ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 104-154.

УДК 517.957

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СЕПАРАНТОЙ

А.Г. МЕШКОВ, В.В. СОКОЛОВ

Аннотация. В обзоре приведены результаты классификации интегрируемых однополевых эволюционных уравнений порядков 2, 3 и 5 с постоянной сепарантой. Классификация основана на необходимых условиях интегрируемости, вытекающих из существования у интегрируемых уравнений формального рекурсионного оператора. Впервые приведены рекуррентные формулы для всей бесконечной последовательности необходимых условий. Бо́льшая часть классификационных утверждений может быть найдена в работах С.И. Свинолупова и В.В. Соколова, однако доказательства публикуются впервые. Результат, касающийся уравнений пятого порядка, является более сильным, чем полученные ранее.

Ключевые слова: эволюционное дифференциальное уравнение, интегрируемость, высшая симметрия, закон сохранения, классификация.

Введение

Этот обзор посвящен классификации интегрируемых эволюционных уравнений вида

$$u_t = u_n + F(x, u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_{n-1}), \qquad u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}. \tag{0.1}$$

Уравнения с таким характером вхождения старшей производной по x часто называют уравнениями с постоянной сепарантой.

Поясним, что понимается под интегрируемостью в настоящей статье. К сожалению, единого строгого определения интегрируемости дифференциальных уравнений в настоящий момент не существует (по поводу разных подходов см., например, [1–3]). Однако для некоторых типов дифференциальных уравнений имеются эффективные критерии интегрируемости, которые не только могут быть проверены для данного уравнения, но и позволяют найти все уравнения из данного класса, удовлетворяющие данному критерию.

Для эволюционных уравнений (0.1) с одной временной и одной пространственной переменной наиболее эффективным критерием интегрируемости является существование высших локальных симметрий. Определяющее соотношение для симметрии – это билинейное тождество, включающее в себя как правую часть уравнения, так и правую часть симметрии. В работах [4,7] был предложен способ «исключения симметрии» из этого соотношения и получения необходимых условий существования симметрий только в терминах правой части уравнения. Эти условия, которые мы называем условиями интегрируемости, записываются в виде так называемых канонических законов сохранения. Основными их

A.G. Meshkov, V.V. Sokolov, Integrable evolution equations with a constant separant.

Авторы признательны А.В. Михайлову, С.И. Свинолупову и А.Б. Шабату за многочисленные полезные обсуждения. В. С. благодарен институту Макса Планка (Бонн) за гостеприимство. Исследования частично поддерживались грантом РФФИ 11-01-00341-а, грантом поддержки научных школ 6501.2010.2 и грантом Министерства образования и науки РФ (проект 1.2.11).

Поступила 20 января 2012 г.

достоинствами является независимость условий от порядка симметрии и инвариантность относительно любых точечных преобразований, не выводящих из класса уравнений (0.1).

В работах [4–7] было показано, как необходимые условия интегрируемости выводятся из наличия у уравнения (0.1) бесконечной серии высших симметрий или законов сохранения. Более подробно техника получения условий изложена в обзорах [8,9]. Здесь мы ее не касаемся. Отметим, что имеется альтернативный способ [10,11] для вычисления канонических законов сохранения через логарифмическую производную формальной собственной функции оператора линеаризации для уравнения (0.1) (см. приложение 3). Эквивалентность этих двух способов для скалярных уравнений следует из теоремы 2.9 обзора [12].

Опишем результаты работы. В главе 1 на простейших примерах мы показываем, как выглядят канонические законы сохранения и как с их помощью можно классифицировать интегрируемые уравнения. В частности, в этой главе решена задача классификации уравнений (0.1) при $n = 2$. Интегрируемые эволюционные уравнения второго порядка общего вида проклассифицированы в [13]. Результаты последней работы обобщены на случай слабо нелокальных симметрий в [14].

В главе 2 приведено решение задачи классификации интегрируемых уравнений вида

$$u_t = u_3 + F(x, u,\, u_1,\, u_2). \tag{0.2}$$

К этому классу принадлежит знаменитое уравнение Кортевега – де Фриза

$$u_t = u_3 + uu_1. \tag{0.3}$$

Случай, когда функция F не зависит от u_2 и x (см. раздел 1.2), рассматривался в [4, 15]. Результаты главы 2 были анонсированы в [5, 6], однако доказательство публикуется впервые. Также впервые найдена рекуррентная формула, описывающая всю бесконечную серию канонических плотностей. В работах [5,6] в явной форме были приведены только 4 первые плотности, которые реально использовались при классификации. Интегрируемые эволюционные уравнения третьего порядка, более общие, чем (0.2), изучались в [9, 16, 17].

В главе 3 рассматривается вычислительно сложная задача классификации интегрируемых уравнений вида

$$u_t = u_5 + F(u, u_1, u_2, u_3, u_4). \tag{0.4}$$

В заметке [18] анонсировалось решение этой задачи при дополнительном предположении, что четные канонические плотности тривиальны (см. замечание 2). Однако не только доказательство, но и полный список найденных уравнений, в [18] отсутствует. Впервые список уравнений (0.4), обладающих высшими законами сохранения, был опубликован в [9]. В настоящей работе условие тривиальности четных канонических плотностей не используется и, таким образом, решается технически более сложная задача классификации уравнений (0.4), обладающих высшими симметриями. Ответ по существу совпал со списком из [9]. Как и в случае уравнений 3-го порядка, впервые найдена общая формула для всей бесконечной серии канонических плотностей.

Результаты работ [5, 6, 9, 18] были получены с помощью тяжелых вычислений, выполненных «руками». Поэтому имелась ненулевая вероятность ошибок, которые могли привести к потере интегрируемых уравнений. С появлением компьютерных систем типа Maple, Mathematika и т.д. возникла возможность частично автоматизировать вычисления. Результаты настоящей статьи были получены с помощью пакета программ Jet, написанного первым автором. Существенных ошибок в списках интегрируемых уравнений обнаружено не было, однако было исправлено несколько типографских опечаток в работе [9].

На первый взгляд кажется, что задача классификации интегрируемых уравнений (0.1) с произвольным n весьма далека от полного решения. Это не совсем так. Всякое интегрируемое уравнение вместе со всеми своими симметриями образует так называемую иерархию интегрируемых уравнений. В случае уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния [19], все уравнения иерархии обладают одним и тем же L-оператором. Этот факт лежит в основе коммутативности потоков в иерархиях (каждое уравнение иерархии является симметрией для всех остальных). Общее утверждение о «почти» коммутативности локальных симметрий уравнения (0.1) содержится в [20].

В работах [21, 22] при предположении полиномиальности и однородности правой части уравнения (0.1) доказано, что его иерархия обязательно содержит уравнение второго, третьего или пятого порядка. Утверждение представляется чрезвычайно правдоподобным и без всяких дополнительных ограничений на правую часть уравнения. Доказательство в общем случае отсутствует, и утверждение имеет статус гипотезы, широко известной специалистам. Никаких контрпримеров к этой гипотезе неизвестно.

По модулю гипотезы, в обзоре описаны все иерархии интегрируемых уравнений вида (0.1). Другими словами, всякое интегрируемое уравнение порядка 4 или порядка > 5 эквивалентно высшей симметрии одного из уравнений, приведенных в настоящем обзоре. Отметим, что вычисление симметрий заданного уравнения является линейной задачей, для решения которой имеется несколько эффективных компьютерных программ. Кроме того, высшие симметрии могут быть найдены с помощью квазилокальных рекурсионных операторов (см. [23] и ссылки там).

Разнообразные результаты по классификации интегрируемых систем эволюционных уравнений можно найти в [8, 24–40]. Дальнейшие ссылки содержатся, например, в обзоре [41].

Отдельной сложной задачей является классификация интегрируемых гиперболических уравнений и систем [42–50].

1. Простейшие классификационные задачи

Все необходимые условия интегрируемости, которые мы будем использовать далее, имеют вид локальных законов сохранения. Напомним [51], что локальным законом сохранения для уравнения (0.1) называется пара функций ρ и θ, зависящих от конечного числа переменных $x, u, u_1, \dots$ такая, что

$$\frac{d}{dt}(\rho) = \frac{d}{dx}(\theta). \tag{1.1}$$

Здесь

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + u_1\frac{\partial}{\partial u_0} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_3\frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots, \qquad u_0 = u, \tag{1.2}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + K_0\frac{\partial}{\partial u_0} + K_1\frac{\partial}{\partial u_1} + K_2\frac{\partial}{\partial u_2} + \cdots,$$

где

$$K_i = \frac{d^i}{dx^i}\Big(u_n + F(x, u_0,\, u_1,\, u_2, \dots, u_{n-1})\Big).$$

Операторы $\dfrac{d}{dx}$ и $\dfrac{d}{dt}$ часто называют полной производной по x и полной производной по t в силу уравнения (0.1). Функция ρ называется плотностью, а θ – током закона сохранения.

Соотношение (1.1) называется законом сохранения по следующей причине. Рассмотрим, например, уравнение Кортевега – де Фриза $u_t = u_3 + uu_1$. Известно, что оно обладает бесконечным набором законов сохранения. В частности, поскольку уравнение можно переписать в виде

$$u_t = (u_2 + \frac{1}{2}u^2)_x,$$

функция u является плотностью закона сохранения. Предположим, что решение $u(x,t)$ убывает при $|x| \to \infty$. Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} u\,dx = 0,$$

т.е. площадь под графиком решения не зависит от t. Аналогично, сохраняются интегралы и от остальных плотностей законов сохранения.

Ясно, что если ρ – плотность закона сохранения, то плотностью также является $\rho_1 = \rho + \dfrac{d}{dx}(h)$ для любой функции h. Две такие плотности мы называем эквивалентными и пишем $\rho \sim \rho_1$. Закон сохранения называется тривиальным, если $\rho \sim 0$.

Порядок старшей производной, от которой зависит функция $f(x,u,u_1,\ldots,u_k)$, называется **дифференциальным** порядком этой функции. Дифференциальный порядок обычно обозначают как $\operatorname{ord} f = k$. Порядком закона сохранения называется минимальный из **дифференциальных** порядков эквивалентных плотностей.

Вывод необходимых условий интегрируемости в виде бесконечной серии так называемых канонических законов сохранения подробно обсуждался в [8–11], альтернативный вариант см. в приложении 3. В этой статье мы часто приводим соответствующие формулы без доказательств. Зато мы подробно останавливаемся на том, как из этих необходимых условий извлечь полный список интегрируемых уравнений вида (0.2), и описываем точечные преобразования, необходимые для приведения произвольного интегрируемого уравнения к одной из канонических форм.

1.1. Интегрируемые уравнения типа Бюргерса. Рассмотрим эволюционные уравнения второго порядка:

$$u_t = u_2 + f(x,\, u,\, u_1). \tag{1.3}$$

Канонические плотности для этого уравнения задаются следующей рекуррентной формулой:

$$2\rho_{n+1} = \theta_n + \sum_{i=0}^{n}\rho_{n-i}\rho_i - \frac{\partial f}{\partial u_1}\rho_n + \frac{\partial f}{\partial u_1}\delta_{n,-1} + \frac{\partial f}{\partial u}\delta_{n0} - \frac{d}{dx}\rho_n, \quad n \geqslant -1. \tag{1.4}$$

Здесь $\rho_{-1} = 0$, δ_{ij} – символ Кронекера. Один из способов получения подобных формул описан в приложении 3. Токи, соответствующие этим плотностям, вычисляются последовательно в процессе классификации. При этом препятствия к их существованию накладывают ограничения на правую часть уравнения (0.2), что в конечном итоге и позволяет найти все интегрируемые уравнения (1.3).

Полагая в (1.4) $n = -1, 0$, находим два первых канонических закона сохранения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{d}{dx}\sigma_1, \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma_1 + 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2\right) = \frac{d}{dx}\sigma_2, \tag{1.6}$$

где $\sigma_1 = 2\,\theta_0$ и $\sigma_2 = 4\,\theta_1 + \dfrac{d}{dx}\sigma_1$.

Первая из формул означает, что для любого интегрируемого уравнения (1.3) частная производная от его правой части по u_1 является плотностью закона сохранения. Например, для уравнения Бюргерса $u_t = u_2 + uu_1$ эта формула дает плотность $\rho = u$. Функция σ_1 в этом случае легко вычисляется:

$$\sigma_1 = u_2 + \frac{1}{2}u^2.$$

Общий алгоритм вычисления тока при заданной плотности приводится ниже (см. замечание 4).

Продемонстрируем основные приемы работы с условиями типа (1.5), (1.6). Для того чтобы определить характер зависимости правой части уравнения от u_1, проще всего исключить неизвестную функцию σ_1 в (1.5). Для этого применим к обеим частям (1.5) оператор Эйлера

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{d}{dx} \circ \frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{d^2}{dx^2} \circ \frac{\partial}{\partial u_2} - \cdots$$

Хорошо известно [51], что

$$\frac{\delta}{\delta u} \circ \frac{d}{dx} = 0,$$

и поэтому

$$0 = \frac{\delta}{\delta u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) = -2u_4\frac{\partial^3 f}{\partial u_1^3} - 4u_3\frac{d}{dx}\frac{\partial^3 f}{\partial u_1^3} + O(2), \tag{1.7}$$

где символ $O(2)$ означает члены, имеющие по производным порядки не выше второго. Последнее равенство должно выполняться для любого решения (1.3). Поскольку не существует обыкновенного дифференциального уравнения по переменной x, которому удовлетворяют все решения уравнения (1.3), соотношение (1.7) должно выполняться тождественно по переменным $u, u_1, \ldots, u_4$. Приравнивая к нулю коэффициент при u_4, находим, что уравнение имеет вид

$$u_t = u_2 + A(x,u)u_1^2 + B(x,u)u_1 + C(x,u). \tag{1.8}$$

Итак, всякое интегрируемое уравнение (1.3) квадратично по u_1. Можно проверить, что для уравнения вида (1.8) условие (1.7) эквивалентно двум следующим уравнениям:

$$(C\varphi)_u = (B\varphi - \varphi_x)_x, \qquad \varphi_u = A\varphi,$$

где $\varphi = B_u - 2A_x$.

Учитывая, что интегрируемость всякого дифференциального уравнения сохраняется при точечных преобразованиях, упростим уравнение (1.8) точечным преобразованием $u = \psi(x,v)$, прежде чем продолжать исследование условий интегрируемости. Несложные вычисления приводят к следующему уравнению для v:

$$v_t = v_2 + v_1^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + A(x,\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2\right) + \bar{B}(x,v)v_1 + \bar{C}(x,v).$$

Очевидно, что уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + A(x,\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 = 0$$

имеет решение, зависящее от v при любой функции A. Поэтому точечным преобразованием можно сделать функцию A в уравнении (1.8) равной нулю. Это преобразование – первый шаг при приведении всякого интегрируемого уравнения к одной из канонических форм.

Условие (1.5) для уравнения

$$u_t = u_2 + B(x,u)u_1 + C(x,u) \tag{1.9}$$

принимает следующий вид:

$$B_u\big(u_2 + B(x,u)u_1 + C(x,u)\big) = \frac{d}{dx}\sigma_1. \tag{1.10}$$

Поскольку для использования условия (1.6) нам необходимо полностью или частично знать функцию σ_1, вместо применения вариационной производной к обеим частям (1.10) используем альтернативный прием, состоящий в выделении полной производной в левой части (1.10). Этот прием абсолютно алгоритмичен и может быть запрограммирован на любом языке символьных вычислений (см. замечание 4 на стр. 113).

Имеем

$$B_u u_2 + B_u B u_1 + B_u C = \frac{d}{dx}\left(B_u u_1 + \frac{1}{2}B^2\right) - u_1(B_{uu}u_1 + B_{ux}) - BB_x + B_u C =$$
$$= \frac{d}{dx}\left(B_u u_1 + \frac{1}{2}B^2 - B_x\right) - B_{uu}u_1^2 + B_{xx} - BB_x + B_u C.$$

Подставив последнее выражение в (1.10), получаем

$$-B_{uu}u_1^2 + B_{xx} - BB_x + B_u C = \frac{d}{dx}\left(\sigma_1 - B_u u_1 - \frac{1}{2}B^2 + B_x\right) \equiv \frac{d\psi}{dx}.$$

Поскольку левая часть зависит только от x, u, u_1, то функция ψ может зависеть только от x и u. Подставляя $\dfrac{d\psi}{dx} = \psi_x + \psi_u u_1$, и приравнивая коэффициенты при u_1^2 и u_1, получаем

$$B_{uu} = 0, \qquad \psi_u = 0, \qquad B_{xx} - BB_x + B_u C = \psi_x.$$

Полагая $B = \alpha(x)u + \beta(x)$, находим, что всякое интегрируемое уравнение (1.9) имеет вид

$$u_t = u_2 + \big(\alpha(x)u + \beta(x)\big)u_1 + C(x,u), \tag{1.11}$$

где

$$\alpha C(x,u) - \alpha\alpha' u^2 + (\alpha'' - \alpha\beta' - \alpha'\beta)u = \psi' + \beta\beta' - \beta''. \tag{1.12}$$

При этом

$$\sigma_1 = \psi + \alpha u_1 + \frac{1}{2}(\alpha u + \beta)^2 - \alpha' u - \beta'. \tag{1.13}$$

Если $\alpha \neq 0$, то из (1.12) определяется функция C. В этом случае уравнение (1.11) можно упростить точечным преобразованием $u \to u\, f_1(x) + f_2(x)$. Выбрав $f_1 = 1/\alpha$ $f_2 = 2\alpha'/\alpha^2 - \beta/\alpha$, мы получаем $\alpha = 1$, $\beta = 0$. При этом уравнение (1.11) принимает вид

$$u_t = u_{xx} + uu_x + \psi'(x). \tag{1.14}$$

Условия (1.5), (1.6), так же как и все остальные необходимые условия интегрируемости, для этого уравнения выполнены. Уравнение Бюргерса (1.14) сводится к линейному уравнению

$$v_t = v_{xx} + \varphi(x)v_x,$$

подстановкой Коула – Хопфа $u = 2v_x/v + \varphi(x)$, где φ и ψ связаны соотношением $\varphi'' + \varphi\varphi' = -\psi'$.

