2 O(2) + O(2) \sim 0$$

получаем уравнения $P_i = 0$, $i = 1, \ldots, 13$, среди которых имеется много уравнений, содержащих только f_1, f_0 и производные f_0 по u_1. Выразив все производные f_0 из части уравнений, и подставив их в остальные уравнения, получаем противоречие $f_0 f_1 = 0$.

Это означает, что в условиях **II.c** не существует интегрируемых уравнений.

Случай II.d. Напомним, что в этом случае функции A_1 и A_2 имеют вид (3.41), который обеспечивает тривиальность первого канонического закона сохранения. Функция A_4 выражается формулой (3.43), а так как $c_1 \neq 0$, то имеем еще два уравнения (3.44) и (3.45). Кроме того, $A_3 = A_1/2 + f_1$, $f_1 \neq 0$.

После исключения A_3 уравнение (3.44) принимает следующий вид:

$$15\, f_0\, \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 30 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 + 20 f_0\, f_1\, \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 28\, f_0^2 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - 12\, c_1 f_0^3 = 0, \tag{3.47}$$

а уравнение (3.45) позволяет выразить A_5 через f_0 и f_1:

$$A_5 = \frac{15}{2\, f_0}\, u_1\, \frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial u_1} - \frac{5}{3\, f_0^2}\, \frac{\partial f_0}{\partial u} \left(3\, u_1 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 3\, f_0 - 2\, u_1\, f_0\, f_1\right) - \frac{2}{3}\, u_1\, \frac{\partial f_1}{\partial u}. \tag{3.48}$$

С учетом изложенного второе условие интегрируемости (3.22) имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_3^2(Z_1\, u_2^3 + Z_2\, u_2^2 + Z_3\, u_2 + Z_4) + Z_5\, u_2^7 + P_6(u_2) \sim 0.$$

Из уравнения $Z_1 = 0$ выражается A_7:

$$A_7 = \frac{55\, f_0^{-1}}{112}\, \frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} - \frac{f_0^{-2}}{1568} \left(185\, \frac{\partial f_0}{\partial u_1} + 84\, f_0\, f_1\right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - \\ - \frac{f_0^{-3}}{392} \left(205 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^3 - 230\, f_0\, f_1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 - 44\, c_1\, f_0^3 \frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right), \tag{3.49}$$

а из уравнения $Z_2 = 0$ — A_8:

$$A_8 = \frac{55}{28}\, f_0^{-1}\, u_1 \frac{\partial^3 f_0}{\partial u \partial u_1^2} - \frac{5\, f_0^{-2}}{84}\, u_1 \frac{\partial f_0}{\partial u}\, \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} + \frac{f_0^{-1}}{126}(30\, c_1\, u_1\, f_0 - 7\, f_1)\frac{\partial f_0}{\partial u} \tag{3.50}$$
$$- \frac{f_0^{-2}}{168}\left(25\, u_1 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 490\, f_0 + 36\, u_1\, f_0\, f_1\right)\frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial u_1} - \frac{55}{21}\, f_0^{-3} u_1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 \frac{\partial f_0}{\partial u}$$
$$+ \frac{5\, f_0^{-2}}{504}(272\, u_1\, f_1 - 63)\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\frac{\partial f_0}{\partial u} - \frac{f_0^{-1}}{63}\,\frac{\partial f_1}{\partial u}\left(31\, u_1\, \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 7\, f_0\right).$$

Из уравнений $Z_3 = 0$ и $Z_4 = 0$ выражаются соответственно A_9 и A_{10} через функции f_0, f_1, A_6 и их производные. Эти выражения мы опускаем ввиду их громоздкости.

Уравнение $Z_5 = 0$ имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка для f_0 относительно переменной u_1. Другие следствия второго условия интегрируемости содержат производные функций f_0, f_1, A_6 и A_{11} по двум переменным u_0 и u_1 и слишком сложны для анализа.

Далее, в силу леммы 9 из выражений (3.35) для ρ_2 и ρ_3 следует, что $\psi_4 = 0$ и $\psi_8 = 0$. Эти два уравнения имеют следующий вид

$$70\, f_0^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} - f_0\left(405 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 28\, f_0\, f_1\right)\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} \tag{3.51}$$
$$+ 6 \frac{\partial f_0}{\partial u_1}\left(65\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 - 6\, f_0\, f_1 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 2\, c_1\, f_0^3\right) = 0,$$

$$25\, f_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 10 \frac{\partial f_0}{\partial u_1}\left(5 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - f_0\, f_1\right) + f_0^2(15\, c_1\, f_0 + 28\, f_1^2) = 0. \tag{3.52}$$

Выразив из (3.52) вторую производную f_0, и подставив ее в (3.51) с учетом (3.47), получаем $f_0 = -4/(5c_1) f_1^2$. После исключения f_0, уравнения (3.47) и (3.52) сводятся к следующему уравнению

$$25\, f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} - 75\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)^2 + 10\, f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + 8\, f_1^4 = 0, \tag{3.53}$$

а уравнение (3.51) и упомянутое уравнение $Z_5 = 0$ являются следствиями уравнения (3.53). Выполнив подстановку $f_1 = 5/(4\, f)$ в (3.53), получаем уравнение

$$2\, \frac{\partial}{\partial u_1}\left(f\, \frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial u_1} = 1, \tag{3.54}$$

общий интеграл которого записывается в виде

$$(f + u_1 + a)^2(2f - u_1 - a) + b = 0, \tag{3.55}$$

где a и b — произвольные функции переменной u.

С учетом всех полученных результатов, включая дифференциальные следствия уравнения (3.55), нетрудно проверить, что

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_2^6\, f^{-10}(3a + 3u_1 - 5\, f)(3a'b - ab') + P_5(u_2),$$

где штрих означает производную по u. Таким образом, $3\, a'\, b = ab'$, что влечет $a = c\, b^{1/3}$, $c = \text{const}$, если $b \neq 0$.

Этот результат позволяет обратить обе эти функции в постоянные точечным преобразованием $u = \varphi(v)$. В самом деле, так как $2\, f_1 = 2\, A_3 - A_1$, то, согласно формулам (3.33),

$\tilde{f}_1(v) = \varphi' f_1(u)$. Следовательно, функция $f \sim f_1^{-1}$ преобразуется по закону $\tilde{f}(v) = \varphi'^{-1} f(u)$. Выполнив преобразование в уравнении (3.55), получаем

$$[\tilde{f} + v_1 + a(u)\varphi'^{-1}]^2[2\tilde{f} - v_1 - a(u)\varphi'^{-1}] + b(u)\varphi'^{-3} = 0. \tag{3.56}$$

Если $a = b = 0$, то никакого преобразования не требуется, и мы имеем

$$(f + u_1)^2(2f - u_1) = 0.$$

Если же $b = 0$ и $a \neq 0$, то, полагая $\varphi' = a$, приводим уравнение (3.55) к виду

$$(f + u_1 + 1)^2(2f - u_1 - 1) = 0.$$

Если $b(u) \neq 0$, то $a(u) = k\, b^{1/3}(u)$, где k — постоянная. Выбрав $\varphi' = b^{1/3}$, мы получаем уравнение (3.55) в следующем виде:

$$(f + u_1 + a)^2(2f - u_1 - a) + 1 = 0, \tag{3.57}$$

где a — постоянная.

Таким образом, с точностью то точечного преобразования величины a и b в (3.55) – постоянные, причем возможны три случая

II.d.1. $f = -u_1 - a$; **II.d.2**. $f = \dfrac{1}{2}(u_1 + a)$; **II.d.3**. $f(u_1)$ удовлетворяет (3.57).

В каждом из этих случаев параметр a принимает одно из двух значений: $a = 0$ или $a = 1$.

Используя уравнение (3.54), можно исключить высшие производные f из выражений, для функций A_i, найденных выше. Это приводит к достаточно компактным выражениям:

$$A_1 = -\frac{5}{f}f', \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{5}{4f}(1 - 2f'), \quad A_4 = \frac{5}{4f^2}(16f'^2 - 3),$$

$$A_5 = 0, \quad A_7 = -\frac{5}{16}f^{-3}(2f' - 1)(28f'^2 + 20f' + 1), \quad A_8 = 0,$$

$$A_9 = \frac{1}{2}f^2\frac{\partial^3 A_6}{\partial u_1^3} + \frac{1}{4}f(6f' + 1)\frac{\partial^2 A_6}{\partial u_1^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial A_6}{\partial u_1} - \frac{3f'}{2f}A_6,$$

$$A_{10} = u_1 f^2\frac{\partial^3 A_6}{\partial u \partial u_1^2} + \frac{1}{2}u_1 f(2f' + 1)\frac{\partial A_6}{\partial u \partial u_1} - \frac{1}{2}(f + u_1 + 2ff')\frac{\partial A_6}{\partial u},$$

причем эти формулы верны для каждого из трех случаев II.d.1, II.d.2 и II.d.3.

Случай II.d.1. Если $a = 1$, тогда из условий интегрируемости следует, что $A_i = A_i(u_1), \forall i$. Следовательно, допускается преобразование $u \to u - x$, и мы приходим к случаю $a = 0$. В случае $a = 0$ многочисленные развилки приводят к единственному интегрируемому уравнению (3.11).

Случай II.d.2. Если $a = 1$, тогда точно так же, как в предыдущем случае, мы приходим к случаю $a = 0$, а в случае $a = 0$ получаем уравнение (3.10).

Случай II.d.3. Рассмотрим этот случай подробнее. С учетом полученных выше результатов второе и четвертое условия интегрируемости имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_2^5 Q_1 + u_2^4 Q_2 + u2^3 Q_3 + u_2^2 Q_4 + O(1) \sim 0, \tag{3.58}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_3 \sim u_4^2(P_1 + u_2 P_2) + u_3^3(P_3 + u_2 P_4) + \tag{3.59}$$
$$+ u_3^2(P_5 + u_2 P_6 + u_2^2 P_7 + u2^3 P_8) + u_2^7 P_9 + P_6(u_2) \sim 0.$$

Здесь функции Q_i и P_j зависят только от u_0 и u_1. Для эквивалентности этих выражений нулю необходимы равенства $Q_i = 0$, $P_j = 0$ для всех i, j. Условия $Q_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_4 = 0$, $P_8 = 0$ и $P_9 = 0$ представляют собой линейные однородные обыкновенные диффенциальные уравнения для функции $A_6(u_1)$, а u входит как параметр. Первые два уравнения имеют пятый порядок, порядки остальных равны 6, 7 и 9 соответственно. Путем исключения старших производных из двух первых уравнений приходим к уравнению

$$2f^2f'\frac{\partial^2 A_6}{\partial u_1^2}+f(f'+1)(2f'-1)\frac{\partial A_6}{\partial u_1}+(1-3f')A_6=0.$$

Все оставшиеся уравнения являются его дифференциальными следствиями. Общее решение приведенного выше уравнения имеет следующий вид:

$$A_6=\gamma(u)(f+u_1+a)^2+10\,\omega(u)(u_1+a)f, \tag{3.60}$$

где γ и ω — произвольные функции.

Подставив решение (3.60) в уравнение $Q_2=0$, получаем

$$70\,a\omega'(u_1+a)f^3+a\,\gamma'\Big[7f^4+14(u_1+a)f^3+7(u_1+a)^2f^2+f-u_1-a\Big]=0. \tag{3.61}$$

Вычисление результанта многочленов (3.61) и (3.57) по переменной u_1 дает

$$\begin{aligned} a\Big[&34300\,\omega'^2(20\,\omega'+9\gamma')f^{12}+980\,\omega'(165\,\omega'\gamma'+350\,\omega'^2+3\gamma'^2)f^9\\ &-7\gamma'(930\,\omega'\gamma'+2100\,\omega'^2-\gamma'^2)f^6+\gamma'^2(210\,\omega'+59\gamma')f^3-\gamma'^3\Big]=0.\end{aligned}$$

Поскольку ω и γ — функции от u, а f — непостоянная функция от u_1, все коэффициенты этого многочлена должны равняться нулю. Отсюда следует

$$a\gamma'=0,\qquad a\omega'=0.$$

Далее рассмотрим уравнения, содержащие A_{11}. К ним относятся $Q_3=0,\ Q_4=0,\ P_5=0$ и $P_6=0$. Два первых из них имеют второй порядок: из первого можно выразить $\partial^2A_{11}/\partial u_1^2$, а из второго — $\partial^2A_{11}/\partial u\partial u_1$. С помощью $Q_3=0$ можно исключить A_{11} из $P_6=0$, и это дает уравнение для функции ω:

$$\omega''=6\omega^2.$$

Отсюда и из $a\omega'=0$ следует, что $a\omega=0$.

Исключая высшие производные A_{11} из $P_5=0$, получаем уравнение вида

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial u}=P_1(f,u_1,\gamma',\omega')P_2^{-1}(f,u_1,\gamma',\omega'),$$

где P_1 и P_2 — такие многочлены по переменным f и u_1, что $P_1(f,u_1,0,0)=0$ и $P_2(f,u_1,0,0)\neq0$. Это означает, что если $a\neq0$ и $\gamma'=\omega'=0$, то A_6 и A_{11} не зависят от u. Это ведет к тому, что все A_i зависят только от u_1. В таком случае допускается преобразование $u\to u-ax$, уничтожающее a в уравнении (3.57). Следовательно, достаточно рассмотреть только случай $a=0$.

При $a = 0$ уравнения для A_{11} становятся не слишком громозкими:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A_{11}}{\partial u_1^2} =& \frac{1}{2\,f}\,(\gamma'' + 4\,\gamma\omega)(8\,f^4 + 16\,u_1\,f^3 + 8\,{u_1}^2 f^2 + 3\,f + u_1)\\
&+ \frac{2\,\gamma^2}{5\,f}(9\,f^4 + 18\,u_1\,f^3 + 9\,{u_1}^2 f^2 + 4\,f + u_1)\\
&- \frac{10}{f}\omega^2(14\,f^4 + 23\,u_1\,f^3 - 31\,{u_1}^2 f^2 + 9\,f - 3\,u_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial A_{11}}{\partial u} =& 40\,f^2 \frac{\omega'\,\omega\,(2\,f^6 + f^5 u_1 - f^4 {u_1}^2 - 3\,f^3 - 7\,u_1\,f^2 - 2)}{2\,f^3 + u_1\,f^2 - {u_1}^2 f + 1}\\
&- 2\,f^2 \frac{(2\,f^3 + 3\,u_1\,f^2 + {u_1}^2 f + 1)(2\,\gamma\omega' + 3\,\gamma'\,\omega)}{2\,f^3 + u_1\,f^2 - {u_1}^2 f + 1}.
\end{aligned}
$$

Интегрируя первое уравнение,[1] мы получаем

$$
\begin{aligned}
A_{11} =& \frac{1}{10}\,(8\,f^5 + 2\,f^2 - {u_1}^2 + 16\,u_1\,f^4 + 8\,{u_1}^2 f^3)(4\,\gamma\omega + \gamma'')\\
&+ \frac{1}{25}\,\gamma^2(18\,{u_1}^2 f^3 + 36\,u_1\,f^4 + 7\,f^2 + 18\,f^5 - {u_1}^2)\\
&- 4\,\omega^2(2\,f^5 + 3\,f^2 - u_1\,f^4 - 8\,{u_1}^2 f^3 + {u_1}^2) + \alpha\,u_1 + \beta,
\end{aligned}
$$

где α и β — произвольные функции от u. Из второго уравнения следует, что α и β — постоянные. Используя преобразование Галилея, можно считать, что $\alpha = 0$.

Подстановка выражения для $\partial A_{11}/\partial u$ в уравнение $Q_4 = 0$ приводит к двум дополнительным уравнениям для γ и ω В итоге полная система уравнений для этих функций имеет следующий вид:

$$\omega'' = 6\omega^2, \tag{3.62}$$

$$\gamma''' = 8\gamma'\omega + 4\gamma\omega', \tag{3.63}$$

$$(\gamma + 15\omega)\gamma' + 10(\gamma + 10\omega)\omega' = 0, \tag{3.64}$$

Найдя явный вид всех функций A_i, и используя уравнения (3.62) – (3.64), нетрудно проверить до конца условия интегрируемости 1–4. Эти условия приводят к единственному ограничению $\beta\omega' = 0$, где β — постоянная, входящая в A_{11}.

Если $\omega' \neq 0$, то $\beta = 0$. Если же $\omega' = 0$, то из (3.62) следует $\omega = 0$, а из (3.64) – $\gamma = const$. В этом случае коэффициенты уравнения (3.42) не зависят от u, поэтому допускается преобразование $u \to u + \beta t$, уничтожающее постоянную β в A_{11}. Таким образом, $\beta = 0$ при любых ω и γ.

Если $\omega = 0$, то, положив $\gamma = 5\mu$, мы получаем уравнение (3.13).

Если $\omega \neq 0$, то из (3.62) следует, что $\omega' \neq 0$. В таком случае порядок уравнения (3.62) понижается, и мы получаем уравнение ${\omega'}^2 = 4\,\omega^3 + c$, совпадающее с (3.18). Так как $\omega' \neq 0$, то из (3.64) следует $\gamma + 15\,\omega \neq 0$, поэтому можно выразить γ' из (3.64). Это позволяет исключить производные функций γ и ω из (3.63). В итоге получаем следующее уравнение

$$(\gamma + 30\,\omega)(\gamma + 5\,\omega)(\gamma + 20\,\omega)\left[(\gamma + 20\,\omega)(\gamma + 5\,\omega)^2 + 125\,c\right] = 0, \tag{3.65}$$

где c — постоянная из (3.18).

Если $\gamma = -30\,\omega$, то из (3.64) вытекает $\omega = 0$, что противоречит предположению. Если $\gamma = -5\,\omega$, то получаем уравнение (3.14), а если $\gamma = -20\,\omega$, то — уравнение (3.15).

[1] Метод интегрирования указан в приложении 2.

Рассмотрим случай

$$(\gamma + 20\,\omega)(\gamma + 5\,\omega)^2 + 125\,c = 0. \tag{3.66}$$

Кубика (3.66) является рациональной и параметризуется следующей подстановкой:

$$\omega = \tilde{\omega} + \tilde{c}\,\tilde{\omega}^{-2}, \quad \gamma = -5\,\tilde{c}\,\tilde{\omega}^{-2} - 20\,\tilde{\omega},$$

где $c = -27\,\tilde{c}$. Подставляя эти выражения в (3.62) – (3.64), находим, что $\tilde{\omega}$ удовлетворяет уравнению (3.18) с постоянной $\tilde{c}$ вместо c. Подставив уже найденные функции A_i в уравнение (3.32), воспользовавшись выражениями для ω и γ, и переобозначив $\tilde{\omega} \to \omega$, $\tilde{c} \to c$, получаем уравнение (3.16). $\square$

3.4. Дифференциальные подстановки, связывающие уравнения списка.

Как отмечено в разделе 2.4, при вычислении дифференциальных подстановок полезно знать порядки канонических законов сохранения. В табл. 2 указаны порядки нескольких канонических законов сохранения для уравнений списка (3.2) – (3.16).

Четные плотности не отражены в табл. 2, потому что они все оказались тривиальными $\rho_{2n} \sim 0$. Для уравнения (3.12) порядки плотностей минимальных порядков, эквивалентных ρ_1 и ρ_9, указаны для случая констант общего положения, если же $\mu = 0$, то $\rho_1 \sim 0$, $\rho_9 \sim 0$.

Таблица 2. Порядки канонических законов сохранения. Для законов сохранения нулевого прядка в скобках указано, чему эквивалентна плотность

ρ_i	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(3.6)	(3.7)	(3.8)	(3.9)
ρ_1	0, $(\sim u)$	0, $(\sim u)$	0, (~ 0)	0, (~ 0)	0, $(\sim u^2)$	1	1	1
ρ_3	~ 0	~ 0	1	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0
ρ_5	1	1	2	2	2	3	3	3
ρ_7	2	2	3	3	3	4	4	4
ρ_9	~ 0	~ 0	4	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0
ρ_{11}	4	4	5	5	5	6	6	6
ρ_i	(3.10)	(3.11)	(3.12)	(3.13)	(3.14)	(3.15)	(3.16)	
ρ_1	2	2	1	2	2	2	2	
ρ_3	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	
ρ_5	4	4	3	4	4	4	4	
ρ_7	5	5	4	5	5	5	5	
ρ_9	~ 0	~ 0	3	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	
ρ_{11}	7	7	6	7	7	7	7	

Дифференциальные подстановки, допускаемые S-интегрируемыми уравнениями пятого порядка, изображены на рис. 2.

Ниже приведены подстановки для уравнений с константами общего положения.

(3.13)→(3.6): $\tilde{u} = \dfrac{u_2}{2f} + \sqrt{-\mu}\,(f + u_1)$.

(3.15)→(3.9): $\tilde{u} = \ln(f+u_1) - \ln\varphi$. При этом $\omega = \dfrac{\lambda_1^2}{4\,\varphi^2} + \dfrac{1}{2}\,\lambda_2\,\varphi$, а постоянная c в уравнении (3.18), которому удовлетворяет ω, равна $c = -\dfrac{27}{16}\,\lambda_1^2\lambda_2^2$.

(3.10)→(3.9): $\tilde{u} = \ln u_1, \quad \mu_1 = \lambda_2, \quad \mu_2 = -\lambda_1^2$.

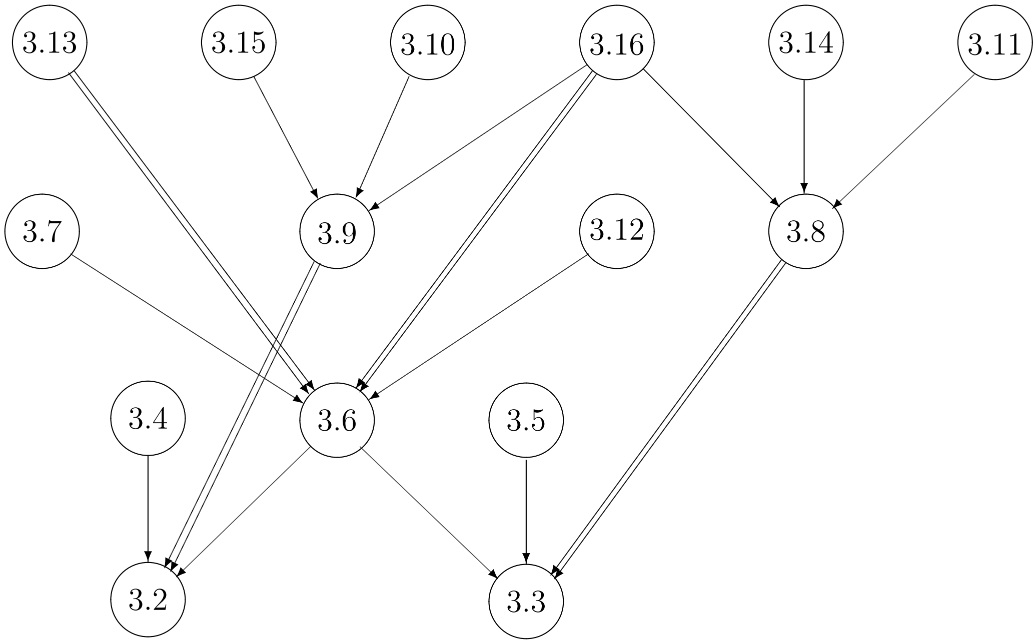


Рис. 2. Граф подстановок для S-интегрируемых уравнений пятого порядка

(3.16)→(3.9): $\tilde u = \ln(f+u_1) - \ln(2\,\omega\lambda_2^{-1}), \quad c = \dfrac{1}{4}\,\lambda_1^2\lambda_2^2.$

(3.16)→(3.8): $\tilde u = \ln(f+u_1) + \dfrac{1}{2}\ln(-4\,\omega\lambda_1^{-1}), \quad c = \dfrac{1}{4}\,\lambda_1\lambda_2^2.$

(3.16)→(3.6): $\tilde u = \dfrac{u_2}{2f} - \dfrac{f\omega'}{\omega} + \dfrac{1}{2\omega}(3\sqrt{c}-\omega')u_1.$

(3.14)→(3.8): $\tilde u = \ln(f+u_1) + \dfrac{1}{2}\ln\varphi$. При этом $\omega = -\lambda_1\,\varphi + 4\,\lambda_2^2\,\varphi^{-2},\ c = -108\,\lambda_1^2\lambda_2^2.$

(3.11)→(3.8): $\tilde u = -\dfrac{1}{2}\ln u_1, \quad \mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = -\lambda_2^2.$

(3.7)→(3.6): $\tilde u = u_1.$

(3.9)→(3.2): $\tilde u = -u_2 - u_1^2 \pm 3\,\lambda_1 e^u u_1 - \lambda_1^2 e^{2\,u} + \lambda_2 e^{-u}.$

(3.12)→(3.6): $\tilde u = \sqrt{u_1} - \mu$. При этом уравнение (3.12) должно содержать дополнительный член $5\,\mu^4 u_1$.

