ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 161-176.

УДК 517.929

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ПО ДАРБУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

С.Я. СТАРЦЕВ

Аннотация. Произведена классификация дифференциально-разностных уравнений лиувиллевского типа, допускающих интеграл первого порядка по одной из характеристик. Показано, что тем самым получено полное описание разностных подстановок первого порядка, применимых к широким классам эволюционных дифференциально-разностных уравнений. Также указанная классификация позволяет получить полный список интегрируемых по Дарбу дифференциально-разностных уравнений, обладающих интегралом второго порядка по одной из характеристик и допускающих обратимое неточечное преобразование по соответствующей характеристике.

Ключевые слова: интегрируемость по Дарбу, дифференциально-разностные уравнения, разностные подстановки.

1. Введение и основные определения

Настоящая статья посвящена изучению некоторых специальных подклассов цепочек дифференциальных уравнений вида

$$(u_{i+1})_x = F(x, u_i, u_{i+1}, (u_i)_x),$$

где неизвестная функция u зависит от целого числа i и вещественной переменной x. В дальнейшем во всех формулах мы для краткости будем опускать индекс i и, в частности, будем записывать вышеуказанную цепочку в виде

$$(u_1)_x = F(x, u, u_1, u_x). \tag{1.1}$$

Мы будем предполагать, что $F_{u_x} \neq 0$, и, следовательно, уравнение (1.1) можно записать в виде

$$(u_{-1})_x = \tilde{F}(x, u, u_{-1}, u_x). \tag{1.2}$$

Производные $u_m^{(n)} := \partial^n u_{i+m}/\partial x^n$ от сдвигов u для любых ненулевых $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ мы можем поэтому выразить в силу уравнений (1.1) – (1.2) через x и так называемые *динамические переменные* $u_l := u_{i+l}$, $u^{(k)} := \partial^k u_i/\partial x^k$. Запись $g[u]$ будет обозначать, что функция g зависит от x и конечного числа динамических переменных.

Обозначим через T оператор сдвига по i в силу уравнения (1.1). Этот оператор задается следующими правилами: $T(f(a, b, \dots)) = f(T(a), T(b), \dots)$ для любой функции f; $T(u_m) = u_{m+1}$; $T(u^{(n)}) = D^{n-1}(F)$ (то есть "смешанные" переменные $u_1^{(n)}$ выражаются через динамические переменные в силу уравнения (1.1)). Здесь

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + u^{(1)}\frac{\partial}{\partial u} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u^{(k+1)}\frac{\partial}{\partial u^{(k)}} + T^{k-1}(F)\frac{\partial}{\partial u_k} + T^{1-k}(\tilde{F})\frac{\partial}{\partial u_{-k}}\right),$$

S.Ya. Startsev, Darboux integrable differential-difference equations admitting a firts-order integral.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00088-а).

Поступила 21 мая 2012 г.

т.е. через D обозначен оператор полной производной по x в силу уравнений (1.1) – (1.2). Оператор обратного сдвига T^{-1} задается похожим образом.

Определение 1. *Уравнение* (1.1) *называется интегрируемым по Дарбу, если для него найдутся функции* $I[u]$ *и* $X[u]$*, каждая из которых зависит хотя бы от одной из динамических переменных, такие что выполнены соотношения* $D(I) = 0$ *и* $T(X) = X$*. Функции* $I[u]$ *и* $X[u]$ *в этом случае называются соответственно* i*-интегралом и* x*-интегралом уравнения* (1.1).

Нетрудно проверить (см., например, [1]), что i-интеграл не может зависеть от производных u, а x-интеграл — от сдвигов u. Таким образом, i- и x-интеграл должны иметь вид $I(x, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m)$ и $X(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ соответственно. Числа $m - k$ и n называются *порядком* соответствующего интеграла. Заметим, что в настоящей статье (в отличие от, например, [2]) мы не рассматриваем случай интегралов, явно зависящих от дискретной переменной i.

Уравнение (1.1) можно рассматривать как дифференциально-разностный аналог уравнения в частных производных

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y). \tag{1.3}$$

Определение интегрируемости по Дарбу первоначально было введено именно для уравнений в частных производных, и в работе [3] была выполнена полная классификация интегрируемых по Дарбу уравнений вида (1.3). Для уравнений же (1.1) такая классификация в настоящий момент пока отсутствует — известны лишь отдельные примеры (см., например, [4]), а также результаты классификации для цепочек специального вида [5]. Поэтому обоснованной представляется постановка задачи о классификации тех или иных частных случаев уравнения (1.1), которые впоследствии достаточно естественным образом могут войти в будущую полную классификацию как составная ее часть.

В качестве таких частных случаев в статье рассматриваются уравнение

$$(u_1)_x = a(u, u_1)u_x, \tag{1.4}$$

а также уравнения вида

$$\phi(x, u_1, (u_1)_x) = \phi(x, u, u_x). \tag{1.5}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (1.4) при любом a допускает i-интеграл первого порядка: им будет любая функция $I(u, u_1)$, удовлетворяющая уравнению $I_u + aI_{u_1} = 0$. Верно и обратное — уравнение (1.1) допускает i-интеграл вида $I(u, u_1)$ только тогда, когда оно имеет вид (1.4). Также очевидно, что уравнение (1.1) допускает x-интеграл $\phi(x, u, u_x)$ тогда и только тогда, когда оно может быть записано в виде (1.5).

Поскольку уравнения (1.4) и (1.5) всегда обладают интегралом по одной из характеристик, задача классификации интегрируемых по Дарбу уравнений указанных видов сводится к получению необходимых и достаточных условий наличия у них интеграла по другой характеристике. Такие условия и получены в настоящей статье. Заметим, что этот результат не претендует на исчерпывающее описание всех уравнений вида (1.1), допускающих интегралы первого порядка, поскольку уравнения допускающие i-интеграл первого порядка не исчерпываются уравнениями (1.4) (в случае явной зависимости этого интеграла от x) и, что менее очевидно, уравнение (1.1) может допускать x-интеграл первого порядка, явно зависящий от i (несмотря на отсутствие такой зависимости у (1.1)), и потому соответствующее такому интегралу уравнение не обязательно имеет вид (1.5) (для чисто дискретных аналогов уравнения (1.3) примеры такого сорта содержатся в работе [6] и нетрудно видеть, что они применимы и к случаю уравнений (1.1)).

Для дальнейшего изложения нам потребуется следующее

Определение 2. *Уравнение вида* $u_t = f[u]$ *называется симметрией уравнения* (1.1), *если выполнено соотношение* $L(f) = 0$, *где*

$$L = TD - F_{u_x}D - F_{u_1}T - F_u. \tag{1.6}$$

Следует заметить, что интегрируемые по Дарбу уравнения обладают богатым набором симметрий: если у уравнения (1.1) имеются i-интеграл I и x-интеграл X, то, согласно [4], найдутся операторы $R = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k[u]T^k$ и $S = \sum_{k=0}^{\sigma} \mu_k[u]D^k$, такие что

$$u_t = R(\xi(I, T(I), T^2(I), \dots)), \tag{1.7}$$
$$u_t = S(\eta(x, X, D(X), D^2(X), \dots))$$

являются симметриями этого уравнения для любых функций ξ и η, зависящих от конечного числа аргументов. В разделе 3 показано, что, как и в случае уравнений (1.3), для любой симметрии $u_t = f[u]$ уравнения (1.1) интеграл минимального порядка $\Omega[u]$ задает подстановку $v = \Omega[u]$, переводящую решения этой симметрии в решения некоторого уравнения вида $v_t = g[v]$. Это позволяет воспользоваться при классификации уравнений (1.5) результатами ранее проведенной классификации дифференциальных подстановок [7], а также показать, что классификация уравнений (1.4) дает нам полное описание постановок вида $v = I(u, u_1)$, допускаемых зависящими от произвольной функции семействами уравнений вида (1.7).