В случае $\alpha = 0$ в уравнении (1.10) левая часть обращается в нуль, поэтому σ_1 — постоянная. Далее из условия (1.6) имеем

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\sigma_1 + 2\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2\right)_t = 0,$$

что равносильно системе уравнений

$$C_{uuu} = 0, \quad CC_{uu} + C_{xuu} - (\beta C_u)_x + \psi'(x) = 0.$$

Отсюда $C = p(x)u + q(x)$, и мы приходим к линейному уравнению

$$u_t = u_{xx} + \beta(x)u_x + p(x)u + q(x). \tag{1.15}$$

Для этого уравнения все необходимые условия интегрируемости выполнены.

Замечание 1. Среди полученных нами интегрируемых уравнений второго порядка (1.14) и (1.15) отсутствует пропотенциированное уравнение Бюргерса $u_t = u_{xx} + u_x^2$. Причина в том, что это уравнение линеаризуется точечным преобразованием $u = \ln v$. Это преобразование — частный случай точечного преобразования, которое было применено к уравнению (1.8) для уничтожения функции A.

1.2. Интегрируемые уравнения типа КдФ. Полученный в предыдущем разделе список интегрируемых уравнений довольно беден. Рассмотрим более содержательную классификационную задачу. Найдем все интегрируемые эволюционные уравнения вида

$$u_t = u_3 + f(u_1, u). \tag{1.16}$$

Оказывается (см. раздел 2.1), что для всякого такого интегрируемого уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) = \frac{d}{dx}(\sigma_1), \tag{1.17}$$

где σ_1 — некоторая функция, зависящая от $u, u_x, ..., u_3$.

Пример 1. Для уравнения мКдФ $u_t = u_3 + u^2 u_1$ закон сохранения (1.17) имеет вид

$$(u^2)_t = (2uu_2 - u_1^2 + \frac{1}{2}u^4)_x. \qquad \square$$

Применяя к обеим частям (1.17) оператор Эйлера, получаем

$$0 = \frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)_t = 3u_4\left(u_2\,\frac{\partial^4 f}{\partial u_1^4} + u_1\,\frac{\partial^4 f}{\partial u_1^3 \partial u}\right) + O(3). \tag{1.18}$$

Последнее равенство должно выполняться для любого решения (1.16) и поэтому должно быть тождеством по переменным $u, u_1, \ldots, u_4$. Приравнивая к нулю коэффициент при u_4, и пользуясь тем, что f не зависит от u_2, находим, что

$$f(u_1, u) = \mu u_1^3 + A(u)u_1^2 + B(u)u_1 + C(u)$$

с некоторой постоянной μ. Нетрудно проверить, что для такой функции f условие (1.18) эквивалентно системе ОДУ

$$\mu A' = 0, \qquad B''' + 8\mu B' = 0, \qquad (B'C)' = 0, \qquad AB' + 6\mu C' = 0.$$

Следующее необходимое условие интегрируемости имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = \frac{d}{dx}(\sigma_2)$$

откуда

$$\frac{\delta}{\delta u}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0. \tag{1.19}$$

Последнее условие приводит к дополнительным уравнениям

$$A' = 0, \qquad AC'' = 0, \qquad (C''' + 2\mu C')' = 0, \qquad (CC'')' = 0.$$

В случае $\mu \neq 0$ полученных уравнений достаточно для полного определения функций A, B и C. В результате, с точностью до растяжения $u \to const\, u$, мы приходим к уравнениям

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3 + (c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u} + c_3)\, u_x \tag{1.20}$$

и

$$u_t = u_{xxx} + c_1 u_x^3 + c_2 u_x^2 + c_3 u_x + c_4, \tag{1.21}$$

где c_i — произвольные постоянные.

Если $\mu = 0$, то, решая приведенную выше систему ОДУ для функций A, B, C, получаем, что уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xxx} + c_0 u_x^2 + (c_1 u^2 + c_2 u + c_3)u_x + c_4 u + c_5,$$

причем

$$c_0c_1 = 0, \qquad c_0c_2 = 0, \qquad c_4c_1 = 0, \qquad c_4c_2 = 0, \qquad c_1c_5 = 0.$$

Из третьего условия интегрируемости (см. раздел 2) находим дополнительные соотношения:

$$c_0c_4 = 0, \qquad c_2c_5 = 0.$$

В случае $c_0 \neq 0$ приходим к частному случаю уравнения (1.21). Если же $c_0 = 0$, то возможны два случая: а) $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, $c_4 = c_5 = 0$ и б) $c_1 = c_2 = 0$, приводящие к двум следующим уравнениям

$$u_t = u_{xxx} + (c_1u^2 + c_2u + c_3)u_x, \tag{1.22}$$

$$u_t = u_{xxx} + c_3u_x + c_4u + c_5. \tag{1.23}$$

Всякое линейное уравнение специалистами по нелинейным уравнениям по определению считается точно интегрируемым. Уравнения (1.20), (1.21) и (1.22) были найдены с помощью необходимых условий интегрируемости. Поэтому то, в каком смысле они действительно интегрируемы, следует обсуждать отдельно. Хорошо известно, что ко всем этим уравнениям применим метод обратной задачи рассеяния. Кроме того, все они связаны с уравнением КдФ $u_t = u_3 + uu_1$ дифференциальными подстановками типа преобразования Миуры [52].

Замечание 2. Условия (1.18), (1.19) выполнены для уравнений (1.16), обладающих высшими симметриями. Если уравнение обладает высшими законами сохранения (существование симметрий при этом не предполагается), условие (1.18) по-прежнему выполняется, а условие (1.19) может быть усилено:

$$\frac{\delta}{\delta u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) = 0.$$

Это следует из общего утверждения [5], согласно которому для уравнений с высшими законами сохранения канонические плотности с четными номерами тривиальны.

1.3. О допустимых точечных преобразованиях. В процессе классификации интегрируемых уравнений мы, как правило, пользуемся точечными преобразованиями, приводя интегрируемое уравнение к той или иной канонической форме. Например, в разделе 1.1 мы использовали точечные преобразования при приведении уравнения (1.8) к виду (1.9), а также при нормировании функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в уравнении (1.11).

Опишем точечные преобразования, которые применяются при классификации уравнений (0.1).

Всякое уравнение вида (0.1) допускает преобразования

$$\tilde{u} = \varphi(u, x). \tag{1.24}$$

Здесь и далее, если формулы преобразования каких-либо переменных t, x или u не указываются, это означает, что соответствующие переменные не меняются. Допускаются также растяжения

$$\tilde{x} = ax, \qquad \tilde{t} = a^n t. \tag{1.25}$$

При этом

$$F(x, u, u_1, u_2, \dots) \to a^{-n}F(a^{-1}x, u, au_1, a^2u_2, \dots).$$

Для некоторых подклассов уравнений (0.1) допускаются дополнительные преобразования, зависящие от t. В частности, если $F(x, \lambda u, \lambda u_1, \dots, \lambda u_{n-1}) = \lambda F(x, u, u_1, \dots, u_{n-1})$, то при произвольных постоянных a и b допускается преобразование

$$\tilde{u} = u\exp(at + bx). \tag{1.26}$$

При этом преобразовании $u_n \to (\partial_x - b)^n u, \quad F \to F + au.$

Если, как в разделе 1.2, предполагается, что правая часть F уравнения (0.1) не зависит от переменной x, то класс допустимых преобразований меняется. Из (1.24) допускаются лишь преобразования вида

$$\tilde{u} = \varphi(u). \tag{1.27}$$

Одновременно возникают дополнительные точечные преобразования. В частности, всегда допускается преобразование Галилея

$$\tilde{x} = x + ct, \tag{1.28}$$

при котором $F \to F - cu_1$. Если функция F не зависит от u и x, то преобразование

$$\tilde{u} = u + c_1 x + c_2 t \tag{1.29}$$

является допустимым. При таком преобразовании

$$F(u_1, u_2, u_3, \dots) \to F(u_1 - c_1, u_2, u_3, \dots) + c_2.$$

Уравнения, связанные описанными выше преобразованиями, называются *эквивалентными*. Важно отметить, что наша классификация является чисто алгебраической. Такие свойства решений исследуемых уравнений, как вещественность, нас здесь не интересуют. Поэтому функции и постоянные, входящие в формулы (1.24)–(1.26) могут быть как вещественными, так и комплексными. К примеру, уравнения $u_t = u_3 - u_1^3$ и $u_t = u_3 + u_1^3$ считаются эквивалентными.

Интегрируемые уравнения могут содержать произвольные постоянные, которые устраняются тем или иным преобразованием. Рассмотрим в качестве примера уравнение (1.21), где $c_1 \neq 0$. С помощью (возможно комплексного) растяжения $u \to \lambda u$ зафиксируем нормировку $c_1 = 1$. Далее, преобразование $u \to u + \alpha x + \beta t$ приводит к уравнению

$$u_t + \beta = u_{xxx} + (u_x + \alpha)^3 + c_2(u_x + \alpha)^2 + c_3(u_x + \alpha) + c_4.$$

Легко видеть, что при $\alpha = -c_2/3$ и $\beta = c_4 + \alpha^3 + c_2\alpha^2 + c_3\alpha$ получаем $c_2 = 0$, $c_4 = 0$. Постоянная c_3 уничтожается преобразованием Галилея, и мы получаем потенциированное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза:

$$u_t = u_{xxx} + u_x^3.$$

Аналогично, несущественными являются параметры в уравнении (1.22).

2. Уравнения третьего порядка с постоянной сепарантой

2.1. Условия интегрируемости. Для уравнений вида (0.2) бесконечная цепочка канонических законов сохранения

$$\frac{d}{dt}(\rho_n) = \frac{d}{dx}(\theta_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2.1}$$

может быть задана формулами (вывод см. в приложении 3):

$$\rho_{n+2} = \frac{1}{3}\left[\theta_n - \delta_{n,0}F_u - F_{u_1}\rho_n - F_{u_2}\left(\frac{d}{dx}\rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_{s=0}^{n}\rho_s\,\rho_{n-s}\right)\right] - \sum_{s=0}^{n+1}\rho_s\,\rho_{n+1-s}$$
$$-\frac{1}{3}\sum_{0\leqslant s+k\leqslant n}\rho_s\,\rho_k\,\rho_{n-s-k} - \frac{d}{dx}\left[\rho_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n}\rho_s\,\rho_{n-s} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\rho_n\right], \quad n \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где два первых элемента последовательности ρ_i имеют вид

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}F_{u_2}, \qquad \rho_1 = \frac{1}{9}F_{u_2}^2 - \frac{1}{3}F_{u_1} + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}F_{u_2}.$$

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $F_{u_i} = \partial F/\partial u_i$, где $i = 0, 1, 2$. Токи θ_n вычисляются последовательно в процессе классификации. При этом препятствия к их существованию приводят к дифференциальным уравнениям, которым должна удовлетворять правая часть интегрируемого уравнения (0.2).

Нетрудно проверить, что первые четыре условия из этой серии эквивалентны условиям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u_2} = \frac{d}{dx}\sigma_0, \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dt}\left(3\frac{\partial F}{\partial u_1} - \left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)^2\right) = \frac{d}{dx}\sigma_1, \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\left(9\sigma_0 + 2\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)^3 - 9\left(\frac{\partial F}{\partial u_2}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}\right) + 27\frac{\partial F}{\partial u}\right) = \frac{d}{dx}\sigma_2, \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}\sigma_1 = \frac{d}{dx}\sigma_3, \tag{2.6}$$

приведенным в [6]. При этом $\sigma_0 = -3\theta_0,\ \sigma_1 = 3\dfrac{d}{dx}\sigma_0 - 9\theta_1, \ldots$ Как будет показано ниже, этих четырех условий «почти» хватает для получения полного списка интегрируемых уравнений (0.2).

Чтобы эффективно использовать каноническую серию для классификации, полезно сначала изучить возможную структуру плотностей локальных законов сохранения малых порядков для рассматриваемого класса уравнений.

Лемма 1. *Если плотность ρ закона сохранения для уравнения (0.2) имеет дифференциальный порядок* $\operatorname{ord}\rho = 2$, *то*

$$\rho = f_1 u_2^2 + f_2 u_2 + f_3, \tag{2.7}$$

где f_i — некоторые функции от x, u, u_1, причем

$$\frac{d}{dx}f_1 = \frac{2}{3}f_1\frac{\partial F}{\partial u_2}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Уничтожая вычитанием полных x-производных члены с u_5 и u_4, находим, что

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho &= \frac{\partial\rho}{\partial u}(u_3 + F) + \frac{\partial\rho}{\partial u_1}\left(u_4 + \frac{d}{dx}F\right) + \frac{\partial\rho}{\partial u_2}\left(u_5 + \frac{d^2}{dx^2}F\right) \sim \\ &\sim \frac{u_3^3}{2}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_2^3} + \frac{3}{2}u_3^2\left(\frac{\partial^3\rho}{\partial u_2^2\partial u_1}u_2 + \frac{\partial^3\rho}{\partial u_2^2\partial u}u_1 + \frac{\partial^3\rho}{\partial u_2^2\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_2^2}\right) + \cdots,\end{aligned} \tag{2.9}$$

где многоточие означает линейное по u_3 выражение. По определению закона сохранения, последнее выражение должно иметь вид $\dfrac{d}{dx}\sigma$. Ясно, что функция σ не может зависеть от производных выше, чем u_2, а функция $\dfrac{d}{dx}\sigma$ имеет по u_3 степень не выше единицы. Поэтому, приравняв к нулю коэффициенты при u_3^3 и u_3^2, получаем (2.7) и (2.8). □

Замечание 3. Заметим, что в (2.7) возможно равенство $f_1 = 0$. Это относится и к другим аналогичным леммам.

Замечание 4. При доказательстве леммы 1 использовался следующий алгоритм проверки того, является ли данная функция $S(x, u, u_1, \ldots, u_n)$ полной производной по x (т.е. принадлежит $\operatorname{Im}\dfrac{d}{dx}$). Во-первых, S должна быть линейна по старшей производной u_n. Если это выполнено, то, как легко видеть, из S можно вычесть полную производную так, что разность имеет порядок, меньший, чем n. Продолжая эту процедуру понижения порядка, мы либо дойдем до ситуации, когда функция нелинейна по старшей производной, либо получим ноль.

Покажем, как можно использовать формулы (2.7) и (2.8) при классификации уравнений (0.2).

Лемма 2. *Пусть для уравнения* (0.2) *выполнено первое условие интегрируемости* (2.3). *Тогда F — многочлен по u_2 не выше второй степени.*

Доказательство. Согласно условию (2.3), функция $\dfrac{\partial F}{\partial u_2}$ должна быть плотностью закона сохранения. Применяя к ней лемму 1, запишем уравнения (2.7) и (2.8):

$$\frac{\partial F}{\partial u_2} = f_1 u_2^2 + f_2 u_2 + f_3,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_0} u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} u_2 = \frac{2}{3} f_1 (f_1 u_2^2 + f_2 u_2 + f_3).$$

Так как f_i не зависят от u_2, то, приравнивая коэффициенты при u_2^2, получаем $f_1 = 0$. Проинтегрировав уравнение $\dfrac{\partial F}{\partial u_2} = f_2 u_2 + f_3$ по u_2, приходим к требуемому результату. □

2.2. Список интегрируемых уравнений. Наша основная цель — доказать следующее утверждение [6].