(3.8)→(3.3): $\tilde u = 2\,u_2 - u_1^2 \pm 6\,\lambda_2 e^{-2\,u}u_1 + \lambda_1 e^{2\,u} - \lambda_2^2 e^{-4\,u}.$

(3.6)→(3.2): $\tilde u = -u_1 - u^2.$

(3.6)→(3.3): $\tilde u = 2\,u_1 - u^2.$

(3.4)→(3.2): $\tilde u = u_1.$

(3.5)→(3.3): $\tilde u = u_1.$

Кроме этих, существуют еще подстановки при специальных значениях параметров, входящих в уравнения.

Пример 2. (3.8)→(3.6): $\tilde u = u_1 + \sqrt{-\lambda_1}\,e^u \pm \lambda_2\,e^{2\,u},\ \lambda_1\lambda_2 = 0$. В каждом из случаев $\lambda_2 = 0$ или $\lambda_1 = 0$, логарифмическая подстановка $u \to -\ln u$ или $u \to -\dfrac{1}{2}\ln u$ приводит к линейному уравнению первого порядка относительно u. То есть функцию u можно выразить через $\tilde u$ при помощи одной квадратуры.

Если положить здесь $\lambda_2 = 0,\ \lambda_1 \to -\lambda_1^2$, то получим подстановку **(3.9)→(3.6)** с $\lambda_2 = 0$.

Пример 3. (3.13)→(3.8): $\tilde u = \ln(f+u_1),\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 = \mu$. Здесь также можно выразить u через $\tilde u$ при помощи одной квадратуры. Действительно, как нетрудно проверить, кривая третьего порядка (3.17) имеет следующее параметрическое представление:

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(2\,e^v + e^{-2\,v}\right), \qquad f = \frac{1}{3}\left(e^v - e^{-2\,v}\right),$$

причем $v = \tilde u$. Таким образом, имеем $u = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \left(2\, e^{\tilde u} + e^{-2\,\tilde u}\right) dx$.

Приложение 1. Дискретные симметрии функции Вейерштрасса ω

Уравнения (3.13) – (3.16) можно записать в различных формах. Отметим, во-первых, что в статье [9] эти уравнения записаны в терминах функции $R = f + u_1$, удовлетворяющей уравнению $2R^3 - 3u_1R^2 + 1 = 0$.

Кроме того, существуют преобразования, сохраняющие форму уравнения (3.18). Действительно, рассмотрим функции ω и $\tilde\omega$, удовлетворяющие уравнениям вида (3.18):

$$\omega'^2 = 4\,\omega^3 + c, \tag{П1.1}$$

$$\tilde\omega'^2 = 4\,\tilde\omega^3 + k, \tag{П1.2}$$

где $c\,k \neq 0$. Нетрудно проверить, что следующие простейшие преобразования

$$\omega = a\frac{a - \tilde\omega}{a + 2\,\tilde\omega}, \quad k = c = \frac{1}{2}\,a^3; \tag{$\boldsymbol{T}_1$}$$

$$\omega = \tilde\omega + \frac{k}{\tilde\omega^2}, \quad c = -27\,k; \tag{$\boldsymbol{T}_2$}$$

$$\omega = \frac{c + \sqrt{c}\,\tilde\omega'}{2\,\tilde\omega^2}\,, \quad k = c \tag{$\boldsymbol{T}_3$}$$

отображают решение (П1.2) в решение (П1.1).

Преобразование $\boldsymbol{T}_1$ обратимо, причем $\tilde\omega$ выражается через ω той же самой формулой. Обращение преобразования $\boldsymbol{T}_2$ также возможно, но задача сводится к решению кубического уравнения. Для обращения преобразования $\boldsymbol{T}_3$ требуется решить уравнение Риккати. Отметим, что формула ($\boldsymbol{T}_2$) помогла найти параметризацию кубики (3.66).

Композиции элементарных преобразований $\boldsymbol{T}_i$ приводят к новым преобразованиям, сохраняющим форму уравнения (3.18). Например,

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}_1 * \boldsymbol{T}_2: \quad \omega = \frac{3}{2}\,a + \frac{27\,a^2\tilde\omega^2}{2(2\tilde\omega + a)(\tilde\omega - a)^2}\,, \quad k = \frac{a^3}{2},\ c = -\frac{27}{2}\,a^3;\\
&\boldsymbol{T}_2 * \boldsymbol{T}_2: \quad \omega = \tilde\omega + \frac{k}{\tilde\omega^2} - \frac{27\,k\,\tilde\omega^4}{(\tilde\omega^2 + k)^2}\,, \quad c = 729\,k;\\
&\boldsymbol{T}_3 * \boldsymbol{T}_1: \quad \omega = \frac{a(2\tilde\omega + a)^2 - 3\sqrt{2a^3}\,\tilde\omega'}{4(\tilde\omega - a)^2}\,, \quad c = \frac{a^3}{2}\,;\\
&\boldsymbol{T}_3 * \boldsymbol{T}_2: \quad \omega = \frac{c\,\tilde\omega^4 + \sqrt{c}\,\tilde\omega(\tilde\omega^3 - 2\,k)}{2(\tilde\omega^3 + k)^2}\,, \quad c = -27\,k.
\end{aligned}$$

Кроме того, $\boldsymbol{T}_1 * \boldsymbol{T}_1$ — тождественное преобразование, а $\boldsymbol{T}_3 * \boldsymbol{T}_3$ отличается от $\boldsymbol{T}_3$ лишь знаком корня $\sqrt{c}$. Таким образом, уравнения (3.13) – (3.16) можно записать бесконечным числом внешне разных способов.

Приложение 2. Явное интегрирование функций, зависящих от u_1 и f

Для проверки условий интегрируемости уравнений (3.13) – (3.16) необходима таблица интегралов от рациональных выражений $R(u_1, f)$, где функция f определена уравнением (3.17). Эти интегралы находятся с помощью рациональной параметризации

$$f = \frac{w^3 - 1}{3\,w^2}, \qquad u_1 = \frac{2\,w^3 + 1}{3\,w^2} \tag{П2.1}$$

кривой (3.17). Параметризация позволяет преобразовать интеграл от иррациональной функции $R(u_1, f)$ переменной u_1 в интеграл от рациональной функции переменной w:

$$\int R(u_1, f)\, du_1 = \int R\left(\frac{2\,w^3+1}{3\,w^2}, \frac{w^3-1}{3\,w^2}\right)\left(\frac{2\,w^3+1}{3\,w^2}\right)' dw.$$

Ответ можно записать в исходных переменных u_1 и f с помощью формулы $w = f + u_1$, вытекающей из (П2.1).

Для проверки условий интегрируемости нам понадобились интегралы вида

$$\int u_1^n\, f^m\, du_1, \quad n = 0, 1, 2; \quad -5 \leqslant m \leqslant 11.$$

Например:

$$\int f\, du_1 = \frac{1}{2}u_1^2 - f^2, \qquad \int u_1^2 f\, du_1 = \frac{1}{20}\big(8f^4 + 14f^3u_1 + f^2u_1^2 - u_1\big),$$

$$\int u_1 f\, du_1 = \frac{1}{9}\big(2f^3 + f^2u_1 + 2fu_1^2 - 2\ln(f+u_1)\big),$$

$$\int \frac{du_1}{f} = 2\ln(f+u_1), \qquad \int \frac{u_1\, du_1}{f} = 2f + u_1, \qquad \int \frac{u_1\, du_1}{f^2} = 2\ln(f+u_1) + 2\ln f.$$

Для вычисления повторных интегралов необходимо добавить к таблице также и интегралы от логарифмов, например:

$$\int \ln(f+u_1)\, du_1 = u_1 \ln(f+u_1) - \frac{u_1}{2} - f.$$

При доказательстве теоремы 2 использовано около двух десятков подобных формул.

Для проверки любой из приведенных формул достаточно продифференцировать ее, исключить $f' = \dfrac{u_1 - f}{2\,f}$ и понизить степени u_1, если это нужно, с помощью тождеств

$$u_1^3 = 1 + 3u_1f^2 + 2f^3, \quad u_1^4 = u_1(1 + 3u_1f^2 + 2f^3), \dots ,$$

вытекающих из (3.17).

Приложение 3. О рекуррентных формулах для канонических плотностей

Здесь мы обсуждаем способ получения рекуррентных формул типа (2.2) и (3.26). Исходная идея этого метода содержится в работе [55], где был предложен простой метод вывода рекуррентных формул для законов сохранения уравнений Лакса. В работе [10] этот подход был применен к линеаризации эволюционных уравнений и систем.

Для полноты изложения мы вначале кратко изложим суть метода Захарова — Шабата.

Предположим, что уравнение (0.1) имеет представление Лакса:

$$\frac{dL}{dt} = [A,\, L] \Longleftrightarrow u_t = u_n + F(x, u, u_1, \dots, u_{n-1}),$$

где квадратными скобками обозначен коммутатор линейных операторов. Для простоты предположим, что $A = A(\partial_x, \mu, u)$ и $L = L(\partial_x, \mu, u)$ — скалярные дифференциальные операторы, не зависящие от ∂_t, μ — спектральный параметр, u — решение уравнения (0.1).

Представление Лакса обеспечивает совместность линейной системы

$$L\psi = 0, \qquad \psi_t = A\psi. \tag{П3.1}$$

Введем обозначения для логарифмических производных функции ψ:

$$(\ln\psi)_x = R, \qquad (\ln\psi)_t = T.$$

Очевидно, функции R и T связаны соотношением

$$R_t = T_x, \tag{П3.2}$$

и $R\,dx + T\,dt = d\ln\psi$. Поэтому с точностью до постоянного множителя имеем

$$\psi = \exp\left(\int R\,dx + T\,dt\right), \tag{П3.3}$$

где интеграл в аргументе экспоненты — это криволинейный интеграл с переменным верхним пределом (x,t).

Так как $\psi_x = \psi R,\ \psi_t = \psi T$, то справедливы следующие операторные формулы:

$$\psi^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \psi = \left(\frac{d}{dx} + R\right)^n, \qquad \psi^{-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \psi = \left(\frac{d}{dt} + T\right)^n, \quad n = 0,1,2,\dots$$

В силу этих формул имеем

$$\psi^{-1}L(\partial_x,\mu,u)\psi = L(\partial_x + R,\mu,u), \quad \psi^{-1}A(\partial_x,\mu,u)\psi = A(\partial_x + R,\mu,u).$$

Поэтому уравнения (П3.1) можно переписать в терминах функций R и T:

$$L(\partial_x + R,\mu,u)(1) = 0, \tag{П3.4}$$

$$T = A(\partial_x + R,\mu,u)(1). \tag{П3.5}$$

Эти два уравнения нелинейны по R. Их решения ищут в виде рядов Лорана по параметру μ. Коэффициенты этих рядов в силу (П3.2) являются плотностями законов сохранения.

Пример 4. Для уравнения КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ ассоциированную линейную систему можно записать в следующем виде:

$$\psi_{xx} - u\psi - \mu^2\psi = 0, \tag{П3.6}$$

$$\psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi. \tag{П3.7}$$

Формулы (П3.4),(П3.5) приводят к следующим уравнениям для R и T:

$$R_x + R^2 - u - \mu^2 = 0, \tag{П3.8}$$

$$T = 4(\partial_x + R)^2(R) - 6u\,R - 3u_x. \tag{П3.9}$$

Уравнение (П3.9) можно упростить при помощи (П3.8), это дает

$$T = (4\mu^2 - 2u)R + u_x. \tag{П3.10}$$

Если подставить в уравнение (П3.8) следующий ряд

$$R = \mu + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \mu^{-n}, \tag{П3.11}$$

и приравнять к нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ, то получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\rho_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u\delta_{n0} - \sum_{i=1}^{n-1}\rho_i\rho_{n-i} - \frac{d}{dx}\rho_n\right), \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{П3.12}$$

где δ_{n0} — символ Кронекера. Заметим, что масштабное преобразование $\rho_n \to \rho_n(-2)^{-n}$ приводит формулу к виду, указанному в монографии [19]. Приведем первые элементы последовательности ρ_n:

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1 = \frac{1}{2}u, \quad \rho_2 = -\frac{1}{4}u_1, \quad \rho_3 = \frac{1}{8}(u_2 - u^2).$$

Далее, подставив ряд (П3.11) в уравнение (П3.10), получаем разложение

$$T = 4\mu^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \mu^{-n}, \tag{П3.13}$$

где

$$\theta_n = 4\rho_{n+2} - 2u\rho_n, \quad n > 0. \tag{П3.14}$$

Ввиду произвольности параметра μ, формула (П3.2) определяет бесконечную последовательность законов сохранения

$$\frac{d}{dt}\rho_n = \frac{d}{dx}\theta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{П3.15}$$

Для получения канонических плотностей ρ_n, достаточно (П3.2) и одного из уравнений (П3.8) или (П3.9).

Если использовать уравнение (П3.8), то вновь придем к рекуррентной формуле (П3.12), а формула (П3.14) теряется. Токи θ_n, соответствующие плотностям ρ_n, можно найти из (П3.15), обращая оператор полной производной $\dfrac{d}{dx}$ (алгоритм обсуждался в замечании 4, на стр. 113).

Для дальнейшего важнее понять, как получить канонические плотности из уравнений (П3.9) и (П3.2). Так как уравнение (П3.9) не содержит параметра, то параметр вводится априорно, и мы можем выбрать вид разложения для R по своему усмотрению. Если, например, считать, что R — это ряд Тейлора

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \mu^n,$$

где μ — параметр, то

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mu^n,$$

где коэффициенты θ_n определяются из уравнения (П3.9). Нетрудно проверить, что

$$\theta_n = 4\sum_{0}^{n} \rho_i\rho_j\rho_k - 3\,u_1\delta_{n0} - 6\,u\rho_n + 4\frac{d^2}{dx^2}\rho_n + 6\frac{d}{dx}\sum_{0}^{n}\rho_i\rho_j,$$

где использованы обозначения для сумм, введенные на странице 128. Поскольку в левой и правой частях этой формулы одновременно появляются неизвестные функции θ_n и ρ_n, она никак не помогает при вычислении законов сохранения.

Ситуация меняется, если постулировать разложение функции R в ряд Лорана

$$R = \mu^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \mu^n. \tag{П3.16}$$

В этом случае из уравнения (П3.9) получаем вид разложения для T

$$T = 4\mu^{-3} + \theta_{-2}\mu^{-2} + \theta_{-1}\mu^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mu^n, \tag{П3.17}$$

и рекуррентную формулу

$$\begin{aligned}\rho_{n+2} = \frac{1}{2}\,u\rho_n + \frac{1}{4}u_1\delta_{n,0} - \sum_{0}^{n+1}\rho_i\rho_j + \frac{1}{12}\theta_n - \frac{1}{3}\sum_{0}^{n}\rho_i\rho_j\rho_k + \frac{1}{12}\theta_{-2}\delta_{n,-2} - \\ - \frac{d}{dx}\left(\rho_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{0}^{n}\rho_i\rho_j + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\rho_n\right) + \frac{1}{12}\left(6\,u + \theta_{-1}\right)\delta_{n,-1},\end{aligned} \tag{П3.18}$$

где $n = -2, -1, 0, \dots$ Рассмотрим соответствующую серию законов сохранения (П3.15), где $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Если законы сохранения с номерами $i \leqslant n+1$ уже известны, то мы находим ρ_{n+2} из (П3.18), а затем θ_{n+2} из (П3.15) и т.д. При нахождении θ_{n+2} нам приходится обращать оператор $\dfrac{d}{dx}$. При предположении, что плотности и токи законов сохранения (П3.15) не зависят явно от t, эта процедура абсолютно алгоритмична (см. стр. 113). При этом функция θ_{n+2} определена однозначно с точностью до постоянной интегрирования.

Начало этой рекурренции выглядит следующим образом. Согласно (П3.16), имеем $\rho_{-2} = \rho_{-1} = 0$, поэтому из (П3.15) получаем, что соответствующие токи постоянны: $\theta_{-1} = 12c_{-1}$, $\theta_{-2} = 12c_{-2}$. Далее находим $\rho_0 = c_{-2}$. Следующие две плотности имеют вид

$$\rho_1 = \frac{1}{2}u + c_{-1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{12}\theta_0 - \frac{c_{-2}}{2}u - \frac{1}{4}u_1 - \frac{c_{-2}^3}{3} - 2c_{-1}c_{-2}.$$

Для определения θ_0 необходимо снова прибегнуть к уравнению (П3.15) при $n = 0$, что дает $\theta_0 = c_0$.

Важно отметить, что постоянные c_i, возникающие при нахождении токов θ_i, не являются существенными, поскольку могут быть устранены заменой параметра μ следующего вида:

$$\mu \to \mu + \sum_{i=2}^{\infty} k_i \mu^i. \tag{П3.20}$$

Рассмотрим теперь произвольное эволюционное уравнение с одной пространственной переменной

$$u_t = K(x, u, u_x, \dots, u_n), \qquad n > 1. \tag{П3.20}$$

В случае (0.1) имеем $K = u_n + F(x, u, u_x, \dots, u_{n-1})$. Обозначим через K_* производную Фреше функции K:

$$K_* = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial K}{\partial u_i} \frac{d^i}{dx^i}.$$

Формальный ряд

$$L = \sum_{k=-\infty}^{1} f_k \frac{d^k}{dx^k},$$

коэффициенты которого зависят от $x, u, u_x, \dots$, удовлетворяющий уравнению

$$L_t = [K_*,\, L]\,, \tag{П3.21}$$

называется формальной симметрией (формальным рекурсионным оператором) уравнения (П3.20). Известно, что уравнение, имеющее высшие симметрии или законы сохранения, обладает формальной симметрией [4, 7, 9].

Уравнение (П3.21) обеспечивает совместность следующей пары линейных уравнений

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad \psi_t = K_*\psi, \tag{П3.23}$$

где λ — спектральный параметр. К этой системе можно применить процедуру получения канонических плотностей, изложенную выше. Так как оператор L заранее неизвестен, то используем уравнение (П3.5):

$$T = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial K}{\partial u_i} \left(\frac{d}{dx} + R\right)^i (1). \tag{П3.25}$$

Пусть
$$R = \rho_{-1}\mu^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \mu^k, \tag{П3.27}$$
тогда
$$T = \mu^{-n} + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{-i}\mu^{-i} + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \mu^k. \tag{П3.28}$$
Действительно, минимальная степень μ в правой части равенства (П3.25) содержится в слагаемом
$$\frac{\partial K}{\partial u_n}\left(\frac{d}{dx} + R\right)^n (1) = \frac{\partial K}{\partial u_n} R^n + \dots = \frac{\partial K}{\partial u_n} (\rho_{-1})^n \mu^{-n} + \dots,$$
поэтому ряд для T должен начинаться с члена $\theta_{-n}\mu^{-n}$. Так как $n > 1$, то $\rho_{-n} = 0$ и θ_{-n}=const$\neq 0$. Растяжением параметра μ обращаем θ_{-n} в единицу, и получаем (П3.28).

Подставляя в (П3.25) разложения (П3.27), (П3.28) и приравнивая в уравнении (П3.25) члены при μ^{-n}, получаем первую каноническую плотность
$$\rho_{-1} = \left(\frac{\partial K}{\partial u_n}\right)^{-1/n}.$$
Формулы для нескольких следующих канонических плотностей можно найти в [9].

Рассмотри теперь уравнения вида (0.2) и приведем вывод рекуррентной формулы (2.2) для канонических плотностей, следуя описанной выше схеме.

1-й шаг. Записываем линеаризацию уравнения (0.2):
$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \frac{\partial F}{\partial u_2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{d}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\right]\psi = 0.$$

2-й шаг. При помощи подстановки
$$\psi = \exp\left(\int R\,dx + T\,dt\right), \quad \text{где} \quad R_t = T_x,$$
получаем уравнение с «удлиненными производными»:
$$\left[\left(\frac{d}{dx} + R\right)^3 + \frac{\partial F}{\partial u_2}\left(\frac{d}{dx} + R\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u_1}\left(\frac{d}{dx} + R\right) + \frac{\partial F}{\partial u} - \left(\frac{d}{dt} + T\right)\right](1) = 0,$$
которое равносильно соотношению
$$T = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}R + R\frac{d}{dx} + R^2\right)(R) + \frac{\partial F}{\partial u_2}\left(\frac{d}{dx} + R\right)(R) + \frac{\partial F}{\partial u_1}R + \frac{\partial F}{\partial u}. \tag{П3.29}$$

3-й шаг. Выбираем подходящее разложение для R. Простейший выбор состоит в том, чтобы положить
$$R = \mu^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \mu^n. \tag{П3.30}$$

Замечание 12. Несколько попыток искать разложения с полюсами высших порядков не дали ничего нового. Если, например, принять для уравнения (0.2) $R = \mu^{-2} + \sum_{n=-1}^{\infty} \rho_n \mu^n$, то после проверки нескольких условий (П3.15) получаем $\rho_{2n+1} = 0$, $\forall n$. Это равносильно тому, что R разлагается по параметру $\xi = \mu^2$. Аналогичные результаты были получены и для некоторых других уравнений и систем (см. [11]).

Выбрав разложение (П3.30), мы должны принять

$$T = \mu^{-3} + \theta_{-2}\mu^{-2} + \theta_{-1}\mu^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mu^n, \tag{П3.31}$$

чтобы в уравнении (П3.29) уничтожились слагаемые с μ^{-3}.

Для разложения (П3.30) имеем $\rho_{-1} = 1, \rho_{-2} = 0$ откуда следует, что θ_{-2} и θ_{-1} — постоянные. Поскольку аддитивные постоянные интегрирования в токах устраняются преобразованием параметра (П3.20), положим $\theta_{-2} = \theta_{-1} = 0$.