В статье также рассматриваются уравнения, заданные соотношениями вида

$$T(\varphi(x, u, u_x)) = \psi(x, u, u_x), \qquad \varphi_u\psi_{u_x} - \psi_u\varphi_{u_x} \neq 0, \tag{1.8}$$

и

$$D(p(u, u_1)) = q(u, u_1), \qquad p_u q_{u_1} - q_u p_{u_1} \neq 0. \tag{1.9}$$

С помощью результатов классификации уравнений (1.4) и (1.5) в разделе 5 получены полный список интегрируемых по Дарбу уравнений (1.8), допускающих x-интеграл второго порядка, а также список Дарбу-интегрируемых уравнений (1.9), допускающих i-интеграл второго порядка, не зависящий явно от x. Заметим, что уравнения (1.8) и (1.9) можно рассматривать как дифференциально-разностные аналоги линейных по одной из производных уравнений (1.3), т.е. уравнений

$$D_y(\varphi(x, u, u_x)) = \psi(x, u, u_x) \quad \text{и} \quad D_x(p(u, u_y)) = q(u, u_y), \tag{1.10}$$

где через D_x и D_y обозначены полные производные по x и y соответственно. Т.е. найденные в разделе 5 уравнения можно рассматривать как ближайшие дифференциально-разностные аналоги уравнения Лиувилля $u_{xy} = e^u$, поскольку данное уравнение имеет вид (1.10) и допускает интегралы второго порядка.

2. Вспомогательные утверждения: инварианты Лапласа, симметрии и интегралы

При анализе уравнений (1.1), допускающих интегралы, нередко оказываются полезными инварианты Лапласа этих уравнений. Напомним, что $K_0 = F_u + F_{u_x}F_{u_1} - D(F_{u_x})$ и $H_0 = F_u + F_{u_x}T^{-1}(F_{u_1})$ называются главными инвариантами Лапласа уравнения (1.1). Эти инварианты являются остатками от деления оператора (1.6) на $T - F_{u_x}$ и $D - T^{-1}(F_{u_1})$ соответственно:

$$L = (D - F_{u_1})(T - F_{u_x}) - K_0 = (T - F_{u_x})(D - T^{-1}(F_{u_1})) - H_0.$$

Нетрудно проверить, что если $H_0 \neq 0$, то верна формула

$$(D - b_1)L = L_1(D - T^{-1}(F_{u_1})),$$

где

$$L_1 = (D - b_1)(T - F_{u_x}) - H_0, \quad b_1 = T^{-1}(F_{u_1}) + D(H_0)/H_0.$$

Вышеописанная процедура перехода от оператора $L_0 = L$ к оператору L_1 называется x-преобразованием Лапласа. Ясно, что она может быть применена к произвольному оператору вида $TD - a[u]D - b[u]T - c[u]$ (для этого достаточно в вышеприведенных формулах заменить F_{u_x}, F_{u_1} и F_u на a, b и c соответственно). В частности, мы можем записать L_1 в виде

$$L_1 = (T - F_{u_x})(D - T^{-1}(b_1)) - H_1, \quad H_1 = H_0 + F_{u_x}(T^{-1}(b_1) - b_1) + D(F_{u_x})$$

и применить x-преобразование Лапласа уже к L_1 и т.д. Многократное применение x-преобразования Лапласа дает нам последовательность операторов

$$L_j = (T - F_{u_x})(D - T^{-1}(b_j)) - H_j, \quad j > 0,$$

где b_j, H_j определяются рекуррентными формулами

$$b_j = T^{-1}(b_{j-1}) + D(H_{j-1})/H_{j-1}, \quad b_0 = F_{u_1},$$
$$H_j = H_{j-1} + F_{u_x}(T^{-1}(b_j) - b_j) + D(F_{u_x}).$$

При этом для всех $j > 0$ верна формула

$$(D - b_j)L_{j-1} = L_j(D - T^{-1}(b_{j-1})). \tag{2.1}$$

Подобным образом определяется и i-преобразование Лапласа. Итерации i-преобразования порождают последовательность операторов

$$L_{-j} = (D - T^j(F_{u_1}))(T - a_j) - K_j, \quad j > 0,$$

где a_j, K_j определяются рекуррентными формулами

$$a_j = a_{j-1}T(K_{j-1})/K_{j-1}, \quad a_0 = F_{u_x},$$
$$K_j = T(K_{j-1}) - D(a_j) + a_j(T^j(F_{u_1}) - T^{j-1}(F_{u_1})).$$

Аналогом формулы (2.1) здесь является соотношение

$$(T - a_j)L_{1-j} = L_{-j}(T - a_{j-1}). \tag{2.2}$$

Функции H_j и K_j называются соответственно x- и i-*инвариантами Лапласа* уравнения (1.1). В работе [4] было доказано, что выполнения условия $H_j = 0$ ($K_j = 0$) при некотором $j < m$ является необходимым для наличия у уравнения (1.1) x-интеграла (i-интеграла) m-того порядка. В случае уравнения в частных производных (1.3) в работах [8], [9] доказано, что завершение нулем последовательности инвариантов Лапласа этого уравнения не только необходимо, но и достаточно для наличия у него интегралов. Для дифференциально-разностного уравнения (1.1) подобное утверждение отсутствует. Однако нетрудно доказать следующей формальный аналог этого утверждения.

Лемма 1. *Пусть x-инвариант Лапласа H_m уравнения* (1.1) *равен нулю при некотором $m \geq 0$ и найдется отличная от нуля функция $\theta[u]$, такая что $T(\theta) = F_{u_x}^{-1}\theta$. Тогда дифференциальный оператор θB_m, где B_j задаются рекуррентной формулой*

$$B_0 = D - T^{-1}(F_{u_1}), \qquad B_j = (D - T^{-1}(b_j))B_{j-1}, \quad j > 0, \tag{2.3}$$

переводит ядро оператора (1.6) *в ядро оператора $T - 1$.*

Другими словами, оператор θB_m переводит в $\ker(T-1)$ правую часть любой симметрии уравнения (1.1).

Доказательство. Прямым следствием формулы (2.1) является соотношение

$$L_m B_{m-1} = (D - b_m) \dots (D - b_1)L.$$

Учитывая, что $H_m = 0$, получаем

$$(T - F_{u_x})B_m = (D - b_m) \dots (D - b_1)L. \tag{2.4}$$

Поскольку $T(\theta) = F_{u_x}^{-1}\theta$, имеем $(T-1)\theta = \theta(F_{u_x}^{-1}T-1) = \theta F_{u_x}^{-1}(T-F_{u_x})$. Поэтому, домножив обе части (2.4) на $\theta F_{u_x}^{-1}$, приходим к соотношению

$$(T-1)\theta B_m = \theta F_{u_x}^{-1}(D-b_m)\dots(D-b_1)L,$$

которое и доказывает лемму. □

Аналогичным образом доказывается и

Лемма 2. *Пусть i-инвариант Лапласа K_m уравнения* (1.1) *равен нулю при некотором $m \geq 0$ и найдется отличная от нуля функция $\tau[u]$, такая что $D(\tau) + F_{u_1}\tau = 0$. Тогда разностный оператор $T^m(\tau)A_m$, где A_j задаются рекуррентной формулой*

$$A_0 = T - F_{u_x}, \qquad A_j = (T-a_j)A_{j-1}, \quad j > 0,$$

переводит ядро оператора (1.6) *в ядро оператора D.*

Если у уравнения (1.1) имеется симметрия $u_t = f[u]$, то выполнение условий вышеприведенных лемм вообще говоря не гарантирует, что у этого уравнения обязательно будут иметься интегралы, поскольку выражения $\theta B_m(f)$ и $T^m(\tau)A_m(f)$ теоретически могут оказаться не зависящими от динамических переменных или вообще равными нулю. Но при добавлении некоторых дополнительный условий эти леммы все же можно использовать для доказательства существования интегралов.

Следствие 1. *Пусть $u_t = f[u]$ является симметрией уравнения* (1.1), *такой что $f_{u^{(n)}} \neq 0$, $n > 0$ и $f_{u^{(j)}} = 0$ для всех $j > n$. Тогда если для этого уравнения выполнено условие $H_m = 0$ и найдется отличная от нуля функция $\theta[u]$, такая что $T(\theta) = F_{u_x}^{-1}\theta$ и $\theta_{u^{(l)}} = 0$ для всех $l > (m+n)$, то $\theta B_m(f)$ является x-интегралом уравнения* (1.1).