Теорема 1. *С точностью до замен вида* (1.24)–(1.29) *всякое уравнение* (0.2), *удовлетворяющее условиям интегрируемости* (2.1), (2.2) *с* $n = 0, 1, ..., 5$, *принадлежит следующему списку:*

$$u_t = u_{xxx} + u u_x, \tag{2.10}$$

$$u_t = u_{xxx} + u^2 u_x, \tag{2.11}$$

$$u_t = u_{xxx} + u_x^2, \tag{2.12}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2} u_x^3 + (c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u}) u_x, \tag{2.13}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2 + 1)} + a_1 (u_x^2 + 1)^{3/2} + a_2 u_x^3, \tag{2.14}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_{xx}^2}{2 u_x} + \frac{1}{u_x} - \frac{3}{2} \wp(u) u_x^3, \tag{2.15}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2 + 1)} - \frac{3}{2} \wp(u) u_x (u_x^2 + 1), \tag{2.16}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_{xx}^2}{2 u_x}, \tag{2.17}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3 u_{xx}^2}{4 u_x} + c_1 u_x^{3/2} + c_2 u_x^2, \quad c_1 \neq 0 \text{ или } c_2 \neq 0, \tag{2.18}$$

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\, u_{xx}^2}{4\, u_x} + \alpha(x) u_x, \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_{xxx} &- \frac{3\, u_{xx}^2}{4\, u_x} + \frac{3}{\xi} u_{xx} (\sqrt{\alpha'\, u_x} + u_x) + \frac{3\, u_x^3}{\xi^2} + \frac{6}{\xi^2}\, u_x^{5/2} \sqrt{\alpha'} \\ &+ \frac{3\, u_x^{3/2}}{\xi^2 \sqrt{\alpha'}} (\xi \alpha'' - 2 \alpha'^2) + f\, u_x + c_0 + c_1\, u + c_2\, u^2, \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\text{где } \xi = \alpha(x) - u, \quad f = -\frac{\alpha'''}{\alpha'} + \frac{3\alpha''^2}{4\alpha'^2} + 3\frac{\alpha''}{\xi} - 3\frac{\alpha'^2}{\xi^2} - \frac{c_0 + c_1\,\alpha + c_2\,\alpha^2}{\alpha'},$$

$$u_t = u_{xxx} + 3\,u^2 u_{xx} + 9\,u u_x^2 + 3\,u^4 u_x + u_x\alpha(x) + \frac{1}{2}\,u\alpha'(x), \tag{2.21}$$

$$u_t = u_{xxx} + 3\,u u_{xx} + 3\,u_x^2 + 3\,u^2 u_x + (u\gamma(x))_x + \beta(x), \tag{2.22}$$

$$u_t = u_{xxx} + \alpha(x) u_x + \beta(x) u. \tag{2.23}$$

Здесь $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, $a_1, a_2, c_0, c_1, c_2, g_2, g_3$ *— произвольные постоянные,* α, β *и* γ *— произвольные функции.*

Замечание 5. Часто вместо уравнений (2.15) и (2.16) рассматривают точечно эквивалентные им уравнения

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2}\,\frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{Q}{u_x}, \tag{2.24}$$

и

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{8}\,\frac{\big((Q + u_x^2)_x\big)^2}{u_x\,(Q + u_x^2)} + \frac{1}{2} Q''\,u_x. \tag{2.25}$$

В обоих случаях $Q = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4$ — произвольный многочлен. Если $Q' \neq 0$, то в уравнениях (2.24) и (2.25) можно сделать подстановку $u = f(v)$, где $(f')^2 = Q(f)$. Тогда для v получатся уравнения (2.15) и (2.16), соответственно. При этом

$$g_2 = \frac{4}{3}c_2^2 - 4c_1c_3 + 16c_0c_4, \qquad g_3 = \frac{8}{27}c_2^3 - \frac{4}{3}c_1c_2c_3 - \frac{32}{3}c_0c_2c_4 + 4c_0c_3^2 + 4c_1^2c_4.$$

Отметим, что при дробно-линейных преобразованиях

$$u = \frac{z_1\tilde u + z_2}{z_3\tilde u + z_4} \tag{2.26}$$

многочлен Q меняется по закону

$$\tilde Q(\tilde u) = Q\left(\frac{z_1\tilde u + z_2}{z_3\tilde u + z_4}\right)(z_3\tilde u + z_4)^4 (z_1z_4 - z_2z_3)^{-2}.$$

Выражения g_2, g_3 являются инвариантами группы преобразований (2.26). В зависимости от структуры кратных корней многочлен Q может быть приведен преобразованием (2.26) и растяжениями x и t к одной из следующих канонических форм: $Q(x) = x(x-1)(x-k)$, $Q(x) = x(x-1)$, $Q(x) = x^2$, $Q(x) = x$, $Q(x) = 1$ и $Q(x) = 0$. □

Замечание 6. В уравнении (2.15) допускается вырожденный случай $\wp = const$, а в уравнении (2.16) такое же вырождение приводит к частному случаю уравнения (2.14). □

Докажем теорему 1. Отметим, что приведенное ниже доказательство содержит алгоритм приведения произвольного интегрируемого уравнения (0.2) к одной из канонических форм (2.10)–(2.23) точечными преобразованиями.

Доказательство. Согласно лемме 2, всякое интегрируемое уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xxx} + A_2(u_x, u, x)u_{xx}^2 + A_1(u_x, u, x)u_{xx} + A_0(u_x, u, x). \tag{2.27}$$

Легко видеть, что плотность закона сохранения (2.4) имеет вид (2.7), где $f_1 = 3\,A_{2,u_1} - 4\,A_2^2$. Соотношение (2.8) приводит к двум следующим уравнениям:

$$9\frac{\partial^2 A_2}{\partial u_1^2} - 36\,A_2\frac{\partial A_2}{\partial u_1} + 16\,A_2^3 = 0,$$

$$24\,A_2\left(\frac{\partial A_2}{\partial u}u_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x}\right) + 2\,A_1\left(3\frac{\partial A_2}{\partial u_1} - 4\,A_2^2\right) - 9\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial u_1} - 9\frac{\partial^2 A_2}{\partial u\partial u_1}u_1 = 0.$$

Первое из уравнений имеет решение в виде

$$A_2 = -\frac{3}{4B}\frac{\partial B}{\partial u_1}, \qquad \text{где} \quad \frac{\partial^3 B}{\partial u_1^3} = 0, \tag{2.28}$$

при этом второе уравнение принимает следующий вид:

$$\left(2\,A_1 B + 3\,\frac{\partial B}{\partial x} + 3\,u_1\frac{\partial B}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 B}{\partial u_1^2} = 3\,B\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 B}{\partial u_1^2}. \tag{2.29}$$

Из формулы для функции A_2 ясно, что старший коэффициент многочлена $B(u_1)$ без ограничения общности можно считать единицей. Поэтому имеем три случая:

$$\mathbf{I}.\ B = u_1^2 + B_1(x,u)u_1 + B_0(x,u), \quad \mathbf{II}.\ B = u_1 + B_0(x,u), \quad \mathbf{III}.\ B = 1.$$

Уравнение (2.29) выполнено тождественно в случаях **II** и **III**, а в первом случае из него определяется функция A_1:

$$A_1 = -\frac{3}{2B}\left(\frac{\partial B}{\partial x} + u_1\frac{\partial B}{\partial u}\right).$$

Случай I. При точечном преобразовании $u = \varphi(x,v)$ функция B меняется по правилу

$$\tilde{B}(x,v) = (\varphi_v v_1 + \varphi_x)^2 + B_1(x,\varphi)(\varphi_v v_1 + \varphi_x) + B_0(x,\varphi).$$

Поэтому, выбрав в качестве φ любое решение уравнения $\varphi_x = -\frac{1}{2}B_1(x,\varphi)$, сведем дело к случаю $B_1 = 0$.

Возвращаясь к исследованию второго условия интегрируемости (2.4), находим, что

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim -\frac{u_2^4 B_{0,x}}{4\,(u_1^2+B_0)^3} - \frac{u_2^3}{6}\left[\frac{\partial^4 A_0}{\partial u_1^4} + \frac{3}{u_1^2+B_0}\left(u_1\frac{\partial^3 A_0}{\partial u_1^3} - \frac{\partial^2 A_0}{\partial u_1^2}\right) + \Phi(B_0,u,u_1)\right] + \tag{2.30}$$
$$+Z_2 u_2^2 + Z_1 u_2 + Z_0,$$

где выражение Φ зависит от производных функции B_0 и обращается в нуль, когда B_0 — постоянная; Z_i — некоторые функции от x, u, u_1. Приравнивая к нулю коэффициент при u_2^4, находим, что $B_{0,x} = 0$ и, следовательно, $B = u_1^2 + B_0(u)$. Подходящим точечным преобразованием $u \to \varphi(u)$ превратим B_0 в постоянную c_0, равную либо единице (случай **I.1**), либо нулю (случай **I.2**).

Приравнивая теперь к нулю коэффициент при u_2^3 в (2.30), где $\Phi = 0$, $B_0 = c_0$, находим функцию A_0. В итоге, уравнение (2.27) принимает следующий вид:

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\,u_x u_{xx}^2}{2(u_x^2 + c_0)} + A_0(u_1, u, x), \tag{2.31}$$

где A_0 задается одной из двух следующих формул:

$$\mathbf{I.1}.\ c_0 = 1, \quad A_0 = a_0(u_1^2+1)^{3/2} + a_1 u_1(u_1^2+1) + a_2 u_1 + a_3,$$

$$\mathbf{I.2}.\ c_0 = 0, \quad A_0 = \frac{a_0}{u_1} + a_1 u_1^3 + a_2 u_1 + a_3.$$

В обоих случаях $a_i = a_i(x,u)$.

В случае **I.1** из дальнейших следствий второго условия интегрируемости вытекает, что a_0, a_2 и a_3 — постоянные, а функция a_1 зависит только от u. Кроме того, $a_1''' = -8a_1a_1'$, $a_0a_1' = a_3a_1' = 0$. Если $a_1' \neq 0$, то, уничтожив постоянную a_2 преобразованием Галилея, получаем уравнение (2.16). Если $a_1' = 0$, то с точностью до преобразования Галилея имеем уравнение (2.14).

В случае **I.2**, приравнивая к нулю коэффициент при u_2^2 в (2.30), находим уравнение

$$5\frac{\partial a_1}{\partial x}\,u_1^4 - 4\frac{\partial a_2}{\partial u}\,u_1^3 - \frac{\partial a_2}{\partial x}\,u_1^2 + 2\frac{\partial a_3}{\partial x}\,u_1 + \frac{\partial a_0}{\partial x} = 0.$$

Отсюда следует, что a_2 — постоянная, а функции a_0, a_1 и a_3 зависят только от u. Постоянная a_2 уничтожается преобразованием Галилея, а одну из функций a_0, a_1 или a_3 можно сделать постоянной подходящим точечным преобразованием вида $u \to \varphi(u)$.

I.2.1. Если $a_0 \neq 0$, то, не ограничивая общности, можно считать, что $a_0 = 1$. В таком случае второе условие интегрируемости равносильно трем уравнениям: $a_3' = 0$, $a_3 a_1' = 0$, $a_1''' + 8a_1 a_1' = 0$. Если $a_1' \neq 0$, то, положив $a_1 = -3/2\wp$, приходим к уравнению (2.15). Если $a_1' = 0$, то допускается преобразование $u \to u + a_3 t$, уничтожающее постоянную a_3. В этом случае получаем уравнение, совпадающее с (2.15) с постоянной функцией $\wp$.

I.2.2. Если $a_0 = 0$, то преобразованием $u \to \varphi(u)$ можно упростить a_3 или a_1. Если $a_3 = 0$, то указанным преобразованием можно уничтожить a_1, и мы получаем уравнение (2.17). Если $a_3 \neq 0$, то преобразованием $u \to \varphi(u)$ сделаем a_3 постоянной. Тогда из второго условия интегрируемости следует $a_1' = 0$, что позволяет применить преобразование $u \to u + a_3 t$, уничтожающее a_3. То есть мы пришли к случаю $a_3 = 0$, рассмотренному выше.

В случае **I** полная классификация была получена с использованием только условий (2.3) (лемма 2) и (2.4). Это оказалось возможным потому, что ρ_1 — плотность высокого (второго) порядка.

Случай II. В этом случае $B = u_x + B_0(x, u)$. Преобразованием вида $u \to \psi(x, u)$ можно уничтожить функцию B_0. Полагая $B_0 = 0$, находим, что

$$\rho_0 \sim A_1, \qquad \rho_2 \sim \frac{u_2^2}{u_1^2}\left(2\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2}\, u_1^2 - \frac{\partial A_1}{\partial u_1}\, u_1 + A_1\right) + O(1).$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{d}{dt}\rho_0 \sim \frac{u_2^3}{4\, u_1}\left(2\, u_1 \frac{\partial^3 A_1}{\partial u_1^3} + 3\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2}\right) + h_2 u_2^2 + h_0, \tag{2.32}$$

$$\frac{d}{dt}\rho_2 \sim \frac{u_3^2 u_2}{4\, u_1^3}\left(2u_1^3 \frac{\partial^3 A_1}{\partial u_1^3} + u_1^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2} + u_1 \frac{\partial A_1}{\partial u_1} - A_1\right) + g u_3^2 + O(2), \tag{2.33}$$

где h_i и g — некоторые функции от u_1, u, x. Приравняв к нулю первые члены в этих выражениях, получаем систему, сводящуюся к одному уравнению второго порядка

$$2u_1^2 \frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2} - u_1 \frac{\partial A_1}{\partial u_1} + A_1 = 0.$$

Отсюда $A_1 = a_1(x, u) u_1 + a_2(x, u)\sqrt{u_1}$, и уравнение (2.27) имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\, u_{xx}^2}{4\, u_x} + (a_1 u_x + a_2 \sqrt{u_x}) u_{xx} + A_0(u_x, u, x). \tag{2.34}$$

Приравняв к нулю член при u_2^2 в (2.32), получаем два следуюших соотношения:

$$3\frac{\partial a_2}{\partial u} = a_1 a_2, \qquad 3\frac{\partial a_1}{\partial x} + a_2^2 = 0. \tag{2.35}$$

Для уравнения вида (2.34) имеем

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim Z_3 u_2^3 + Z_2 u_2^2 + Z_1 u_2 + Z_0, \tag{2.36}$$

где $Z_i = Z_i(u_1, u, x)$. Приравнивая к нулю выражение Z_3, получаем для A_0 линейное неоднородное уравнение четвертого порядка, из которого определяется зависимость функции A_0 от u_1:

$$A_0 = \frac{1}{9}\, {u_1}^3 \left(6\, \frac{\partial a_1}{\partial u} + {a_1}^2\right) + \frac{2}{3}\, a_1\, a_2\, {u_1}^{5/2} + a_3\, {u_1}^2 + a_4\, {u_1}^{3/2} + a_5\, u_1 + a_6,$$

где $a_i = a_i(x,u)$. Теперь зависимость всех коэффициентов A_i от u_1 определилась, поэтому можно производить расщепление уравнений по u_1 в условиях интегрируемости. Например, коэффициент Z_2 при u_2^2 в (2.36) линеен по u_1, поэтому равенство $Z_2 = 0$ приводит к двум уравнениям. Эти уравнения имеют вид

$$3\frac{\partial a_4}{\partial u} = a_1a_4 + 2a_2\frac{\partial a_1}{\partial x}, \qquad 6\frac{\partial a_5}{\partial u} - 3a_2a_4 - 12\frac{\partial a_3}{\partial x} + 2\,a_2\frac{\partial a_2}{\partial x} = 0. \tag{2.37}$$

Расщепление по u_1 в условиях (2.3)–(2.5), с учетом уравнений (2.35) и (2.37), дает еще несколько уравнений. Самые простые из них имеют следующий вид:

$$a_2a_3 = 0, \qquad a_2\left(3\frac{\partial a_5}{\partial u} - a_2a_4\right) = 0, \tag{2.38}$$

$$27\frac{\partial^2 a_5}{\partial u^2} - 18a_1\frac{\partial a_5}{\partial u} + 2\,a_2^4 = 0, \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial a_6}{\partial x} = 0, \qquad 3\frac{\partial a_3}{\partial u} = 2\,a_1a_3, \qquad a_2\left(2\frac{\partial a_2}{\partial x} - a_4\right) = 0. \tag{2.40}$$

Для анализа уравнений (2.35)–(2.40) естественно рассмотреть два случая: **II.1** $a_2 = 0$ или **II.2** $a_2 \neq 0$.

II.1. Если $a_2 = 0$, то из (2.35) следует $a_1 = a_1(u)$. Точечное преобразование $u \to \varphi(u)$, где φ удовлетворяет уравнению $3\,\varphi'' + 2\,(\varphi')^2 a_1(\varphi) = 0$, обращает a_1 в нуль. Принимая во внимание соотношения (2.35)–(2.40), можно записать уравнение (2.34) в виде

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\,u_{xx}^2}{4\,u_x} + a_3(x)u_x^2 + a_4(x)u_x^{3/2} + a_5(x,u)u_x + a_6(u), \tag{2.41}$$

где $a_5 = \alpha(x) + 2\,u\,a_3'(x)$. Для этого уравнения условия (2.3)–(2.6) эквивалентны следующим простым соотношениям:

$$a_3 = c_3, \quad a_4 = c_4, \quad a_5 = \alpha(x), \quad a_6 = c_1 + c_2u, \quad c_3c_2 = c_4c_2 = 0, \quad c_3\alpha' = c_4\alpha' = 0,$$

где c_i — произвольные постоянные, α — произвольная функция.