Теперь, как нетрудно проверить, подстановка разложений (П3.30) и (П3.31) в уравнение (П3.29) приводит к формуле (2.2) с указанными там ρ_0 и ρ_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *What is Integrability?* Ed. V.E. Zakharov. Springer series in Nonlinear Dynamics. 1991.
2. *Integrability.* Ed. A.V. Mikhailov. Lecture Notes in Physics. Springer. 2009. V. 767.
3. Ньюэлл А. *Солитоны в математике и физике.* Москва. Мир. 1989. 323 с.
4. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. *О бесконечных алгебрах Ли-Беклунда*//Функц. анализ и его прилож.. 1980. Т. 14. №4. С. 79–80.
5. Свинолупов С. И., Соколов В. В. *Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения*//Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. №4. С. 86–87.
6. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *О законах сохранения для уравнений, обладающих нетривиальной алгеброй Ли-Беклунда* // Интегрируемые системы: сб. статей. Ред. А.Б. Шабат. БФ АН СССР. Уфа. 1982. С. 53–67.
7. V.V. Sokolov and A.B. Shabat *Classification of Integrable Evolution Equations*//Soviet Scientific Reviews, Section C. 1984. V. 4. P. 221–280.
8. Михайлов А.В., Шабат А. Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем* // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. №4. 3–53.
9. A.V. Mikhailov, V.V. Sokolov, A.B. Shabat *The symmetry approach to classification of integrable equations* // What is Integrability? Ed. V.E. Zakharov. Springer series in Nonlinear Dynamics. 1991. P. 115–184. Перевод на рус. в кн. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Ред. В.Г. Бахтарьяр и В.Е. Захаров. Киев. Наукова думка. 1990. 472 с.
10. H.H. Chen, Y.C. Lee and C.S. Liu *Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method* // Phys. Scr. 1979. V. 20. №3–4. P. 490–492.
11. A.G. Meshkov *Necessary conditions of the integrability*//Inverse Problems. 1994. V.10. 635–653.
12. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега — де Фриза*//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Москва. ВИНИТИ. 1984. Т. 24. С. 81–180.
13. Свинолупов С.И. *Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями*//Успехи матем. наук. 1985. Т. 40. №5. С. 263–264.
14. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Слабые нелокальности в эволюционных уравнениях*//Матем. заметки. 1990. №6. С. 91–97.
15. A.S. Fokas *A symmetry approach to exactly solvable evolution equations*//J. Math. Phys. 1980. V. 21. №6. P. 1318–1325.
16. R.H. Heredero, V.V. Sokolov, and S.I. Svinolupov *Toward the classification of third order integrable evolution equations*//J. Phys. A: Mathematical and General. 1994. V. 13. P. 4557–4568.
17. R.H. Heredero *Classification of fully nonlinear integrable evolution equations of third order*//J. Nonlin. Math. Phys. 2005. V. 12. №4. P. 567–585.
18. Дринфельд В.Г., Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Классификация эволюционных уравнений пятого порядка, обладающих бесконечной серией законов сохранения* // Докл. АН УССР. 1985. Т. A10. С. 7–10.
19. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи.* Москва. Наука. 1980. 320 с.

20. Соколов В.В. *О симметриях эволюционных уравнений*//Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. №5. С. 165–204.
21. Sanders Jan and Jing Ping Wang *On the Integrability of homogeneous scalar evolution equations* // J. Differential Equations. 1998. V. 147. P. 410–434.
22. P. Olver, Jing Ping Wang *Classification of integrable one-component systems on associative algebras*//Proc. London Math. Soc. 2000. V. 81. №3. P. 566–586.
23. M. Gurses, A. Karasu and V.V. Sokolov *On construction of recursion operator from Lax representation*// JMPh. 1999. V. 40, №12. P. 6473–6490.
24. V.V. Sokolov and T. Wolf *A symmetry test for quasilinear coupled systems*//Inverse Problems. 1999. V. 15. P. L5–L11.
25. Мешков А. Г., Михаляев Б. Б. *Уравнения газовой динамики, допускающие бесконечное число симметрий*//Теор. и мат. физ. 1987. Т. 72. №2. С.163–171.
26. S.I. Svinolupov *On the analogues of the Burgers equation*//Phys. Lett. A. 1989. V. 135. №1. P. 32–36.
27. S.I. Svinolupov *Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs*//Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. №1. P. 559–575.
28. Свинолупов С.И. *Йордановы алгебры и обобщенные уравнения Кортевега — де Фриза*//Теор. и мат. физ. 1991. Т. 87. №3. С. 391–403.
29. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений*//Теор. и мат. физ. 1994. Т. 100. №2. С. 214–218.
30. V.V. Sokolov and S.I. Svinolupov *Deformation of nonassociative algebras and integrable differential equations*//Acta Applicandae Mathematica.1995. V. 41. №1–2. P. 323–339.
31. I.T. Habibullin, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov *Multi-component integrable systems and non-associative structures*//Nonlinear Physics: theory and experiment. Eds: E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. World Scientific Publisher. Singapore. 1996. P. 139–168.
32. P.J. Olver and V.V. Sokolov *Integrable evolution equations on associative algebras*//Commun. Math. Phys. 1998. V. 193. №2. P. 245–268.
33. V.V. Sokolov, T. Wolf *Classification of integrable polynomial vector evolution equations*//J. Phys. A: Mathematical and General 2001. V. 34. P. 11139–11148.
34. A.G. Meshkov and V.V. Sokolov *Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere*//Commun. Math. Phys. 2002. V. 232. №1. P. 1–18.
35. Мешков А.Г., Соколов В.В. *Классификация интегрируемых дивергентных N-компонентных эволюционных систем*//Теор. и мат. физ. 2004. Т. 139. №2. С. 192–208.
36. M.Ju. Balakhnev, A.G. Meshkov *Integrable anisotropic evolution equations on a sphere*//SIGMA. 2005, V. 1. Paper 027. 11 p.
37. Балахнев М.Ю. *Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений*//Теор. и мат. физ. 2005. Т. 142. №1. С. 13–20.
38. Мешков А.Г. *К симметрийной классификации эволюционных систем третьего порядка дивергентного вида*//Фундам. и прикл. математика. 2006. Т. 12. №7. С.141–161.
39. M.Ju. Balakhnev, A.G. Meshkov *Two-field integrable evolutionary systems of the third order and their differential substitutions*//SIGMA. 2008, V. 4. Paper 018. 29 p.
40. M.Ju. Balakhnev, A.G. Meshkov *On a classification of integrable vectorial evolutionary equations*//J. Nonlin. Math. Phys. 2008. V. 15. №2. P. 212–226.
41. A.V. Mikhailov, V.V. Sokolov *Symmetries of differential equations and the problem of integrability*//Integrability. Ed. A.V. Mikhailov. Lecture Notes in Physics. Springer. 2009. V. 767. P. 19–88. ISBN: 978-3-540-88110-0
42. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнение Клейна-Гордона с нетривиальной группой*//Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. №5. С. 1103–1107.
43. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Системы уравнений $u_x = p(u,v)$, $v_y = q(u,v)$, обладающие симметриями*//Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. №1. С. 29–33.
44. Мешков А.Г. *Симметрии скалярных полей. 3. Двумерные интегрируемые модели*//Теор. и мат. физ. 1985. Т. 63. №3. С. 323–332.

45. A.G. Meshkov *Hamiltonian and recursion operators for two-dimensional scalar fields*//Phys. Lett. A. 1992. V. 170. №6. P. 405–408.
46. Жибер А.В. *Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий*//Изв. РАН, сер. матем. 1994. Т. 58. №4. С. 33–54.
47. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа*//Успехи матем. наук. 2001. Т. 56. №1. С. 63–106.
48. Мешков А.Г. *Нелокальные симметрии 2-полевых дивергентных эволюционных систем*//Теор. и мат. физ. 2008. Т. 156. №3. С. 351–363.
49. Мешков А.Г. *Векторные гиперболические уравнения, обладающие высшими симметриями*//Теор. и мат. физ. 2009. Т. 161. №2. С. 176–190.
50. Мешков А.Г., Соколов В.В. *Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка*//Теор. и мат. физ. 2011. Т. 166. №1. С. 51–67.
51. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Москва. Мир. 1989. 639 с.
52. Свинолупов С.И., Соколов В.В., Ямилов Р.И. *Преобразования Бэклунда для интегрируемых эволюционных уравнений*//Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. №4. С. 802–805.
53. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. *Об уравнениях, родственных уравнению Кортевега–де Фриза*//Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. №1. С. 29–33.
54. Бейтмен Г. и Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, сер. СМБ.* Москва. Наука. 1967. 300 с.
55. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде*//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118–134.

Анатолий Георгиевич Мешков,
Государственный университет – УНПК,
Наугорское шоссе, 29,
302020, г. Орел, Россия
E-mail: a_meshkov@orel.ru

Владимир Вячеславович Соколов,
ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН,
просп. Академика Семенова, 1-а,
г. Черноголовка, Московская обл., Ногинский р-н, Россия
E-mail: sokolov@itp.ac.ru

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 155-160.

УДК 517.9

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ КОЛЬЦО ЛИ УРАВНЕНИЯ ЖИБЕРА-ШАБАТА-ЦИЦЕЙКИ

А.У. САКИЕВА

Аннотация. В работе приведено полное описание характеристического кольца Ли уравнения Жибера-Шабата-Цицейки. Построен базис линейного пространства кратных коммутаторов произвольного порядка. Доказано, что характеристическое кольцо является кольцом медленного роста.

Ключевые слова: характеристическое кольцо, нелинейное гиперболическое уравнение, интеграл.

1. Введение

Характеристические кольца Ли являются важным инструментом для исследования дифференциальных уравнений в частных производных. Впервые понятие характеристического векторного поля, которое лежит в основе характеристического кольца, было введено Гурса в [1]. Понятие характеристической алгебры было введено в работе А.Н. Лезнова, В.Г. Смирнова, А.Б. Шабата [2]. Характеристические алгебры и кольца для дифференциальных уравнений и систем исследовались также в работах [3–6].

В данной статье рассматривается задача описания характеристического кольца Ли для уравнения

$$u_{xy} = e^{u} + e^{-2u}. \tag{1}$$

Уравнение (1) впервые было найдено в работе Цицейки [7] при исследовании геометрии двумерных поверхностей в R^3. Позже оно было переоткрыто А.Б. Шабатом и А.В. Жибером [8] в результате классификации интегрируемых случаев уравнения Клейна-Гордона. В той же работе для этого уравнения была построена иерархия высших симметрий и законов сохранения. Представления Лакса для (1) нашел А.В. Михайлов (см. [9]). Отметим, что высшие симметрии уравнения (1) имеют порядки, равные $6n+1$ и $6n-1$, где $n \in N$. Удивительный факт состоит в том, что именно эти числа являются выделенными при описании характеристической кольца для уравнения (1). По-видимому, этот факт указывает на тесную связь между алгеброй высших симметрий уравнения и его характеристическим кольцом, т.к. такая же ситуация имеет место для уравнения синус-Гордона (см. [3,4]).

В работе [4] для уравнений вида

$$u_{xy} = f(u) \tag{2}$$

были введены операторы X_1 и X_2, порождающие характеристическое кольцо Ли для уравнения (2):

$$X_1 = \sum_{k=1}^{\infty} D^{k-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_k}, \tag{3}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial u}, \tag{4}$$

A.U. Sakieva, Characteristic Lie ring of the Zhiber-Shabat-Tzitzeica equation.

© Сакиева А.У. 2012.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-97005) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (соглашение №8499).

Поступила 25 апреля 2012 г.

где в нашем случае $f = e^u + e^{-2u}$. Здесь D – оператор полного дифференцирования по x. Заметим, что операторы X_1 и X_2 линейно независимы при $f(u) \neq 0$.

Обозначим через L_i линейное пространство, натянутое на всевозможные коммутаторы длины не больше чем $i-1$, где $i = 2, 3, \ldots$. Причем в этом пространстве линейная комбинация берется с коэффициентами, зависящими от гладких функций конечного числа динамических переменных, а набор элементов $Z_1, Z_2, \ldots Z_k$ называется линейно зависимым, если существует набор функций $c_1, c_2, \ldots c_k$ такой, что они не все тождественные нули, и выполняется равенство $c_1 Z_1 + c_2 Z_2 + \ldots + c_k Z_k = 0$. В противном случае набор является линейно независимым. Например, $L_2 = \{X_1, X_2\}$ – линейное пространство, порожденное элементами X_1, X_2, $\dim L_2 = 2$. Будем считать X_1 и X_2 операторами длины 1. Тогда L_3 состоит из элементов пространства L_2 и элемента $X_3 = [X_2, X_1]$, т.е. $L_3 = \{X_1, X_2, X_3\}$. Следовательно, $L_4 = L_3 + \{[X_2, X_3], [X_1, X_3]\}$ и т.д.

Введем $\delta(i) = \dim(L_i) - \dim(L_{i-1})$. Будет показано, что кольцо Ли для уравнения (1) бесконечномерно, причем $\delta(i) = 1$, если $i = 6n-1, i = 6n, i = 6n+1, i = 6n+3, n = 1, 2, \ldots$ и $\delta(i) = 2$ при $i = 6n+2, i = 6n+4, n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, кольцо Ли для уравнения (1) является характеристическим кольцом медленного роста. Отметим, что структура линейных пространств L_i при $i \leqslant 10$ была исследована в [4].

Далее будем пользоваться следующим утверждением, доказательство которого можно найти, например, в [4].

Лемма 1. *Пусть векторное поле Z имеет вид*
$$Z = \alpha_1 \tfrac{\partial}{\partial u_1} + \alpha_2 \tfrac{\partial}{\partial u_2} + \alpha_3 \tfrac{\partial}{\partial u_3} + \ldots, \alpha_i = \alpha_i(u, u_1, u_2, \ldots), i = 1, 2, 3, \ldots$$
Тогда $[D_x, Z] = 0$, если и только если $Z = 0$.

2. Характеристическое кольцо уравнения Жибера-Шабата-Цицейки

Введем следующие обозначения для кратных коммутаторов:
$$X_{i_1,\ldots i_n} = ad_{X_{i_1}} \ldots ad_{X_{i_{n-1}}} X_{i_n}, \text{ где } ad_X Y = [X, Y].$$

Теорема 1. *Для уравнения Жибера-Шабата-Цицейки (1) справедливы равенства:*
$$\delta(i) = 2, i = 6n+2, i = 6n+4, n = 1, 2, \ldots; \tag{5}$$
$$\delta(i) = 1, i = 6n-1, i = 6n, i = 6n+1, i = 6n+3, n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$
При этом верны следующие равенства:

$L_{6n+2} = L_{6n+1} \oplus \{X_{1\ldots 121}, X_{21\ldots 121}\}$,
$L_{6n+4} = L_{6n+3} \oplus \{X_{1\ldots 121}, X_{21\ldots 121}\}$,
$L_{6n-1} = L_{6n-2} \oplus \{X_{1\ldots 121}\}$,
$L_{6n} = L_{6n-1} \oplus \{X_{1\ldots 121}\}$,
$L_{6n+1} = L_{6n} \oplus \{X_{1\ldots 121}\}$,
$L_{6n+3} = L_{6n+2} \oplus \{X_{1\ldots 121}\}$.

Т.е. операторы $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, \bar{X}_8, X_9, X_{10}, \bar{X}_{10}, \ldots X_{6n-1}, X_{6n}, X_{6n+1}, X_{6n+2}, \bar{X}_{6n+2}, X_{6n+3}, X_{6n+4}, \bar{X}_{6n+4}, \ldots$ образуют базис характеристического кольца Ли L уравнения (1), где

$X_n = X_{i_1 \ldots i_n}$ *причем* $i_1 = \ldots = i_{n-2} = i_n = 1, i_{n-1} = 2$,
$\bar{X}_n = X_{i_1 \ldots i_n}$ *причем* $i_2 = \ldots = i_{n-2} = i_n = 1, i_1 = i_{n-1} = 2$.

Операторы X_1, X_2 определены выше. Для X_1 и X_2 выполнены соотношения:
$$[D_x, X_1] = -(e^u + e^{-2u}) X_2, \tag{7}$$
$$[D_x, X_2] = 0. \tag{8}$$
Введем оператор длины 2: $X_3 = [X_2, X_1]$. Используя тождество Якоби и соотношения (7),(8), получим:
$$[D_x, X_3] = -(e^u - 2e^{-2u}) X_2. \tag{9}$$

Предположим, что оператор X_3 линейно выражается через операторы X_1 и X_2, тогда имеем:

$$X_3 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2. \tag{10}$$

Применим к обеим частям последнего равенства оператор D_x,используя соотношения (7),(8),(9), получим:

$$-(e^u - 2e^{-2u})X_2 = D_x(\lambda_1)X_1 - \lambda_1(e^u + e^{-2u})X_2 + D_x(\lambda_2)X_2. \tag{11}$$

Сравним коэффициенты при линейно независимых операторах X_2 и X_1, получим:

$$-(e^u - 2e^{-2u}) = -\lambda_1(e^u + e^{-2u}) + D_x(\lambda_2) \tag{12}$$

и

$$D_x(\lambda_1) = 0. \tag{13}$$

Равенство (12) противоречиво, так как $\lambda_N = \lambda_N(u, u_x, u_{xx}, ...)$, и $D_x(\lambda_2)$ содержит $u_x, u_{xx}, ...$. Следовательно, оператор $X_3 = X_{21}$ линейно не выражается через X_1 и X_2. Значит, линейное пространство L_3 – трехмерно, т.е. $L_3 = \{X_1, X_2, X_3\}$.

Введем операторы длины 3: $X_4 = [X_1, X_3]$ и $\bar{X}_4 = [X_2, X_3]$, для которых выполнено:

$$\left[D_x, \bar{X}_4\right] = 2\left[D_x, X_1\right] - \left[D_x, X_3\right] \tag{14}$$

и

$$[D_x, X_4] = (e^u - 2e^{-2u})X_3 - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_3\right] = (2e^u - e^{-2u})X_3 - 2(e^u + e^{-2u})X_1. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\bar{X}_4 = 2X_1 - X_3.$$

Оператор $X_4 = X_{121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, получаем $L_4 = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

Рассмотрим операторы длины 4: $X_5 = [X_1, X_4]$ и $\bar{X}_5 = [X_2, X_4]$. Используя тождество Якоби и соотношения (7),(8) и (15), получаем $\bar{X}_5 = -X_4$ и

$$[D_x, X_5] = (2e^u - e^{-2u})X_4 - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_4\right] = 3e^u X_4. \tag{16}$$

Оператор $X_5 = X_{1121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, следовательно, $L_5 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$.

Введем операторы длины 5: $X_6 = [X_1, X_5], \bar{X}_6$ и $[X_3, X_4]$. Согласно тождеству Якоби, $[X_3, X_4] = X_5$. Нетрудно показать, что для $\bar{X}_6$ выполнено равенство:

$$\left[D_x, \bar{X}_6\right] = 0. \tag{17}$$

Следовательно, согласно утверждению леммы 1, $\bar{X}_6 = 0$. Для X_6 получаем:

$$[D_x, X_6] = [X_1, 3e^u X_4] - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_5\right] = 3e^u X_5. \tag{18}$$

Значит, оператор $X_6 = X_{11121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и имеем $L_6 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$.

Рассмотрим операторы длины 6: $X_7 = [X_1, X_6], \bar{X}_7 = [X_2, X_6], [X_3, X_5]$. Нетрудно показать, что $[X_3, X_5] = X_6, [X_2, X_6] = X_6$,

$$[D_x, X_7] = 3e^u X_6 - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_6\right] = (2e^u - e^{-2u})X_6. \tag{19}$$

Следовательно, $X_7 = X_{111121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, $L_7 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7\}$.

Введем операторы длины 7: $X_8 = [X_1, X_7], \bar{X}_8 = [X_2, X_7], [X_3, X_6], [X_4, X_5]$. Согласно тождеству Якоби, $[X_3, X_6] = \bar{X}_8 - X_7, [X_4, X_5] = 2X_7 - \bar{X}_8$. Для X_8 и $\bar{X}_8$ выполнены следующие соотношения:

$$\left[D_x, \bar{X}_8\right] = (4e^u + e^{-2u})X_6 \tag{20}$$

и

$$[D_x, X_8] = (2e^u - e^{-2u})X_7 - (e^u + e^{-2u})\bar{X}_8. \tag{21}$$

Т.е. пространство L_8 получается из L_7 добавлением двух линейно независимых элементов- $X_8 = X_{1111121}$ и $\bar{X}_8 = X_{2111121}$, т.е. $L_8 = L_7 \oplus \left\{X_8, \bar{X}_8\right\}$.

Рассмотрим операторы длины 8: $X_9 = [X_1, X_8], \bar{X}_9 = [X_2, X_8], \left[X_1, \bar{X}_8\right], \left[X_2, \bar{X}_8\right], [X_3, X_7]$, $[X_4, X_6]$.

Согласно тождеству Якоби, $[X_3, X_7] = -X_8, [X_4, X_6] = X_8$.

Также нетрудно показать, что $\left[X_2, \bar{X}_8\right] = 2X_7 + \bar{X}_8$, $\left[X_1, \bar{X}_8\right] = X_8$. $\left[D_x, \bar{X}_9\right] = 0$, следовательно, согласно леммы 1, $\bar{X}_9 = [X_2, X_8] = 0$.

Для X_9 получаем:

$$[D_x, X_9] = (e^u - 2e^{-2u})X_8 - (e^u + e^{-2u})[X_2, X_8] = (e^u - 2e^{-2u})X_8. \tag{22}$$

Значит, $X_9 = X_{11111121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_9 = L_8 \oplus \{X_9\}$.

Введем операторы длины 9: $X_{10} = [X_1, X_9], \bar{X}_{10} = [X_2, X_9], \left[X_3, \bar{X}_8\right], [X_3, X_8], [X_4, X_7]$, $[X_5, X_6]$, для которых выполнены следующие соотношения:

$$[X_5, X_6] = 2X_9 + \bar{X}_{10}, [X_4, X_7] = -X_9 - \bar{X}_{10},$$
$$[X_3, X_8] = \bar{X}_{10}, \left[X_3, \bar{X}_8\right] = -3X_8.$$

Для операторов $X_{10}, \bar{X}_{10}$ имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{10}\right] = (e^u + 4e^{-2u})X_8 + (e^u - 2e^{-2u})[X_2, X_8] = (e^u + 4e^{-2u})X_8 \tag{23}$$

и

$$[D_x, X_{10}] = (e^u - 2e^{-2u})X_9 - (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{10}. \tag{24}$$

Значит, операторы $X_{10} = X_{111111121}$ и $\bar{X}_{10} = X_{211111121}$ линейно не выражаются через операторы меньшего порядка, и $L_{10} = L_9 \oplus \left\{X_{10}, \bar{X}_{10}\right\}$.

Можно показать, что базис характеристического кольца, порожденного элементами X и Y, всегда можно выбрать из элементов вида $ad_X^{k_1} ad_Y^{k_2} ... ad_X^{k_s} Y$.

Введем следующие обозначения: $X_n = [X_1, X_{n-1}], \bar{X}_n = [X_2, X_{n-1}]$. Доказательство проведем методом математической индукции. Предположим, что для $i = n-1$ выполняются следующие равенства:

$$\left[D_x, X_{6(n-1)-1}\right] = (2e^u - e^{-2u})X_{6(n-1)-2} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)-2}\right], \tag{25}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)}\right] = 3e^u X_{6(n-1)-1} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)-1}\right], \tag{26}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)+1}\right] = 3e^u X_{6(n-1)} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)}\right], \tag{27}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)+2}\right] = (2e^u - e^{-2u})X_{6(n-1)+1} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)+1}\right], \tag{28}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)+3}\right] = (e^u - 2e^{-2u})X_{6(n-1)+2} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)+2}\right], \tag{29}$$

$$\left[D_x, X_{6(n-1)+4}\right] = (e^u - 2e^{-2u})X_{6(n-1)+3} - (e^u + e^{-2u})\left[X_2, X_{6(n-1)+3}\right], \tag{30}$$

$$\bar{X}_{6(n-1)} = 0, \bar{X}_{6(n-1)-1} = -X_{6(n-1)-2}, \tag{31}$$

$$\bar{X}_{6(n-1)+1} = X_{6(n-1)}, \bar{X}_{6(n-1)+3} = 0, \tag{32}$$

$$\left[X_1, \bar{X}_{6(n-1)+2}\right] = X_{6(n-1)+2}, \left[X_2, \bar{X}_{6(n-1)+2}\right] = 2X_{6(n-1)+1} + \bar{X}_{6(n-1)+2}, \tag{33}$$

$$\left[X_1, \bar{X}_{6(n-1)+4}\right] = -X_{6(n-1)+4}, \left[X_2, \bar{X}_{6(n-1)+4}\right] = 2X_{6(n-1)+3} - \bar{X}_{6(n-1)+4}. \tag{34}$$

Проверим выполнение равенств (25) – (34) для $i = n$.