Доказательство. Индукцией по j нетрудно убедиться, что b_j и H_j не могут зависеть от $u^{(r)}$ для любого $r > (j+1)$. Поэтому $(\theta B_m(f))_{u^{(m+n+1)}} = \theta f_{u^{(n)}} \neq 0$, то есть $\theta B_m(f)$ зависит от $u^{(m+n+1)}$ и, в силу леммы 1, лежит в $\ker(T-1)$. Следовательно, $\theta B_m(f)$ является x-интегралом. □

Таким же образом доказывается и аналогичное утверждение для i-интегралов.

Следствие 2. *Пусть $u_t = f[u]$ является симметрией уравнения* (1.1), *такой что $f_{u_n} \neq 0$, $n > 0$ и $f_{u_j} = 0$ для всех $j > n$. Тогда если для этого уравнения выполнено условие $K_m = 0$ и найдется отличная от нуля функция $\tau[u]$, такая что $D(\tau) + F_{u_1}\tau = 0$ и $\tau_{u_l} = 0$ для всех $l > n$, то $T^m(\tau)A_m(f)$ является i-интегралом уравнения* (1.1).

Нетрудно заметить, что у уравнения (1.4) при любом a имеется симметрия $u_t = u_x$ и $T(u_x^{-1}) = a^{-1}u_x^{-1}$. Учитывая, что $a = F_{u_x}$, в силу следствия 1 получаем следующее

Предложение 1. *Пусть для уравнения* (1.4) *выполнено условие $H_m = 0$ при некотором $m \geq 0$. Тогда у этого уравнения имеется x-интеграл.*

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1.1) *найдется оператор $R = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k[u]T^k$, $\lambda_r \neq 0$, такой что $u_t = R(I)$ является симметрией уравнения* (1.1) *для любого $I \in \ker D$. Тогда $H_m = 0$ для некоторого неотрицательного $m \leq r$.*

Доказательство. Собирая в соотношении $L(R(I)) = 0$ коэффициенты при одинаковых степенях T, получаем, что необходимым условием для его выполнения при любых $I \in \ker D$ является выполнение цепочки соотношений

$$T\left(B_0(\lambda_r)\right) = 0,$$

$$T\left(B_0(\lambda_{j-1})\right) - F_{u_x}B_0(\lambda_j) - H_0\lambda_j = 0, \qquad j = \overline{1,r},$$

$$F_{u_x}B_0(\lambda_0) + H_0\lambda_0 = 0,$$

где через B_0 обозначен оператор $D - T^{-1}(F_{u_1})$. Для дальнейших рассуждений удобно переписать эту цепочку в виде

$$B_0(\lambda_r) = 0, \tag{2.5}$$

$$T\left(B_0(\lambda_{j-1} - \lambda_j)\right) + L(\lambda_j) = 0, \qquad j = \overline{1,r}, \tag{2.6}$$

$$T\left(B_0(\lambda_0)\right) - L(\lambda_0) = 0. \tag{2.7}$$

Подействовав оператором $(D - b_{r-j+1})(D - b_{r-j})\dots(D - b_1)$ на второе соотношение этой цепочки и учитывая (2.1), получаем

$$T\left(B_{r-j+1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)\right) + L_{r-j+1}\left(B_{r-j}(\lambda_j)\right) = 0, \qquad j = \overline{1,r},$$

где B_j заданы формулой (2.3). Из последнего соотношения видно, что если $B_{r-j}(\lambda_j) = 0$, то равно нулю и $B_{r-j+1}(\lambda_{j-1})$. Поскольку $B_0(\lambda_r) = 0$ в силу (2.5), мы таким образом получаем, что $B_{r-j}(\lambda_j) = 0$ для всех j от r до 0.

Применим теперь оператор $(D - b_r)\dots(D - b_1)$ к соотношению (2.7), а оператор $(D - b_{r-j})\dots(D - b_1)$ — к соотношению (2.6) при $j < r$ (при $j = n$ просто перепишем (2.6) с учетом (2.5)). Поскольку из $B_{r-j}(\lambda_j) = 0$ следует

$$L_{r-j}\left(B_{r-j-1}(\lambda_j)\right) = (T - F_{u_x})\left(B_{r-j}(\lambda_j)\right) - H_{r-j}B_{r-j-1}(\lambda_j) = -H_{r-j}B_{r-j-1}(\lambda_j),$$

после введения обозначений $\Lambda_j = B_{r-j-1}(\lambda_j)$ при $j < r$ и $\Lambda_r = \lambda_r$ приходим в результате к цепочке соотношений

$$H_{r-j}\Lambda_j = T(\Lambda_{j-1}), \qquad j = \overline{1,r},$$

$$H_r\Lambda_0 = 0.$$

Она может выполняться только тогда, когда $H_m = 0$ при некотором $m \le r$ (поскольку в противном случае $\Lambda_j = 0$ для всех $j = \overline{0,r}$, что противоречит условию теоремы $\lambda_r \ne 0$). $\square$

Из только что доказанной теоремы и предложения 1 вытекает следующее

Следствие 3. *Пусть для уравнения* (1.4) *найдется оператор* $R = \sum_{k=0}^{r}\lambda_k[u]T^k$, $\lambda_r \ne 0$, *такой что* $u_t = R(I)$ *является симметрией уравнения* (1.4) *для любого* $I \in \ker D$. *Тогда у этого уравнения имеется* x*-интеграл, и оно является интегрируемым по Дарбу.*

Заметим, что рассуждения, использованные для построения x-интеграла при доказательстве леммы 1, следствия 1 и предложения 1, дают нам x-интеграл без явной зависимости от дискретной переменной i. Поэтому наше предположение о независимости интегралов от переменной i при выполнении условий следствия 3 не является ограничительным.

3. Подстановки и интегралы

В этом разделе рассмотрим эволюционное уравнение в частных производных

$$u_t = f(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(n)}), \tag{3.1}$$

а также цепочку дифференциально-разностных уравнений

$$u_t = g(x, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n). \tag{3.2}$$

Заметим, что уравнение вида $u_t = q[u]$ задает на функциях от динамических переменных дифференцирование ∂_q в силу этого уравнения, которое задается формулой $\partial_q(h[u]) = h_*(q)$, где через h_* обозначен оператор линеаризации

$$h_* = \sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial u_j}T^j + \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial u^{(j)}}D^j.$$

Определение 3. *Будем говорить, что уравнение* (3.1) *допускает дифференциальную подстановку*

$$v = \phi(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)}) \tag{3.3}$$

в уравнение $v_t = \hat{f}(x, v, v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$, *если* $\phi_{u^{(m)}} \neq 0$, $m \geq 1$ *и выполняется соотношение*[1]

$$\partial_f(\phi) = \hat{f}(x, \phi, D(\phi), \dots, D^n(\phi)).$$

Если найдутся дифференциальные операторы

$$S = \sum_{j=0}^{\sigma} \mu_j(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(l)}) D^j, \qquad \hat{S} = \sum_{j=0}^{\sigma+m} \hat{\mu}_j(x, v, v^{(1)}, \dots, v^{(\hat{l})}) D^j,$$

такие что $\mu_\sigma \neq 0$, *и для любой зависящей от конечного числа аргументов функции* η *уравнение* $u_t = S(\eta(x, \phi, D(\phi), \dots))$ *допускает подстановку* (3.3) *в уравнение* $v_t = \hat{S}(\eta(x, v, v^{(1)}, \dots))$, *то будем называть* (3.3) *подстановкой типа Миуры.*

Определение 4. *Будем говорить, что уравнение* (3.2) *допускает разностную подстановку*

$$v = \phi(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_m) \tag{3.4}$$

в уравнение $v_t = \hat{g}(x, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$, *если функция* ϕ *зависит не менее чем от двух динамических переменных, и выполняется соотношение*

$$\partial_g(\phi) = \hat{g}(x, T^k(\phi), T^{k+1}(\phi), \dots, T^n(\phi)).$$

Будем называть (3.4) *подстановкой типа Миуры, если найдутся операторы*

$$R = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j(x, u_\varrho, u_{\varrho+1}, \dots, u_s) T^j, \qquad \hat{R} = \sum_{j=l}^{r+m} \hat{\lambda}_j(x, v_{\hat{\varrho}}, v_{\hat{\varrho}+1}, \dots, v_{\hat{s}}) T^j, \tag{3.5}$$

такие что $\lambda_r \neq 0$, *и для любой зависящей от конечного числа аргументов функции* η *и любого целого числа* δ *уравнение* $u_t = R(\eta(T^\delta(\phi), T^{\delta+1}(\phi), \dots))$ *допускает подстановку* (3.4) *в уравнение* $v_t = \hat{R}(\eta(v_\delta, v_{\delta+1}, \dots))$.