Если $c_3 \neq 0$ или $c_4 \neq 0$, то a_5 и a_6 будут постоянными, которые можно уничтожить преобразованием $x \to x + a_5t$, $u \to u + a_6t$. В результате получаем уравнение (2.18). Если же $c_3 = c_4 = 0$, то уравнение имеет вид

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3\,u_{xx}^2}{4\,u_x} + \alpha(x)u_x + c_1 + c_2u.$$

Если здесь $c_2 = 0$, то преобразование $u \to u + c_1t$ уничтожает постоянную c_1. Если $c_2 \neq 0$, то сдвигом $u \to u - c_1/c_2$ превращаем в нуль c_1, а затем преобразованием $u \to u\exp(c_2t)$ уничтожаем c_2. Таким образом, в любом случае приходим к уравнению (2.19).

II.2. С учетом $a_2 \neq 0$ полагаем $a_2 = (3/\sqrt{2})\exp(\psi/2)$, тогда уравнения (2.35) сводятся к $a_1 = 3/2\psi_u$ и уравнению Лиувилля

$$\psi_{xu} + e^{\psi} = 0. \tag{2.42}$$

Далее из (2.38) и (2.40) находим

$$a_3 = 0, \quad a_6 = a_6(u), \quad a_4 = \frac{3\,e^{\psi/2}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_5}{\partial u} = \frac{3\,e^{\psi}}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{2.43}$$

а уравнение (2.39) сводится к (2.42). Кроме приведенных выше соотношений, условия (2.3) – (2.6) дают ровно одно следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial u}(a_2^2a_6) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial a_2}{\partial x}\right)^2 - 2\,a_2\frac{\partial^2 a_2}{\partial x^2} - a_5a_2^2\right] = 0. \tag{2.44}$$

Форма уравнения (2.42) слегка отличается от стандартной, поэтому приведем его решение

$$\psi = \ln \frac{2\alpha'\nu'}{(\alpha-\nu)^2}, \qquad \alpha'\nu' \neq 0.$$

Отсюда получаем формулу для a_2, которую запишем в следующем виде:

$$a_2 = 3\frac{\sqrt{\alpha'(x)\nu'(u)}}{\alpha-\nu}.$$

Тогда нетрудно найти a_1, a_4 и a_5:

$$a_5 = \frac{3\,\alpha''}{\alpha-\nu} - \frac{3\,\alpha'^2}{(\alpha-\nu)^2} + q(x),$$

где q — произвольная функция. Подставляя a_2 и a_5 в уравнение (2.44), находим функции a_6 и q:

$$a_6 = \frac{c_0 + c_1\nu + c_2\nu^2}{\nu'}, \qquad q = \frac{3\,\alpha''^2}{\alpha'^2} - \frac{\alpha'''}{\alpha'} - \frac{c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2}{\alpha'},$$

где c_i — постоянные разделения переменных.

Поскольку $\nu' \neq 0$, то с помощью точечного преобразования $\tilde{u} = \nu(u)$ ответ можно несколько упростить. В результате приходим к уравнению (2.20).

Случай III. При $B = 1$ из (2.28) следует $A_2 = 0$. Тогда полная производная от ρ_0 по t приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}\rho_0 \sim u_2^3\frac{\partial^3 A_1}{\partial u_1^3} + u_2^2\left(3\frac{\partial^3 A_1}{\partial u\partial u_1^2}\,u_1 + 3\frac{\partial^3 A_1}{\partial x\partial u_1^2} - 2\,A_1\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2}\right) + O(1).$$

Приравняв к нулю выражения при u_2^3 и u_2^2, получаем соответственно

$$A_1 = a_0(x,u) + a_1(x,u)u_1 + a_2(x,u)u_1^2$$

и

$$3\frac{\partial a_2}{\partial u}\,u_1 + 3\frac{\partial a_2}{\partial x} - 2\,a_2(a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2) = 0.$$

Расщепляя последнее соотношение по u_1, находим, что $a_2 = 0$.

Таким образом, уравнение (2.27) принимает следующий вид:

$$u_t = u_{xxx} + \big(a_0(x,u) + a_1(x,u)\,u_x\big)\,u_{xx} + A_0(u_x,u,x). \tag{2.45}$$

Для этого уравнения преобразованием вида $u \to \varphi(x,u)$ можно свести дело к $a_1 = 0$. После этого упрощения нетрудно получить, что

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_2^3\frac{\partial^4 A_0}{\partial u_1^4} + u_2^2\left(3\frac{\partial^4 A_0}{\partial u\partial u_1^3}\,u_1 + 3\frac{\partial^4 A_0}{\partial x\partial u_1^3} - 2\,a_0\frac{\partial^3 A_0}{\partial u_1^3}\right) + O(1).$$

Отсюда, приравняв коэффициент при u_2^3 к нулю, находим

$$A_0 = a_2u_1^3 + a_3u_1^2 + a_4u_1 + a_5,$$

где $a_i = a_i(x,u)$. Тогда коэффициент при u_2^2 дает уравнение, расщепляющееся по u_1 на два следующих:

$$\frac{\partial a_2}{\partial u} = 0, \qquad 2\,a_0a_2 = 3\frac{\partial a_2}{\partial x}. \tag{2.46}$$

Возвращаясь к анализу условий (2.3)–(2.5), можем теперь производить расщепление также и по u_1. С учетом (2.46) это позволяет получить, в частности

$$\frac{\partial^3 a_0}{\partial u^3} = 0, \qquad \frac{\partial^2 a_3}{\partial u^2} = 0, \qquad a_2\left(3\frac{\partial a_2}{\partial x} - 2\frac{\partial a_3}{\partial u}\right) = 0. \tag{2.47}$$

Рассмотрим альтернативные варианты **III.1** $a_2 \neq 0$ или **III.2** $a_2 = 0$.

III.1. Преобразованием $u \to u\,\mu(x)$ можно нормировать $a_2(x)$: $a_2 = -1/2$, что дает $a_0 = 0,\ a_3 = \alpha(x)$. Далее из условия (2.4) находим

$$a_4 = f_0(x) + c_1 e^{2u} + c_2 e^{-2u}, \qquad a_5 = f_1(x) - \frac{u}{6}(4\,\alpha\alpha' + 3\,f_0'),$$

где c_1 и c_2 — постоянные и, кроме того, $c_i\alpha = c_i f_1 = c_i f_0' = 0,\ i = 1,2$.

Если $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, то получаем уравнение, отличающееся от (2.13) преобразованием Галилея. Если $c_1 = c_2 = 0$, то из условия (2.6) определяются f_0 и f_1:

$$f_0 = k_1 - \frac{2}{3}\,\alpha^2, \qquad f_1 = k_2 - \frac{2}{3}(k_1\alpha + \alpha'') + \frac{4}{27}\,\alpha^3,$$

где k_1 и k_2 — постоянные. Выполнив в полученном уравнении преобразование $u \to u + \dfrac{2}{3}\displaystyle\int \alpha(x)dx$, приводим его к виду $u_t = u_3 - u_1^3/2 + k_1 u_1 + k_2$, эквивалентному частному случаю уравнения (2.13).

III.2. Из уравнений (2.47) находим $a_0 = b_1(x)u^2 + b_2(x)u + b_3(x),\ a_3 = b_4(x)u + b_5(x)$. В этом случае уравнение (2.45) упрощается преобразованием $u \to u\,f_1(x) + f_2(x)$. Имеются три неэквивалентных случая: **III.2.a** $a_0 = 3u^2 + b(x)$, **III.2.b** $a_0 = 3u$ и **III.2.c** $a_0 = 0$.

В двух первых случаях несложная проверка условий (2.3)–(2.6) приводит к уравнениям (2.21) и (2.22) соответственно.

В случае **III.2.c** вид уравнения устанавливается из трех условий (2.3)–(2.5):

$$u_t = u_{xxx} + a_3(x)u_x^2 + a_4(x,u)u_x + a_5(x,u),$$

где $a_4 = b_1u^2 + b_2u + b_3,\ a_5 = b_4u^3 + b_5u^2 + b_6u + b_7,\ b_i = b_i(x),\ 1 \leqslant i \leqslant 7$. Из условий интегрируемости (2.3)–(2.6) получается громоздкая система уравнений для функций b_i, исследование которой приводит к нескольким развилкам.

1. Если $a_3 \neq 0$, то $a_3 = c_0,\ b_1 = b_2 = b_4 = b_5 = b_6 = 0,\ b_7 = c_1x + c_2 + \frac{1}{2}b_3'' + \frac{1}{4}b_3^2$. Преобразование $u \to u - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int b_3\,dx$ дает уравнение $u_t = u_3 + c_0u_x^2 + c_1x + c_2$. Из шестого условия интегрируемости следует $c_1 = 0$; затем преобразованием $u \to u + c_2t$ уничтожаем c_2 и получаем (2.12).

2. Если $a_3 = 0$, то $b_1 = \mathrm{const}$, $b_4 = 0$. Далее вновь возникают развилки:

2.1. Если $b_1 \neq 0$, то b_3, b_5, b_6 и b_7 выражаются через $b_2(x)$ так, что преобразование $u \to u - b_2/(2b_1)$ приводит к уравнению, эквивалентному (2.11).

2.2. Если $b_1 = 0$, то получаем $b_2 = \mathrm{const}$, $b_2(b_6 - b_3') = 0,\ b_2(b_3''' + b_3b_3' - b_2b_7) = 0$. Если $b_2 \neq 0$, то преобразование $u \to u - b_3/b_2$ приводит к уравнению, эквивалентному (2.10). В противном случае получаем линейное уравнение (2.23). □

2.3. Комментарии к списку интегрируемых уравнений. В предыдущем разделе показано, что всякое интегрируемое уравнение (0.2) приводится цепочкой точечных преобразований к одному из уравнений (2.10)–(2.23). Хотя ответ в виде списка не является инвариантным относительно точечных преобразований, условия интегрируемости (2.1), (2.2) таковыми являются. Поэтому для проверки интегрируемости данного уравнения не обязательно приводить его к одному из уравнений списка. Согласно доказательству теоремы 1, достаточно проверить четыре условия (2.3)–(2.6), если уравнение принадлежит классам **I** или **II**, и 6 условий (2.2), если уравнение принадлежит классу **III**. Можно показать, что если правая часть уравнения (0.2) не зависит явно от x, то и для уравнений класса **III** достаточно проверки условий (2.3)–(2.6).

Дискретными инвариантами группы точечных преобразований являются порядки канонических законов сохранения (2.1), (2.2). Анализ структуры этих законов сохранения показывает, что уравнения разбиваются на две группы. Для первой группы уравнений (назовем их S-интегрируемыми[1]) каноническая серия содержит законы сохранения как угодно высокого порядка. Отметим, что это свойство жестче, чем просто требование существования у уравнения бесконечной серии законов сохранения. Например, линейное уравнение $u_t = u_{xxx}$ обладает бесконечным набором законов сохранения с плотностями u_k^2, $k \in \mathbb{N}$. Однако все его канонические законы сохранения тривиальны.

Для уравнений второй группы (C-интегрируемые уравнения) среди канонических законов сохранения имеется только несколько нетривиальных. К C-интегрируемым принадлежат уравнения (2.19)–(2.23). Уравнения (2.19) и (2.23) не имеют нетривиальных канонических законов сохранения. Уравнение (2.20) имеет только один нетривиальный канонический закон сохранения первого порядка $\rho_0 \sim \dfrac{\sqrt{\alpha' u_1} + \alpha'}{u - \alpha(x)}$. Уравнения (2.21) и (2.22) имеют по одному каноническому закону нулевого порядка: $\rho_0 \sim u^2$ и $\rho_0 \sim u$ соответственно.

У S-интегрируемых уравнений все канонические законы сохранения с четными номерами тривиальны [7], а порядки нечетных законов возрастают с шагом единица, но начальные порядки в этих последовательностях различны. В табл. 1 приведены порядки первых четырех нечетных канонических законов сохранения для всех S-интегрируемых уравнений.

Таблица 1. Порядки канонических законов сохранения. Для законов сохранения нулевого порядка в скобках указано, чему эквивалентна плотность

ρ_i	(2.10)	(2.11)	(2.12)	(2.13)	(2.14)	(2.16)	(2.15)	(2.17)	(2.18)
ρ_1	0, $(\sim u)$	0, $(\sim u^2)$	0, (~ 0)	1	2	2	2	2	1
ρ_3	0, $(\sim u^2)$	1	1	2	3	3	3	3	2
ρ_5	1	2	2	3	4	4	4	4	3
ρ_7	2	3	3	4	5	5	5	5	4

Для уравнения (2.18) даны порядки плотностей в случае констант общего положения. В случае $c_1 = 0$ имеем $\rho_1 \sim 0$, а остальные порядки остаются без изменения. Если $c_2 = 0$, то порядки будут равны: 1, 0 ($\rho_3 \sim 0$), 2 и 3.

Замечание 7. Уравнения (2.10)–(2.18) интегрируемы методом обратной задачи рассеяния, в то время, как (2.19)–(2.22) линеаризуемы дифференциальными подстановками (см. раздел 2.4). $\square$

Если в постановке исходной классификационной задачи считать, что правая часть уравнения (0.2) не зависит явно от x, то ответ изменится только для C-интегрируемых уравнений. Для уравнений (2.19), (2.21), (2.23) произвольные функции заменяются произвольными постоянными, после чего эти постоянные могут быть уничтожены точечными преобразованиями.

Формула (2.20) содержит два C-интегрируемых уравнения, не зависящих явно от x:

$$\begin{aligned} u_t = u_{xxx} &- \frac{3}{4}\,\frac{u_{xx}^2}{u_x+1} - 3\,u_{xx}u^{-1}(\sqrt{u_x+1} + u_x + 1) \\ &+ 6\,u^{-2}u_x(u_x+1)^{3/2} + 3\,u^{-2}u_x\,(u_x+1)(u_x+2), \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned} u_t = u_{xxx} &- \frac{3}{4}\,\frac{u_{xx}^2}{u_x+1} - 3\,\frac{u_{xx}\,(u_x+1)\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} + 3\,\frac{u_{xx}\sqrt{u_x+1}}{\operatorname{sh} u} \\ &- 6\,\frac{u_x(u_x+1)^{3/2}\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh}^2 u} + 3\,\frac{u_x\,(u_x+1)(u_x+2)}{\operatorname{sh}^2 u} + u_x^2(u_x+3). \end{aligned} \tag{2.49}$$

[1]Терминология принадлежит F. Calogero

Уравнение (2.48) получается из (2.20) с $\alpha = x$, $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ преобразованием $u \to u + x$. Уравнение (2.49) получается в случае $\alpha = e^{2x}$, $c_0 = c_1 = c_2 = 0$ преобразованием $u \to e^{2(u+x)}$. Других уравнений, не зависящих от x, получить из (2.20) нельзя. Это следует, например, из результатов независимой классификации уравнений вида (0.2), не содержащих явно x.

Ситуация с уравнением (2.22) довольно поучительна. Положим функции γ и β постоянными. Тогда константа γ уничтожается преобразованием Галилея. Нетрудно проверить, что если $\beta \neq 0$, то условия интегрируемости выполнены, но канонические законы сохранения зависят явно от x. Это невозможно если при классификации уравнений, обладающих высшими симметриями, требовать, чтобы высшие симметрии также не зависели от x. В этом случае $\beta = 0$ и уравнение (2.22) – это просто симметрия третьего порядка для уравнения Бюргерса. Если же зависимость симметрий от x допускается, то постоянная β в ответе должна быть сохранена.

2.4. Дифференциальные подстановки, связывающие уравнения списка. Говорят, что дифференциальная подстановка

$$\tilde{u} = \Phi(x, u, u_1, \ldots, u_k) \tag{2.50}$$

действует из уравнения

$$u_t = u_n + g(x, u, u_x, \ldots, u_{n-1}) \tag{2.51}$$

в уравнение

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_n + f(x, \tilde{u}, \tilde{u}_x, \ldots, \tilde{u}_{n-1}), \tag{2.52}$$

если для любого решения $u(x,t)$ уравнения (2.51) формула (2.50) дает решение уравнения (2.52). Число k называется порядком подстановки. Поскольку при $k > 0$ преобразование (2.50) не допускает обратного преобразования того же вида, уравнения (2.51) и (2.52) в этом определении неравноправны. Если дифференциальная подстановка имеет вид (2.50), где $\tilde{u}$ удовлетворяет уравнению (A), а u — уравнению (B), то мы изображаем это графически как $(B) \to (A)$.

Наиболее известной дифференциальной подстановкой является преобразование Миуры $\tilde{u} = u_x - u^2$, связывающее уравнения КдФ

$$\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xxx} + 6\,\tilde{u}\,\tilde{u}_x$$

и мКдФ:

$$u_t = u_{xxx} - 6\,u^2\,u_x.$$

Другие подстановки, связывающие основные уравнения списка, были найдены в [52]. Вопрос об обратимости дифференциальных подстановок рассматривался в [53].