Введем операторы длины $6n-2$: $X_{6n-1} = X_{6(n-1)+5} = \left[X_1, X_{6(n-1)+4}\right]$ и $\bar{X}_{6n-1} = \bar{X}_{6(n-1)+5} = \left[X_2, X_{6(n-1)+4}\right]$. Имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n-1}\right] = \left[D_x, \left[X_2, X_{6(n-1)+4}\right]\right] = -\left[D_x, X_{6(n-1)+4}\right], \tag{35}$$

следовательно, $\bar{X}_{6n-1} = -X_{6(n-1)+4}$. Для X_{6n-1} выполнено:

$$[D_x, X_{6n-1}] = (2e^u - e^{-2u})X_{6n-2} - (e^u + e^{-2u})[X_2, X_{6n-2}] = 3e^u X_{6n-2}. \tag{36}$$

Это означает, что оператор $X_{6n-1} = X_{1\ldots121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_{6n-1} = L_{6n-2} \oplus \{X_{6n-1}\}$, таким образом $\delta(6n-1) = 1$.

Рассмотрим операторы длины $6n-1$: $X_{6n} = [X_1, X_{6n-1}], \bar{X}_{6n} = [X_2, X_{6n-1}]$. Имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n}\right] = 0, \tag{37}$$

и следовательно, согласно леммы 1, $\bar{X}_{6n} = 0$. Также имеем:

$$[D_x, X_{6n}] = [X_1, 3e^u X_{6n-2}] - (e^u + e^{-2u})\,[X_2, X_{6n-1}] = 3e^u X_{6n-1}. \tag{38}$$

Значит, оператор $X_{6n} = X_{1\ldots121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_{6n} = L_{6n-1} \oplus \{X_{6n}\}$. Таким образом, $\delta(6n) = 1$.

Введем операторы длины $6n$: $X_{6n+1} = [X_1, X_{6n}], \bar{X}_{6n+1} = [X_2, X_{6n}]$, для которых выполнено:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n+1}\right] = 3e^u X_{6n-1}, \tag{39}$$

следовательно, $\bar{X}_{6n+1} = X_{6n}$.Нетрудно показать, что

$$[D_x, X_{6n+1}] = (2e^u - e^{-2u}) X_{6n}. \tag{40}$$

Это означает, что оператор $X_{6n+1} = X_{1\ldots121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_{6n+1} = L_{6n} \oplus \{X_{6n+1}\}$. Получаем $\delta(6n+1) = 1$.

Рассмотрим операторы длины $6n+1$: $X_{6n+2} = [X_1, X_{6n+1}], \bar{X}_{6n+2} = [X_2, X_{6n+1}]$. Имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n+2}\right] = (4e^u + e^{-2u}) X_{6n} \tag{41}$$

и

$$[D_x, X_{6n+2}] = (2e^u - e^{-2u}) X_{6n+1} - (e^u + e^{-2u}) \bar{X}_{6n+2}. \tag{42}$$

Значит, операторы $X_{6n+2} = [X_1, X_{6n+1}] = X_{1\ldots121}$ и $\bar{X}_{6n+2} = [X_2, X_{6n+1}] = X_{21\ldots121}$ линейно не выражаются через операторы меньшего порядка, $L_{6n+2} = L_{6n+1} \oplus \left\{X_{6n+2}, \bar{X}_{6n+2}\right\}$. Таким образом, $\delta(6n+2) = 2$.

Введем операторы длины $6n+2$: $X_{6n+3} = [X_1, X_{6n+2}], \bar{X}_{6n+3} = [X_2, X_{6n+2}], \left[X_1, \bar{X}_{6n+2}\right]$, $\left[X_2, \bar{X}_{6n+2}\right]$.

Нетрудно показать справедливость равенства:

$$\left[D_x, \left[X_2, \bar{X}_{6n+2}\right]\right] = (8e^u - e^{-2u}) X_{6n}, \tag{43}$$

значит, $\left[X_2, \bar{X}_{6n+2}\right] = 2X_{6n+1} + \bar{X}_{6n+2}$.

$$\left[D_x, \left[X_1, \bar{X}_{6n+2}\right]\right] = (2e^u - e^{-2u}) X_{6n+1} - (e^u + e^{-2u}) \bar{X}_{6n+2}, \tag{44}$$

и значит, $\left[X_1, \bar{X}_{6n+2}\right] = X_{6n+2}$.

Для операторов X_{6n+3} и $\bar{X}_{6n+3}$ имеем:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n+3}\right] = 0 \tag{45}$$

и

$$[D_x, X_{6n+3}] = (e^u - 2e^{-2u}) X_{6n+2}, \tag{46}$$

тогда, согласно леммы 1, $\bar{X}_{6n+3} = 0$, и значит на этом шаге в базис характеристического кольца добавляется один оператор $X_{6n+3} = X_{1\ldots121}$, таким образом, $L_{6n+3} = L_{6n+2} \oplus \{X_{6n+3}\}$. Значит, $\delta(6n+3) = 1$.

Рассмотрим операторы длины $6n+3$: $X_{6n+4} = [X_1, X_{6n+3}], \bar{X}_{6n+4} = [X_2, X_{6n+3}]$, для которых выполнено:

$$\left[D_x, \bar{X}_{6n+4}\right] = (e^u + 4e^{-2u}) X_{6n+2}, \tag{47}$$

$$[D_x, X_{6n+4}] = (e^u - 2e^{-2u}) X_{6n+3} - (e^u + e^{-2u}) \bar{X}_{6n+4}. \tag{48}$$

Следовательно, пространство L_{6n+4} получается из L_{6n+3} добавлением двух элементов: $X_{6n+4} = X_{1\ldots121}$ и $\bar{X}_{6n+4} = X_{21\ldots121}$, т.е. $L_{6n+4} = L_{6n+3} \oplus \left\{X_{6n+4}, \bar{X}_{6n+4}\right\}$. Таким образом, $\delta(6n+4) = 2$.

Введем операторы длины $6n+4$:

$X_{6(n+1)-1} = [X_1, X_{6n+4}]\,, \bar{X}_{6(n+1)-1} = [X_2, X_{6n+4}]\,, \left[X_1, \bar{X}_{6n+4}\right], \left[X_2, \bar{X}_{6n+4}\right].$

Справедливо следующее соотношение:

$$\left[D_x, \left[X_2, \bar{X}_{6n+4}\right]\right] = (e^u - 8e^{-2u})X_{6n+2}, \tag{49}$$

следовательно, $\left[X_2, \bar{X}_{6n+4}\right] = 2X_{6n+3} - \bar{X}_{6n+4}$.

Также имеем:

$$\left[D_x, \left[X_1, \bar{X}_{6n+4}\right]\right] = (-e^u + 2e^{-2u})X_{6n+3} + (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{6n+4}, \tag{50}$$

откуда получаем, что $\left[X_1, \bar{X}_{6n+4}\right] = -X_{6n+4}$.

Из равенства

$$\left[D_x, \bar{X}_{6(n+1)-1}\right] = (-e^u + 2e^{-2u})X_{6n+3} + (e^u + e^{-2u})\bar{X}_{6n+4} \tag{51}$$

следует $\bar{X}_{6(n+1)-1} = -X_{6n+4}$.

Для $X_{6(n+1)-1}$ имеем:

$$\left[D_x, X_{6(n+1)-1}\right] = 3e^u X_{6n+4}. \tag{52}$$

Значит, оператор $X_{6(n+1)-1} = X_{1\ldots121}$ линейно не выражается через операторы меньшего порядка, и $L_{6(n+1)-1} = L_{6n+4} \oplus \left\{X_{6(n+1)-1}\right\}$. Значит, $\delta(6(n+1)-1) = 1$.

Таким образом теорема доказана.

Автор выражает благодарность И.Т. Хабибуллину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Goursat *Recherches sur quelques équations aux dérivées partielles du second ordre*, Annales de la facult$\acute{e}$ des Sciences de l'Universit$\acute{e}$ de Toulouse 2^e série, tome 1, n^0 1 (1899) P.31–78.
2. Лезнов А.Н., Смирнов В.Г., Шабат А.Б. *Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем* // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51. № 1. С. 10–22.
3. Жибер А.В., Мукминов Ф.Х.*Квадратичные системы, симметрии, характеристические и полные алгебры* // Задачи математической физики и асимптотики их решений. Уфа: БНЦ УрО АН СССР. 1991. С. 14–32.
4. Жибер А.В., Муртазина Р.Д.*О нелинейных гиперболических уравнениях с характеристической алгеброй медленного роста* // Вестник УГАТУ. 2006. Т.7. № 2. С. 131–136.
5. Шабат А.Б., Ямилов Р.И. *Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана* // Препринт БФАН СССР, Уфа. 1981. 23 с.
6. Гюрсес М., Жибер А.В., Хабибуллин И.Т. *Характеристические кольца Ли дифференциальных уравнений* // Уфимский мат. жур. 2012. Т. 4. № 1. С. 53–62.
7. Tzitzéica G. *Sur une nouvelle classe de surfaces* // Comptes rendus Acad. Sci. T. 150. 1910. P. 955–956.
8. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // Доклады АН СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1103–1107.
9. A.V. Mikhailov *Pis'ma Zh.Eksp.* // Theor.Fiz. 1979. V. 30, № 7. P. 443–448.

Альфия Ураловна Сакиева,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: alfiya85.85@mail.ru

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 161-176.

УДК 517.929

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО ДАРБУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

С.Я. СТАРЦЕВ

Аннотация. Произведена классификация дифференциально-разностных уравнений лиувиллевского типа, допускающих интеграл первого порядка по одной из характеристик. Показано, что тем самым получено полное описание разностных подстановок первого порядка, применимых к широким классам эволюционных дифференциально-разностных уравнений. Также указанная классификация позволяет получить полный список интегрируемых по Дарбу дифференциально-разностных уравнений, обладающих интегралом второго порядка по одной из характеристик и допускающих обратимое неточечное преобразование по соответствующей характеристике.

Ключевые слова: интегрируемость по Дарбу, дифференциально-разностные уравнения, разностные подстановки.

1. Введение и основные определения

Настоящая статья посвящена изучению некоторых специальных подклассов цепочек дифференциальных уравнений вида

$$(u_{i+1})_x = F(x, u_i, u_{i+1}, (u_i)_x),$$

где неизвестная функция u зависит от целого числа i и вещественной переменной x. В дальнейшем во всех формулах мы для краткости будем опускать индекс i и, в частности, будем записывать вышеуказанную цепочку в виде

$$(u_1)_x = F(x, u, u_1, u_x). \tag{1.1}$$

Мы будем предполагать, что $F_{u_x} \neq 0$, и, следовательно, уравнение (1.1) можно записать в виде

$$(u_{-1})_x = \tilde{F}(x, u, u_{-1}, u_x). \tag{1.2}$$

Производные $u_m^{(n)} := \partial^n u_{i+m}/\partial x^n$ от сдвигов u для любых ненулевых $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ мы можем поэтому выразить в силу уравнений (1.1) – (1.2) через x и так называемые *динамические переменные* $u_l := u_{i+l}$, $u^{(k)} := \partial^k u_i/\partial x^k$. Запись $g[u]$ будет обозначать, что функция g зависит от x и конечного числа динамических переменных.

Обозначим через T оператор сдвига по i в силу уравнения (1.1). Этот оператор задается следующими правилами: $T(f(a, b, \dots)) = f(T(a), T(b), \dots)$ для любой функции f; $T(u_m) = u_{m+1}$; $T(u^{(n)}) = D^{n-1}(F)$ (то есть "смешанные" переменные $u_1^{(n)}$ выражаются через динамические переменные в силу уравнения (1.1)). Здесь

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u^{(1)}\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial u^{(k)}} + T^{k-1}(F)\frac{\partial}{\partial u_k} + T^{1-k}(\tilde{F})\frac{\partial}{\partial u_{-k}}\right),$$

S.Ya. Startsev, Darboux integrable differential-difference equations admitting a firts-order integral.

© Старцев С.Я. 2012.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00088-а).
Поступила 21 мая 2012 г.

т.е. через D обозначен оператор полной производной по x в силу уравнений (1.1) – (1.2). Оператор обратного сдвига T^{-1} задается похожим образом.

Определение 1. *Уравнение* (1.1) *называется интегрируемым по Дарбу, если для него найдутся функции* $I[u]$ *и* $X[u]$*, каждая из которых зависит хотя бы от одной из динамических переменных, такие что выполнены соотношения* $D(I) = 0$ *и* $T(X) = X$*. Функции* $I[u]$ *и* $X[u]$ *в этом случае называются соответственно* i*-интегралом и* x*-интегралом уравнения* (1.1).

Нетрудно проверить (см., например, [1]), что i-интеграл не может зависеть от производных u, а x-интеграл — от сдвигов u. Таким образом, i- и x-интеграл должны иметь вид $I(x, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m)$ и $X(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ соответственно. Числа $m-k$ и n называются *порядком* соответствующего интеграла. Заметим, что в настоящей статье (в отличие от, например, [2]) мы не рассматриваем случай интегралов, явно зависящих от дискретной переменной i.

Уравнение (1.1) можно рассматривать как дифференциально-разностный аналог уравнения в частных производных

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1.3}$$

Определение интегрируемости по Дарбу первоначально было введено именно для уравнений в частных производных, и в работе [3] была выполнена полная классификация интегрируемых по Дарбу уравнений вида (1.3). Для уравнений же (1.1) такая классификация в настоящий момент пока отсутствует — известны лишь отдельные примеры (см., например, [4]), а также результаты классификации для цепочек специального вида [5]. Поэтому обоснованной представляется постановка задачи о классификации тех или иных частных случаев уравнения (1.1), которые впоследствии достаточно естественным образом могут войти в будущую полную классификацию как составная ее часть.

В качестве таких частных случаев в статье рассматриваются уравнение

$$(u_1)_x = a(u, u_1)u_x, \tag{1.4}$$

а также уравнения вида

$$\phi(x, u_1, (u_1)_x) = \phi(x, u, u_x). \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (1.4) при любом a допускает i-интеграл первого порядка: им будет любая функция $I(u, u_1)$, удовлетворяющая уравнению $I_u + aI_{u_1} = 0$. Верно и обратное — уравнение (1.1) допускает i-интеграл вида $I(u, u_1)$ только тогда, когда оно имеет вид (1.4). Также очевидно, что уравнение (1.1) допускает x-интеграл $\phi(x, u, u_x)$ тогда и только тогда, когда оно может быть записано в виде (1.5).

Поскольку уравнения (1.4) и (1.5) всегда обладают интегралом по одной из характеристик, задача классификации интегрируемых по Дарбу уравнений указанных видов сводится к получению необходимых и достаточных условий наличия у них интеграла по другой характеристике. Такие условия и получены в настоящей статье. Заметим, что этот результат не претендует на исчерпывающее описание всех уравнений вида (1.1), допускающих интегралы первого порядка, поскольку уравнения допускающие i-интеграл первого порядка не исчерпываются уравнениями (1.4) (в случае явной зависимости этого интеграла от x) и, что менее очевидно, уравнение (1.1) может допускать x-интеграл первого порядка, явно зависящий от i (несмотря на отсутствие такой зависимости у (1.1)), и потому соответствующее такому интегралу уравнение не обязательно имеет вид (1.5) (для чисто дискретных аналогов уравнения (1.3) примеры такого сорта содержатся в работе [6] и нетрудно видеть, что они применимы и к случаю уравнений (1.1)).

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующее

Определение 2. *Уравнение вида* $u_t = f[u]$ *называется симметрией уравнения* (1.1), *если выполнено соотношение* $L(f) = 0$, *где*

$$L = TD - F_{u_x}D - F_{u_1}T - F_u. \tag{1.6}$$

Следует заметить, что интегрируемые по Дарбу уравнения обладают богатым набором симметрий: если у уравнения (1.1) имеются i-интеграл I и x-интеграл X, то, согласно [4], найдутся операторы $R = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k[u]T^k$ и $S = \sum_{k=0}^{\sigma} \mu_k[u]D^k$, такие что

$$u_t = R(\xi(I, T(I), T^2(I), \dots)), \tag{1.7}$$
$$u_t = S(\eta(x, X, D(X), D^2(X), \dots))$$

являются симметриями этого уравнения для любых функций ξ и η, зависящих от конечного числа аргументов. В разделе 3 показано, что, как и в случае уравнений (1.3), для любой симметрии $u_t = f[u]$ уравнения (1.1) интеграл минимального порядка $\Omega[u]$ задает подстановку $v = \Omega[u]$, переводящую решения этой симметрии в решения некоторого уравнения вида $v_t = g[v]$. Это позволяет воспользоваться при классификации уравнений (1.5) результатами ранее проведенной классификации дифференциальных подстановок [7], а также показать, что классификация уравнений (1.4) дает нам полное описание постановок вида $v = I(u, u_1)$, допускаемых зависящими от произвольной функции семействами уравнений вида (1.7).

В статье также рассматриваются уравнения, заданные соотношениями вида

$$T(\varphi(x, u, u_x)) = \psi(x, u, u_x), \qquad \varphi_u\psi_{u_x} - \psi_u\varphi_{u_x} \neq 0, \tag{1.8}$$

и

$$D(p(u, u_1)) = q(u, u_1), \qquad p_u q_{u_1} - q_u p_{u_1} \neq 0. \tag{1.9}$$

С помощью результатов классификации уравнений (1.4) и (1.5) в разделе 5 получены полный список интегрируемых по Дарбу уравнений (1.8), допускающих x-интеграл второго порядка, а также список Дарбу-интегрируемых уравнений (1.9), допускающих i-интеграл второго порядка, не зависящий явно от x. Заметим, что уравнения (1.8) и (1.9) можно рассматривать как дифференциально-разностные аналоги линейных по одной из производных уравнений (1.3), т.е. уравнений

$$D_y(\varphi(x, u, u_x)) = \psi(x, u, u_x) \quad \text{и} \quad D_x(p(u, u_y)) = q(u, u_y), \tag{1.10}$$

где через D_x и D_y обозначены полные производные по x и y соответственно. Т.е. найденные в разделе 5 уравнения можно рассматривать как ближайшие дифференциально-разностные аналоги уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$, поскольку данное уравнение имеет вид (1.10) и допускает интегралы второго порядка.

2. Вспомогательные утверждения: инварианты Лапласа, симметрии и интегралы

При анализе уравнений (1.1), допускающих интегралы, нередко оказываются полезными инварианты Лапласа этих уравнений. Напомним, что $K_0 = F_u + F_{u_x}F_{u_1} - D(F_{u_x})$ и $H_0 = F_u + F_{u_x}T^{-1}(F_{u_1})$ называются главными инвариантами Лапласа уравнения (1.1). Эти инварианты являются остатками от деления оператора (1.6) на $T - F_{u_x}$ и $D - T^{-1}(F_{u_1})$ соответственно:

$$L = (D - F_{u_1})(T - F_{u_x}) - K_0 = (T - F_{u_x})(D - T^{-1}(F_{u_1})) - H_0.$$

Нетрудно проверить, что если $H_0 \neq 0$, то верна формула

$$(D - b_1)L = L_1(D - T^{-1}(F_{u_1})),$$

где

$$L_1 = (D - b_1)(T - F_{u_x}) - H_0, \quad b_1 = T^{-1}(F_{u_1}) + D(H_0)/H_0.$$

Вышеописанная процедура перехода от оператора $L_0 = L$ к оператору L_1 называется x-преобразованием Лапласа. Ясно, что она может быть применена к произвольному оператору вида $TD - a[u]D - b[u]T - c[u]$ (для этого достаточно в вышеприведенных формулах заменить F_{u_x}, F_{u_1} и F_u на a, b и c соответственно). В частности, мы можем записать L_1 в виде

$$L_1 = (T - F_{u_x})(D - T^{-1}(b_1)) - H_1, \quad H_1 = H_0 + F_{u_x}(T^{-1}(b_1) - b_1) + D(F_{u_x})$$

и применить x-преобразование Лапласа уже к L_1 и т.д. Многократное применение x-преобразования Лапласа дает нам последовательность операторов

$$L_j = (T - F_{u_x})(D - T^{-1}(b_j)) - H_j, \quad j > 0,$$

где b_j, H_j определяются рекуррентными формулами

$$b_j = T^{-1}(b_{j-1}) + D(H_{j-1})/H_{j-1}, \quad b_0 = F_{u_1},$$

$$H_j = H_{j-1} + F_{u_x}(T^{-1}(b_j) - b_j) + D(F_{u_x}).$$

При этом для всех $j > 0$ верна формула

$$(D - b_j)L_{j-1} = L_j(D - T^{-1}(b_{j-1})). \tag{2.1}$$

Подобным образом определяется и i-преобразование Лапласа. Итерации i-преобразования порождают последовательность операторов

$$L_{-j} = (D - T^j(F_{u_1}))(T - a_j) - K_j, \quad j > 0,$$

где a_j, K_j определяются рекуррентными формулами

$$a_j = a_{j-1}T(K_{j-1})/K_{j-1}, \quad a_0 = F_{u_x},$$

$$K_j = T(K_{j-1}) - D(a_j) + a_j(T^j(F_{u_1}) - T^{j-1}(F_{u_1})).$$

Аналогом формулы (2.1) здесь является соотношение

$$(T - a_j)L_{1-j} = L_{-j}(T - a_{j-1}). \tag{2.2}$$

Функции H_j и K_j называются соответственно x- и i-*инвариантами Лапласа* уравнения (1.1). В работе [4] было доказано, что выполнения условия $H_j = 0$ ($K_j = 0$) при некотором $j < m$ является необходимым для наличия у уравнения (1.1) x-интеграла (i-интеграла) m-того порядка. В случае уравнения в частных производных (1.3) в работах [8], [9] доказано, что завершение нулем последовательности инвариантов Лапласа этого уравнения не только необходимо, но и достаточно для наличия у него интегралов. Для дифференциально-разностного уравнения (1.1) подобное утверждение отсутствует. Однако нетрудно доказать следующей формальный аналог этого утверждения.

Лемма 1. *Пусть x-инвариант Лапласа H_m уравнения* (1.1) *равен нулю при некотором $m \geq 0$ и найдется отличная от нуля функция $\theta[u]$, такая что $T(\theta) = F_{u_x}^{-1}\theta$. Тогда дифференциальный оператор θB_m, где B_j задаются рекуррентной формулой*

$$B_0 = D - T^{-1}(F_{u_1}), \qquad B_j = (D - T^{-1}(b_j))B_{j-1}, \quad j > 0, \tag{2.3}$$

переводит ядро оператора (1.6) *в ядро оператора $T - 1$.*

Другими словами, оператор θB_m переводит в $\ker(T - 1)$ правую часть любой симметрии уравнения (1.1).

Доказательство. Прямым следствием формулы (2.1) является соотношение

$$L_m B_{m-1} = (D - b_m) \dots (D - b_1)L.$$

Учитывая, что $H_m = 0$, получаем

$$(T - F_{u_x})B_m = (D - b_m) \dots (D - b_1)L. \tag{2.4}$$

Поскольку $T(\theta) = F_{u_x}^{-1}\theta$, имеем $(T-1)\theta = \theta(F_{u_x}^{-1}T-1) = \theta F_{u_x}^{-1}(T-F_{u_x})$. Поэтому, домножив обе части (2.4) на $\theta F_{u_x}^{-1}$, приходим к соотношению

$$(T-1)\theta B_m = \theta F_{u_x}^{-1}(D-b_m)\dots(D-b_1)L,$$

которое и доказывает лемму. □

Аналогичным образом доказывается и

Лемма 2. *Пусть i-инвариант Лапласа K_m уравнения* (1.1) *равен нулю при некотором $m \geq 0$ и найдется отличная от нуля функция $\tau[u]$, такая что $D(\tau) + F_{u_1}\tau = 0$. Тогда разностный оператор $T^m(\tau)A_m$, где A_j задаются рекуррентной формулой*

$$A_0 = T - F_{u_x}, \qquad A_j = (T-a_j)A_{j-1}, \quad j > 0,$$

переводит ядро оператора (1.6) *в ядро оператора D.*

Если у уравнения (1.1) имеется симметрия $u_t = f[u]$, то выполнение условий вышеприведенных лемм вообще говоря не гарантирует, что у этого уравнения обязательно будут иметься интегралы, поскольку выражения $\theta B_m(f)$ и $T^m(\tau)A_m(f)$ теоретически могут оказаться не зависящими от динамических переменных или вообще равными нулю. Но при добавлении некоторых дополнительный условий эти леммы все же можно использовать для доказательства существования интегралов.