Примеры использования разностных подстановок, некоторые их свойства и способы построения можно найти например в [10–12].

Заметим, что в определениях 3 и 4 оператор D применяется к функциям, не зависящим от сдвигов u и v, а оператор T — к функциям, не зависящим от производных u и v. Поэтому в этих определениях никак не используется уравнение (1.1), задающее операторы D и T на полном наборе динамических переменных. Однако, как будет показано далее, интегралы уравнений вида (1.1) можно интерпретировать как подстановки для уравнений вида (3.1) и (3.2) — соответствующие рассуждения для уравнений вида (1.3) из работы [3] практически без изменений переносятся на случай дифференциально-разностных уравнений.

Действительно, непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что дифференцирование ∂_f коммутирует с операторами D и T, если $u_t = f[u]$ является симметрией уравнения (1.1). Поэтому дифференцирование ∂_f переводит любой x- и i-интеграл уравнения (1.1) снова в некоторый x- и i-интеграл соответственно. С другой стороны, в работе [2] доказано, что для уравнения (1.1) с i-интегралом I минимального порядка (x-интегралом X минимального порядка) любой другой i-интеграл (x-интеграл) этого уравнения является

[1]Данное соотношение означает, что $v = \phi(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)})$ является решением уравнения $v_t = \hat{f}$ для любого решения уравнения (3.1).

функцией от I и конечного числа аргументов вида $T^j(I)$, $j \in \mathbb{Z}$ (функцией от переменной x, минимального интеграла X и конечного числа аргументов вида $D^j(X)$, $j \in \mathbb{N}$)[1]. Применяя это утверждение к интегралам $\partial_f(X)$ и $\partial_f(I)$, получаем, что для них найдутся функции $\hat{f}$ и $\hat{g}$, такие что

$$\partial_f(X) = \hat{f}(x, X, D(X), \dots, D^n(X)), \qquad \partial_f(I) = \hat{g}(T^k(I), T^{k+1}(I), \dots, T^n(I)).$$

Таким образом доказана следующая

Теорема 2. *Пусть у уравнения* (1.1) *имеется симметрия вида* (3.1) *(вида* (3.2)*) и x-интегралы (i-интегралы). Обозначим x-интеграл (i-интеграл) минимального порядка через X (через I). Тогда уравнение* (3.1) *(уравнение* (3.2)*) связано подстановкой $v = X(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)})$ ($v = I(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_m)$) с некоторым уравнением вида $v_t = \hat{f}(x, v, v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$ ($v_t = \hat{g}(v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$).*

Следствие 4. *Пусть уравнение* (1.1) *является интегрируемым по Дарбу, а X и I являются соответственно его x- и i-интегралами минимальных порядков. Тогда $v = X(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)})$ и $w = I(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_m)$ являются постановками типа Миуры.*

Доказательство. Согласно [4], у любого интегрируемого по Дарбу уравнения вида (1.1) существуют операторы $S = \sum_{j=0}^{\sigma} \mu_j[u] D^j$ и $R = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j[u] T^j$, такие что $u_t = S(\Omega)$ и $u_t = R(\Theta)$ являются симметриями этого уравнения для любого x-интеграла Ω и любого i-интеграла Θ. В доказательстве теоремы 1 из работы [1] показано, что коэффициенты μ_j не могут зависеть от сдвигов u, а коэффициенты λ_j — от производных u. Учитывая, что любая функция вида $\eta(x, X, D(X), \dots)$ является x-интегралом, а любая функция вида $\xi(T^\delta(I), T^{\delta+1}(I), \dots)$ — i-интегралом, в силу теоремы 2 получаем, что любые уравнения вида

$$u_t = S(\eta(x, X, D(X), \dots)), \qquad u_t = R(\xi(T^\delta(I), T^{\delta+1}(I), \dots))$$

допускают подстановки $v = X(x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(m)})$ и $w = I(x, u_l, u_{l+1}, \dots, u_m)$ соответственно. □

Теорема 3. *Уравнение* (3.2) *допускает подстановку $v = I(x, u, u_1)$ в уравнение вида $v_t = \hat{g}(v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ тогда и только тогда, когда* (3.2) *является симметрией уравнения*

$$(u_1)_x = -\frac{I_u}{I_{u_1}} u_x - \frac{I_x}{I_{u_1}}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что I является i-интегралом минимального порядка для уравнения (3.6). Поэтому если (3.2) является симметрией этого уравнения, то $v = I(x, u, u_1)$ является подстановкой в силу теоремы 2.

Обратно, если $v = I(x, u, u_1)$ является подстановкой, то

$$I_{u_1} T(g) + I_u g = \hat{g}(T^k(I), T^{k+1}(I), \dots, T^n(I))$$

по определению подстановки. Как нетрудно убедиться прямым вычислением, в случае уравнения (3.6) для заданного формулой (1.6) оператора L верна формула $L = I_{u_1}^{-1} D(I_{u_1} T + I_u)$, и потому $L(g) = I_{u_1}^{-1} D(\hat{g}) = 0$. □

Аналогичным образом можно доказать, что (3.1) допускает подстановку $v = \phi(x, u, u_x)$ тогда и только тогда, когда (3.1) является симметрией уравнения (1.5). Ранее в работе [13] также было доказано, что (3.1) допускает подстановку $v = \phi(x, u, u_x)$ тогда и только тогда, когда (3.1) является симметрией уравнения $u_{xy} = -\phi_u u_x / \phi_{u_x}$. Теорему 3 можно считать

[1] В работе [2] данное утверждение сформулировано для интегралов с явной зависимостью от дискретной переменной i. Однако нетрудно проверить, что его доказательство без труда переносится на случай интегралов без явной зависимости от i при условии, что интеграл минимального порядка выбирается также среди интегралов без явной зависимости от i.

разностным аналогом этого утверждения. Заметим, что отсутствие явной зависимости от x в уравнении $v_t = \hat{g}(v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ является существенным для этой теоремы.

Следствия 3 и 4 вместе с теоремой 3 дают нам

Следствие 5. *Формула $v = I(u, u_1)$ задает постановку типа Миуры, у которой коэффициенты $\hat{\lambda}_j$ соответствующего оператора $\hat{R}$ из формулы* (3.5) *не зависят от x, тогда и только тогда, когда уравнение $(u_1)_x = -\frac{I_u}{I_{u_1}} u_x$ является интегрируемым по Дарбу.*

Таким образом, классификация интегрируемых по Дарбу уравнений вида (1.4) заодно дает нам полное описание разностных подстановок $v = I(u, u_1)$ типа Миуры для уравнений (3.2) с независящей от x правой частью, а для классификации интегрируемых по Дарбу уравнений (1.5) можно воспользоваться ранее полученными результатами классификации дифференциальных подстановок типа Миуры.

4. Интегрируемые по Дарбу уравнения с интегралами первого порядка

Теорема 4. *Уравнение* (1.5) *является интегрируемым по Дарбу тогда и только тогда, когда заменой переменных $\tilde{u} = c(x, u)$ оно связано с уравнением*

$$\tilde{\phi}(x, \tilde{u}_1, (\tilde{u}_1)_x) = \tilde{\phi}(x, \tilde{u}, \tilde{u}_x), \tag{4.1}$$

где $\tilde{\phi}(x, \tilde{u}, \tilde{u}_x)$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{u}_x = \alpha(x, \tilde{\phi})\tilde{u}^2 + \beta(x, \tilde{\phi})\tilde{u} + \gamma(x, \tilde{\phi}). \tag{4.2}$$

При любых функциях α, β и γ

$$I = \frac{(\tilde{u}_2 - \tilde{u})(\tilde{u}_3 - \tilde{u}_1)}{(\tilde{u}_3 - \tilde{u})(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)}$$

является i-интегралом уравнения (4.1).