Порядки возможных дифференциальных подстановок, связывающих между собой S-интегрируемые уравнения, могут быть найдены из табл. 1. А именно, если уравнения (2.51) и (2.52) связаны подстановкой (2.50), то порядки канонических законов сохранения с достаточно большими номерами для (2.51) на k больше порядков канонических законов сохранения с теми же номерами для (2.52). Например, если уравнения (2.16) и (2.10) связаны дифференциальной подстановкой, то она действует из (2.16) в (2.10) и имеет третий порядок.

Ниже содержится информация о дифференциальных подстановках, связывающих различные интегрируемые уравнения списка. Поскольку композиция дифференциальной подстановки (2.50) и преобразования Галилея выводит из класса подстановок вида (2.50), то иногда, чтобы найти подстановку, нужно прибавлять член вида $c\,u_x$ к правой части уравнения (2.51). Все такие случаи оговорены в приведенном ниже тексте.

I. S-интегрируемые уравнения. Оказывается, что для всех S-интегрируемых уравнений, кроме уравнения Кричевера-Новикова (2.15), существуют подстановки, действующие в уравнение КдФ (2.10). Для уравнения (2.15) такая подстановка существует только когда функция Вейерштрасса вырождена или, что то же самое, многочлен Q в формуле (2.24) имеет кратные корни.

Приведем все подстановки в уравнение КдФ. Если из данного уравнения существует несколько подстановок в (2.10), то мы приводим их все. Уравнения (2.15) и (2.16) мы заменяем на (2.24) и (2.25) соответственно, так как после этого подстановки выглядят более симпатично.

(2.11)→(2.10): $\tilde{u} = \pm i\sqrt{6}\, u_1 + u^2 + \lambda$; при этом $u_t = u_{xxx} + u^2 u_x + \lambda u_x$.

(2.12)→(2.10): $\tilde{u} = 2\, u_1$.

(2.13)→(2.10): $\tilde{u} = 3\, u_2 - \dfrac{3}{2}\, u_1^2 + 2\sqrt{-6\, c_2}\, u_1\, e^{-u} + c_1 e^{2\,u} + c_2 e^{-2\,u}$.

(2.14)→(2.10): $$\tilde{u} = \frac{3\, u_3}{\sqrt{u_1^2+1}} - \frac{3\, u_1\, u_2^2}{(u_1^2+1)^{3/2}} - \frac{3\, u_2^2}{2(u_1^2+1)} - \frac{6\, c_0\, u_1\, u_2}{\sqrt{u_1^2+1}} + 6\, c_0\, u_2 + 3\, a_1\, u_1^2 + {}$$ $$+3\, a_1\, u_1\sqrt{u_1^2+1}, \text{ где } c_0 = \sqrt{(a_1 - a_2)/2}\,.$$

(2.25)→(2.10): $\tilde{u} = \dfrac{d}{dx}\left(6\, \dfrac{u_1 + \sqrt{Q + u_1^2}}{u - a} - \dfrac{3}{2}\, \dfrac{Q' + 2\, u_2}{\sqrt{Q + u_1^2}}\right) - \dfrac{3}{8}\, \dfrac{\big((Q + u_x^2)_x\big)^2}{u_1^2\, (Q + u_x^2)} + \dfrac{1}{2} Q''$, где $Q(a) = 0$.

(2.18)→(2.10): $\tilde{u} = \sqrt{-3\, c_2}\, \dfrac{u_2}{\sqrt{u_1}} + 2 c_2\, u_1 + \dfrac{3}{2}\, c_1 \sqrt{u_1}$.

Приведенные выше подстановки высших порядков являются композициями подстановок первого порядка. Эти подстановки связывают между собой некоторые из S-интегрируемых уравнений. Подстановки первого порядка изображены на графе (рис. 1).

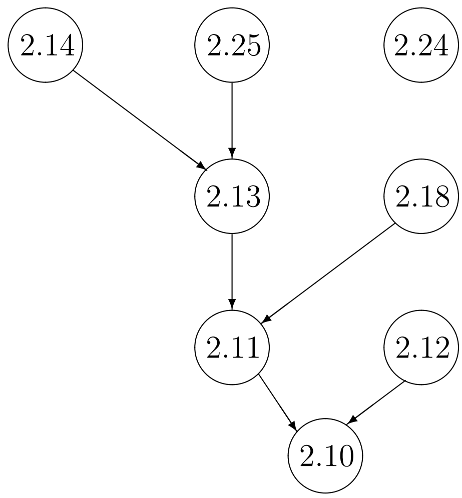

Рис. 1. Граф подстановок для S-интегрируемых уравнений третьего порядка

Стрелки графа соответствуют следующим подстановкам:

(2.14)→(2.13): $\tilde{u} = \ln\left(u_1 + \sqrt{1 + u_1^2}\right)$. При этом в уравнении (2.14) должен присутствовать дополнительный член $\dfrac{3}{2}\, a_2 u_1$. Постоянные в уравнениях связаны формулами $c_1 = \dfrac{3}{4}(a_1 + a_2),\ c_2 = \dfrac{3}{4}(a_2 - a_1)$.

(2.25)→(2.13): $\tilde{u} = \ln\left(u_1 + \sqrt{Q + u_1^2}\right) - \ln(a_0 + 2\, a_1\, u + a_2\, u^2)$. При этом многочлен Q записывается в факторизованном виде: $Q(u) = (a_0 + 2\, a_1\, u + a_2\, u^2)(k_0 + 2\, k_1\, u + k_2\, u^2)$. Кроме того, в уравнении (2.25) должен присутствовать дополнительный член: $\dfrac{1}{2}(a_0 k_2 + a_2 k_0 - 2\, a_1 k_1) u_1$, а постоянные c_1 и c_2 в уравнении (2.13) задаются формулами $c_1 = \dfrac{3}{2}(a_0 a_2 - a_1^2),\ c_2 = \dfrac{3}{2}(k_0 k_2 - k_1^2)$.

(2.13)→(2.11): $\tilde u=\pm\dfrac{i}{2}\sqrt{6}\,u_1+\sqrt{c_1}\,e^{u}+\sqrt{c_2}\,e^{-u}$, при этом в уравнении (2.13) должен присутствовать дополнительный член: $2\sqrt{c_1c_2}\,u_1$.

(2.18)→(2.11): $\tilde u=a+b\sqrt{u_1}\,,\ b\neq 0$, где $c_1=\dfrac{4}{3}\,ab,\ c_2=\dfrac{1}{2}\,b^2$. При этом в уравнении (2.18) должен присутствовать дополнительный член a^2u_1.

Если в уравнении (2.24) многочлен Q имеет кратные корни, то существуют следующие не отраженные на графе подстановки из этого уравнения :

(2.24)→(2.10): 1) $\tilde u=\dfrac{d}{dx}\left(-3\dfrac{u_2}{u_1}+\dfrac{12\,u_1}{u-a}\right)-\dfrac{3\,u_2^2}{2\,u_1^2}-\dfrac{Q}{u_1^2},\qquad Q=(u-a)^2\big(c_0+c_1u+c_2u^2\big).$

2) $\tilde u=\dfrac{d}{dx}\left(3\dfrac{u_2}{u_1}-\dfrac{12\,h}{u_1}\right)-\dfrac{3\,u_2^2}{2\,u_1^2}-\dfrac{Q}{u_1^2},\qquad h=c_0+c_1u+c_2u^2,\ Q=6\,h^2.$

(2.24)→(2.13): $\tilde u=\ln u_1-\ln h,\qquad h=a_0+a_1u+a_2u^2,\ \ Q=-c_2h^2,\ c_1=\dfrac{3}{2}(4\,a_0a_2-a_1^2).$

В случае $Q=0$ уравнение (2.24) совпадает с уравнением Шварц-КдФ (2.17). Уравнение (2.17) связано тремя различными подстановками с уравнением КдФ:

(2.17)→(2.10): 1) $\tilde u=3\,\dfrac{u_3}{u_1}-\dfrac{9\,u_2^2}{2\,u_1^2}$; 2) $\tilde u=-3\,\dfrac{u_3}{u_1}+\dfrac{3\,u_2^2}{2\,u_1^2}$; 3) $\tilde u=-3\,\dfrac{u_3}{u_1}+\dfrac{3\,u_2^2}{2\,u_1^2}+12\left(\dfrac{u_2}{u}-\dfrac{u_1^2}{u^2}\right)$.
Все они являются суперпозициями подстановок первого порядка. Кроме приведенных выше, в этих суперпозициях участвуют следующие подстановки из уравнения (2.17):
(2.17)→(2.13): 1) $\tilde u=\ln(u_1),\ \ c_1=c_2=0,\ \ 2)\ \tilde u=\ln(u_1)-\ln(u^2+c_1/6),\ c_2=0$. Еще одна подстановка получается из 2) заменой $\tilde u\to-\tilde u,\ c_2\leftrightarrow c_1$.

II. C-интегрируемые уравнения.

(2.19)→(2.23): $\tilde u=\sqrt{u_1}$, при этом в уравнении (2.23) $\beta=\dfrac{1}{2}\alpha'$.
(2.19)→(2.21): $\tilde u=\sqrt{u_1/(2\,u)}$.
(2.23)→(2.22): $\tilde u=u_1/u$, при этом в уравнении (2.23) $\alpha=\gamma$.
(2.20)→(2.22): $\tilde u=\dfrac{1}{\xi}(\alpha'+\sqrt{u_x\alpha'}\,)-\dfrac{1}{2}\,\alpha''(\alpha')^{-1}$, где $\xi=\alpha(x)-u$. При этом в уравнении (2.22)

$$\gamma=\frac{1}{2}\,\alpha'''(\alpha')^{-1}-\frac{3}{4}\,(\alpha''/\alpha')^2-(c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2)/\alpha',$$
$$\beta=\frac{1}{2}\,\alpha^{(4)}(\alpha')^{-1}-2\,\alpha''\alpha'''(\alpha')^{-2}+\frac{3}{2}\,(\alpha''/\alpha')^3-\frac{1}{2}\,\alpha''(\alpha')^{-2}(c_0+c_1\alpha+c_2\alpha^2).$$

3. Уравнения пятого порядка

В этом разделе найдены все уравнения вида (0.4), имеющие бесконечные последовательности локальных высших симметрий. В ходе классификации использовались необходимые условия интегрируемости, которые вытекают из существования формальной симметрии [4, 7] и записываются в виде канонических законов сохранения. Нетрудно проверить, что каждое интегрируемое уравнение третьего порядка (2.10)–(2.23) имеет симметрию пятого порядка вида (0.4). Оказалось, что если исключить эти симметрии из рассмотрения, то список оставшихся интегрируемых уравнений совпадает (с точностью до эквивалентности) со списком, полученным в работах [9, 18], где изучались уравнения, обладающие высшими законами сохранения.

В разделе 3.1 приведен полный список интегрируемых уравнений (0.4), не являющихся симметриями уравнений более низких порядков. Уравнения списка по форме слегка отличаются от эквивалентных им уравнений из [9, 18]. В разделе 3.2 содержится новая рекуррентная формула для условий интегрируемости. Отметим, что в работах [9, 18] явно приведено только несколько простейших условий. Для конкретного уравнения (0.4) условия интегрируемости легко проверить одно за другим с помощью компьютера.

В разделе 3.3 приводится схематичное доказательство классификационной теоремы. Оно содержит алгоритм приведения интегрируемого уравнения (0.4) к одной из канонических форм из раздела 3.1 при помощи точечных преобразований (1.24)–(1.26). Другими словами, в каждом месте, где используются точечные преобразования, мы указываем, что́ мы с их помощью нормируем. Мы надеемся, что, следуя этому алгоритму и указаниям, содержащимся в тексте, читатель при желании без труда восстановит все детали довольно трудоемких вычислений. Из доказательства задним числом следует, что если уравнение (0.4) удовлетворяет первым десяти условиям интегрируемости, то оно интегрируемо. Отметим, что уравнение $u_t = u_5 + uu_1$ удовлетворяет первым девяти условиям интегрируемости, но не удовлетворяет десятому.

3.1. Список интегрируемых уравнений.

Теорема 2. *Предположим, что нелинейное уравнение* (0.4) *удовлетворяет двум условиям:* 1) *существует бесконечная последовательность высших симметрий*

$$u_{\tau_i} = G_i(u, ..., u_{n_i}), \qquad i = 1, 2, ..., \qquad n_{i+1} > n_i > \cdots > 5; \tag{3.1}$$

2) *не существует симметрий* (3.1) *с порядками* $1 < n_i < 5$. *Тогда уравнение эквивалентно некоторому уравнению из следующего списка:*

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + 5u_1u_2 + 5u^2u_1, \tag{3.2}$$

$$u_t = u_5 + 5uu_3 + \frac{25}{2}u_1u_2 + 5u^2u_1, \tag{3.3}$$

$$u_t = u_5 + 5u_1u_3 + \frac{5}{3}u_1^3, \tag{3.4}$$

$$u_t = u_5 + 5u_1u_3 + \frac{15}{4}u_2^2 + \frac{5}{3}u_1^3, \tag{3.5}$$

$$u_t = u_5 + 5(u_1 - u^2)u_3 + 5u_2^2 - 20uu_1u_2 - 5u_1^3 + 5u^4u_1, \tag{3.6}$$

$$u_t = u_5 + 5(u_2 - u_1^2)u_3 - 5u_1u_2^2 + u_1^5, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_5 + 5(u_2 - u_1^2 + \lambda_1 e^{2u} - \lambda_2^2 e^{-4u})\, u_3 - 5u_1u_2^2 + 15(\lambda_1 e^{2u} + 4\lambda_2^2 e^{-4u})\, u_1u_2 \\ &\quad + u_1^5 - 90\lambda_2^2 e^{-4u}\, u_1^3 + 5(\lambda_1 e^{2u} - \lambda_2^2 e^{-4u})^2\, u_1, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_5 + 5(u_2 - u_1^2 - \lambda_1^2 e^{2u} + \lambda_2 e^{-u})\, u_3 - 5u_1u_2^2 - 15\lambda_1^2 e^{2u}\, u_1u_2 \\ &\quad + u_1^5 + 5(\lambda_1^2 e^{2u} - \lambda_2 e^{-u})^2\, u_1, \quad \lambda_2 \neq 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_5 - 5\frac{u_2u_4}{u_1} + 5\frac{u_2^2u_3}{u_1^2} + 5\left(\frac{\mu_1}{u_1} + \mu_2 u_1^2\right) u_3 - 5\left(\frac{\mu_1}{u_1^2} + \mu_2 u_1\right) u_2^2 \\ &\quad - 5\frac{\mu_1^2}{u_1} + 5\mu_1\mu_2 u_1^2 + \mu_2^2 u_1^5, \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} u_t &= u_5 - 5\frac{u_2u_4}{u_1} - \frac{15}{4}\frac{u_3^2}{u_1} + \frac{65}{4}\frac{u_2^2u_3}{u_1^2} + 5\left(\frac{\mu_1}{u_1} + \mu_2 u_1^2\right) u_3 - \frac{135}{16}\frac{u_2^4}{u_1^3} \\ &\quad - 5\left(\frac{7\mu_1}{4u_1^2} - \frac{\mu_2 u_1}{2}\right) u_2^2 - 5\frac{\mu_1^2}{u_1} + 5\mu_1\mu_2 u_1^2 + \mu_2^2 u_1^5, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$
\begin{aligned}
u_t = u_5 - \frac{5}{2}\,\frac{u_2u_4}{u_1} - \frac{5}{4}\,\frac{u_3^2}{u_1} + 5\frac{u_2^2u_3}{u_1^2} + \frac{5\,u_2u_3}{2\sqrt{u_1}} - 5(u_1 - 2\mu u_1^{1/2} + \mu^2)\,u_3 - \frac{35}{16}\,\frac{u_2^4}{u_1^3}\\
- \frac{5}{3}\,\frac{u_2^3}{u_1^{3/2}} + 5\Big(\frac{3\mu^2}{4u_1} - \frac{\mu}{\sqrt{u_1}} + \frac{1}{4}\Big)\,u_2^2 + \frac{5}{3}\,u_1^3 - 8\mu u_1^{5/2} + 15\mu^2u_1^2 - \frac{40}{3}\,\mu^3u_1^{3/2},
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
u_t = u_5 + \frac{5}{2}\,\frac{f-u_1}{f^2}\,u_2u_4 + \frac{5}{4}\,\frac{2\,f-u_1}{f^2}\,u_3^2 + 5\,\mu\,(u_1+f)^2u_3\\
+ \frac{5}{4}\,\frac{4\,{u_1}^2 - 8\,u_1f + f^2}{f^4}\,u_2^2u_3 + \frac{5}{16}\,\frac{2 - 9\,u_1^3 + 18\,u_1^2f}{f^6}\,u_2^4\\
+ \frac{5\mu}{4}\,\frac{(4\,f - 3\,u_1)(u_1+f)^2}{f^2}\,u_2^2 + \mu^2(u_1+f)^2\big(2\,f(u_1+f)^2 - 1\big),
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