Следствие 1. *Пусть $u_t = f[u]$ является симметрией уравнения* (1.1), *такой что $f_{u^{(n)}} \neq 0$, $n > 0$ и $f_{u^{(j)}} = 0$ для всех $j > n$. Тогда если для этого уравнения выполнено условие $H_m = 0$ и найдется отличная от нуля функция $\theta[u]$, такая что $T(\theta) = F_{u_x}^{-1}\theta$ и $\theta_{u^{(l)}} = 0$ для всех $l > (m+n)$, то $\theta B_m(f)$ является x-интегралом уравнения* (1.1).

Доказательство. Индукцией по j нетрудно убедиться, что b_j и H_j не могут зависеть от $u^{(r)}$ для любого $r > (j+1)$. Поэтому $(\theta B_m(f))_{u^{(m+n+1)}} = \theta f_{u^{(n)}} \neq 0$, то есть $\theta B_m(f)$ зависит от $u^{(m+n+1)}$ и, в силу леммы 1, лежит в $\ker(T-1)$. Следовательно, $\theta B_m(f)$ является x-интегралом. □

Таким же образом доказывается и аналогичное утверждение для i-интегралов.

Следствие 2. *Пусть $u_t = f[u]$ является симметрией уравнения* (1.1), *такой что $f_{u_n} \neq 0$, $n > 0$ и $f_{u_j} = 0$ для всех $j > n$. Тогда если для этого уравнения выполнено условие $K_m = 0$ и найдется отличная от нуля функция $\tau[u]$, такая что $D(\tau) + F_{u_1}\tau = 0$ и $\tau_{u_l} = 0$ для всех $l > n$, то $T^m(\tau)A_m(f)$ является i-интегралом уравнения* (1.1).

Нетрудно заметить, что у уравнения (1.4) при любом a имеется симметрия $u_t = u_x$ и $T(u_x^{-1}) = a^{-1}u_x^{-1}$. Учитывая, что $a = F_{u_x}$, в силу следствия 1 получаем следующее

Предложение 1. *Пусть для уравнения* (1.4) *выполнено условие $H_m = 0$ при некотором $m \geq 0$. Тогда у этого уравнения имеется x-интеграл.*

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1.1) *найдется оператор $R = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k[u]T^k$, $\lambda_r \neq 0$, такой что $u_t = R(I)$ является симметрией уравнения* (1.1) *для любого $I \in \ker D$. Тогда $H_m = 0$ для некоторого неотрицательного $m \leq r$.*

Доказательство. Собирая в соотношении $L(R(I)) = 0$ коэффициенты при одинаковых степенях T, получаем, что необходимым условием для его выполнения при любых $I \in \ker D$ является выполнение цепочки соотношений

$$T\left(B_0(\lambda_r)\right) = 0,$$

$$T\left(B_0(\lambda_{j-1})\right) - F_{u_x}B_0(\lambda_j) - H_0\lambda_j = 0, \qquad j = \overline{1,r},$$

$$F_{u_x}B_0(\lambda_0) + H_0\lambda_0 = 0,$$

где через B_0 обозначен оператор $D - T^{-1}(F_{u_1})$. Для дальнейших рассуждений удобно переписать эту цепочку в виде

$$B_0(\lambda_r) = 0, \tag{2.5}$$

$$T\left(B_0(\lambda_{j-1} - \lambda_j)\right) + L(\lambda_j) = 0, \qquad j = \overline{1, r}, \tag{2.6}$$

$$T\left(B_0(\lambda_0)\right) - L(\lambda_0) = 0. \tag{2.7}$$

Подействовав оператором $(D - b_{r-j+1})(D - b_{r-j}) \dots (D - b_1)$ на второе соотношение этой цепочки и учитывая (2.1), получаем

$$T\left(B_{r-j+1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)\right) + L_{r-j+1}\left(B_{r-j}(\lambda_j)\right) = 0, \qquad j = \overline{1, r},$$

где B_j заданы формулой (2.3). Из последнего соотношения видно, что если $B_{r-j}(\lambda_j) = 0$, то равно нулю и $B_{r-j+1}(\lambda_{j-1})$. Поскольку $B_0(\lambda_r) = 0$ в силу (2.5), мы таким образом получаем, что $B_{r-j}(\lambda_j) = 0$ для всех j от r до 0.

Применим теперь оператор $(D - b_r) \dots (D - b_1)$ к соотношению (2.7), а оператор $(D - b_{r-j}) \dots (D - b_1)$ — к соотношению (2.6) при $j < r$ (при $j = n$ просто перепишем (2.6) с учетом (2.5)). Поскольку из $B_{r-j}(\lambda_j) = 0$ следует

$$L_{r-j}\left(B_{r-j-1}(\lambda_j)\right) = (T - F_{u_x})\left(B_{r-j}(\lambda_j)\right) - H_{r-j}B_{r-j-1}(\lambda_j) = -H_{r-j}B_{r-j-1}(\lambda_j),$$

после введения обозначений $\Lambda_j = B_{r-j-1}(\lambda_j)$ при $j < r$ и $\Lambda_r = \lambda_r$ приходим в результате к цепочке соотношений

$$H_{r-j}\Lambda_j = T(\Lambda_{j-1}), \qquad j = \overline{1, r},$$

$$H_r\Lambda_0 = 0.$$

Она может выполняться только тогда, когда $H_m = 0$ при некотором $m \le r$ (поскольку в противном случае $\Lambda_j = 0$ для всех $j = \overline{0, r}$, что противоречит условию теоремы $\lambda_r \ne 0$). $\square$

Из только что доказанной теоремы и предложения 1 вытекает следующее

Следствие 3. *Пусть для уравнения* (1.4) *найдется оператор* $R = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k[u]T^k$, $\lambda_r \ne 0$, *такой что* $u_t = R(I)$ *является симметрией уравнения* (1.4) *для любого* $I \in \ker D$. *Тогда у этого уравнения имеется* x*-интеграл, и оно является интегрируемым по Дарбу.*

Заметим, что рассуждения, использованные для построения x-интеграла при доказательстве леммы 1, следствия 1 и предложения 1, дают нам x-интеграл без явной зависимости от дискретной переменной i. Поэтому наше предположение о независимости интегралов от переменной i при выполнении условий следствия 3 не является ограничительным.

3. Подстановки и интегралы

В этом разделе рассмотрим эволюционное уравнение в частных производных

$$u_t = f(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}), \tag{3.1}$$

а также цепочку дифференциально-разностных уравнений

$$u_t = g(x, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n). \tag{3.2}$$

Заметим, что уравнение вида $u_t = q[u]$ задает на функциях от динамических переменных дифференцирование ∂_q в силу этого уравнения, которое задается формулой $\partial_q(h[u]) = h_*(q)$, где через h_* обозначен оператор линеаризации

$$h_* = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial u_j} T^j + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial u^{(j)}} D^j.$$

Определение 3. *Будем говорить, что уравнение* (3.1) *допускает дифференциальную подстановку*

$$v = \phi(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)}) \tag{3.3}$$

в уравнение $v_t = \hat{f}(x, v, v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$, *если* $\phi_{u^{(m)}} \neq 0$, $m \geq 1$ *и выполняется соотношение*[1]

$$\partial_f(\phi) = \hat{f}(x, \phi, D(\phi), \dots, D^n(\phi)).$$

Если найдутся дифференциальные операторы

$$S = \sum_{j=0}^{\sigma} \mu_j(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) D^j, \qquad \hat{S} = \sum_{j=0}^{\sigma+m} \hat{\mu}_j(x, v, v^{(1)}, \dots, v^{(\hat{l})}) D^j,$$

такие что $\mu_\sigma \neq 0$, *и для любой зависящей от конечного числа аргументов функции* η *уравнение* $u_t = S(\eta(x, \phi, D(\phi), \dots))$ *допускает подстановку* (3.3) *в уравнение* $v_t = \hat{S}(\eta(x, v, v^{(1)}, \dots))$, *то будем называть* (3.3) *подстановкой типа Миуры.*

Определение 4. *Будем говорить, что уравнение* (3.2) *допускает разностную подстановку*

$$v = \phi(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_m) \tag{3.4}$$

в уравнение $v_t = \hat{g}(x, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$, *если функция* ϕ *зависит не менее чем от двух динамических переменных, и выполняется соотношение*

$$\partial_g(\phi) = \hat{g}(x, T^k(\phi), T^{k+1}(\phi), \dots, T^n(\phi)).$$

Будем называть (3.4) *подстановкой типа Миуры, если найдутся операторы*

$$R = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j(x, u_\varrho, u_{\varrho+1}, \dots, u_s) T^j, \qquad \hat{R} = \sum_{j=l}^{r+m} \hat{\lambda}_j(x, v_{\hat{\varrho}}, v_{\hat{\varrho}+1}, \dots, v_{\hat{s}}) T^j, \tag{3.5}$$

такие что $\lambda_r \neq 0$, *и для любой зависящей от конечного числа аргументов функции* η *и любого целого числа* δ *уравнение* $u_t = R(\eta(T^\delta(\phi), T^{\delta+1}(\phi), \dots))$ *допускает подстановку* (3.4) *в уравнение* $v_t = \hat{R}(\eta(v_\delta, v_{\delta+1}, \dots))$.

Примеры использования разностных подстановок, некоторые их свойства и способы построения можно найти например в [10–12].

Заметим, что в определениях 3 и 4 оператор D применяется к функциям, не зависящим от сдвигов u и v, а оператор T — к функциям, не зависящим от производных u и v. Поэтому в этих определениях никак не используется уравнение (1.1), задающее операторы D и T на полном наборе динамических переменных. Однако, как будет показано далее, интегралы уравнений вида (1.1) можно интерпретировать как подстановки для уравнений вида (3.1) и (3.2) — соответствующие рассуждения для уравнений вида (1.3) из работы [3] практически без изменений переносятся на случай дифференциально-разностных уравнений.

Действительно, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что дифференцирование ∂_f коммутирует с операторами D и T, если $u_t = f[u]$ является симметрией уравнения (1.1). Поэтому дифференцирование ∂_f переводит любой x- и i-интеграл уравнения (1.1) снова в некоторый x- и i-интеграл соответственно. С другой стороны, в работе [2] доказано, что для уравнения (1.1) с i-интегралом I минимального порядка (x-интегралом X минимального порядка) любой другой i-интеграл (x-интеграл) этого уравнения является

---

[1] Данное соотношение означает, что $v = \phi(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)})$ является решением уравнения $v_t = \hat{f}$ для любого решения уравнения (3.1).

функцией от I и конечного числа аргументов вида $T^j(I)$, $j \in \mathbb{Z}$ (функцией от переменной x, минимального интеграла X и конечного числа аргументов вида $D^j(X)$, $j \in \mathbb{N}$)[1]. Применяя это утверждение к интегралам $\partial_f(X)$ и $\partial_f(I)$, получаем, что для них найдутся функции $\hat{f}$ и $\hat{g}$, такие что

$$\partial_f(X) = \hat{f}(x, X, D(X), \ldots, D^n(X)), \qquad \partial_f(I) = \hat{g}(T^k(I), T^{k+1}(I), \ldots, T^n(I)).$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. *Пусть у уравнения* (1.1) *имеется симметрия вида* (3.1) *(вида* (3.2)*) и x-интегралы (i-интегралы). Обозначим x-интеграл (i-интеграл) минимального порядка через X (через I). Тогда уравнение* (3.1) *(уравнение* (3.2)*) связано подстановкой $v = X(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$ ($v = I(x, u_l, u_{l+1}, \ldots, u_m)$) с некоторым уравнением вида $v_t = \hat{f}(x, v, v^{(1)}, \ldots, v^{(n)})$ ($v_t = \hat{g}(v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$).*

Следствие 4. *Пусть уравнение* (1.1) *является интегрируемым по Дарбу, а X и I являются соответственно его x- и i-интегралами минимальных порядков. Тогда $v = X(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$ и $w = I(x, u_l, u_{l+1}, \ldots, u_m)$ являются постановками типа Миуры.*

Доказательство. Согласно [4], у любого интегрируемого по Дарбу уравнения вида (1.1) существуют операторы $S = \sum_{j=0}^{\sigma} \mu_j[u]D^j$ и $R = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j[u]T^j$, такие что $u_t = S(\Omega)$ и $u_t = R(\Theta)$ являются симметриями этого уравнения для любого x-интеграла Ω и любого i-интеграла Θ. В доказательстве теоремы 1 из работы [1] показано, что коэффициенты μ_j не могут зависеть от сдвигов u, а коэффициенты λ_j — от производных u. Учитывая, что любая функция вида $\eta(x, X, D(X), \ldots)$ является x-интегралом, а любая функция вида $\xi(T^\delta(I), T^{\delta+1}(I), \ldots)$ — i-интегралом, в силу теоремы 2 получаем, что любые уравнения вида

$$u_t = S(\eta(x, X, D(X), \ldots)), \qquad u_t = R(\xi(T^\delta(I), T^{\delta+1}(I), \ldots))$$

допускают подстановки $v = X(x, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(m)})$ и $w = I(x, u_l, u_{l+1}, \ldots, u_m)$ соответственно. □

Теорема 3. *Уравнение* (3.2) *допускает подстановку $v = I(x, u, u_1)$ в уравнение вида $v_t = \hat{g}(v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$ тогда и только тогда, когда* (3.2) *является симметрией уравнения*

$$(u_1)_x = -\frac{I_u}{I_{u_1}} u_x - \frac{I_x}{I_{u_1}}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что I является i-интегралом минимального порядка для уравнения (3.6). Поэтому если (3.2) является симметрией этого уравнения, то $v = I(x, u, u_1)$ является подстановкой в силу теоремы 2.

Обратно, если $v = I(x, u, u_1)$ является подстановкой, то

$$I_{u_1} T(g) + I_u g = \hat{g}(T^k(I), T^{k+1}(I), \ldots, T^n(I))$$

по определению подстановки. Как нетрудно убедиться прямым вычислением, в случае уравнения (3.6) для заданного формулой (1.6) оператора L верна формула $L = I_{u_1}^{-1} D(I_{u_1} T + I_u)$, и потому $L(g) = I_{u_1}^{-1} D(\hat{g}) = 0$. □

Аналогичным образом можно доказать, что (3.1) допускает подстановку $v = \phi(x, u, u_x)$ тогда и только тогда, когда (3.1) является симметрией уравнения (1.5). Ранее в работе [13] также было доказано, что (3.1) допускает подстановку $v = \phi(x, u, u_x)$ тогда и только тогда, когда (3.1) является симметрией уравнения $u_{xy} = -\phi_u u_x / \phi_{u_x}$. Теорему 3 можно считать

[1] В работе [2] данное утверждение сформулировано для интегралов с явной зависимостью от дискретной переменной i. Однако нетрудно проверить, что его доказательство без труда переносится на случай интегралов без явной зависимости от i при условии, что интеграл минимального порядка выбирается также среди интегралов без явной зависимости от i.

разностным аналогом этого утверждения. Заметим, что отсутствие явной зависимости от x в уравнении $v_t = \hat{g}(v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ является существенным для этой теоремы.

Следствия 3 и 4 вместе с теоремой 3 дают нам

Следствие 5. *Формула $v = I(u, u_1)$ задает постановку типа Миуры, у которой коэффициенты $\hat{\lambda}_j$ соответствующего оператора $\hat{R}$ из формулы* (3.5) *не зависят от x, тогда и только тогда, когда уравнение $(u_1)_x = -\frac{I_u}{I_{u_1}} u_x$ является интегрируемым по Дарбу.*

Таким образом, классификация интегрируемых по Дарбу уравнений вида (1.4) заодно дает нам полное описание разностных подстановок $v = I(u, u_1)$ типа Миуры для уравнений (3.2) с независящей от x правой частью, а для классификации интегрируемых по Дарбу уравнений (1.5) можно воспользоваться ранее полученными результатами классификации дифференциальных подстановок типа Миуры.

4. Интегрируемые по Дарбу уравнения с интегралами первого порядка

Теорема 4. *Уравнение* (1.5) *является интегрируемым по Дарбу тогда и только тогда, когда заменой переменных $\tilde{u} = c(x, u)$ оно связано с уравнением*

$$\tilde{\phi}(x, \tilde{u}_1, (\tilde{u}_1)_x) = \tilde{\phi}(x, \tilde{u}, \tilde{u}_x), \tag{4.1}$$

где $\tilde{\phi}(x, \tilde{u}, \tilde{u}_x)$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{u}_x = \alpha(x, \tilde{\phi})\tilde{u}^2 + \beta(x, \tilde{\phi})\tilde{u} + \gamma(x, \tilde{\phi}). \tag{4.2}$$

При любых функциях α, β и γ

$$I = \frac{(\tilde{u}_2 - \tilde{u})(\tilde{u}_3 - \tilde{u}_1)}{(\tilde{u}_3 - \tilde{u})(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)}$$

является i-интегралом уравнения (4.1).

Доказательство. Если уравнение (1.5) является интегрируемым по Дарбу, то $v = \phi(x, u, u_x)$ в силу следствия 4 является подстановкой типа Миуры. Но в [7] было доказано, что любая подстановка типа Миуры указанного вида является композицией точечного преобразования $\tilde{u} = c(x, u)$ и подстановки $v = \tilde{\phi}(x, \tilde{u}, \tilde{u}_x)$, где $\tilde{\phi}$ находится из соотношения (4.2). Применяя T^j к обеим частям этого соотношения и учитывая (4.1), получаем

$$(\tilde{u}_j)_x = \alpha(x, \tilde{\phi})\tilde{u}_j^2 + \beta(x, \tilde{\phi})\tilde{u}_j + \gamma(x, \tilde{\phi}).$$

Поэтому для любых целых k и n верна формула

$$D(\tilde{u}_k - \tilde{u}_n) = \alpha(\tilde{u}_k^2 - \tilde{u}_n^2) + \beta(\tilde{u}_k - \tilde{u}_n) = (\alpha(\tilde{u}_k + \tilde{u}_n) + \beta)(\tilde{u}_k - \tilde{u}_n).$$

Пользуясь этой формулой, получаем

$$D(I) = (\alpha(\tilde{u} + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3) + 2\beta) I - (\alpha(\tilde{u} + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3) + 2\beta) I = 0.$$

Таким образом, условие (4.2) не только необходимо, но и достаточно для интегрируемости по Дарбу уравнения (4.1). □

Классификация уравнений вида (1.4) также опирается на работу [7] — нижеприведенные рассуждения почти дословно повторяют рассуждения из указанной работы.

Лемма 3. *Уравнение* (1.4) *является интегрируемым по Дарбу тогда и только тогда, когда найдется функция $G(u)$, такая что*

$$X = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2 + G(u)\left(u^{(1)}\right)^2 \tag{4.3}$$

является x-интегралом этого уравнения.

Доказательство. Обозначим x-интеграл минимального порядка уравнения (1.4) через Q, а его порядок — через n. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что $u_t = \Omega u_x$ является симметрией уравнения (1.4) для любого x-интеграла Ω. Поэтому дифференцирование ∂_f, где $f = \Omega u_x$, коммутирует с оператором T, и $\partial_f(Q) = Q_*(f)$ тоже является x-интегралом. Таким образом получаем, что оператор $Q_* \circ u_x = \sum_{j=0}^n z_j D^j$, где

$$z_j = \sum_{k=j}^{n} C_k^j Q_{u^{(k)}} u^{(k+1-j)}, \tag{4.4}$$

переводит любой x-интеграл снова в x-интеграл. А это возможно лишь в том случае, когда все коэффициенты z_j этого оператора лежат в ядре оператора $T-1$.

Пусть $n > 1$. Тогда согласно [2] мы можем выбрать интеграл Q так, что он зависит линейно от $u^{(n)}$. С учетом формулы (4.4), это означает, что порядок z_n меньше n и, следовательно, z_n не может быть интегралом и является функцией, зависящей лишь от x. Так как мы можем умножать Q на произвольные ненулевые функции от x, без нарушения общности можно считать $z_n = u_x Q_{u^{(n)}} = 1$. Отсюда следует, что $Q_{u^{(k)}}$ не зависит от $u^{(n)}$ при $k = \overline{2, n}$, и, в силу формулы (4.4), z_j также не зависит от $u^{(n)}$ при $j = \overline{2, n}$. Последнее означает, что $z_j = \xi_j(x)$ при $j > 1$. Выражая теперь $Q_{u^{(j)}}$ из (4.4), получаем

$$Q_{u^{(j)}} = \left(\xi_j(x) - \sum_{k=j+1}^{n} C_k^j Q_{u^{(k)}} u^{(k+1-j)}\right) u_x^{-1}\,, \qquad 1 < j < n. \tag{4.5}$$

Учитывая $Q_{u^{(n)}} = u_x^{-1}$ и последовательно выражая $Q_{u^{(n-1)}}, Q_{u^{(n-2)}}, \ldots$ с помощью формулы (4.5), получаем что $Q_{u^{(j)}}$ не зависит от $u^{(l)}$ для всех $l > n-j+1$ и $j > 1$.

Докажем теперь, что $n \le 3$. Для этого предположим противное и рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного $n > 3$.

Пусть $n = 2m$ и $m > 1$. В этом случае формула (4.5) дает нам

$$\begin{aligned}
Q_{u^{(m+1)}} &= -C_n^{m+1} u^{(m)} u_x^{-2} + g(x, u, u_x, \ldots, u^{(m-1)}),\\
Q_{u^{(m)}} &= -C_n^{m} u^{(m+1)} u_x^{-2} + h(x, u, u_x, \ldots, u^{(m)}),\\
Q_{u^{(m)}u^{(m+1)}} &= -C_n^{m+1} u_x^{-2} = -C_n^{m} u_x^{-2}.
\end{aligned}$$

Но нетрудно проверить, что равенство $C_n^{m+1} = C_n^m$ может выполняться лишь при нечетных n.

Аналогично, при $n = 2m-1$ и $m > 2$ имеем

$$\begin{aligned}
Q_{u^{(m+1)}} &= -C_n^{m+1} u^{(m-1)} u_x^{-2} + g(x, u, u_x, \ldots, u^{(m-2)}),\\
Q_{u^{(m-1)}} &= -C_n^{m-1} u^{(m+1)} u_x^{-2} + h(x, u, u_x, \ldots, u^{(m)}),\\
Q_{u^{(m-1)}u^{(m+1)}} &= -C_n^{m+1} u_x^{-2} = -C_n^{m-1} u_x^{-2}\,,
\end{aligned}$$

в то время как $C_n^{m+1} = C_n^{m-1}$ верно лишь при четных n.

Таким образом $n \le 3$, и для завершения доказательства нам осталось рассмотреть по отдельности случаи $n = 1, 2$ и 3.

При $n = 3$, как показано выше, $Q = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} + g(x, u, u^{(1)}, u^{(2)})$. С учетом этого формулы для коэффициентов z_j оператора $Q_* \circ u^{(1)}$ приобретают вид

$$z_0 = D(Q) - g_x,$$

$$z_1 = 2\frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} + 2u^{(2)} g_{u^{(2)}} + u^{(1)} g_{u^{(1)}},$$

$$z_2 = 3\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} + u^{(1)} g_{u^{(2)}}.$$

Соотношение $z_2 = \xi(x)$ дает нам

$$g = -\frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2 + \xi\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} + h(x,u,u^{(1)}).$$

Подставляя найденное g в выражение для z_1 и z_0, получаем

$$z_1 = 2Q - 2h + u^{(1)}h_{u^{(1)}} - \xi\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} \quad \Rightarrow \quad (T-1)\left(2h - u^{(1)}h_{u^{(1)}} + \xi\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \xi = 0, \quad 2h - u^{(1)}h_{u^{(1)}} = \eta(x);$$

$$z_0 = D(Q) - h_x \quad \Rightarrow \quad (T-1)(h_x) = 0 \quad \Rightarrow h_x = \zeta'(x) \ \Rightarrow \ h = \zeta(x) + \hat{h}(u,u^{(1)}).$$

В итоге приходим к уравнению $u^{(1)}\hat{h}_{u^{(1)}} = 2\hat{h} + 2\zeta(x) + \eta(x)$, из которого следует $2\zeta(x) + \eta(x) = c$, $\hat{h} = G(u)\left(u^{(1)}\right)^2 - c/2$. Таким образом, при $n = 3$ уравнение (1.4) должно допускать интеграл вида (4.3).