Доказательство. Если уравнение (1.5) является интегрируемым по Дарбу, то $v = \phi(x, u, u_x)$ в силу следствия 4 является подстановкой типа Миуры. Но в [7] было доказано, что любая подстановка типа Миуры указанного вида является композицией точечного преобразования $\tilde{u} = c(x, u)$ и подстановки $v = \tilde{\phi}(x, \tilde{u}, \tilde{u}_x)$, где $\tilde{\phi}$ находится из соотношения (4.2). Применяя T^j к обеим частям этого соотношения и учитывая (4.1), получаем

$$(\tilde{u}_j)_x = \alpha(x, \tilde{\phi})\tilde{u}_j^2 + \beta(x, \tilde{\phi})\tilde{u}_j + \gamma(x, \tilde{\phi}).$$

Поэтому для любых целых k и n верна формула

$$D(\tilde{u}_k - \tilde{u}_n) = \alpha(\tilde{u}_k^2 - \tilde{u}_n^2) + \beta(\tilde{u}_k - \tilde{u}_n) = (\alpha(\tilde{u}_k + \tilde{u}_n) + \beta)(\tilde{u}_k - \tilde{u}_n).$$

Пользуясь этой формулой, получаем

$$D(I) = (\alpha(\tilde{u} + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3) + 2\beta) I - (\alpha(\tilde{u} + \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3) + 2\beta) I = 0.$$

Таким образом, условие (4.2) не только необходимо, но и достаточно для интегрируемости по Дарбу уравнения (4.1). □

Классификация уравнений вида (1.4) также опирается на работу [7] — нижеприведенные рассуждения почти дословно повторяют рассуждения из указанной работы.

Лемма 3. *Уравнение* (1.4) *является интегрируемым по Дарбу тогда и только тогда, когда найдется функция $G(u)$, такая что*

$$X = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2 + G(u)\left(u^{(1)}\right)^2 \tag{4.3}$$

является x-интегралом этого уравнения.

Доказательство. Обозначим x-интеграл минимального порядка уравнения (1.4) через Q, а его порядок — через n. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что $u_t = \Omega u_x$ является симметрией уравнения (1.4) для любого x-интеграла Ω. Поэтому дифференцирование ∂_f, где $f = \Omega u_x$, коммутирует с оператором T, и $\partial_f(Q) = Q_*(f)$ тоже является x-интегралом. Таким образом получаем, что оператор $Q_* \circ u_x = \sum_{j=0}^n z_j D^j$, где

$$z_j = \sum_{k=j}^{n} C_k^j Q_{u^{(k)}} u^{(k+1-j)}, \tag{4.4}$$

переводит любой x-интеграл снова в x-интеграл. А это возможно лишь в том случае, когда все коэффициенты z_j этого оператора лежат в ядре оператора $T-1$.

Пусть $n > 1$. Тогда согласно [2] мы можем выбрать интеграл Q так, что он зависит линейно от $u^{(n)}$. С учетом формулы (4.4), это означает, что порядок z_n меньше n и, следовательно, z_n не может быть интегралом и является функцией, зависящей лишь от x. Так как мы можем умножать Q на произвольные ненулевые функции от x, без нарушения общности можно считать $z_n = u_x Q_{u^{(n)}} = 1$. Отсюда следует, что $Q_{u^{(k)}}$ не зависит от $u^{(n)}$ при $k = \overline{2,n}$, и, в силу формулы (4.4), z_j также не зависит от $u^{(n)}$ при $j = \overline{2,n}$. Последнее означает, что $z_j = \xi_j(x)$ при $j > 1$. Выражая теперь $Q_{u^{(j)}}$ из (4.4), получаем

$$Q_{u^{(j)}} = \left(\xi_j(x) - \sum_{k=j+1}^{n} C_k^j Q_{u^{(k)}} u^{(k+1-j)}\right) u_x^{-1}\ , \qquad 1 < j < n. \tag{4.5}$$

Учитывая $Q_{u^{(n)}} = u_x^{-1}$ и последовательно выражая $Q_{u^{(n-1)}}, Q_{u^{(n-2)}}, \ldots$ с помощью формулы (4.5), получаем что $Q_{u^{(j)}}$ не зависит от $u^{(l)}$ для всех $l > n-j+1$ и $j > 1$.

Докажем теперь, что $n \le 3$. Для этого предположим противное и рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного $n > 3$.

Пусть $n = 2m$ и $m > 1$. В этом случае формула (4.5) дает нам

$$\begin{array}{ll} Q_{u^{(m+1)}} & = -C_n^{m+1} u^{(m)} u_x^{-2} + g(x, u, u_x, \ldots, u^{(m-1)}), \\ Q_{u^{(m)}} & = -C_n^{m} u^{(m+1)} u_x^{-2} + h(x, u, u_x, \ldots, u^{(m)}), \\ Q_{u^{(m)}u^{(m+1)}} & = -C_n^{m+1} u_x^{-2} = -C_n^{m} u_x^{-2}. \end{array}$$

Но нетрудно проверить, что равенство $C_n^{m+1} = C_n^m$ может выполняться лишь при нечетных n.

Аналогично, при $n = 2m-1$ и $m > 2$ имеем

$$\begin{array}{ll} Q_{u^{(m+1)}} & = -C_n^{m+1} u^{(m-1)} u_x^{-2} + g(x, u, u_x, \ldots, u^{(m-2)}), \\ Q_{u^{(m-1)}} & = -C_n^{m-1} u^{(m+1)} u_x^{-2} + h(x, u, u_x, \ldots, u^{(m)}), \\ Q_{u^{(m-1)}u^{(m+1)}} & = -C_n^{m+1} u_x^{-2} = -C_n^{m-1} u_x^{-2}\ , \end{array}$$

в то время как $C_n^{m+1} = C_n^{m-1}$ верно лишь при четных n.

Таким образом $n \le 3$, и для завершения доказательства нам осталось рассмотреть по отдельности случаи $n = 1, 2$ и 3.

При $n = 3$, как показано выше, $Q = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} + g(x, u, u^{(1)}, u^{(2)})$. С учетом этого формулы для коэффициентов z_j оператора $Q_* \circ u^{(1)}$ приобретают вид

$$z_0 = D(Q) - g_x,$$

$$z_1 = 2\frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} + 2u^{(2)} g_{u^{(2)}} + u^{(1)} g_{u^{(1)}},$$

$$z_2 = 3\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} + u^{(1)} g_{u^{(2)}}.$$

Соотношение $z_2 = \xi(x)$ дает нам

$$g = -\frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2 + \xi\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} + h(x, u, u^{(1)}).$$

Подставляя найденное g в выражение для z_1 и z_0, получаем

$$z_1 = 2Q - 2h + u^{(1)}h_{u^{(1)}} - \xi\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} \quad\Rightarrow\quad (T-1)\left(2h - u^{(1)}h_{u^{(1)}} + \xi\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right) = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \xi = 0,\quad 2h - u^{(1)}h_{u^{(1)}} = \eta(x);$$

$$z_0 = D(Q) - h_x \quad\Rightarrow\quad (T-1)(h_x) = 0 \quad\Rightarrow h_x = \zeta'(x) \Rightarrow h = \zeta(x) + \hat{h}(u, u^{(1)}).$$

В итоге приходим к уравнению $u^{(1)}\hat{h}_{u^{(1)}} = 2\hat{h} + 2\zeta(x) + \eta(x)$, из которого следует $2\zeta(x) + \eta(x) = c$, $\hat{h} = G(u)\left(u^{(1)}\right)^2 - c/2$. Таким образом, при $n = 3$ уравнение (1.4) должно допускать интеграл вида (4.3).

При $n = 2$ аналогичные рассуждения дают нам, что среди интегралов минимального порядка должен иметься интеграл $Q = \frac{u^{(2)}}{u^{(1)}} + C(u)u^{(1)}$. Но тогда $D(Q) - Q^2/2$ имеет вид (4.3).