$$
\begin{aligned}
u_t = u_5 + \frac{5}{2}\,\frac{f-u_1}{f^2}\,u_2u_4 + \frac{5}{4}\,\frac{2\,f-u_1}{f^2}\,u_3^2 - 5\,\omega\,(f^2+u_1^2)u_3\\
+ \frac{5}{4}\,\frac{4\,u_1^2 - 8\,u_1f + f^2}{f^4}\,u_2^2u_3 + \frac{5}{16}\,\frac{2 - 9\,u_1^3 + 18\,u_1^2f}{f^6}\,u_2^4\\
+ \frac{5}{4}\,\omega\,\frac{5\,u_1^3 - 2\,u_1^2f - 11\,u_1f^2 - 2}{f^2}\,u_2^2 - \frac{5}{2}\,\omega'\,(u_1^2 - 2\,u_1f + 5\,f^2)u_1u_2\\
+ 5\,\omega^2u_1f^2(3\,u_1+f)(f-u_1),
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

$$
\begin{aligned}
u_t = u_5 + \frac{5}{2}\,\frac{f-u_1}{f^2}\,u_2u_4 + \frac{5}{4}\,\frac{2\,f-u_1}{f^2}\,u_3^2 + \frac{5}{4}\,\frac{4\,u_1^2 - 8\,u_1f + f^2}{f^4}\,u_2^2u_3\\
+ \frac{5}{16}\,\frac{2 - 9\,{u_1}^3 + 18\,{u_1}^2f}{f^6}\,u_2^4 + 5\,\omega\,\frac{2\,{u_1}^3 + {u_1}^2f - 2\,u_1f^2 + 1}{f^2}\,u_2^2\\
- 10\,\omega\,u_3(3\,u_1f + 2\,u_1^2 + 2\,f^2) - 10\,\omega'(2\,f^2 + u_1f + {u_1}^2)\,u_1u_2\\
+ 20\,\omega^2u_1({u_1}^3 - 1)(u_1 + 2\,f),
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

$$
\begin{aligned}
u_t = u_5 + \frac{5}{2}\,\frac{f-u_1}{f^2}\,u_2u_4 + \frac{5}{4}\,\frac{2\,f-u_1}{f^2}\,u_3^2 - 5\,c\frac{f^2+u_1^2}{\omega^2}\,u_3\\
+ \frac{5}{4}\,\frac{4\,u_1^2 - 8\,u_1f + f^2}{f^4}\,u_2^2u_3 + \frac{5}{16}\,\frac{2 - 9\,{u_1}^3 + 18\,u_1^2f}{f^6}\,u_2^4\\
- 10\,\omega\,(3\,u_1f + 2\,u_1^2 + 2\,f^2)\,u_3 - \frac{5}{4}\,c\,\frac{11\,u_1f^2 + 2\,u_1^2f + 2 - 5\,u_1^3}{\omega^2f^2}\,u_2^2\\
+ 5\,\omega\,\frac{2\,u_1^3 + u_1^2f - 2\,u_1f^2 + 1}{f^2}\,u_2^2 + 5\,c\,\omega'\,\frac{u_1^2 + 5\,f^2 - 2\,u_1f}{\omega^3}\,u_1u_2\\
- 10\,\omega'\,(2\,f^2 + u_1f + {u_1}^2)\,u_1u_2 + 20\,\omega^2u_1(u_1^3 - 1)(u_1 + 2\,f)\\
+ 40\,\frac{c\,u_1f^3(2\,u_1+f)}{\omega} + 5\,\frac{c^2u_1f^2(3\,u_1+f)(f-u_1)}{\omega^4}, \quad c \neq 0.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \mu, \mu_1, \mu_2$ *и* c *— параметры, функция* $f(u_1)$ *является решением алгебраического уравнения*

$$
(f+u_1)^2(2f-u_1) + 1 = 0, \tag{3.17}
$$

а $\omega(u)$ *— это любое непостоянное решение дифференциального уравнения*

$$
\omega'^2 = 4\,\omega^3 + c. \qquad \square \tag{3.18}
$$

Замечание 8. Все уравнения из списка теоремы 2 S-интегрируемы. В ходе доказательства теоремы установлено, что всякое C-интегрируемое уравнение (0.4) является симметрией некоторого C-интегрируемого уравнения третьего порядка из списка (2.10) – (2.23). □

Замечание 9. Если в уравнении (3.8) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то оно совпадает с (3.7). Если в уравнении (3.9) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то оно тоже совпадает с (3.7), а если $\lambda_2 = 0$, то (3.9) совпадает с (3.8) при $\lambda_2 = 0$ и замене $\lambda_1 \to -\lambda_1^2$ в последнем. □

Замечание 10. Если в уравнении (3.10) $\mu_2 \neq 0$, то подстановка $u = c^{-1}\ln v$ приводит его к виду:

$$v_t = v_5 - 5\frac{v_2 v_4}{v_1} + 5\frac{v_2^2 v_3}{v_1^2} + 5\mu\left(\frac{v v_3 - v_1 v_2}{v_1} - \frac{v v_2^2}{v_1^2}\right) - 5\mu^2\frac{v^2}{v_1}, \tag{3.19}$$

где $\mu = \mu_1 c,\ c = \sqrt{-\mu_2}$. □

Замечание 11. Если в уравнении (3.11) $\mu_2 \neq 0$, то преобразование $u = c^{-1}\ln v$ приводит его к виду

$$v_t = v_5 - 5\frac{v_2 v_4}{v_1} - \frac{15 v_3^2}{4 v_1} + 65\frac{v_2^2 v_3}{4 v_1^2} - \frac{135 v_2^4}{16 v_1^3} + 5\mu\left(\frac{v v_3}{v_1} + \frac{1}{2}v_2 - \frac{7}{4}\frac{v v_2^2}{v_1^2}\right) - 5\mu^2\frac{v^2}{v_1}, \tag{3.20}$$

где $\mu = \mu_1 c,\ c = 2\sqrt{-\mu_2}$. □

3.2. Условия интегрируемости. Следующее утверждение можно извлечь из работ [9,18]:

Лемма 3. Для любого нелинейного интегрируемого уравнения (0.4) первые четыре условия интегрируемости можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial u_4} = \frac{d}{dx}\sigma_0, \tag{3.21}$$

$$\frac{d}{dt}\left(2\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\right)^2 - 5\frac{\partial F}{\partial u_3}\right) = \frac{d}{dx}\sigma_1, \tag{3.22}$$

$$\frac{d}{dt}\left(15\frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial F}{\partial u_4} - 25\frac{\partial F}{\partial u_2} - 4\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\right)^3\right) = \frac{d}{dx}\sigma_2, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Bigg[25\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_4}\right)^2 + 5\frac{\partial F}{\partial u_4}\left(5\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u_3} + 10\frac{\partial F}{\partial u_2} - 7\frac{\partial F}{\partial u_3}\frac{\partial F}{\partial u_4}\right) + \\ + 7\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\right)^4 + 25\left(\frac{\partial F}{\partial u_3}\right)^2 - 125\frac{\partial F}{\partial u_1}\Bigg] = \frac{d}{dx}\sigma_3,\end{aligned} \tag{3.24}$$

где $\dfrac{d}{dx}$ — оператор полной производной по x, а $\dfrac{d}{dt}$ — эволюционное дифференцирование по t в силу уравнения (0.4). □

Приведенные условия вытекают из существования формальной симметрии. Но технически удобнее воспользоваться изложенным в приложении 3 методом вычисления плотностей канонических законов сохранения

$$\frac{d}{dt}\rho_n = \frac{d}{dx}\theta_n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{3.25}$$

при помощи логарифмической производной формальной собственной функции оператора линеаризации уравнения (0.4). Этот подход позволяет получить следующую рекуррентную формулу:

$$
\begin{aligned}
\rho_{n+4} = {} & \frac{1}{5}\theta_n - \frac{1}{5}\left[F_{u_0}\delta_{n,0} + F_{u_1}\delta_{n,-1} + F_{u_2}\delta_{n,-2} + F_{u_3}\delta_{n,-3} + F_{u_4}\delta_{n,-4} + F_{u_1}\rho_n\right] \\
& - 2\sum_0^{n+3}\rho_i\rho_j - 2\sum_0^{n+2}\rho_i\rho_j\rho_k - \frac{1}{5}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l\rho_m + \sum_0^{n+1}\left(\frac{d}{dx}\rho_i\right)\frac{d}{dx}\rho_j \\
& + \sum_0^{n}\rho_i\left(\frac{d}{dx}\rho_j\right)\frac{d}{dx}\rho_k - \sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l - \frac{1}{5}F_{u_2}\left[\frac{d}{dx}\rho_n + 2\rho_{n+1} + \sum_0^{n}\rho_i\rho_j\right] \\
& - \frac{1}{5}F_{u_3}\left[\frac{d^2}{dx^2}\rho_n + 3\frac{d}{dx}\rho_{n+1} + 3\rho_{n+2} + \frac{3}{2}\frac{d}{dx}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j + 3\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j + \sum_0^{n}\rho_i\rho_i\rho_k\right] \qquad (3.26) \\
& - \frac{1}{5}F_{u_4}\left[\frac{d^3}{dx^3}\rho_n + 4\frac{d^2}{dx^2}\rho_{n+1} + 6\frac{d}{dx}\rho_{n+2} + 4\rho_{n+3} + 2\frac{d^2}{dx^2}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j + 6\frac{d}{dx}\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j + \right. \\
& \left. + 6\sum_0^{n+2}\rho_i\rho_j + 4\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j\rho_k - \sum_0^{n}\left(\frac{d}{dx}\rho_i\right)\frac{d}{dx}\rho_j + 2\frac{d}{dx}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k + \sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l\right] - \\
& - \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{5}\frac{d^3}{dx^3}\rho_n + \frac{d^2}{dx^2}\rho_{n+1} + 2\frac{d}{dx}\rho_{n+2} + \sum_0^{n}\rho_i\frac{d^2}{dx^2}\rho_j + 2\frac{d}{dx}\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j + 3\sum_0^{n+2}\rho_i\rho_j\right. \\
& \left. + 2\rho_{n+3} + \frac{2}{3}\frac{d}{dx}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k + \frac{1}{2}\sum_0^{n}\left(\frac{d}{dx}\rho_i\right)\frac{d}{dx}\rho_j + 2\sum_0^{n+1}\rho_i\rho_j\rho_k + \frac{1}{2}\sum_0^{n}\rho_i\rho_j\rho_k\rho_l\right],
\end{aligned}
$$

где $n \geqslant -4$, $\rho_k = 0, \forall k < 0$, δ_{ij} — символ Кронекера, $F_{u_i} = \partial F/\partial u_i$. В формуле (3.26) использовано следующее обозначение

$$
\sum_m^n a_i b_j \dots p_z = \sum_{\substack{i+j+\dots+z=n \\ i\geqslant m,\, j\geqslant m,\dots,\, z\geqslant m}} a_i b_j \dots p_z
$$

для кратных сумм. Все индексы суммирования в формуле (3.26) неотрицательны.

Рекуррентная формула (3.26) публикуется впервые. Нетрудно проверить, что первые четыре условия интегрируемости из последовательности (3.25) эквивалентны условиям (3.21) – (3.24).

Условия (3.26), (3.25) можно использовать для классификации более эффективно, если предварительно изучить структуру плотностей локальных законов сохранения для уравнений вида (0.4). Напомним, что символом $O(n)$ обозначается функция дифференциального порядка не выше n. Кроме того, мы используем символ $P_n(u_k)$ для обозначения полинома степени n от переменной u_k, коэффициенты которого имеют дифференциальный порядок меньше k. Далее систематически используется эквивалентность $f\dfrac{d}{dx}g \sim -g\dfrac{d}{dx}f$, вытекающая из $\dfrac{d}{dx}(fg) \sim 0$. В частности, имеем

$$
u_{n+1}f(u,\dots,u_n) \sim -\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}\frac{\partial}{\partial u_i}\int f\,d\,u_n,
$$

откуда следует, в частности, что $u_{n+1}O(n) \sim O(n)$.

Лемма 4. Если плотность ρ локального закона сохранения для уравнения (0.4) имеет дифференциальный порядок $n \geqslant 3$, то справедливо следующее уравнение:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} = \frac{2}{5}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_4}. \tag{3.27}$$

Доказательство. По определению имеем

$$\frac{d}{dt}\rho = \sum_{k=0}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial u_k}\left(u_{k+5} + \frac{d^k}{dx^k}\,F\right).$$

Используя отношение эквивалентности, можно понизить порядок этого выражения до $n+2$. Вначале покажем, что

$$\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\partial\rho}{\partial u_k}\left(u_{k+5} + \frac{d^k}{dx^k}\,F\right) \sim O(n+1).$$

Для этого достаточно преобразовать член высшего порядка. Считая, что $n \geqslant 3$, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial u_{n-2}}u_{n+3} &\sim -u_{n+2}\frac{d}{dx}\,\frac{\partial\rho}{\partial u_{n-2}} = -u_{n+2}u_{n+1}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-2}} + u_{n+2}O(n)\\ &\sim \frac{1}{2}\,u_{n+1}^2\frac{d}{dx}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-2}} - u_{n+1}\frac{d}{dx}O(n) = O(n+1).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\rho \sim \frac{\partial\rho}{\partial u_n}u_{n+5} + \frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}u_{n+4} + \frac{\partial\rho}{\partial u_n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,F + \frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,F + O(n+1). \tag{3.28}$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\begin{aligned}a_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial\rho}{\partial u_n}u_{n+5} &\sim u_{n+3}\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{\partial\rho}{\partial u_n} = u_{n+3}\frac{d}{dx}\,\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_i}u_{i+1}\\ &= u_{n+3}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_i}u_{i+2} + \sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_n\partial u_i\partial u_j}u_{i+1}u_{j+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sim -\frac{1}{2}\,u_{n+2}^2\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} - u_{n+2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_i}u_{i+2} + \sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_n\partial u_i\partial u_j}u_{i+1}u_{j+1}\right)\\ &\sim -u_{n+2}^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-1}} + 2\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_n^2\partial u_i}u_{i+1}\right) + u_{n+2}O(n+1)\\ &\sim -\frac{5}{2}\,u_{n+2}^2\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u_n^2} - \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-1}}\,u_{n+2}^2 + O(n+1).\end{aligned}$$

Второе слагаемое в (3.28) преобразуется аналогично предыдущему:

$$\begin{aligned}a_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial\rho}{\partial u_{n-1}}u_{n+4} &\sim u_{n+2}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial u_{n-1}\partial u_i}u_{i+2} + \sum_{i,j=0}^{n}\frac{\partial^3\rho}{\partial u_{n-1}\partial u_i\partial u_j}u_{i+1}u_{j+1}\right)\\ &= \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-1}}u_{n+2}^2 + u_{n+2}O(n+1) \sim \frac{\partial^2\rho}{\partial u_n\partial u_{n-1}}u_{n+2}^2 + O(n+1).\end{aligned}$$

Предыдущие выкладки верны, если $n \geqslant 2$. Для преобразования оставшихся двух членов из (3.28) важно, что $n \geqslant 3$:

$$
\begin{aligned}
a_3 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \rho}{\partial u_n}\,\frac{d^n}{dx^n}\,F \sim \left(\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{\partial \rho}{\partial u_n}\right)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\,F \\
&= \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_n^2}\,u_{n+2} + O(n+1)\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\,u_{n+2} + O(n+1)\right) \\
&= \frac{\partial^2 \rho}{\partial u_n^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_4}\,u_{n+2}^2 + u_{n+2}O(n+1) + O(n+1) \sim \frac{\partial^2 \rho}{\partial u_n^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_4}\,u_{n+2}^2 + O(n+1).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_4 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \rho}{\partial u_{n-1}}\,\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\,F \sim -\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial \rho}{\partial u_{n-1}}\right)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\,F = -\left(\frac{d}{dx}\frac{\partial \rho}{\partial u_{n-1}}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial u_4}\,u_{n+2} + O(n+1)\right) \\
&= u_{n+2}O(n+1) + O(n+1) \sim O(n+1).
\end{aligned}
$$

Сложив полученные выражения для $a_1, \ldots, a_4$, находим

$$
\frac{d}{dt}\rho \sim u_{n+2}^2\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_n^2}\,\frac{\partial F}{\partial u_4} - \frac{5}{2}\,\frac{d}{dx}\,\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_n^2}\right) + O(n+1).
$$

Так как квадратичное по старшей производной выражение не может быть полной производной какой-либо функции, то получаем (3.27). □

Следствие. Если в условиях леммы 4 $n > 3$, то плотность ρ квадратична по u_n. В самом деле, левая часть уравнения (3.27) содержит слагаемое $\rho_{u_n u_n u_n} u_{n+1}$, дифференциальный порядок которого выше чем 4, если $n > 3$. Порядок остальных членов ниже и, следовательно, $\rho_{u_n u_n u_n} = 0$.

Применим полученный результат к классификации уравнений (0.4).

Лемма 5. Пусть уравнение (0.4) удовлетворяет условию (3.21). Тогда функция F квадратична по u_4.