При $n = 2$ аналогичные рассуждения дают нам, что среди интегралов минимального порядка должен иметься интеграл $Q = \frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} + C(u)u^{(1)}$. Но тогда $D(Q) - Q^2/2$ имеет вид (4.3).

Если же x-интеграл имеет первый порядок, то согласно [4] инвариант Лапласа $H_0 = a_u u_x + aT^{-1}(a_{u_1}u_x)$ уравнения (1.4) должен равняться нулю. Применяя T^{-1} к обеим частям (1.4), получаем $T^{-1}(u_x) = u_x/T^{-1}(a)$. С учетом этого

$$H_0 = u_x\left(a_u + aT^{-1}\left(\frac{a_{u_1}}{a}\right)\right) = 0.$$

Дифференцируя последнее соотношение по u_{-1}, получаем $(\ln(a))_{u_1 u} = 0$ и, следовательно, $a = \xi(u_1)\eta(u)$. Подставляя это в выражение для H_0, получаем

$$\eta'(u)\xi(u) + \eta(u)\xi'(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi(u) = \frac{c}{\eta(u)}, \quad a = c\frac{\eta(u)}{\eta(u_1)}.$$

Таким образом, для любого уравнения (1.4), допускающего x-интеграл первого порядка, выполняется соотношение $D(\zeta(u_1) - c\zeta(u)) = 0$, где $\zeta'(u) = \eta(u)$. Но в этом случае (1.4) допускает интеграл

$$X = \frac{D^3(\zeta(u))}{D(\zeta(u))} - \frac{3}{2}\left(\frac{D^2(\zeta(u))}{D(\zeta(u))}\right)^2,$$

который, как нетрудно проверить, имеет вид (4.3). □

Теорема 5. *Уравнение* $(\tilde{u}_1)_x = \tilde{a}(\tilde{u},\tilde{u}_1)\,\tilde{u}_x$ *интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда оно получается заменой переменных* $\tilde{u} = \xi(u)$ *из уравнения вида*

$$(u_1)_x = -\frac{I_u(u,u_1)}{I_{u_1}(u,u_1)}\,u_x,$$

где для I *найдутся функции* α, β *и* γ, *такие что*

$$u_1 = \alpha(I) + \frac{\beta(I)}{\gamma(I) - u}, \quad \beta \neq 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. В силу леммы 3, уравнение $(\tilde{u}_1)_x = \tilde{a}(\tilde{u},\tilde{u}_1)\,\tilde{u}_x$ интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда оно допускает x-интеграл вида

$$\tilde{X} = \frac{\tilde{u}^{(3)}}{\tilde{u}^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tilde{u}^{(2)}}{\tilde{u}^{(1)}}\right)^2 + G(\tilde{u})\left(\tilde{u}^{(1)}\right)^2.$$

При замене переменных $\tilde{u} = \xi(u)$, этот интеграл переходит в интеграл

$$X = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2 + \left(\frac{\xi'''(u)}{\xi'(u)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\xi''(u)}{\xi'(u)}\right)^2 + G(\xi(u))(\xi'(u))^2\right)\left(u^{(1)}\right)^2,$$

и мы можем выбрать ξ так, чтобы коэффициент при $(u^{(1)})^2$ был равен нулю. Получающееся при замене переменных $\tilde{u} = \xi(u)$ уравнение $(u_1)_x = a(u, u_1)\, u_x$ при таком выборе ξ будет допускать x-интеграл

$$X = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2. \tag{4.7}$$

Обозначим i-интеграл этого уравнения через $I(u, u_1)$. Поскольку I, u и u_1 функционально зависимы, мы можем выразить u_1 как $u_1 = \theta(u, I)$. Последовательно дифференцируя это выражение, получаем

$$D(u_1) = \theta_u u^{(1)}, \qquad D^2(u_1) = \theta_{uu}\left(u^{(1)}\right)^2 + \theta_u u^{(2)},$$
$$D^3(u_1) = \theta_{uuu}\left(u^{(1)}\right)^3 + 3\theta_{uu} u^{(1)} u^{(2)} + \theta_u u^{(3)}.$$

Из этих формул и формулы (4.7) следует, что

$$T(X) = X + \left(\frac{\theta_{uuu}}{\theta_u} - \frac{3}{2}\left(\frac{\theta_{uu}}{\theta_u}\right)^2\right)\left(u^{(1)}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\theta_{uu}}{\theta_u}\right)_u = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{uu}}{\theta_u}\right)^2.$$

Решение последнего уравнения дает нам формулу (4.6). □

5. Уравнения с интегралами второго порядка, допускающие неточечные обратимые преобразования

Пусть уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$\varphi(x, u_1, (u_1)_x) = \psi(x, u, u_x), \tag{5.1}$$

где функции $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ удовлетворяют условию $\varphi_y\psi_z - \varphi_z\psi_y \neq 0$. Тогда мы можем переписать (5.1) в виде системы

$$v = \varphi(x, u, u_x), \quad v_1 = \psi(x, u, u_x), \tag{5.2}$$

выразить из этой системы u, u_x через v, v_1 и получить

$$u = p(x, v, v_1), \quad u_x = q(x, v, v_1). \tag{5.3}$$

Система (5.3) эквивалентна уравнению

$$D(p(x, v, v_1)) = q(x, v, v_1), \quad p_u q_{u_1} - q_u p_{u_1} \neq 0. \tag{5.4}$$

Таким образом, подстановка $v = \varphi(x, u, u_x)$ отображает решения уравнения (5.1) в решения (5.4), а преобразование $u = p(x, v, v_1)$ отображает решения уравнения (5.4) обратно в решения (5.1). Вышеописанные преобразования были предложены в работе [10], а в работе [14] было показано, что уравнения (1.1), допускающие обратимые неточечные преобразования, исчерпываются уравнениями вида (5.1) и (5.4).

Лемма 4. *Интегрируемое по Дарбу уравнение вида* (5.1), *допускающее x-интеграл второго порядка, композицией преобразования $v = \varphi(x, u, u_x)$ и точечной замены переменных $\hat{v} = \hat{c}(x, v)$ приводится к интегрируемому по Дарбу уравнению вида*

$$(\hat{v}_1)_x + g(x, \hat{v}_1) = \hat{v}_x + g(x, \hat{v}). \tag{5.5}$$

Доказательство. Обозначим x-интеграл уравнения (5.1) через $X(x, u, u^{(1)}, u^{(2)})$. Перепишем этот интеграл в виде $X = \phi(x, u, \varphi(x, u, u_x), D(\varphi(x, u, u_x)))$. Поскольку $T(\phi(x, u, \varphi, D(\varphi)) = \phi(x, u_1, \psi, D(\psi))$, соотношение $T(\phi) = \phi$ может выполняться лишь тогда, когда ϕ не зависит от своего второго аргумента ($\phi_u = 0$). Выразив $(v_1)_x$ (то есть $D(\psi)$) из (5.4), получим выражение

$$(v_1)_x = a(x, v, v_1)v_x + b(x, v, v_1). \tag{5.6}$$

С его учетом формула $T(\phi) = \phi$ приобретает вид

$$\phi(x, \psi, a(x, \varphi, \psi)D(\varphi) + b(x, \varphi, \psi)) = \phi(x, \varphi, D(\varphi)).$$

Поскольку функции x, φ, ψ, $D(\varphi)$ являются функционально независимыми, последнее соотношение выполняется только тогда, когда

$$\phi(x, v_1, a(x, v, v_1)v_x + b(x, v, v_1)) = \phi(x, v, v_x) \tag{5.7}$$

выполняется тождественно для произвольных x, v, v_1, v_x, то есть когда $\phi(x, v, v_x)$ является x-интегралом уравнения (5.4).

Аналогично, воспользовавшись формулой (5.3) и подставив $p(x, \varphi, T(\varphi))$ вместо u в i-интеграл $I(x, u, u_1, \ldots, u_m)$ уравнения (5.1), получим $I(x, p, p_1, \ldots, p_m)$, где $p_j = p(x, T^j(\varphi), T^{j+1}(\varphi))$. В силу (5.4) будет верна формула

$$D(I) = I_x + \sum_{j=0}^{m} I_{p_j}\, q(x, T^j(\varphi), T^{j+1}(\varphi)) = 0. \tag{5.8}$$

Мы можем записать ψ в виде $\eta(x, u, \varphi)$, причем η обязательно должна зависеть своего второго аргумента в силу функциональной независимости x, φ и ψ. Поэтому $T^2(\varphi) = T(\psi) = \eta(x, u_1, \psi)$ зависит от u_1, а $T^j(\varphi)$ при $j > 1$ — от u_{j-1}. Таким образом, x, φ, $T(\varphi)$, $\ldots$, $T^{m+1}(\varphi)$ являются функционально независимыми, и (5.8) может выполняться только тогда, когда соотношение

$$I_x(x, p(x, v, v_1), p(x, v_1, v_2), \ldots, p(x, v_m, v_{m+1}))+$$
$$+\sum_{j=0}^{m} I_{p_j}(x, p(x, v, v_1), \ldots, p(x, v_m, v_{m+1}))\, q(x, v_j, v_{j+1}) = 0$$

выполняется тождественно для любых x, v, v_1, $\ldots$, v_{m+1}. А это означает, что $I(x, p(x, v, v_1), \ldots, p(x, v_m, v_{m+1}))$ является i-интегралом уравнения (5.4). Таким образом, уравнение (5.4) является интегрируемым по Дарбу.

Нетрудно видеть, что $a \neq 0$, так как в случае $a = 0$ соотношение (5.7) не может быть выполнено. Дифференцируя (5.7) по v_1, получаем

$$T(\phi_v) + (a_{v_1} v_x + b_{v_1}) T(\phi_{v_x}) = 0.$$

Применяя к обеим частям последней формулы T^{-1}, приходим к соотношению

$$\phi_v + \left(T^{-1}\left(\frac{a_{v_1}}{a}\right) v_x + T^{-1}\left(b_{v_1} - a_{v_1}\frac{b}{a}\right)\right)\phi_{v_x} = 0.$$

Поскольку ϕ не зависит от v_{-1} и v_1, то коэффициент при ϕ_{u_x} в последнем уравнении может зависеть только от x, v, v_x, и решение этого уравнения имеет вид $\phi = \theta(x, \xi(x, v)v_x + \mu(x, v))$. Таким образом, в качестве x-интеграла уравнения (5.4) можно выбрать $\xi(x, v)v_x + \mu(x, v)$, и, следовательно, само уравнение имеет вид

$$\xi(x, v_1)(v_1)_x + \mu(x, v_1) = \xi(x, v)v_x + \mu(x, v).$$

Заменой переменных $\hat{v} = \hat{c}(x, v)$, где $\hat{c}_v(x, v) = \xi(x, v)$, последнее уравнение приводится к виду (5.5). □

В силу следствия 4 уравнение (5.5) является интегрируемым по Дарбу только тогда, когда $w = \hat{v}_x + g(x, \hat{v})$ является подстановкой типа Миуры. Но в работе [7] доказано, что любую такую подстановку можно представить в виде композиции точечной замены переменных вида $\tilde{v} = \lambda(x)\hat{v} + \eta(x)$, $\tilde{x} = \tau(x)$ и одной из следующих подстановок $w = \tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}^2$, $w = \tilde{v}_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}}$, $w = \tilde{v}_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}} + e^{-\tilde{v}}$ или $w = \tilde{v}_{\tilde{x}}$. Таким образом, интегрируемое по Дарбу уравнение вида (5.1), допускающее x-интеграл второго порядка, композицией преобразования $v = \varphi(x, u, u_x)$ и точечной замены переменных $\tilde{v} = c(x, v)$, $\tilde{x} = \tau(x)$ приводится к одному из следующих уравнений

$$(\tilde{v}_1)_{\tilde{x}} + \tilde{v}_1^2 = \tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}^2, \tag{5.9}$$

$$(\tilde{v}_1)_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}_1} = \tilde{v}_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}}, \tag{5.10}$$

$$(\tilde{v}_1)_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}_1} + e^{-\tilde{v}_1} = \tilde{v}_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}} + e^{-\tilde{v}} \tag{5.11}$$

(случай уравнения $(\tilde{v}_1)_{\tilde{x}} = \tilde{v}_{\tilde{x}}$ не реализуется, так как при преобразовании (5.2) невозможно получить уравнение вида (5.4) с $q = 0$). Поэтому выполнив обратное преобразование $\tilde{u} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}$ вышеприведенных уравнений (все они имеют вид $D(\tilde{p}(x, \tilde{v}, \tilde{v}_1)) = \tilde{q}(x, \tilde{v}, \tilde{v}_1)$ с $\tilde{p} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}$), мы можем "восстановить" из уравнений (5.9) – (5.11) полный список интегрируемых по Дарбу уравнений (5.1) с x-интегралами второго порядка[1]. Остается лишь показать, что при выполнении использованной нами последовательности преобразований (композиции преобразования $v = \varphi(x, u, u_x)$ для (5.1), точечной замены $\tilde{v} = c(x, v)$, $\tilde{x} = \tau(x)$ для (5.4) и обратного преобразования $\tilde{u} = \tilde{p}(x, \tilde{v}, \tilde{v}_1)$), мы получим уравнение, связанное с (5.1) точечной заменой переменных.

Очевидно, что композиция точечной замены переменных $\tilde{v} = c(x, v)$, переводящий уравнение (5.4) в уравнение $D(\tilde{p}(x, \tilde{v}, \tilde{v}_1)) = \tilde{q}(x, \tilde{v}, \tilde{v}_1)$, и обратимого преобразования $\tilde{u} = \tilde{p}(x, \tilde{v}, \tilde{v}_1)$ является обратимым преобразованием. Но в [14] доказано, что любое обратимое преобразование вида $\tilde{u} = f(x, v, v_1)$ уравнения (5.4) является композицией преобразования $u = p(x, v, v_1)$ (переводящего (5.4) в (5.1)) и точечной замены $\tilde{u} = \zeta(x, u)$ в уравнении (5.1). Также непосредственной проверкой можно убедиться, что если в обоих связанных преобразованиями (5.2) – (5.3) уравнениях (5.1) и (5.4) одновременно сделать одну и ту же замену $\tilde{x} = \tau(x)$, то получившаяся в результате пара уравнений тоже будет связана соответствующими им преобразованиями (5.2) – (5.3). Таким образом, использованная нами последовательность преобразований эквивалентна точечной замене переменных $\tilde{u} = \zeta(x, u)$, $\tilde{x} = \tau(x)$ в уравнении (5.1). "Подправив" результат этой последовательности преобразований подходящей точечной заменой (то есть используя вместо $\tilde{u} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}$ преобразование $\tilde{u} = \ln(\tilde{v}_1 - \tilde{v})$ для уравнения (5.9), $\tilde{u} = \ln(e^{\tilde{v}_1 - \tilde{v}} - 1)$ — для (5.10) и $\tilde{u} = e^{\tilde{v}_1 - \tilde{v}}$ — для (5.11)), приходим к следующему утверждению:

Теорема 6. *С точностью до замен переменных вида $\tilde{u} = \zeta(x, u)$, $\tilde{x} = \tau(x)$ интегрируемые по Дарбу уравнения* (5.1)*, допускающие x-интеграл второго порядка, исчерпываются следующими уравнениями (они перечислены вместе с их x- и i-интегралами):*

$$(u_1 - u)_x = e^{u_1} + e^u, \quad X = 2u_{xx} - u_x^2 - e^{2u}, \quad I = (1 + e^{u_1 - u_2})(1 + e^{u_1 - u});$$

$$(u_1)_x = (e^{u_1} + 1)u_x, \quad X = \frac{u_{xx}}{u_x} - u_x, \quad I = e^u + e^{u - u_1};$$

$$T(\varphi) = u\varphi, \quad X = \frac{1 + D(\varphi)}{\varphi} + \varphi, \quad I = \frac{(u_1 u - 1)(u_2 u_1 - 1)}{(u_1 - 1)(u_2 u_1 u - 1)},$$

где φ является решением уравнения

$$u\varphi^2 + \frac{u_x}{u - 1}\varphi - 1 = 0.$$

Первое из перечисленных в теореме уравнений было получено в работе [4], второе — является частным случаем найденного в работе [14] уравнения

$$(w_1)_x = w_1 w_x \sqrt{\frac{\delta w_1^2 + \varepsilon w_1 + \delta}{\delta w^2 + \varepsilon w + \delta}} \tag{5.12}$$

(при $\varepsilon = -2\delta$ связано с (5.12) точечной заменой $u = \ln(w - 1)$). Третье из уравнений вероятно является новым.

Лемма 5. *Интегрируемое по Дарбу уравнение* (1.9)*, допускающее i-интеграл $\Omega(u, u_1, u_2)$, композицией преобразования $\tilde{v} = p(u, u_1)$ и точечной замены переменных $v = c(\tilde{v})$ приводится к уравнению вида*

$$(v_1)_x = \frac{\lambda v_1 + \mu}{v(v - \lambda)}\, v_x, \tag{5.13}$$

[1] Кроме того, в работе [5] для уравнений (5.9) – (5.11) указаны i-интегралы. Это позволяет при преобразовании этих уравнений пересчитать интегралы в новых переменных и сразу же найти их для преобразованных уравнений.

где λ и μ — константы, удовлетворяющие условию $|\lambda| + |\mu| \neq 0$.

Заметим, что уравнение (5.13) является просто другой формой записи уравнения (5.12), так как (5.12) при $\delta = \lambda^2$ и $\varepsilon = 2\lambda^2 + 4\mu$ связано с (5.13) заменой переменных $w = (\lambda v + \mu)/(v^2 - \lambda v)$.

Доказательство. Повторяя рассуждения, аналогичные использованным в доказательстве леммы 4, получаем, что уравнение (1.9) переводится преобразованием $\tilde{v} = p(u, u_1)$ в интегрируемое по Дарбу уравнение, допускающее i-интеграл первого порядка $\tilde{I}(\tilde{v}, \tilde{v}_1)$. Поэтому преобразованное уравнение имеет вид $(\tilde{v}_1)_x = a(\tilde{v}, \tilde{v}_1)\tilde{v}_x$ и, по теореме 5, связано точечной заменой $v = c(\tilde{v})$ с уравнением $(v_1)_x = -\frac{I_v}{I_{v_1}} v_x$, где $I(v, v_1)$ находится из соотношения (4.6).

Но, с другой стороны, результат преобразования $v = c(p(u, u_1))$ должен иметь вид $\varphi(v_1, (v_1)_x) = \psi(v, v_x)$, и при записи этого уравнения в виде (1.1) его правая часть $F(v, v_1, v_x)$ должна удовлетворять условию $(F_v/F_{v_x})_{v_1} = 0$. Для интересующего нас уравнения это условие записывается как $(\ln(I_v/I_{v_1}))_{vv_1} = 0$. Перепишем это условие в терминах функции $\theta(v, z)$, связанной с интегралом I соотношением $v_1 = \theta(v, I)$. Дифференцирование последнего соотношения по v и v_1 дает нам $I_v = -\theta_v/\theta_z$ и $I_{v_1} = \theta_z^{-1}$ соответственно. Поэтому

$$\left(\ln\left(\frac{I_v}{I_{v_1}}\right)\right)_{vv_1} = (\ln(\theta_v))_{vv_1} = \left(\frac{\theta_{vv} + \theta_{vz} I_v}{\theta_v}\right)_{v_1} = \left(\frac{\theta_{vv}}{\theta_v} - \frac{\theta_{zv}}{\theta_z}\right)_z I_{v_1} = 0.$$

Таким образом θ должна удовлетворять соотношению $\left(\ln\left(\frac{\theta_v}{\theta_z}\right)\right)_{vz} = 0$. Подставляя в него правую часть формулы (4.6) вместо θ, получаем

$$(\alpha''\beta' - \alpha'\beta'')(\gamma - v)^2 + 2\beta(\alpha'\gamma'' - \alpha''\gamma')(\gamma - v) + \beta(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' - 2\alpha'(\gamma')^2) = 0.$$

Это равенство может выполняться в одном следующих трех случаях:
1) $\alpha' \neq 0$, $\beta' = \lambda\alpha'$, $\gamma' = 0$;
2) $\alpha' = 0$, $\beta' \neq 0$, $\gamma' = \tilde{\lambda}\beta'$;
3) $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$.

Найдя I из соотношения (4.6) в каждом их этих случаев, мы можем выписать соответствующие им уравнения $(v_1)_x = -\frac{I_v}{I_{v_1}} v_x$. Подходящими сдвигами и растяжениями переменной v мы уберем в них лишние константы и получим следующий список уравнений:

$$(v_1)_x = \frac{\lambda v_1 + \mu}{v(v - \lambda)} v_x, \ |\lambda| + |\mu| \neq 0; \qquad (v_1)_x = \frac{(\tilde{\lambda} v_1 - 1) v_1}{v - \tilde{\mu}} v_x; \qquad (v_1)_x = v_1^2 v_x.$$

Первое уравнение при $\lambda = 0$, $\mu = 1$ заменой переменных $v \to v^{-1}$ переводится в третье уравнение, а при $\lambda \neq 0$ — во второе уравнение с $\tilde{\lambda} = -\mu/\lambda$ и $\tilde{\mu} = \lambda^{-1}$. Поэтому третье уравнение мы можем исключить из дальнейшего рассмотрения, а для второго рассматривать лишь случай $\tilde{\mu} = 0$. Подставив $\tilde{\lambda}^{-1} + (v - \tilde{\lambda})^{-1}$ во второе уравнение вместо v, мы при $\tilde{\mu} = 0$ и $\tilde{\lambda} \neq 0$ придем к уравнению (5.13) с $\mu = 0$ и $\lambda = \tilde{\lambda}$ (случай же $\tilde{\mu} = \tilde{\lambda} = 0$ не реализуется, так как соответствующее уравнение не допускает преобразований (5.2) – (5.3)). □

Используя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 6, из леммы 5 получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Любое интегрируемое по Дарбу уравнение* (1.9), *допускающее i-интеграл вида $\Omega(u, u_1, u_2)$, точечной заменой переменных $\tilde{u} = \zeta(u)$ связано с уравнением*

$$(\tilde{u}_1 - \tilde{u})_x = \pm\sqrt{\delta e^{2\tilde{u}_1} + \varepsilon e^{\tilde{u}_1 + \tilde{u}} + \delta e^{2\tilde{u}}}, \tag{5.14}$$

где константы δ и ε удовлетворяют условию $|\delta| + |\varepsilon| \neq 0$.