Если же x-интеграл имеет первый порядок, то согласно [4] инвариант Лапласа $H_0 = a_u u_x + aT^{-1}(a_{u_1}u_x)$ уравнения (1.4) должен равняться нулю. Применяя T^{-1} к обеим частям (1.4), получаем $T^{-1}(u_x) = u_x/T^{-1}(a)$. С учетом этого

$$H_0 = u_x\left(a_u + aT^{-1}\left(\frac{a_{u_1}}{a}\right)\right) = 0.$$

Дифференцируя последнее соотношение по u_{-1}, получаем $(\ln(a))_{u_1 u} = 0$ и, следовательно, $a = \xi(u_1)\eta(u)$. Подставляя это в выражение для H_0, получаем

$$\eta'(u)\xi(u) + \eta(u)\xi'(u) = 0 \quad\Rightarrow\quad \xi(u) = \frac{c}{\eta(u)},\quad a = c\frac{\eta(u)}{\eta(u_1)}.$$

Таким образом, для любого уравнения (1.4), допускающего x-интеграл первого порядка, выполняется соотношение $D(\zeta(u_1) - c\zeta(u)) = 0$, где $\zeta'(u) = \eta(u)$. Но в этом случае (1.4) допускает интеграл

$$X = \frac{D^3(\zeta(u))}{D(\zeta(u))} - \frac{3}{2}\left(\frac{D^2(\zeta(u))}{D(\zeta(u))}\right)^2,$$

который, как нетрудно проверить, имеет вид (4.3). □

Теорема 5. *Уравнение $(\tilde{u}_1)_x = \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{u}_1)\,\tilde{u}_x$ интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда оно получается заменой переменных $\tilde{u} = \xi(u)$ из уравнения вида*

$$(u_1)_x = -\frac{I_u(u, u_1)}{I_{u_1}(u, u_1)}\, u_x,$$

где для I найдутся функции α, β и γ, такие что

$$u_1 = \alpha(I) + \frac{\beta(I)}{\gamma(I) - u},\quad \beta \neq 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. В силу леммы 3, уравнение $(\tilde{u}_1)_x = \tilde{a}(\tilde{u}, \tilde{u}_1)\,\tilde{u}_x$ интегрируемо по Дарбу тогда и только тогда, когда оно допускает x-интеграл вида

$$\tilde{X} = \frac{\tilde{u}^{(3)}}{\tilde{u}^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\tilde{u}^{(2)}}{\tilde{u}^{(1)}}\right)^2 + G(\tilde{u})\left(\tilde{u}^{(1)}\right)^2.$$

При замене переменных $\tilde{u} = \xi(u)$, этот интеграл переходит в интеграл

$$X = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2 + \left(\frac{\xi'''(u)}{\xi'(u)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\xi''(u)}{\xi'(u)}\right)^2 + G(\xi(u))(\xi'(u))^2\right)\left(u^{(1)}\right)^2,$$

и мы можем выбрать ξ так, чтобы коэффициент при $(u^{(1)})^2$ был равен нулю. Получающееся при замене переменных $\tilde{u} = \xi(u)$ уравнение $(u_1)_x = a(u, u_1)\,u_x$ при таком выборе ξ будет допускать x-интеграл

$$X = \frac{u^{(3)}}{u^{(1)}} - \frac{3}{2}\left(\frac{u^{(2)}}{u^{(1)}}\right)^2. \tag{4.7}$$

Обозначим i-интеграл этого уравнения через $I(u, u_1)$. Поскольку I, u и u_1 функционально зависимы, мы можем выразить u_1 как $u_1 = \theta(u, I)$. Последовательно дифференцируя это выражение, получаем

$$D(u_1) = \theta_u u^{(1)}, \qquad D^2(u_1) = \theta_{uu}\left(u^{(1)}\right)^2 + \theta_u u^{(2)},$$
$$D^3(u_1) = \theta_{uuu}\left(u^{(1)}\right)^3 + 3\theta_{uu}u^{(1)}u^{(2)} + \theta_u u^{(3)}.$$

Из этих формул и формулы (4.7) следует, что

$$T(X) = X + \left(\frac{\theta_{uuu}}{\theta_u} - \frac{3}{2}\left(\frac{\theta_{uu}}{\theta_u}\right)^2\right)\left(u^{(1)}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\theta_{uu}}{\theta_u}\right)_u = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_{uu}}{\theta_u}\right)^2.$$

Решение последнего уравнения дает нам формулу (4.6). □

5. Уравнения с интегралами второго порядка, допускающие неточечные обратимые преобразования

Пусть уравнение (1.1) может быть записано в виде

$$\varphi(x, u_1, (u_1)_x) = \psi(x, u, u_x), \tag{5.1}$$

где функции $\varphi(x,y,z)$, $\psi(x,y,z)$ удовлетворяют условию $\varphi_y\psi_z - \varphi_z\psi_y \neq 0$. Тогда мы можем переписать (5.1) в виде системы

$$v = \varphi(x, u, u_x), \quad v_1 = \psi(x, u, u_x), \tag{5.2}$$

выразить из этой системы u, u_x через v, v_1 и получить

$$u = p(x, v, v_1), \quad u_x = q(x, v, v_1). \tag{5.3}$$

Система (5.3) эквивалентна уравнению

$$D(p(x, v, v_1)) = q(x, v, v_1), \quad p_u q_{u_1} - q_u p_{u_1} \neq 0. \tag{5.4}$$

Таким образом, подстановка $v = \varphi(x, u, u_x)$ отображает решения уравнения (5.1) в решения (5.4), а преобразование $u = p(x, v, v_1)$ отображает решения уравнения (5.4) обратно в решения (5.1). Вышеописанные преобразования были предложены в работе [10], а в работе [14] было показано, что уравнения (1.1), допускающие обратимые неточечные преобразования, исчерпываются уравнениями вида (5.1) и (5.4).

Лемма 4. *Интегрируемое по Дарбу уравнение вида* (5.1)*, допускающее x-интеграл второго порядка, композицией преобразования $v = \varphi(x, u, u_x)$ и точечной замены переменных $\hat{v} = \hat{c}(x, v)$ приводится к интегрируемому по Дарбу уравнению вида*

$$(\hat{v}_1)_x + g(x, \hat{v}_1) = \hat{v}_x + g(x, \hat{v}). \tag{5.5}$$

Доказательство. Обозначим x-интеграл уравнения (5.1) через $X(x, u, u^{(1)}, u^{(2)})$. Перепишем этот интеграл в виде $X = \phi(x, u, \varphi(x, u, u_x), D(\varphi(x, u, u_x)))$. Поскольку $T(\phi(x, u, \varphi, D(\varphi)) = \phi(x, u_1, \psi, D(\psi))$, соотношение $T(\phi) = \phi$ может выполняться лишь тогда, когда ϕ не зависит от своего второго аргумента ($\phi_u = 0$). Выразив $(v_1)_x$ (то есть $D(\psi)$) из (5.4), получим выражение

$$(v_1)_x = a(x, v, v_1)v_x + b(x, v, v_1). \tag{5.6}$$

С его учетом формула $T(\phi) = \phi$ приобретает вид

$$\phi(x, \psi, a(x, \varphi, \psi)D(\varphi) + b(x, \varphi, \psi)) = \phi(x, \varphi, D(\varphi)).$$

Поскольку функции x, φ, ψ, $D(\varphi)$ являются функционально независимыми, последнее соотношение выполняется только тогда, когда

$$\phi(x, v_1, a(x, v, v_1)v_x + b(x, v, v_1)) = \phi(x, v, v_x) \tag{5.7}$$

выполняется тождественно для произвольных x, v, v_1, v_x, то есть когда $\phi(x, v, v_x)$ является x-интегралом уравнения (5.4).

Аналогично, воспользовавшись формулой (5.3) и подставив $p(x, \varphi, T(\varphi))$ вместо u в i-интеграл $I(x, u, u_1, \dots, u_m)$ уравнения (5.1), получим $I(x, p, p_1, \dots, p_m)$, где $p_j = p(x, T^j(\varphi), T^{j+1}(\varphi))$. В силу (5.4) будет верна формула

$$D(I) = I_x + \sum_{j=0}^{m} I_{p_j}\, q(x, T^j(\varphi), T^{j+1}(\varphi)) = 0. \tag{5.8}$$

Мы можем записать ψ в виде $\eta(x, u, \varphi)$, причем η обязательно должна зависеть своего второго аргумента в силу функциональной независимости x, φ и ψ. Поэтому $T^2(\varphi) = T(\psi) = \eta(x, u_1, \psi)$ зависит от u_1, а $T^j(\varphi)$ при $j > 1$ — от u_{j-1}. Таким образом, x, φ, $T(\varphi)$, $\dots$, $T^{m+1}(\varphi)$ являются функционально независимыми, и (5.8) может выполняться только тогда, когда соотношение

$$I_x(x, p(x, v, v_1), p(x, v_1, v_2), \dots, p(x, v_m, v_{m+1}))+$$
$$+\sum_{j=0}^{m} I_{p_j}(x, p(x, v, v_1), \dots, p(x, v_m, v_{m+1}))\, q(x, v_j, v_{j+1}) = 0$$

выполняется тождественно для любых x, v, v_1, $\dots$, v_{m+1}. А это означает, что $I(x, p(x, v, v_1), \dots, p(x, v_m, v_{m+1}))$ является i-интегралом уравнения (5.4). Таким образом, уравнение (5.4) является интегрируемым по Дарбу.