Доказательство. Применив следствие леммы 4 к канонической плотности $\rho = F_{u_4}$, получаем

$$
\frac{\partial F}{\partial u_4} = f_1 + f_2 u_4 + f_3 u_4^2,
$$

где функции f_1, f_2 и f_3 не зависят от u_4. Подставив это выражение в (3.27), находим:

$$
\frac{d}{dx} f_3 = \frac{2}{5}\,f_3(f_1 + f_2 u_4 + f_3 u_4^2).
$$

Левая часть этого уравнения линейна по u_4, а правая часть квадратична, поэтому $f_3 = 0$. Это дает $F = f_0 + f_1 u_4 + \dfrac{1}{2}\,f_2 u_4^2$, где функции f_i не зависят от u_4. □

3.3. Схема доказательства основной теоремы.

Лемма 6. Пусть уравнение (0.4) удовлетворяет условиям интегрируемости (3.21), (3.22) и (3.23). Тогда функция F линейна по u_4.

Доказательство. Согласно лемме 5, функция F квадратична по u_4: $F = f_0 + f_1 u_4 + \dfrac{1}{2}\,f_2 u_4^2$. Отсюда нетрудно получить, что

$$
\rho_2 \sim u_4^3\,f_2\left(16\,f_2^2 - 15\,\frac{\partial f_2}{\partial u_3}\right) + Z_1 u_4^2 + O(3).
$$

Согласно следствию из леммы 4 кубичный по u_4 член должен быть нулем и, следовательно

$$
\frac{\partial f_2}{\partial u_3} = \frac{16}{15}\,f_2^2.
$$

С учетом этого уравнения находим

$$\rho_1 \sim u_4^2\, f_2^2 + O(3).$$

Для этой плотности соотношение (3.27) имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx}\, f_2 = \frac{1}{5}\, f_2(f_1 + f_2\, u_4).$$

Отсюда вытекает уравнение

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_3} = \frac{1}{5}\, f_2^2,$$

которое вместе с предыдущим дает $f_2 = 0$. □

Итак, если выполнены условия интегрируемости (3.21) – (3.23), то уравнение (0.4) имеет вид

$$u_t = u_5 + u_4 f_1(u, u_1, u_2, u_3) + f_0(u, u_1, u_2, u_3). \tag{3.29}$$

Лемма 7. Если функция третьего дифференциального порядка $\rho(u, u_1, u_2, u_3)$ является плотностью закона сохранения для уравнения (3.29), то она не более чем квадратична по u_3.

Доказательство. Полагая в (3.27) $n = 3$ и $F = f_0 + f_1 u_4$, получаем

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_3^2} = \frac{2}{5}\,\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_3^2} f_1. \tag{3.30}$$

Учитывая, что f_1 не зависит от u_4, находим отсюда, что $\rho_{u_3 u_3 u_3} = 0$. □

Следствие 1. Функция f_1 в (3.29) линейна по u_3. В самом деле, из $F = f_0 + f_1 u_4$ и (3.21) следует, что f_1 — плотность закона сохранения для уравнения (3.29). Поэтому, по доказанному выше, эта функция имеет вид $f_1 = g_1 + g_2 u_3 + g_3 u_3^2$, где $g_i = g_i(u, u_1, u_2)$. Подставляя это выражение в (3.30) вместо ρ, получаем $g_3 = 0$. □

Следствие 2. Если в уравнении (3.29) $f_1 = g_1 + g_2 u_3$, где $g_i = g_i(u, u_1, u_2)$, и это уравнение имеет закон сохранения с плотностью ρ второго дифференциального порядка, то выполнено уравнение:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_2^2} = \frac{2}{5}\,\frac{\partial^2 \rho}{\partial u_2^2}(g_1 + g_2 u_3). \tag{3.31}$$

Утверждение легко проверяется прямым вычислением. □

Предложение 1. Если выполнены условия интегрируемости (3.21)–(3.23), то уравнение (0.4) имеет следующий вид

$$u_t = u_5 + A_1 u_2 u_4 + A_2 u_4 + A_3 u_3^2 + (A_4 u_2^2 + A_5 u_2 + A_6) u_3 + A_7 u_2^4 + A_8 u_2^3 + A_9 u_2^2 + A_{10} u_2 + A_{11}, \tag{3.32}$$

где $A_i = A_i(u, u_1)$.

Доказательство. В силу следствия 1 леммы 7, уравнение (0.4) имеет вид (3.29), где $f_1 = g_1(u, u_1, u_2) + g_2(u, u_1, u_2) u_3$. Рассмотрим далее плотность ρ_1 закона сохранения (3.22). Нетрудно проверить, что

$$\rho_1 \sim \frac{2}{5}\, f_1^2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_0} u_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} u_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} u_3 - \frac{\partial f_0}{\partial u_3}.$$

В этом выражении все члены, кроме последнего, не более чем квадратичны по u_3. По лемме 7 рассматриваемая плотность должна быть квадратичной по u_3 и, следовательно, функция f_0 кубична по u_3:

$$f_0 = g_4 + g_5 u_3 + g_6 u_3^2 + g_7 u_3^3, \qquad g_i = g_i(u, u_1, u_2).$$

С учетом полученных результатов, плотности законов сохранения (3.22) и (3.23) эквивалентны следующим выражениям:

$$\rho_1 \sim u_3^2\left(5\frac{\partial g_2}{\partial u_2} + 2\,g_2^2 - 15\,g_7\right) + O(2),$$
$$\rho_2 \sim u_3^3\left(50\frac{\partial g_7}{\partial u_2} - 25\frac{\partial^2 g_2}{\partial u_2^2} + 30\,g_2\frac{\partial g_2}{\partial u_2} + 8\,g_2^3 - 90\,g_2 g_7\right) + P_2(u_3).$$

Согласно лемме 7, коэффициент при u_3^3 во второй формуле должен быть нулем. Кроме того, из условия $\dfrac{d}{dt}\rho_1 \sim 0$ возникают еще четыре уравнения, связывающих функции g_2, g_7 и их производные по u_2. Из этих уравнений нетрудно получить, что $g_2 = g_7 = 0$.

Таким образом, $F = g_1 u_4 + g_4 + g_5 u_3 + g_6 u_3^2$. Теперь плотность закона сохранения (3.21) равна g_1, и мы можем подставить $\rho = g_1$ и $g_2 = 0$ в (3.31):

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_2^2} = \frac{2}{5}\frac{\partial^2 g_1}{\partial u_2^2}g_1.$$

Отсюда, как и выше, получаем линейную по старшей производной функцию $g_1 = A_1(u,u_1)u_2 + A_2(u,u_1)$.

С учетом полученных результатов, условие (3.23) дает $g_6 = A_3(u,u_1)$. Затем из условия (3.22) получаем $\dfrac{\partial^3 g_5}{\partial u_2^3} = 0$. И наконец, учитывая все полученные результаты, находим из условия (3.23), что $\dfrac{\partial^5 g_4}{\partial u_2^5} = 0$. $\square$

Для исследования уравнения (3.32) полезна следующая

Лемма 8. Уравнение (3.32) не изменяет своей формы при точечных преобразованиях вида $u = \varphi(v)$. $\square$

Некоторые из формул для преобразования коэффициентов A_i имеют простой вид:

$$\tilde A_1(v) = \varphi' A_1(u), \qquad \tilde A_2(v) = A_2(u) + \varphi'' v_1^2 A_1(u) + 5\varphi''(\varphi')^{-1}v_1,$$
$$\tilde A_3(v) = \varphi' A_3(u), \qquad \tilde A_4(v) = \varphi'^2 A_4(u), \qquad \tilde A_7(v) = \varphi'^3 A_7(u). \tag{3.33}$$

Другие формулы значительно сложнее, и мы их опускаем.

Можно проверить, что шесть первых плотностей канонических законов сохранения для уравнения (3.32) эквивалентны следующим:

$$\rho_0 = -\frac{1}{5}(A_1 u_2 + A_2), \qquad \rho_1 \sim R_1 = \psi_1 u_2^2 + \psi_2 u_2 + \psi_3, \tag{3.34}$$
$$\rho_2 \sim R_2 = \psi_4 u_2^3 + \psi_5 u_2^2 + \psi_6 u_2 + \psi_7, \qquad \rho_3 \sim R_3 = \psi_8 u_3^2 + \psi_9 u_2^4 + \psi_{10} u_2^3 + \dots, \tag{3.35}$$
$$\rho_4 \sim R_4 = \psi_{11} u_2 u_3^2 + \psi_{12} u_3^2 + \psi_{13} u_2^5 + \dots, \tag{3.36}$$
$$\rho_5 \sim R_5 = \psi_1 u_4^2 + \psi_{15} u_3^3 + (\psi_{16} u_2^2 + \psi_{17} u_2 + \psi_{18})u_3^2 + \psi_{19} u_2^6 + \dots, \tag{3.37}$$

где коэффициенты ψ_k выражаются через функции A_i и их производные. Например, ψ_1 в (3.34) и (3.37) имеет вид

$$\psi_1 = \frac{1}{25}\left(2A_1^2 - 5A_4 + 10\frac{\partial A_3}{\partial u_1}\right).$$

Лемма 9. Если уравнение (3.32) имеет закон сохранения с плотностью $\rho(u,u_1,\dots,u_n)$, имеющей дифференциальный порядок $n \geqslant 2$, то

$$\rho \sim \alpha_1(u,u_1)u_n^2 + \alpha_2(u,u_1,\dots,u_{n-1}), \tag{3.38}$$

при этом

$$5\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1}=2\alpha_1 A_1,\qquad 5\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_0}\,u_1=2\alpha_1 A_2. \tag{3.39}$$

Для $n=3$ и $n=4$ вид плотностей нетрудно уточнить. Если $n=3$, то

$$\rho\sim\alpha_1 u_3^2+\alpha_2 u_2^4+\alpha_3 u_2^3+\alpha_4 u_2^2+\alpha_5,\quad \alpha_i=\alpha_i(u,u_1),$$

причем $\alpha_1(A_1-2A_3)=0$. Если $n=4$, то

$$\rho\sim\alpha_1 u_4^2+\alpha_2 u_3^3+(\alpha_3 u_2^2+\alpha_4 u_2+\alpha_5)u_3^2+\beta(u,u_1,u_2),\quad \alpha_i=\alpha_i(u,u_1),$$

где β — многочлен шестой степени по u_2. $\square$

Следствие. Коэффициенты ψ_4 в (3.35), ψ_{11} и ψ_{13} в (3.36) равны нулю.

Форма уравнения (3.32) существенно зависит от порядков его канонических законов сохранения. Среди интегрируемых уравнений (3.32) возможны уравнения двух следующих типов:

I. Уравнения, не имеющие высших канонических законов сохранения. Другими словами, все канонические плотности для уравнений первого типа эквивалентны плотностям нулевого или первого дифференциального порядка.

II. Уравнения, имеющие высшие канонические законы сохранения с порядками $\geqslant 2$.

В случае **I** следует приравнять к нулю все нетривиальные члены высших порядков в плотностях канонических законов сохранения. Поэтому в выражениях (3.34)–(3.37) должно быть $\psi_1=\psi_4=\psi_5=\psi_8=\psi_9=\psi_{10}=\cdots=0$. В частности,

$$A_4=\frac{2}{5}A_1^2+2\frac{\partial A_3}{\partial u_1}.$$

Из уравнения $\psi_4=0$ можно выразить A_7 через A_1 и A_3, а из $\psi_5=0$ выражается A_8 через A_1, A_2, A_3 и A_5. Из шести условий $\rho_i\sim h_i(u,u_1)$, $i=1,\ldots,6$ можно извлечь громоздкую систему дифференциальных уравнений для оставшихся функций A_i. В этой системе имеется следующая замкнутая подсистема уравнений для A_1 и A_3:

$$A_3=\frac{1}{2}A_1,\qquad \frac{\partial A_1}{\partial u_1}=\frac{2}{5}A_1^2. \tag{3.40}$$

Второе из этих уравнений имеет два решения $A_1=0$ и $A_1=-\frac{5}{2}(u_1+a(u))^{-1}$. Если $a(u)\neq 0$, то точечным преобразованием $u\to\varphi(u)$ можно нормировать $a=1$. Таким образом, возможны три следующих случая:

$$\mathbf{I.a}.\ \ A_1=0;\qquad \mathbf{I.b}.\ \ A_1=-\frac{5}{2}u_1^{-1};\qquad \mathbf{I.c}.\ \ A_1=-\frac{5}{2}(u_1+1)^{-1}.$$

Случай I.a. Из уравнений $\psi_i=0$ следует, что $A_2=g_1(u)+g_2(u)u_1$. Используя точечное преобразование $u\to\varphi(u)$, можно считать, что $g_2=0$ (см. (3.33)). После этого все оставшиеся функции $A_i(u,u_1)$ оказываются полиномами с постоянными коэффициентами. Для определения этих коэффициентов было проверено 10 условий интегрируемости (3.25). Выяснилось, что существует только три интегрируемых уравнения рассматриваемого типа:

$$\begin{aligned}
&u_t=u_5+u_4c_1+c_2u_3+c_3u_2+c_4u_1+c_5u+c_6,\\
&u_t=u_5+5u^2u_4+10u\,u_3(u^3+4u_1)+25u\,u_2^2+10u_2(5u_1^2+12u^3u_1+u^6)\\
&\qquad+140u^2u_1^3+70u^5u_1^2+5u^8u_1,\\
&u_t=u_5+5u\,u_4+10u^2u_3+15u_1u_3+10u_2^2+10u^3u_2+50u\,u_1u_2+5u^4u_1+30u^2u_1^2+15u_1^3.
\end{aligned}$$

Второе из этих уравнений является симметрией уравнения (2.21), где $\alpha=0$. Третье уравнение — это симметрия уравнения Бюргерса $u_t=u_2+2uu_1$ (а также симметрия уравнения (2.22), где $\beta=\gamma=0$).

Случай I.b. Существует только одно интегрируемое уравнение из этого класса

$$u_t = u_5 - \frac{5u_2u_4}{2u_1} + 5\frac{u_2^2u_3}{u_1^2} - \frac{5u_3^2}{4u_1} - \frac{35u_2^4}{16u_1^3} + k\,u.$$

Оно является симметрией уравнения (2.19) при $\alpha(x) = c$.

Случай I.c. Из условий интегрируемости можно найти $A_2 = f(u)(u_1+1)+g(u)\sqrt{u_1+1}$, где f и g — произвольные функции. Если $g = 0$, то все функции A_i не зависят от u, и поэтому возможно преобразование $u \to u - x$, приводящее к случаю **I.b.**

Если $g \neq 0$, то существуют два очень громоздких С-интегрируемых уравнения, являющихся симметриями уравнений (2.48) и (2.49), соответственно.

В случае **II** уравнение (3.32) имеет по меньшей мере один высший закон сохранения, поэтому, в соответствии с (3.39), можно записать A_1 и A_2 в виде

$$A_1 = \frac{5}{2f_0}\frac{\partial f_0}{\partial u_1}, \qquad A_2 = \frac{5}{2f_0}\frac{\partial f_0}{\partial u}u_1, \quad f_0 = f_0(u, u_1). \tag{3.41}$$

В результате уравнение (3.32) принимает следующий вид:

$$u_t = u_5 + \frac{5}{2}(\ln f_0)_x u_4 + A_3u_3^2 + (A_4u_2^2 + A_5u_2 + A_6)u_3 + A_7u_2^4 + A_8u_2^3 + A_9u_2^2 + A_{10}u_2 + A_{11}, \tag{3.42}$$

где $A_i = A_i(u, u_1)$. Первый канонический закон сохранения для этого уравнения тривиален:

$$\rho_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\ln f_0, \qquad \theta_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\ln f_0.$$

Второе условие интегрируемости (3.22) приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_4^2 f_0 \frac{d}{dx}\left(\frac{A_4}{f_0} - \frac{2}{f_0}\frac{\partial A_3}{\partial u_1} - \frac{5}{2\,f_0^3}\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2\right) + u_3^3\,Z_1 + u_3^2\,Z_2 + O(2) \sim 0.$$

Приравняв к нулю коэффициент при u_4^2, получаем

$$A_4 = 2\,\frac{\partial A_3}{\partial u_1} + \frac{5}{2f_0^2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 + c_1 f_0, \tag{3.43}$$

где c_1 — постоянная интегрирования. Функция Z_1 линейна по u_2, поэтому из равенства $Z_1 = 0$ следуют два уравнения:

$$c_1\left[25\,f_0\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 45\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 + 10\,A_3\,f_0\frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 14\,f_0^2\frac{\partial A_3}{\partial u_1} - 6\,c_1\,f_0^3\right] = 0, \tag{3.44}$$

$$c_1\left[25\,f_0\,u_1\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1\partial u} - 30\,u_1\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\frac{\partial f_0}{\partial u} + 5\,f_0\frac{\partial f_0}{\partial u}(3 + 2\,u_1A_3) - 2\,f_0^2\,u_1\frac{\partial A_3}{\partial u} - 3\,f_0^2 A_5\right] = 0. \tag{3.45}$$

Функция Z_2 кубична по u_2, поэтому из равенства $Z_2 = 0$ получаются четыре уравнения, также содержащие множитель c_1. Поэтому естественно рассмотреть два случая: $c_1 = 0$ и $c_1 \neq 0$. Кроме того, ввиду леммы 9, возникает еще одна развилка: $A_1 - 2A_3 = 0$ или $A_1 - 2A_3 \neq 0$. Таким образом, имеем четыре следующих случая:

II.a. $c_1 = 0, \quad A_3 = \frac{1}{2}A_1;$ **II.c**. $c_1 = 0, \quad A_3 = \frac{1}{2}A_1 + f_1;$

II.b. $c_1 \neq 0, \quad A_3 = \frac{1}{2}A_1,$ **II.d**. $c_1 \neq 0, \quad A_3 = \frac{1}{2}A_1 + f_1,$

где $f_1 = f_1(u, u_1), \ f_1 \neq 0$.