Уравнение (5.14) ранее было получено в работе [5], в которой было показано, что оно является интегрируемым по Дарбу при любых значениях констант δ и ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старцев С.Я. *Необходимые условия интегрируемости по Дарбу для дифференциально-разностных уравнений специального вида* // Уфимск. матем. журн. 2011, T. 3. № 1. С. 80—84.
2. Habibullin I.T., Zheltukhina N., Sakieva A. *On Darboux-integrable semi-discrete chains* // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. V. 43. 434017(14pp).
3. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые уравнения лиувиллевского типа* // УМН. 2001. Т. 56. № 1(337). С. 63–106.
4. Адлер В.Е., Старцев С.Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. 1999. Т. 121, № 2, С. 271–285.
5. Habibullin I.T., Zheltukhina N., Pekcan A. *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. 2009. V. 50. № 10. Paper 102710, 23 pages.
6. Garifullin R.N., Yamilov R.I. *Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters* // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. V. 45. 345205(23pp).
7. Старцев С.Я. *О дифференциальных подстановках типа преобразования Миуры* // ТМФ. 1998. Т. 116. № 3. С. 336–348.
8. Sokolov V. V., Zhiber A. V. *On the Darboux integrable hyperbolic equations* // Physic Letters A. 1995. V. 208. P. 303–308.
9. I.M. Anderson, M. Juras. *Generalized Laplace invariants and the method of Darboux* // Duke Math. J. 1997. V. 89. № 2. P. 351–375.
10. Ямилов Р.И. *Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Беклунда* // ТМФ. 1990. Т. 85. № 3. С. 368–375.
11. Yamilov R.I., *Construction scheme for discrete Miura transformation* // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. P. 6839–6851.
12. Yamilov R.I., *Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. R541–R623.
13. Соколов В.В. *О симметриях эволюционных уравнений* // УМН. 1988. Т. 43, № 5, С. 133–163.
14. Startsev S. Ya. *On non-point invertible transformations of difference and differential-difference equations* // SIGMA. 2010. V. 6. Paper 092 (14 pages).

Сергей Яковлевич Старцев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: startsev@anrb.ru

ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 177-183.

УДК 517.929

EXAMPLES OF DARBOUX INTEGRABLE DISCRETE EQUATIONS POSSESSING FIRST INTEGRALS OF AN ARBITRARILY HIGH MINIMAL ORDER

R.N. GARIFULLIN, R.I. YAMILOV

Abstract. We consider a discrete equation, defined on the two-dimensional square lattice, which is linearizable, namely, of the Burgers type and depends on a parameter α. For any natural number N we choose α so that the equation becomes Darboux integrable and the minimal orders of its first integrals in both directions are greater or equal than N.

Keywords: discrete equation, Darboux integrability, first integral.

1. Introduction

In the discrete case Darboux integrable equations with first integrals of low orders are well-known. The existence for such equations of first integrals with arbitrarily high minimal orders was an open problem up to now. In this paper we give a positive answer to this question.

The most general form of the discrete Burgers equation introduced in [1] reads:

$$\begin{aligned}(u_{n+1,m+1}-\beta_{n+1,m})(\alpha_{n,m}u_{n,m}+\gamma_{n,m})u_{n,m+1}=(u_{n,m+1}-\beta_{n,m})\\ *(\alpha_{n+1,m}u_{n+1,m}+\gamma_{n+1,m})u_{n,m},\quad \alpha_{n,m},\beta_{n,m},\gamma_{n,m}\neq 0.\end{aligned} \tag{1}$$

Here n, m are arbitrary integers, $\alpha_{n,m}, \beta_{n,m}, \gamma_{n,m}$ are known complex parameters, while $u_{n,m}$ is an unknown complex-valued function. Eq. (1) can be obtained by the discrete Hopf-Cole transform (see e.g. [2])

$$u_{n,m}=\frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}} \tag{2}$$

from the following non-autonomous linear equation:

$$v_{n+1,m+1}=\alpha_{n,m}v_{n+1,m}+\beta_{n,m}v_{n,m+1}+\gamma_{n,m}v_{n,m}. \tag{3}$$

In the completely autonomous case, the discrete Burgers equation (1) can be rewritten in the form:

$$\begin{aligned}(u_{n+1,m+1}-\beta)(u_{n,m}+\gamma)u_{n,m+1}\\ =(u_{n,m+1}-\beta)(u_{n+1,m}+\gamma)u_{n,m}.\end{aligned} \tag{4}$$

This equation was known [3] earlier than (1). It has been noticed in [4] that there is one more autonomous particular case of eq. (1), namely, the equation

$$\begin{aligned}(u_{n+1,m+1}-\beta)(u_{n,m}+\gamma)u_{n,m+1}\\ =\alpha(u_{n,m+1}-\beta)(u_{n+1,m}+\gamma)u_{n,m}\end{aligned} \tag{5}$$

R.N. Garifullin and R.I. Yamilov, Examples of Darboux Integrable Discrete Equations Possessing First Integrals of an Arbitrarily High Minimal Order.

© R.N. Garifullin and R.I. Yamilov 2012.

This work has been supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant numbers: 10-01-00088-a, 11-01-97005-r-povolzhie-a, 12-01-31208-mol-a) and by Federal Task Program (agreement 8499).

Поступила 12 июля 2012 г.

generalizing (4). Unlike eq. (4), the last equation (5) is related by (2) to a non-autonomous linear equation.

In this paper we consider the particular case $\beta = \gamma$ of eq. (5) which can be expressed in the following form after a rescale:

$$(u_{n+1,m+1} + 1)(u_{n,m} - 1)u_{n,m+1} = \alpha(u_{n,m+1} + 1)(u_{n+1,m} - 1)u_{n,m}. \tag{6}$$

Here $\alpha \neq 0$ is a complex parameter. A particular case of the linear equation (3) corresponding to eq. (6) is:

$$v_{n+1,m+1} + v_{n,m+1} = \alpha^n(v_{n+1,m} - v_{n,m}). \tag{7}$$

Our aim is to show that there exist equations of the form (6) possessing first integrals of an arbitrarily high minimal order.

Discrete equations of the form

$$u_{n+1,m+1} = f(u_{n,m}, u_{n+1,m}, u_{n,m+1}), \tag{8}$$

defined on the two-dimensional square lattice, are analogues of the hyperbolic equations

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \tag{9}$$

There is an example similar to eq. (6) in the class (9), see [5] and a discussion at the very end of the present paper.

2. Definitions

An equation of the form (8) is Darboux integrable if it has two first integrals W_1, W_2:

$$(T_1 - 1)W_2 = 0, \quad W_2 = w^{(2)}_{n,m}(u_{n,m+l_2}, u_{n,m+l_2+1}, \dots, u_{n,m+k_2}), \tag{10}$$

$$(T_2 - 1)W_1 = 0, \quad W_1 = w^{(1)}_{n,m}(u_{n+l_1,m}, u_{n+l_1+1,m}, \dots, u_{n+k_1,m}). \tag{11}$$

Here l_1, l_2, k_1, k_2 are integers, such that $l_1 < k_1,\ l_2 < k_2$, and T_1, T_2 are operators of the shift in the first and second directions, respectively: $T_1 h_{n,m} = h_{n+1,m}$, $T_2 h_{n,m} = h_{n,m+1}$. We suppose that the relations (10,11) are satisfied identically on the solutions of the corresponding equation (8). The form of W_1, W_2 given in (10,11) is the most general possible form. The functions $u_{n+i,m+j}$, with $i, j \neq 0$, are expressed in terms of $u_{n+i,m},\ u_{n,m+j}$ by using eq. (8). The dependence of W_1 on $u_{n,m+j}, j \neq 0$, and of W_2 on $u_{n+i,m}, i \neq 0$, is impossible. We will call W_1 the first integral in the first (or n) direction, and W_2 will be called the first integral in the second (or m) direction.

It is obvious that for any first integrals W_1, W_2, arbitrary functions Ω_1, Ω_2 of the form

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \Omega_1(W_1, T_1^{\pm 1}W_1, \dots, T_1^{\pm j_1}W_1), \\ \Omega_2 &= \Omega_2(W_2, T_2^{\pm 1}W_2, \dots, T_2^{\pm j_2}W_2) \end{aligned} \tag{12}$$

are also the first integrals. In particular, using the shifts, we can rewrite the first integrals W_1, W_2 of (10, 11) as:

$$\begin{aligned} W_1 &= w^{(1)}_{n,m}(u_{n,m}, u_{n+1,m}, \dots, u_{n+k,m}), \quad k \geq 1, \\ W_2 &= w^{(2)}_{n,m}(u_{n,m}, u_{n,m+1}, \dots, u_{n,m+l}), \quad l \geq 1. \end{aligned} \tag{13}$$

We assume here that $\frac{\partial W_1}{\partial u_{n,m}} \neq 0, \frac{\partial W_1}{\partial u_{n+k,m}} \neq 0, \frac{\partial W_2}{\partial u_{n,m}} \neq 0, \frac{\partial W_2}{\partial u_{n,m+l}} \neq 0$ for at least some n, m. The numbers k, l are called the orders of these first integrals W_1, W_2, respectively:

$$\operatorname{ord} W_1 = k, \qquad \operatorname{ord} W_2 = l.$$

It is clear due to (12) that the orders of first integrals of a given equation are unbounded above. We are going to construct such examples for which the minimal (or lowest) orders of their first integrals may be arbitrarily high.

3. Transition to the linear equation (7)

In spite of the fact that the transform (2) is not invertible, sometimes such transformations allow one to rewrite conservation laws and generalized symmetries from one equation to another, see e.g. [6] for the discrete-differential case. We are going to transfer first integrals from (6) to (7) and backward and to reduce in this way the problem to the case of the linear equation (7).

Here we present four lemmas on the transfer of first integrals from (6) to (7) and backwards together with the corresponding explicit formulae. More precisely, we discuss some relations between the first integrals (13) of eq. (6) and first integrals $\hat{W}_1, \hat{W}_2$ of eq. (7):

$$\begin{aligned} \hat{W}_1 &= \hat{w}^{(1)}_{n,m}(v_{n,m}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+\hat{k},m}), \quad \hat{k} \geq 1, \\ \hat{W}_2 &= \hat{w}^{(2)}_{n,m}(v_{n,m}, v_{n,m+1}, \dots, v_{n,m+\hat{l}}), \quad \hat{l} \geq 1. \end{aligned} \tag{14}$$

Lemma 1. *If eq. (6) possesses a first integral W_1 of an order k, then eq. (7) has a first integral $\hat{W}_1$ of the order $\hat{k} = k+1$.*

Proof. Using the transform (2), we obtain

$$\hat{W}_1 = w^{(1)}_{n,m}\left(\frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}}, \frac{v_{n+2,m}}{v_{n+1,m}}, \dots, \frac{v_{n+k+1,m}}{v_{n+k,m}}\right).$$

It is clear that $\frac{\partial \hat{W}_1}{\partial v_{n,m}} \neq 0, \frac{\partial \hat{W}_1}{\partial v_{n+k+1,m}} \neq 0$ for at least some n, m, and therefore $\hat{W}_1$ is nontrivial (i.e. cannot depend on n, m only) but also it has the order $k+1$. Due to (12) this order may become not minimal.

Lemma 2. *If eq. (6) possesses a first integral W_2 of an order l, then eq. (7) has a first integral $\hat{W}_2$ of an order $\hat{l}$, such that $1 \leqslant \hat{l} \leqslant l$.*

Proof. The transform (2) leads us to:

$$\hat{W}_2 = w^{(2)}_{n,m}\left(\frac{v_{n+1,m}}{v_{n,m}}, \frac{v_{n+1,m+1}}{v_{n,m+1}}, \dots, \frac{v_{n+1,m+l}}{v_{n,m+l}}\right).$$

By induction on l we can prove that

$$v_{n+1,m+l} = \alpha^{nl} v_{n+1,m} - v_{n,m+l} + V_{n,l}(v_{n,m}, v_{n,m+1}, \dots, v_{n,m+l-1}).$$

It is clear that

$$\frac{\partial \hat{W}_2}{\partial v_{n,m+l}} = \frac{\partial w^{(2)}_{n,m}}{\partial u_{n,m+l}} \frac{\partial}{\partial v_{n,m+l}} \left(\frac{\alpha^{nl} v_{n+1,m} - v_{n,m+l} + \dots}{v_{n,m+l}}\right) \neq 0$$

for some n, m, and therefore $\hat{W}_2$ is nontrivial. Its order is not greater than l.

Lemma 3. *If eq. (7) has a first integral $\hat{W}_1$ of an order $\hat{k}$, and $\hat{W}_1$ is linear w.r.t. $v_{n,m}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+\hat{k},m}$, then eq. (6) possesses a first integral W_1 of the order $k = \hat{k}$.*

Proof. Using the transform (2) and the property (12), we obtain the relations

$$\begin{aligned} W_1 = \frac{T_1 \hat{W}_1}{\hat{W}_1} &= \frac{a_{0,n+1,m} v_{n+1,m} + a_{1,n+1,m} v_{n+2,m} + \dots + a_{\hat{k},n+1,m} v_{n+\hat{k}+1,m}}{a_{0,n,m} v_{n,m} + a_{1,n,m} v_{n+1,m} + \dots + a_{\hat{k},n,m} v_{n+\hat{k},m}} \\ &= \frac{a_{0,n+1,m} v_{n+1,m}/v_{n,m} + a_{1,n+1,m} v_{n+2,m}/v_{n,m} + \dots + a_{\hat{k},n+1,m} v_{n+\hat{k}+1,m}/v_{n,m}}{a_{0,n,m} + a_{1,n,m} v_{n+1,m}/v_{n,m} + \dots + a_{\hat{k},n,m} v_{n+\hat{k},m}/v_{n,m}} \\ &= \frac{a_{0,n+1,m} u_{n,m} + \dots + a_{\hat{k},n+1,m} u_{n+\hat{k},m} u_{n+\hat{k}-1,m} \cdots u_{n,m}}{a_{0,n,m} + \dots + a_{\hat{k},n,m} u_{n+\hat{k}-1,m} u_{n+\hat{k}-2,m} \cdots u_{n,m}}. \end{aligned} \tag{15}$$

One can readily verify that $\frac{\partial W_1}{\partial u_{n,m}} \neq 0, \frac{\partial W_1}{\partial u_{n+\hat{k},m}} \neq 0$ for at least some values of n, m.

Lemma 4. *If eq.* (7) *has a first integral* $\hat{W}_2$ *of an order* $\hat{l}$, *and* $\hat{W}_2$ *is linear w.r.t.* $v_{n,m}, v_{n,m+1}, \ldots, v_{n,m+\hat{l}}$, *then eq.* (6) *possesses a first integral* W_2 *of the order* $l = \hat{l} + 1$.

Proof. By using the property (12) we obtain

$$\begin{aligned} W_2 = \frac{T_2 \hat{W}_2}{\hat{W}_2} &= \frac{b_{0,n,m+1} v_{n,m+1} + b_{1,n,m+1} v_{n,m+2} + \ldots + b_{\hat{l},n,m+1} v_{n,m+1+\hat{l}}}{b_{0,n,m} v_{n,m} + b_{1,n,m} v_{n,m+1} + \ldots + b_{\hat{l},n,m} v_{n,m+\hat{l}}} \\ = \frac{b_{0,n,m+1} v_{n,m+1}/v_{n,m} + b_{1,n,m+1} v_{n,m+2}/v_{n,m} + \ldots + b_{\hat{l},n,m+1} v_{n,m+1+\hat{l}}/v_{n,m}}{b_{0,n,m} + b_{1,n,m} v_{n,m+1}/v_{n,m} + \ldots + b_{\hat{l},n,m} v_{n,m+\hat{l}}/v_{n,m}} \\ = \frac{b_{0,n,m+1} Z_{n,m} + \ldots + b_{\hat{l},n,m+1} Z_{n,m+\hat{l}} Z_{n,m+\hat{l}-1} \ldots Z_{n,m}}{b_{0,n,m} + \ldots + b_{\hat{l},n,m} Z_{n,m+\hat{l}-1} Z_{n,m+\hat{l}-2} \ldots Z_{n,m}}. \end{aligned} \tag{16}$$

It follows from eqs. (2) and (7) that

$$Z_{n,m} = \frac{v_{n,m+1}}{v_{n,m}} = \alpha^n \frac{u_{n,m} - 1}{u_{n,m+1} + 1}.$$

4. First integrals of the linear equation (7)

We will use some necessary conditions of the Darboux integrability derived for the discrete case in [7]. Those conditions were formulated there for autonomous equations of the form (8). We can reformulate and prove those conditions for the case of the non-autonomous linear equation (7).

We can rewrite eq. (7) in the form

$$(T_2 - \alpha^n)(T_1 + 1) v_{n,m} + 2\alpha^n v_{n,m} = 0. \tag{17}$$

By using the discrete Laplace transformation [7]

$$v_{n,m,j} = (T_1 + \alpha^{j-1}) v_{n,m,j-1}, \quad j \geq 1, \qquad v_{n,m,0} = v_{n,m}, \tag{18}$$

we can introduce a sequence of unknown functions $v_{n,m,j}$ satisfying the equations

$$(T_2 - \alpha^{n+j})(T_1 + \alpha^j) v_{n,m,j} + \alpha^{n+j}(1 + \alpha^j) v_{n,m,j} = 0. \tag{19}$$

The last relations are proved by induction on j. One of the necessary conditions is formulated in terms of functions $K_{n,j}$:

$$K_{n,j} = \alpha^{n+j}(1 + \alpha^j), \quad j \geq 1, \qquad K_{n,0} = 2\alpha^n.$$

The following theorem has been taken from [7].

Theorem 1. *If eq.* (17) *possesses a first integral* $\hat{W}_1$ *of an order* $\hat{k}$, *then there exists* $\tilde{k}$, $0 \leqslant \tilde{k} < \hat{k}$, *such that* $K_{n,\tilde{k}} = 0$.

In a similar way, we can rewrite eq. (7) in the form

$$(T_1 + 1)(T_2 - \alpha^{n-1}) v_{n,m} + \alpha^{n-1}(1 + \alpha) v_{n,m} = 0. \tag{20}$$

Using the second discrete Laplace transformation

$$\check{v}_{n,m,j} = (T_2 - \alpha^{n-j}) \check{v}_{n,m,j-1}, \quad j \geq 1, \qquad \check{v}_{n,m,0} = v_{n,m}, \tag{21}$$

we can define a sequence of unknown functions $\check{v}_{n,m,j}$ which satisfy the equations

$$(T_1 + 1)(T_2 - \alpha^{n-j-1}) \check{v}_{n,m,j} + \alpha^{n-j-1}(1 + \alpha^{j+1}) \check{v}_{n,m,j} = 0. \tag{22}$$

The last relations are proved by induction on j. The second of the necessary conditions is formulated in terms of functions $H_{n,j}$:

$$H_{n,j} = \alpha^{n-j-1}(1+\alpha^{j+1}), \quad j \geq 0.$$

The following theorem has been taken from [7].

Theorem 2. *If eq.* (20) *possesses a first integral $\hat{W}_2$ of an order $\hat{l}$, then there exists $\tilde{l}$, $0 \leqslant \tilde{l} < \hat{l}$, such that $H_{n,\tilde{l}} = 0$.*

Let α_N be a root of -1, such that:

$$\alpha_N^N = -1, \qquad \alpha_N^j \neq -1, \quad 1 \leqslant j < N. \tag{23}$$

For any $N \geq 1$, such a root always exists, for example, $\alpha_N = \exp(i\pi/N)$. Let us now consider eq. (7) with $\alpha = \alpha_N$. It follows from Theorems 1 and 2 for this equation that the orders of its any first integrals in the first and second directions must be such that:

$$\operatorname{ord} \hat{W}_1 \geq N+1, \qquad \operatorname{ord} \hat{W}_2 \geq N. \tag{24}$$

On the other hand, we can construct first integrals for eq. (7) with $\alpha = \alpha_N$ of such orders in an explicit form. Eqs. (19) and (22) with $j = N$ and $j = N-1$, respectively, take the form:

$$\begin{gathered}(T_2 + \alpha_N^n)(T_1 - 1)v_{n,m,N} = 0,\\ (T_1 + 1)(T_2 + \alpha_N^n)\check{v}_{n,m,N-1} = 0.\end{gathered} \tag{25}$$

So we can find first integrals for these equations (25) in the first and second directions, respectively:

$$\begin{gathered}\hat{W}_1 = (-1)^m \alpha_N^{-nm}(T_1 - 1)v_{n,m,N},\\ \hat{W}_2 = (-1)^n (T_2 + \alpha_N^n)\check{v}_{n,m,N-1}.\end{gathered} \tag{26}$$

By using the Laplace transformations (18) and (21), we obtain first integrals for eq. (7) in the following explicit form:

$$\begin{aligned}\hat{W}_1 &= (-1)^m \alpha_N^{-nm}(T_1 - 1)(T_1 + \alpha_N^{N-1})(T_1 + \alpha_N^{N-2})\dots(T_1 + 1)v_{n,m},\\ \hat{W}_2 &= (-1)^n (T_2 + \alpha_N^n)(T_2 - \alpha_N^{n-N+1})(T_2 - \alpha_N^{n-N+2})\dots(T_2 - \alpha_N^{n-1})v_{n,m}.\end{aligned} \tag{27}$$

We can see that both these first integrals are nontrivial, $\hat{W}_1$ is expressed in terms of $v_{n,m}, v_{n+1,m}, \dots, v_{n+N+1,m}$, while $\hat{W}_2$ is expressed in terms of $v_{n,m}, v_{n,m+1}, \dots, v_{n,m+N}$. Both $\hat{W}_1$ and $\hat{W}_2$ are linear w.r.t. $v_{n,m}$ and its shifts. We derive that

$$\operatorname{ord} \hat{W}_1 = N+1, \qquad \operatorname{ord} \hat{W}_2 = N \tag{28}$$

and that these orders are minimal, taking into account the property (24).

For example, if $N = 1$, then $\alpha_N = -1$, and we have first integrals of the minimal orders:

$$\hat{W}_1 = (-1)^{(1-n)m}(v_{n+2,m} - v_{n,m}), \qquad \hat{W}_2 = (-1)^n v_{n,m+1} + v_{n,m}.$$

If $N = 2$, then $\alpha_N = \pm i$, and the first integrals read:

$$\begin{aligned}\hat{W}_1 &= (-1)^m \alpha_N^{-nm}(v_{n+3,m} - v_{n+1,m} + \alpha_N(v_{n+2,m} - v_{n,m})),\\ \hat{W}_2 &= (-1)^n (v_{n,m+2} + \alpha_N^{n-1}(\alpha_N - 1)v_{n,m+1} - \alpha_N^{2n-1}v_{n,m}).\end{aligned}$$

5. First integrals of eq. (6)

We consider here the equation (6) with $\alpha = \alpha_N$, where α_N is defined by (23). Using Lemmas 3 and 4 together with the formulae (15) and (16), we construct first integrals W_1 and W_2 for eq. (6), starting from the first integrals (27). Their orders are:

$$\operatorname{ord} W_1 = \operatorname{ord} W_2 = N + 1. \tag{29}$$

From Lemmas 1 and 2 and the relations (28) it follows that the minimal orders of first integrals of eq. (6) in both directions must be greater than or equal to N. We are led to the following theorem:

Theorem 3. *Eq.* (6) *with* $\alpha = \alpha_N$ *is Darboux integrable. The minimal orders of its first integrals in both directions must be equal to* N *or* $N + 1$.

It follows from this theorem that there exist Darboux integrable discrete equations among equations of the form (6), such that the minimal orders of their first integrals in both directions are arbitrarily high.

For eq. (6) with $\alpha = \alpha_1 = -1$, we obtain the following first integrals:

$$W_1 = (-1)^{-m} \frac{u_{n,m}(u_{n+2,m}u_{n+1,m} - 1)}{u_{n+1,m}u_{n,m} - 1}, \quad W_2 = (-1)^n \frac{(u_{n,m+1} + u_{n,m+2})(u_{n,m} - 1)}{(u_{n,m} + u_{n,m+1})(u_{n,m+2} + 1)}.$$

In the case when $\alpha = \alpha_2 = \pm i$, the first integrals read:

$$W_1 = (\alpha_2)^{-m} \frac{u_{n,m}(u_{n+3,m}u_{n+2,m}u_{n+1,m} + \alpha_2 u_{n+2,m}u_{n+1,m} - u_{n+1,m} - \alpha_2)}{u_{n+2,m}u_{n+1,m}u_{n,m} + \alpha_2 u_{n+1,m}u_{n,m} - u_{n,m} - \alpha_2},$$

$$W_2 = (\alpha_2)^n \frac{(u_{n,m} - 1)(\alpha_2(u_{n,m+3} + u_{n,m+2})(u_{n,m+1} - 1) - (u_{n,m+3} + 1)(u_{n,m+2} + u_{n,m+1})}{(1 + u_{n,m+3})(\alpha_2(u_{n,m+2} + u_{n,m+1})(u_{n,m} - 1) - (u_{n,m+2} + 1)(u_{n,m+1} + u_{n,m}))}.$$

In the paper [4] a method is presented which uses the so-called annihilation operators [8] and which allows one to construct first integrals of low orders and to show that those orders are minimal. By using this method we have checked that four first integrals given just above have the minimal orders. We believe that all first integrals of eq. (6) with $\alpha = \alpha_N$ which can be constructed by the scheme presented in this paper have the minimal orders.