Нетрудно видеть, что $a \neq 0$, так как в случае $a = 0$ соотношение (5.7) не может быть выполнено. Дифференцируя (5.7) по v_1, получаем

$$T(\phi_v) + (a_{v_1} v_x + b_{v_1}) T(\phi_{v_x}) = 0.$$

Применяя к обеим частям последней формулы T^{-1}, приходим к соотношению

$$\phi_v + \left(T^{-1}\left(\frac{a_{v_1}}{a}\right) v_x + T^{-1}\left(b_{v_1} - a_{v_1}\frac{b}{a}\right)\right)\phi_{v_x} = 0.$$

Поскольку ϕ не зависит от v_{-1} и v_1, то коэффициент при ϕ_{u_x} в последнем уравнении может зависеть только от x, v, v_x, и решение этого уравнения имеет вид $\phi = \theta(x, \xi(x, v)v_x + \mu(x, v))$. Таким образом, в качестве x-интеграла уравнения (5.4) можно выбрать $\xi(x, v)v_x + \mu(x, v)$, и, следовательно, само уравнение имеет вид

$$\xi(x, v_1)(v_1)_x + \mu(x, v_1) = \xi(x, v)v_x + \mu(x, v).$$

Заменой переменных $\hat{v} = \hat{c}(x, v)$, где $\hat{c}_v(x, v) = \xi(x, v)$, последнее уравнение приводится к виду (5.5). □

В силу следствия 4 уравнение (5.5) является интегрируемым по Дарбу только тогда, когда $w = \hat{v}_x + g(x, \hat{v})$ является подстановкой типа Миуры. Но в работе [7] доказано, что любую такую подстановку можно представить в виде композиции точечной замены переменных вида $\tilde{v} = \lambda(x)\hat{v} + \eta(x)$, $\tilde{x} = \tau(x)$ и одной из следующих подстановок $w = \tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}^2$, $w = \tilde{v}_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}}$, $w = \tilde{v}_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}} + e^{-\tilde{v}}$ или $w = \tilde{v}_{\tilde{x}}$. Таким образом, интегрируемое по Дарбу уравнение вида (5.1), допускающее x-интеграл второго порядка, композицией преобразования $v = \varphi(x, u, u_x)$ и точечной замены переменных $\tilde{v} = c(x, v)$, $\tilde{x} = \tau(x)$ приводится к одному из следующих уравнений

$$(\tilde{v}_1)_{\tilde{x}} + \tilde{v}_1^2 = \tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}^2, \tag{5.9}$$

$$(\tilde{v}_1)_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}_1} = \tilde{v}_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}}, \tag{5.10}$$

$$(\tilde{v}_1)_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}_1} + e^{-\tilde{v}_1} = \tilde{v}_{\tilde{x}} + e^{\tilde{v}} + e^{-\tilde{v}} \tag{5.11}$$

(случай уравнения $(\tilde v_1)_{\tilde x} = \tilde v_{\tilde x}$ не реализуется, так как при преобразовании (5.2) невозможно получить уравнение вида (5.4) с $q = 0$). Поэтому выполнив обратное преобразование $\tilde u = \tilde v_1 - \tilde v$ вышеприведенных уравнений (все они имеют вид $D(\tilde p(x, \tilde v, \tilde v_1)) = \tilde q(x, \tilde v, \tilde v_1)$ с $\tilde p = \tilde v_1 - \tilde v$), мы можем "восстановить" из уравнений (5.9) – (5.11) полный список интегрируемых по Дарбу уравнений (5.1) с x-интегралами второго порядка[1]. Остается лишь показать, что при выполнении использованной нами последовательности преобразований (композиции преобразования $v = \varphi(x, u, u_x)$ для (5.1), точечной замены $\tilde v = c(x, v)$, $\tilde x = \tau(x)$ для (5.4) и обратного преобразования $\tilde u = \tilde p(x, \tilde v, \tilde v_1)$), мы получим уравнение, связанное с (5.1) точечной заменой переменных.

Очевидно, что композиция точечной замены переменных $\tilde v = c(x, v)$, переводящий уравнение (5.4) в уравнение $D(\tilde p(x, \tilde v, \tilde v_1)) = \tilde q(x, \tilde v, \tilde v_1)$, и обратимого преобразования $\tilde u = \tilde p(x, \tilde v, \tilde v_1)$ является обратимым преобразованием. Но в [14] доказано, что любое обратимое преобразование вида $\tilde u = f(x, v, v_1)$ уравнения (5.4) является композицией преобразования $u = p(x, v, v_1)$ (переводящего (5.4) в (5.1)) и точечной замены $\tilde u = \zeta(x, u)$ в уравнении (5.1). Также непосредственной проверкой можно убедиться, что если в обоих связанных преобразованиями (5.2) – (5.3) уравнениях (5.1) и (5.4) одновременно сделать одну и ту же замену $\tilde x = \tau(x)$, то получившаяся в результате пара уравнений тоже будет связана соответствующими им преобразованиями (5.2) – (5.3). Таким образом, использованная нами последовательность преобразований эквивалентна точечной замене переменных $\tilde u = \zeta(x, u)$, $\tilde x = \tau(x)$ в уравнении (5.1). "Подправив" результат этой последовательности преобразований подходящей точечной заменой (то есть используя вместо $\tilde u = \tilde v_1 - \tilde v$ преобразование $\tilde u = \ln(\tilde v_1 - \tilde v)$ для уравнения (5.9), $\tilde u = \ln(e^{\tilde v_1 - \tilde v} - 1)$ — для (5.10) и $\tilde u = e^{\tilde v_1 - \tilde v}$ — для (5.11)), приходим к следующему утверждению:

Теорема 6. *С точностью до замен переменных вида $\tilde u = \zeta(x, u)$, $\tilde x = \tau(x)$ интегрируемые по Дарбу уравнения* (5.1)*, допускающие x-интеграл второго порядка, исчерпываются следующими уравнениями (они перечислены вместе с их x- и i-интегралами):*

$$(u_1 - u)_x = e^{u_1} + e^u, \quad X = 2u_{xx} - u_x^2 - e^{2u}, \quad I = (1 + e^{u_1 - u_2})(1 + e^{u_1 - u});$$

$$(u_1)_x = (e^{u_1} + 1)u_x, \quad X = \frac{u_{xx}}{u_x} - u_x, \quad I = e^u + e^{u - u_1};$$

$$T(\varphi) = u\varphi, \quad X = \frac{1 + D(\varphi)}{\varphi} + \varphi, \quad I = \frac{(u_1 u - 1)(u_2 u_1 - 1)}{(u_1 - 1)(u_2 u_1 u - 1)},$$

где φ является решением уравнения

$$u\varphi^2 + \frac{u_x}{u - 1}\varphi - 1 = 0.$$

Первое из перечисленных в теореме уравнений было получено в работе [4], второе — является частным случаем найденного в работе [14] уравнения

$$(w_1)_x = w_1 w_x \sqrt{\frac{\delta w_1^2 + \varepsilon w_1 + \delta}{\delta w^2 + \varepsilon w + \delta}} \tag{5.12}$$

(при $\varepsilon = -2\delta$ связано с (5.12) точечной заменой $u = \ln(w - 1)$). Третье из уравнений вероятно является новым.

Лемма 5. *Интегрируемое по Дарбу уравнение* (1.9)*, допускающее i-интеграл $\Omega(u, u_1, u_2)$, композицией преобразования $\tilde v = p(u, u_1)$ и точечной замены переменных $v = c(\tilde v)$ приводится к уравнению вида*

$$(v_1)_x = \frac{\lambda v_1 + \mu}{v(v - \lambda)}\, v_x, \tag{5.13}$$

[1] Кроме того, в работе [5] для уравнений (5.9) – (5.11) указаны i-интегралы. Это позволяет при преобразовании этих уравнений пересчитать интегралы в новых переменных и сразу же найти их для преобразованных уравнений.