As it has been said above, there is a hyperbolic equation [5] of the form (9), namely,

$$u_{xy} = \frac{2N}{x + y}\sqrt{u_x u_y} \tag{30}$$

which is analogues to eq. (6) with $\alpha = \alpha_N$ in the sense that the minimal orders of first integrals of such equations (30) may be arbitrarily high. Unlike eq. (30), which is symmetric under the involution $x \leftrightarrow y$, the discrete equation (6) is not symmetric under $n \leftrightarrow m$, and its first integrals in different directions have quite different forms. The second difference is that eq. (6) is of the Burgers type with linearizing transformation (2), while linearizing transformation for eq. (30) has the form

$$v = \sqrt{u_y},$$

where $v(x, y)$ is a solution of a hyperbolic linear equation.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Ramani, N. Joshi, B. Grammaticos and T. Tamizhmani *Deconstructing an integrable lattice equation* // J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) P. L145–L149.
2. D. Levi, O. Ragnisco and M. Bruschi *Continuous and discrete matrix Burgers' hierarchies* // Il Nuovo Cimento B **74**:1 (1983) P. 33–51.
3. J. Hietarinta *A new two-dimensional lattice model that is 'consistent around a cube'* // J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) P. L67–L73.
4. R.N. Garifullin and R.I. Yamilov *Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters* // J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 345205 (23pp).
5. A.V. Zhiber and V.V. Sokolov *Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type* // Uspekhi Mat. Nauk **56**:1 (2001) P. 63–106 (in Russian); English transl. in Russian Math. Surveys **56**:1 (2001) P. 61–101.
6. R. Yamilov *Symmetries as integrability criteria for differential difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) P. R541–R623.
7. V.E. Adler and S.Ya. Startsev *Discrete analogues of the Liouville equation* // Teoret. Mat. Fiz. **121**:2 (1999) P. 271–284 (in Russian); English transl. in Theor. Math. Phys. **121**:2 (1999) P. 1484–1495.
8. I.T. Habibullin *Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations.* SIGMA **1** (2005) 023, 9pp.

Rustem Nailevich Garifullin,
Ufa Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences,
112 Chernyshevsky Street,
Ufa 450008, Russian Federation
`http://matem.anrb.ru/garifullinrn`
E-mail: `rustem@matem.anrb.ru`

Ravil Islamovich Yamilov,
Ufa Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences,
112 Chernyshevsky Street,
Ufa 450008, Russian Federation
`http://matem.anrb.ru/en/yamilovri`
E-mail: `RvlYamilov@matem.anrb.ru`

ABSTRACTS

R.A. Atnagulova, I.Z. Golubchik

New solutions of Yang-Baxter Equation with the square

Abstract. The paper is devoted to the Yang-Baxter equation with the square, that is, to the equation

$$R([R(a),b]-[R(b),a]) = R^2([a,b]) + [R(a),R(b)],$$

where $a, b \in g$, g - is a Lie algebra, and R is a linear operator on the vector space g. Two series of operators R, satisfying this equation are constructed. In the construction we use Lie subalgebras in the matrix algebra, complementary to the subspace of matrices with zero last row.

Keywords: The Yang-Baxter equation with the square, integrable differential equations, complementary subalgebras in the algebra of Laurent series.

A.V. Zhiber, R.D. Murtazina, I.T. Habibullin, A.B. Shabat

Characteristic Lie rings and integrable models in mathematical physics

Abstract. Review is devoted to a systematic exposition of the algebraic approach to the study of nonlinear integrable partial differential equations and their discrete analogues, based on the concept of the characteristic vector field. A special attention is paid to the Darboux integrable equations. The problem of constructing higher symmetries of the equations, as well as their particular and general solutions is discussed. In particular, it is shown that the partial differential equation of hyperbolic type is integrated in quadratures if and only if its characteristic Lie rings in both directions are of finite dimension. For the hyperbolic type equations integrable by the inverse scattering method, the characteristic rings are of minimal growth. The possible applications of the concept of characteristic Lie rings to the systems of differential equations of hyperbolic type with more than two characteristic directions, to the equations of evolution type, and to ordinary differential equations are discussed.
Keywords: characteristic vector field, symmetry, Darboux integrability.

M.N. Kuznetsova

Nonlinear hyperbolic differential equations related
with the Klein-Gordon equation by differential substitutions

Abstract. We present a complete classification of nonlinear hyperbolic differential equations in two independent variables $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$ reduced to the Klein-Gordon equation $v_{xy} = F(v)$ by differential substitutions of the special form $v = \varphi(u, u_x)$.
Keywords: nonlinear hyperbolic equations, differential substitutions, the Klein-Gordon equation.

A.G. Meshkov, V.V. Sokolov

Integrable evolution equations with the constant separant

Abstract. The survey contains results of classification for integrable one-field evolution equations of orders 2, 3 and 5 with the constant separant. The classification is based on neccesary integrability conditions that follow from the existence of the formal recursion operator for integrable equations. Recursion formulas for the whole infinite sequence of these conditions are presented for the first time. The most of the classification statements can be found in papers by S.I. Svinilupov and V.V. Sokolov but the proofs never been published before. The result concerning the fifth order equations is stronger then obtained before.

Keywords: evolution differential equation, integrability, higher symmetry, conservation law, classification

A.U. Sakieva

Characteristic Lie ring of the Zhiber-Shabat-Tzitzeica equation

Abstract. A complete description of the characteristic Lie ring for the Zhiber-Shabat-Tzitzeica equation is given. For the linear space of multiple commutators of arbitrary order a basis is constructed. It is proved that the characteristic Lie ring is a ring of slow growth.

Keywords: Lie ring, nonlinear hyperbolic equation, integral, vector field.

S.Ya. Startsev

Darboux integrable differential-difference equations admitting a firts-order integral

Abstract. We obtain a classification of Liouville-type differential-difference equations that admit a first-order integral with respect to one of the characteristics. This classification gives us the complete description of difference substitutions which are applicable to wide classes of differential-difference evolution equations. The classification also allows us to construct the complete list of Darboux integrable differential-difference equations which admit both a second-order integral with respect to one of the characteristics and a non-point invertible transformation with respect to the same characteristic.

Keywords: Darboux integrability, differential-difference equations, difference substititions.

R.N. Garifullin and R.I. Yamilov

Examples of Darboux Integrable Discrete Equations Possessing First Integrals of an Arbitrarily High Minimal Order

Abstract. We consider a discrete equation, defined on the two-dimensional square lattice, which is linearizable, namely, of the Burgers type and depends on a parameter α. For any natural number N we choose α so that the equation becomes Darboux integrable and the minimal orders of its first integrals in both directions are greater or equal than N.

Keywords: discrete equation, Darboux integrability, first integral.

CONTENTS

Игорь Федорович Красичков-Терновский
(13.02.1935 – 08.03.2012)

8 марта 2012 года в Уфе ушел из жизни после продолжительной болезни видный советский и российский математик, доктор физико-математических наук, член-корреспондент Академии наук Республики Башкортостан Игорь Федорович Красичков-Терновский.

Являясь одним из ведущих специалистов мирового уровня в различных областях теории функций, он сыграл и громадную роль в становлении этих направлений комплексного анализа в Уфе. Это был ученый, абсолютно преданный математике. Им опубликовано около 70 научных статей, многие из которых имели и, несомненно, будут иметь значительное влияние на исследования математиков России и зарубежья. Среди его учеников более десятка кандидатов наук и три доктора наук. Горечь и сожаление вызывает то, что многое из задуманного Игорем Федоровичем осталось нереализованным.

Красичков-Терновский Игорь Фёдорович родился 13 февраля 1935 года в Москве. После окончания в 1959 г. механико-математического факультета Московского государственного университета работал редактором в реферативном журнале ВИНИТИ "Математика а в 1965 -73 гг., прекрасно владея несколькими европейскими языками, главным библиографом по математике во Всесоюзной библиотеке иностранной литературы. В этот период, в 1966 г., после обучения в аспирантуре в 1963 - 65 гг., им защищена кандидатская диссертация в Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР, докторскую - там же (1974). Мнс ВИНИТИ (1959 - 1963); аспирант (1963 -1965); снс БФАН СССР (1973 - 1975).

С 1973 г. он в Уфе по приглашению чл.-корр. АН СССР Алексея Федоровича Леонтьева, сыгравшего существенную роль в выборе области исследований Игоря Федоровича. Уже через год после приезда в Уфу он успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в том же Математическом институте им. В.А. Стеклова АН СССР. В 1973 - 82 гг. работает старшим научным сотрудником Отдела физики и математики Башкирского филиала АН СССР и параллельно заведующим кафедрой прикладной математики и теории надежности Уфимского авиационного института им. С. Орджоникидзе; профессор с 1981 г. Некоторое время он - профессор Московского государственного педагогического института им. В.И. Ленина (1982 - 87 гг.), после чего возвращается в Уфу и ведет интенсивную научно-исследовательскую деятельность как главный научный сотрудник Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра РАН. С 1993 г. - член-корреспондент Академии наук Республики Башкортостан.

К первым, но уже глубоким результатам И.Ф. Красичкова-Терновского можно отнести полученные им весьма общие принципы исследования полноты параметризованных систем функций в пространствах голоморфных функций одной переменной, проведенные им еще до середины 1960-х годов [37]–[38].

Дальнейшие его программные исследования посвящены в основном задаче спектрального синтеза в инвариантных относительно дифференцирования подпространствах голоморфных функций в областях комплексной плоскости. Уже в начале 1970 годов в этом направлении им установлены фундаментальные результаты о допустимости спектрального синтеза для пространства решений одного уравнения свертки в выпуклой области, о допустимости спектрального синтеза для инвариантных пространств в неограниченных выпуклых областях, а также о невозможности этого, вообще говоря, в ограниченной области.

Этот цикл работ [27]–[29] по существу ответил на ряд принципиальных вопросов, поставленных такими классиками, как Л. Шварц, А. Картан и др. Более того, он во многом послужил стимулирующим фактором для целого шквала работ, связанного со смежными вопросами, как-то: существования методов аппроксимации, фундаментального принципа для инвариантных подпространств аналитических функций, аналитического продолжения для подпространств, допускающих спектральный синтез (см. [6]–[8], [25]–[26], [3] и др.). В наиболее авторитетной директории российских математиков http://www.mathnet.ru во многом благодаря этим работам Игорь Федорович неоднократно входил в 40, а иногда и в десятку наиболее цитируемых российских авторов.

Многочисленные работы И.Ф. Красичкова-Терновского зачастую имеют форму циклов из нескольких, объединенных одной тематикой, статей ярко выраженного законченного характера в рамках изначальных постановок (см. [6]–[8], [9]–[12], [16]–[18], [19]–[20], [23]–[24], [27]–[29], [33]–[35], [37]–[38]). Особо следует отметить постоянно и успешно используемый им двойственный подход, красной нитью пронизывающий все основные работы И.Ф. Красичкова-Терновского и позволяющий четко расчленить аналитические и алгебраические аспекты рассматриваемых проблем. Так, в серии работ начала 1960-х, 1970-х гг. и далее И.Ф. Красичкову-Терновскому удалось получить критерий допустимости локального описания замкнутых идеалов и подмодулей в самых общих пространствах голоморфных функций (см. [4], [13], [19]–[20], [30]–[32]), что, как частный случай, охватывает как задачи спектрального синтеза, так и ряд других — полнота систем функций, различные вопросы теории аппроксимации и др. Более того, эти методы ему удалось перенести на векторные функции [19]–[20] и на функции многих комплексных переменных [3], [5].

Работы его по взаимосвязи спектрального синтеза и аналитического продолжения подытожены в обширном обзоре 2003 года [5] на эту тему в "Успехах математических наук". Кроме того, И.Ф. Красичков-Терновский не раз обращался в ряде статей к теории роста целых и субгармонических функций [21], [23]–[24], [33]–[35], [36], вопросам полноты систем экспонент [1], [14], [15].

Высокая продуктивность и широкий кругозор в сочетании с качественностью и отточенностью результатов были и останутся отличительной особенностью научной математической деятельности И.Ф. Красичкова-Терновского.

Хабибуллин Б.Н.

Основные работы
Красичкова-Терновского Игоря Федоровича

[1] Красичков-Терновский И. Ф., Шилова Г. Н. *Абсолютная полнота систем экспонент на выпуклых компактах* // Матем. сб. 2005. Т. 96, № 12. С. 85–98.

[2] Красичков-Терновский И. Ф. *Аппроксимационная теорема для однородного уравнения векторной свертки* // Матем. сб. 2004. Т. 195, № 9. С. 37–56.

[3] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез и аналитическое продолжение* // УМН. 2003. Т. 58, № 1. С. 33–112.

[4] Красичков-Терновский И. Ф., Шишкин А. Б. *Локальное описание замкнутых подмодулей в специальном модуле целых функций экспоненциального типа* // Матем. сб. 2001. Т. 192, № 11. С. 35–54.

[5] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез и локальное описание для многих переменных* // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63, № 4. С. 101–130.

[6] Красичков-Терновский И. Ф. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. III* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 10. С. 25–68.

[7] Красичков-Терновский И. Ф. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. II* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 6. С. 57–98.

[8] Красичков-Терновский И. Ф. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств аналитических функций. I* // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 2. С. 25–56.

[9] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. IV. Синтез* // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 23–46.

[10] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. III. Обильные подмодули* // Матем. сб. 1992. Т. 183, № 6. С. 55–86.

[11] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. II. Метод модулей* // Матем. сб. Т. 183, № 1. С. 3–19.

[12] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез в комплексной области для дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. I. Теорема двойственности* // Матем. сб. 1991. Т. 182, № 11. С. 1559–1587.

[13] Красичков-Терновский И. Ф. *Абстрактные приемы локального описания замкнутых подмодулей аналитических функций* // Матем. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1640–1658.

[14] Красичков-Терновский И. Ф. *Интерпретация теоремы Берлинга–Мальявена о радиусе полноты* // Матем. сб. 1989. Т. 180, № 3. С. 397–423.

[15] Красичков-Терновский И. Ф. *Об абсолютной полноте систем экспонент на отрезке* // Матем. сб. 1986. Т. 131(173), № 3(11). С. 309–322.

[16] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез на системах выпуклых областей. Распространение синтеза* // Матем. сб. 1980. Т. 112(154), № 1(5). С. 94–114.

[17] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез на системах неограниченных выпуклых областей* // Матем. сб. 1980. Т. 111(153), № 3. С. 384–401.

[18] Красичков-Терновский И. Ф. *Спектральный синтез аналитических функций на системах выпуклых областей* // Матем. сб. 1980. Т. 111(153), № 1. № 3–41.

[19] Красичков-Терновский И. Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. II* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, № 2. С. 309–341.

[20] Красичков-Терновский И. Ф. *Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43, № 1. С. 44–66.

[21] Красичков-Терновский И. Ф. *Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона* // Матем. заметки. 1978. Т. 24, № 4. С. 531–546.

[22] Красичков-Терновский И. Ф. *Локальное описание замкнутых подмодулей и проблема сверхнасыщенности* // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1978. Т. 81. С. 133–136.

[23] Красичков-Терновский И. Ф. *Оценки для субгармонической разности субгармонических функций. II* // Матем. сб. 1977. Т. 103(145), № 1(5). С. 69–111.

[24] Красичков-Терновский И. Ф. *Оценка субгармонической разности субгармонических функций. I* // Матем. сб. 1977. Т. 102(144), № 2. С. 216–247.

[25] Красичков-Терновский И. Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. Коэффициенты Дирихле* // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7, № 4. С. 38–43.

[26] Красичков-Терновский И. Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37, № 4. С. 931–945.

[27] Красичков-Терновский И. Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза* // Матем. сб. 1972. Т. 88(130), № 3(7). С. 331–352.

[28] Красичков-Терновский И. Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 88(130), № 1(5). С. 3–30.

[29] Красичков-Терновский И. Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. 1972. Т. 87(129), № 4. С. 459–489.

[30] Красичков[-Терновский] И. Ф. *О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций. II* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32, № 5. С. 1024–1032.

[31] Красичков[-Терновский] И. Ф. *Системы функций со свойством двойной ортогональности* // Матем. заметки. 1968. Т. 4, № 5. С. 551–556.

[32] Красичков[-Терновский] И. Ф. *О замкнутых идеалах в локально-выпуклых алгебрах целых функций* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31, № 1. С. 37–60.

[33] Красичков-Терновский И. Ф. *О свойствах однородности целых функций конечного порядка* // Матем. сб. 1967. Т. 72(114), № 3. С. 412–419.

[34] Красичков-Терновский И. Ф. *Сравнение целых функций целого порядка по распределению их корней* // Матем. сб. 1966. Т. 71(113), № 3. С. 405–419.

[35] Красичков[-Терновский] И. Ф. *Сравнение целых функций конечного порядка по распределению их корней* // Матем. сб. 1966. Т. 70(112), № 2. С. 198–230.

[36] Красичков[-Терновский] И. Ф. *Оценки снизу для целых функций конечного порядка* // Сиб. матем. журн. 1965. Т. VI, № 4. С. 840–861.

[37] Красичков[-Терновский] И. Ф. *Полнота в пространствах комплекснозначных функций, описываемых поведением модуля* // Матем. сб. 1965. Т. 68(110), № 1. С. 26–57.

[38] Красичков[-Терновский] И. Ф. *О полноте систем функций вида* $\left\{\frac{\partial^{n_k}}{\partial h^{n_k}}F(z,h_k)\right\}$ // Матем. сб. 1962. Т. 56(98), № 2. С. 147–172.

ДЛЯ АВТОРОВ

«Уфимский математический журнал» публикует оригинальные научные исследования преимущественно по теории функций, комплексному анализу, функциональному анализу, обыкновенным дифференциальным уравнениям, дифференциальным уравнениям в частных производных, математической физике, теории вероятностей и математической статистике. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре номера в год.

К публикации в периодическом издании «Уфимский математический журнал» принимаются статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более сорока страниц. Работы, превышающие сорок страниц, принимаются к публикации по особому решению редколлегии журнала.

Полнотекстовые версии публикуемых в журнале статей также размещаются в свободном доступе в Интернете на сайте Института математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (http://matem.anrb.ru).

Публикации в журнале для авторов бесплатны.

1. Все материалы предоставляются в редакцию в двух экземплярах. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая страницы с рисунками, таблицами и списком литературы, следует пронумеровать. Авторам для окончательной правки высылается макет статьи в формате PDF или PS.

2. В отдельном файле, набранном в любом текстовом редакторе, указываются фамилии, имена, отчества всех авторов, название статьи, аннотации и ключевые слова на русском и английском языках. В этом же файле указываются ученое звание и ученая степень, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты, адрес прописки каждого из авторов. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

3. Текст статьи должен быть подготовлен на компьютере в издательской системе LaTeX2e (стиль amsart, пакеты amsmath, amsfonts, amssymb). Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX , не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте (umj@matem.anrb.ru) или передаются в редакцию на любых электронных носителях. Официально поданным в журнал для публикации считается распечатанный и подписанный всеми авторами вариант.

В тексте статьи определяются индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся краткие, не более 20 строк, аннотации на русском и английском языках, даются списки ключевых слов на русском и английском языках. Далее в файле приводятся полностью фамилия, имя, отчество каждого из авторов и наименование учреждения, где была выполнена работа, с полным почтовым адресом.

В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами, не следует переопределять греческие буквы и другие стандартные команды. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета.

Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова Рис. с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отцентрированной надписью Табл. с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. В списке литературы должно быть не более 40 позиций.

В случае отклонения статьи авторы получают мотивированный отказ, экземпляры рукописи авторам не возвращаются.

Адрес редакции Уфимского математического журнала:

ИМВЦ УНЦ РАН, 450008, г. Уфа, Россия, ул. Чернышевского, 112, к. 22.
Тел. +7 347 273 33 42.
Email: umj@matem.anrb.ru, сайт журнала: http://matem.anrb.ru

Information for authors

Requirements for preparation of manuscripts

Ufimskii Matematicheskii Zhurnal publishes original research papers on the theory of functions, complex analysis, ordinary differential equations, partial differential equations, mathematical physics, probability theory and mathematical statistics. It is intended for researchers, teachers, postgraduate and undergraduate students. The journal publishes four regular issues per each year. We publish papers written in Russian or English which generally comprise up to 40 printed pages. Paper exceeding 40 printed pages can be accepted for publication by special consideration by the Editorial board.

Papers published in the journal are also freely placed in full volume on the official site of the Institute of mathematics with computer center of RAS (http://matem.anrb.ru).

The publication of papers in the journal is free of charge.

1. All documents are presented to editorial board in duplicate. The manuscript should be carefully checked. All pages should be numbered including drawings, tables and bibliographical references. The layout of the paper in PDF or PS format will be sent to authors for the final proof-reading.

2. Manuscript should be prepared on computer using LaTeX2e publishing software (style amsart, packages amsmath, amsfonts, amssymb). Typewritten manuscripts or the ones prepared by the software, different from TeX, will not be considered. Files *.tex and *.ps (*.pdf) of the paper should be sent to the editorial board by e-mail or submitted on any electronic data carriers. A variant of the manuscript is regarded as officially filed if it is in printed form and is signed by all authors.

3. In a detached file using any text editor should be represented full names of all authors, title of the paper, annotation and key words in Russian and English. The file should also contain science title and academic degrees, positions, full names of scientific institutions, addresses with the post office code, phone numbers with city code and mobile phone numbers, e-mail addresses and registration addresses of all authors. It is necessary to indicate the author responsible for

corresponding with Editorial board.

The date of submission to editorial board of two copies of manuscript, signed by all the authors is considered as the official date of submission of the paper.

Exemplary setup of the file of the paper (*.tex)

In the text index UDC and the title of the paper is defined, then it follows initials and family names of all authors, short annotation (at most 20 lines) in Russian and English, and the list of key words in Russian and English. Further it is given full names of all authors and names of institutions, where the work was implemented with full post addresses.

It is not admissible for the annotation includes intricate formulas, references on the text of the paper or on reference list. It should be in special attention that it is undesirable to use new (defined by authors) command sequences, especially with parameters, to redefine the Greece letters and other standard commands! In general it should be used standard package means.

Black-and-white drawings should be prepared in EPS format (Encapsulated PostScript) in such a way that guarantees its adequate representation under sequel optical two time decrease. If using drawings it is necessary to attach package epsfig. Inscription under the drawing must be placed on the center and include the word Fig. with sequel number. The numbers of drawings must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to drawings should be placed in the text of the paper. The tables are accompanied by centered inscription Tab. with sequel number. The numbers of tables must have straight enumeration through the text of the paper. All comments to tables should be placed in the text of the paper. Diagrams are made as drawings.

The list of references must include only the items with references in the text with the order of citing. It is inadmissible the references on unpublished papers, the results of which are used in the proofs of the paper. In the case of rejection of the paper authors receive a notice with relevant valid reasons. Manuscripts are not returned.

Institute of Mathematics, Russian Academy of Sciences, 450008, Ufa, Russian Federation,
112 Chernyshevsky Street.
Tel. +7 347 273 33 42.
http://matem.anrb.ru
Email: umj@matem.anrb.ru