где λ и μ — константы, удовлетворяющие условию $|\lambda|+|\mu|\neq 0$.

Заметим, что уравнение (5.13) является просто другой формой записи уравнения (5.12), так как (5.12) при $\delta=\lambda^2$ и $\varepsilon=2\lambda^2+4\mu$ связано с (5.13) заменой переменных $w=(\lambda v+\mu)/(v^2-\lambda v)$.

Доказательство. Повторяя рассуждения, аналогичные использованным в доказательстве леммы 4, получаем, что уравнение (1.9) переводится преобразованием $\tilde{v}=p(u,u_1)$ в интегрируемое по Дарбу уравнение, допускающее i-интеграл первого порядка $\tilde{I}(\tilde{v},\tilde{v}_1)$. Поэтому преобразованное уравнение имеет вид $(\tilde{v}_1)_x=a(\tilde{v},\tilde{v}_1)\tilde{v}_x$ и, по теореме 5, связано точечной заменой $v=c(\tilde{v})$ с уравнением $(v_1)_x=-\frac{I_v}{I_{v_1}}v_x$, где $I(v,v_1)$ находится из соотношения (4.6).

Но, с другой стороны, результат преобразования $v=c(p(u,u_1))$ должен иметь вид $\varphi(v_1,(v_1)_x)=\psi(v,v_x)$, и при записи этого уравнения в виде (1.1) его правая часть $F(v,v_1,v_x)$ должна удовлетворять условию $(F_v/F_{v_x})_{v_1}=0$. Для интересующего нас уравнения это условие записывается как $(\ln(I_v/I_{v_1}))_{vv_1}=0$. Перепишем это условие в терминах функции $\theta(v,z)$, связанной с интегралом I соотношением $v_1=\theta(v,I)$. Дифференцирование последнего соотношения по v и v_1 дает нам $I_v=-\theta_v/\theta_z$ и $I_{v_1}=\theta_z^{-1}$ соответственно. Поэтому

$$\left(\ln\left(\frac{I_v}{I_{v_1}}\right)\right)_{vv_1}=(\ln(\theta_v))_{vv_1}=\left(\frac{\theta_{vv}+\theta_{vz}I_v}{\theta_v}\right)_{v_1}=\left(\frac{\theta_{vv}}{\theta_v}-\frac{\theta_{zv}}{\theta_z}\right)_z I_{v_1}=0.$$

Таким образом θ должна удовлетворять соотношению $\left(\ln\left(\frac{\theta_v}{\theta_z}\right)\right)_{vz}=0$. Подставляя в него правую часть формулы (4.6) вместо θ, получаем

$$(\alpha''\beta'-\alpha'\beta'')(\gamma-v)^2+2\beta(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')(\gamma-v)+\beta(\beta'\gamma''-\beta''\gamma'-2\alpha'(\gamma')^2)=0.$$

Это равенство может выполняться в одном следующих трех случаев:
1) $\alpha'\neq 0$, $\beta'=\lambda\alpha'$, $\gamma'=0$;
2) $\alpha'=0$, $\beta'\neq 0$, $\gamma'=\tilde{\lambda}\beta'$;
3) $\alpha'=0$, $\beta'=0$.
Найдя I из соотношения (4.6) в каждом их этих случаев, мы можем выписать соответствующие им уравнения $(v_1)_x=-\frac{I_v}{I_{v_1}}v_x$. Подходящими сдвигами и растяжениями переменной v мы уберем в них лишние константы и получим следующий список уравнений:

$$(v_1)_x=\frac{\lambda v_1+\mu}{v(v-\lambda)}\,v_x,\ \ |\lambda|+|\mu|\neq 0;\qquad (v_1)_x=\frac{(\tilde{\lambda}v_1-1)v_1}{v-\tilde{\mu}}\,v_x;\qquad (v_1)_x=v_1^2v_x.$$

Первое уравнение при $\lambda=0$, $\mu=1$ заменой переменных $v\to v^{-1}$ переводится в третье уравнение, а при $\lambda\neq 0$ — во второе уравнение с $\tilde{\lambda}=-\mu/\lambda$ и $\tilde{\mu}=\lambda^{-1}$. Поэтому третье уравнение мы можем исключить из дальнейшего рассмотрения, а для второго рассматривать лишь случай $\tilde{\mu}=0$. Подставив $\tilde{\lambda}^{-1}+(v-\tilde{\lambda})^{-1}$ во второе уравнение вместо v, мы при $\tilde{\mu}=0$ и $\tilde{\lambda}\neq 0$ придем к уравнению (5.13) с $\mu=0$ и $\lambda=\tilde{\lambda}$ (случай же $\tilde{\mu}=\tilde{\lambda}=0$ не реализуется, так как соответствующее уравнение не допускает преобразований (5.2) – (5.3)). □

Используя такие же рассуждения, как и при доказательстве теоремы 6, из леммы 5 получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Любое интегрируемое по Дарбу уравнение* (1.9), *допускающее i-интеграл вида $\Omega(u,u_1,u_2)$, точечной заменой переменных $\tilde{u}=\zeta(u)$ связано с уравнением*

$$(\tilde{u}_1-\tilde{u})_x=\pm\sqrt{\delta e^{2\tilde{u}_1}+\varepsilon e^{\tilde{u}_1+\tilde{u}}+\delta e^{2\tilde{u}}},\tag{5.14}$$

где константы δ и ε удовлетворяют условию $|\delta|+|\varepsilon|\neq 0$.

Уравнение (5.14) ранее было получено в работе [5], в которой было показано, что оно является интегрируемым по Дарбу при любых значениях констант δ и ε.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Старцев С.Я. *Необходимые условия интегрируемости по Дарбу для дифференциально-разностных уравнений специального вида* // Уфимск. матем. журн. 2011, Т. 3. № 1. С. 80—84.
2. Habibullin I.T., Zheltukhina N., Sakieva A. *On Darboux-integrable semi-discrete chains* // J. Phys. A: Math. Theor. 2010. V. 43. 434017(14pp).
3. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые уравнения лиувиллевского типа* // УМН. 2001. Т. 56. № 1(337). С. 63–106.
4. Адлер В.Е., Старцев С.Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. 1999. Т. 121, № 2, С. 271–285.
5. Habibullin I.T., Zheltukhina N., Pekcan A. *Complete list of Darboux integrable chains of the form* $t_{1x} = t_x + d(t, t_1)$ // J. Math. Phys. 2009. V. 50. № 10. Paper 102710, 23 pages.
6. Garifullin R.N., Yamilov R.I. *Generalized symmetry classification of discrete equations of a class depending on twelve parameters* // J. Phys. A: Math. Theor. 2012. V. 45. 345205(23pp).
7. Старцев С.Я. *О дифференциальных подстановках типа преобразования Миуры* // ТМФ. 1998. Т. 116. № 3. С. 336–348.
8. Sokolov V. V., Zhiber A. V. *On the Darboux integrable hyperbolic equations* // Physic Letters A. 1995. V. 208. P. 303–308.
9. I.M. Anderson, M. Juras. *Generalized Laplace invariants and the method of Darboux* // Duke Math. J. 1997. V. 89. № 2. P. 351–375.
10. Ямилов Р.И. *Обратимые замены переменных, порожденные преобразованиями Беклунда* // ТМФ. 1990. Т. 85. № 3. С. 368–375.
11. Yamilov R.I., *Construction scheme for discrete Miura transformation* // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. P. 6839–6851.
12. Yamilov R.I., *Symmetries as integrability criteria for differential-difference equations* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. R541–R623.
13. Соколов В.В. *О симметриях эволюционных уравнений* // УМН. 1988. Т. 43, № 5, С. 133–163.
14. Startsev S. Ya. *On non-point invertible transformations of difference and differential-difference equations* // SIGMA. 2010. V. 6. Paper 092 (14 pages).

Сергей Яковлевич Старцев,
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
ул. Чернышевского, 112,
450008, г. Уфа, Россия
E-mail: startsev@anrb.ru