Случай II.a. В этом случае плотность в условии (3.23) записывается в следующем виде

$$\rho_2 \sim u_2^3\, f_0^{-3} \left[5\, f_0^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} + 5\, f_0 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 5 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1} \right)^3 - 16\, A_7\, f_0^3 \right] + P_2(u_2).$$

В силу леммы 9 коэффициент при u_2^3 должен быть нулем, этим определяется функция A_7:

$$A_7 = \frac{5}{16\, f_0^3} \left[f_0^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} + f_0 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1} \right)^3 \right]. \tag{3.46}$$

С учетом (3.46) четвертое условие интегрируемости (3.24) приводится к следующему виду:

$$\frac{d}{dt}\rho_3 \sim u_5^2 f_0 \frac{d}{dx} \left[f_0^{-2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 2\, f_0^{-3} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1} \right)^2 \right] + P_1 u_4^3 + u_4^2 u_3 (P_2 u_2 + P_3) + u_4^2 O(2) + O(3) \sim 0,$$

где P_i – некоторые функции первого дифференциального порядка. Приравняв к нулю член при u_5^2, получаем $f_0 = \big(c\, u_1^2 + \alpha(u) u_1 + \beta(u)\big)^{-1}$, где c — постоянная, а α и β — произвольные функции. В результате уравнение $P_1 = 0$ выполнено автоматически, а $P_2 = 0$ дает $c = 0$. Таким образом,

$$f_0 = \big(\alpha(u) u_1 + \beta(u)\big)^{-1}, \quad A_1 = -\frac{5}{2} \frac{\alpha}{\alpha u_1 + \beta}, \quad A_2 = -\frac{5}{2} \frac{\alpha' u_1^2 + \beta' u_1}{\alpha u_1 + \beta}.$$

Из формул преобразования (3.33) для A_1 и A_2 видно, что замена $u \to \varphi(u)$ позволяет упростить f_0. Если $\alpha = 0$, то без ограничения общности $f_0 = 1$; если $\beta = 0$, то, не ограничивая общности, можем положить $\alpha = 1$; если $\alpha\beta \neq 0$, то можем считать, что $\beta = \alpha$.

Итак, возникают три следующих неэквивалентных случая:

II.a.1. $f_0 = 1$; **II.a.2**. $f_0 = \dfrac{1}{u_1}$; **II.a.3**. $f_0 = \dfrac{a(u)}{u_1 + 1}$.

Случай II.a.1. Равенства $c_1 = 0$, $f_0 = 1$ приводят к соотношениям $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_7 = 0$. Третье условие интегрируемости (3.23) имеет вид

$$\frac{d}{dt}\rho_2 \sim u_4^2 \frac{d}{dx} \left(3\, A_8 - \frac{\partial A_5}{\partial u_1} \right) + \frac{1}{5}\, u_3^3\, A_5 \left(3\, A_8 - \frac{\partial A_5}{\partial u_1} \right) + P_2(u_3) \sim 0.$$

В этом выражении коэффициенты при u_4^2 и u_3^3 следует приравнять к нулю. В то же время плотность в условии (3.24) имеет вид

$$\rho_3 \sim u_2^3 \left(2 \frac{\partial A_8}{\partial u_1} - \frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} \right) + P_2(u_2).$$

Коэффициент при u_2^3 должен быть нулем по лемме 9. Из указанных трех равенств следует $A_8 = A_8(u)$, $A_5 = 3\,(A_8 + c_2) u_1 + q_1(u)$; $c_2\,(A_8 + c_2) = 0$, $c_2\, q_1 = 0$, где c_2 — постоянная.

С учетом всех изложенных результатов находим

$$\rho_4 \sim u_2^3\, A_8' + P_2(u_2).$$

Это дает $A_8' = 0$ по лемме 9, поэтому получаем:

$$A_8 = c_3, \quad A_5 = 3\,(c_2 + c_3) u_1 + q_1(u); \quad c_2\,(c_2 + c_3) = 0, \quad c_2\, q_1 = 0.$$

Теперь условия (3.22) и (3.24) записываются в виде:

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_3^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 A_6}{\partial u_1^2} - 2\, q_1' \right) + P_5(u_2) \sim 0,$$

$$\frac{d}{dt}\rho_3 \sim u_4^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial A_9}{\partial u_1} - \frac{\partial^2 A_6}{\partial u_1^2} + \frac{9}{5}(c_2^2 - c_3^2) u_1^2 - \frac{6}{5}\, c_3\, q_1\, u_1 - \frac{1}{5}\, q_1^2 \right) + P_3(u_3) \sim 0.$$

Приравняв к нулю выражения при u_3^2 и u_4^2, находим A_6 и A_9:

$$A_6 = (q_1' + c_4)u_1^2 + q_2\, u_1 + q_3, \quad A_9 = \frac{3}{5}(c_3^2 - c_2^2)u_1^3 + \frac{3}{5}c_3\, q_1 u_1^2 + \frac{1}{5}(c_5 + 10\, q_1' + q_1^2)u_1 + q_4,$$

где $q_i = q_i(u)$ — произвольные функции.

Далее из третьего и пятого условий интегрируемости следует, что $c_3 = c_2 = 0$. Затем из третьего условия интегрируемости определяется функция A_{10} в виде многочлена третьей степени по u_1, а из четвертого условия интегрируемости определяется функция A_{11} в виде многочлена пятой степени по u_1. Для определения коэффициентов многочленов A_6, A_9, A_{10} и A_{11} были проверены 10 условий интегрируемости. Эта технически несложная работа требует перебора большого числа вариантов при решении уравнений. Результатом явились S-интегрируемые уравнения (3.2) – (3.9), а также интегрируемые уравнения, являющиеся симметриями уравнений (2.10) – (2.13).

Случай II.a.2. Полученные выше формулы для A_1, A_2, A_3, а также (3.43) и (3.46) остаются верными. Подставив в них $c_1 = 0$ и $f_0 = u_1^{-1}$, получаем:

$$A_1 = -\frac{5}{2\, u_1}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{5}{4\, u_1}, \quad A_4 = \frac{5}{u_1^2}, \quad A_7 = -\frac{35}{16\, u_1^3}.$$

Нетрудно проверить, что условие интегрируемости (3.23) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_2 \sim\, & u_4^2\left[u_2\, u_1^{-1}\left(6\, A_8 + 6\, u_1\frac{\partial A_8}{\partial u_1} + \frac{\partial A_5}{\partial u_1} - 2\, u_1\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2}\right) + 6\, u_1\frac{\partial A_8}{\partial u} + 3\frac{\partial A_5}{\partial u} - 2\, u_1\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1 \partial u}\right] + \\ & + \frac{1}{6}u_3^3 u_2 u_1^{-2}\left(78\, A_8 - 42\, u_1\frac{\partial A_8}{\partial u_1} - 60\, u_1^2\frac{\partial^2 A_8}{\partial u_1^2} + 20\, u_1^2\frac{\partial^3 A_5}{\partial u_1^3} - 16\, u_1\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} + 13\frac{\partial A_5}{\partial u_1}\right) + \\ & + u_3^3\, Q(u, u_1) + P_3(u_3) \sim 0.\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\rho_3 \sim u_2^3 u_1^{-2}\left(4\, u_1^2\frac{\partial A_8}{\partial u_1} + 12\, A_8\, u_1 - 2\, u_1^2\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} - 3\, u_1\frac{\partial A_5}{\partial u_1} + 4\, A_5\right) + P_2(u_2).$$

Коэффициенты при u_4^2 и $u_3^3\, u_2$ в (3.23), как и коэффициент при u_2^3 в ρ_3, должны обращаться в нуль. Это дает нам четыре уравнения, решение которых имеет вид

$$A_5 = q_1 + \frac{q_2}{\sqrt{u_1}}, \quad A_8 = -\frac{q_1}{2\, u_1} - \frac{2\, q_2}{3\, u_1^{3/2}},$$

где $q_i = q_i(u)$. Несколько более громоздкое условие интегрируемости (3.22) дает

$$A_6 = c_2 + q_3 u_1 + 2\, c_3\sqrt{u_1} + 2\, q_2' u_1^{3/2} + q_1' u_1^2.$$

С учетом этих результатов закон сохранения (3.24) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_3 \sim\, & u_4^2 u_2\left(\frac{\partial^2 A_9}{\partial u_1^2} + \frac{3}{u_1}\,\frac{\partial A_9}{\partial u_1} - \frac{q_1^2 + 15\, q_1'}{5\, u_1} - \frac{5\, q_2' + q_1 q_2}{5\, u_1^{3/2}} - \frac{3}{4}(c_2 u_1^{-3} + c_3 u_1^{-5/2})\right) + \\ & + u_4^2\left(\frac{\partial^2 A_9}{\partial u_1 \partial u}\, u_1 + 2\frac{\partial A_9}{\partial u} - \frac{2}{5}\sqrt{u_1}\,(5\, q_2' + q_1 q_2)' - \frac{1}{5}\, u_1(2\, q_1 q_1' + 15\, q_1'') - \frac{2}{5}\, q_2 q_2' + \frac{1}{4}\, q_3'\right) \\ & + P_3(u_3) \sim 0.\end{aligned}$$

Члены с u_4^2 должны быть нулями, что дает

$$A_9 = c_4 - \frac{1}{8}\, q_3 + \frac{q_2^2}{10} + \frac{q_4}{u_1^2} + \frac{q_1^2}{15}\, u_1 + q_1' u_1 + \frac{4}{25}\sqrt{u_1}\,(5\, q_2' + q_1 q_2) - \frac{c_3}{\sqrt{u_1}} - \frac{3\, c_2}{4\, u_1}.$$

Далее из условий (3.22) – (3.24) находятся A_{10} и A_{11}, но эти выражения мы не приводим из-за их громоздкости.

Для уточнения постоянных коэффициентов и вида функций $q_i(u)$ было проверено десять условий интегрируемости. Этим условиям удовлетворяют уравнение (3.12), и уравнение, являющееся симметрией уравнения (2.18).

Случай II.a.3. Ход вычисления в этом случае в точности тот же, что и в **II.a.2**, но имеются небольшие различия в формулах. Общие для случая **II.a** формулы принимают здесь следующий вид:

$$A_1 = -\frac{5}{2\,\xi}, \quad A_2 = \frac{5\,a'\,u_1}{2\,a}, \quad A_3 = -\frac{5}{4\,\xi}, \quad A_4 = \frac{5}{\xi^2}, \quad A_7 = -\frac{35}{16\,\xi^3},$$

где $a = a(u)$ — произвольная функция, $\xi = u_1 + 1$.

Условие интегрируемости (3.23) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_2 \sim u_4^2 u_2\,\xi^{-1}\left(6\,A_8 + 6\,\xi\frac{\partial A_8}{\partial u_1} + \frac{\partial A_5}{\partial u_1} - 2\,\xi\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} + \frac{15\,a'}{2\,a\,\xi^2}\right) + u_4^2 u_1\left(6\frac{\partial A_8}{\partial u} + 3\,\xi^{-1}\frac{\partial A_5}{\partial u}\right.\\ \left.-2\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1 \partial u} + \frac{2\,a'}{a}\frac{\partial A_5}{\partial u_1} - 6\frac{a'}{a}A_8 - \frac{3\,a'}{a\,\xi}\,A_5 + \frac{15}{2\,a^2\xi^2}\,(2\,a'^2 - aa'')\right) +\\ + Q_1(u,u_1)u_3^3 u_2 + Q_2(u,u_1)u_3^3 + P_2(u_3) \sim 0.\end{aligned}$$

Это условие вместе с формулой для плотности закона сохранения (3.24)

$$\rho_3 \sim u_2^3\xi^{-2}\left(4\,\xi^2\frac{\partial A_8}{\partial u_1} + 12\,\xi\,A_8 - 2\,\xi^2\frac{\partial^2 A_5}{\partial u_1^2} - 3\,\xi\frac{\partial A_5}{\partial u_1} + 4\,A_5 - \frac{5\,a'}{a\,\xi}\right) + P_2(u_2)$$

и с учетом соотношения $Q_1 = 0$ приводит к четырем уравнениям, решение которых имеет следующий вид:

$$A_5 = q_1 + \frac{q_2}{\sqrt{\xi}}, \quad A_8 = -\frac{q_1}{2\,\xi} - \frac{2\,q_2}{3\,\xi^{3/2}} + \frac{4\,a'}{5\,a\,\xi^2},$$

где $q_i = q_i(u)$. Далее, из условия интегрируемости (3.22) определяется функция A_6, а из условия интегрируемости (3.24) – функция A_9. Затем из условий (3.22) – (3.24) находятся A_{10} и A_{11}. Все эти выражения, содержащие произвольные функции от u, довольно громоздки, и мы их опускаем.

Из пятого условия интегрируемости $\dfrac{d}{dt}\rho_4 \sim 0$ следует $a' = 0$, $q_1 = 0$, $q_2' = 0$ и т. д. Лишь в выражении A_{11} остаются две произвольные функции от u. Условия интегрируемости 5 – 7 приводят к обширной системе алгебраических уравнений для констант и двух оставшихся функций. Из этой системы следует, что все функции A_i не зависят от u. Поэтому можно выполнить преобразование $u \to u - x$, приводящее к случаю **II.a.2.** Таким образом, в рассматриваемом случае нет новых интегрируемых уравнений.

Случай II.b отличается от предыдущих тем, что канонический закон сохранения (3.22) имеет второй порядок. Из условия (3.22) следует, что

$$f_0 = -\frac{5}{2c_1}(u_1^2 + a(u)u_1 + b(u))^{-1}, \qquad ab' = 2a'b,$$

а функции A_5, A_7, A_8 и A_9 выражаются через f_0:

$$A_5 = \frac{15}{2\,f_0}\frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial u_1}\,u_1 + \frac{5}{f_0^2}\frac{\partial f_0}{\partial u}\left(f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial u_1}\,u_1\right),$$

$$A_7 = \frac{c_1}{4}\frac{\partial f_0}{\partial u_1} + \frac{5}{8\,f_0}\frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} - \frac{35}{32\,f_0^2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2}\frac{\partial f_0}{\partial u_1} + \frac{5}{8\,f_0^3}\left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^3,$$

$$A_8 = \frac{5}{24\,f_0^2}\left(14\,f_0 - 3\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\,u_1\right)\frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial u_1} + \frac{5\,u_1}{12\,f_0^2}\left(5\,f_0\frac{\partial^3 f_0}{\partial u \partial u_1^2} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2}\frac{\partial f_0}{\partial u}\right) +$$
$$+ \frac{c_1}{3}\frac{\partial f_0}{\partial u}\,u_1 - \frac{5}{24\,f_0^3}\frac{\partial f_0}{\partial u}\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\left(3\,f_0 + 8\,\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\,u_1\right).$$

Формула для A_9 опущена из-за ее громоздкости.

Принимая во внимание формулы (3.33) и явный вид функций A_1 и A_2, нетрудно заметить, что если функции a и b не равны нулю, то их можно превратить в постоянные точечным преобразованием $u \to \varphi(u)$. Если $a = 0$, то с точностью до точечного преобразования имеем либо $b = 0$, либо $b = 1$. Если $a \neq 0$, то, положив $a = 2$, получаем $b' = 0$. Таким образом, возникают три следующих возможных случая:

$$\textbf{II.b.1}.\;\; f_0 = -\frac{5}{2c_1 u_1^2}; \qquad \textbf{II.b.2}.\;\; f_0 = -\frac{5}{2c_1(u_1^2+1)};$$

$$\textbf{II.b.3}.\;\; f_0 = -\frac{5}{2c_1}((u_1+1)^2 + c)^{-1},$$

где c — постоянная.

Случай II.b.1. Из условий (3.22) и (3.24) получаем

$$A_5 = A_8 = 0, \quad A_6 = c_2 + q_1 u_1^2 + q_2 u_1^{-2}, \quad A_7 = -\frac{45}{8}\,u_1^{-3},$$

$$A_{10} = q_1' u_1^3 + q_2' u_1^{-1}, \quad A_9 = -\frac{1}{2}\,q_1 u_1 - \frac{3}{2}\,c_2 u_1^{-1} - \frac{5}{2}\,q_2 u_1^{-3},$$

$$A_{11} = \frac{1}{5}\left(q_1'' + \frac{3}{10}\,q_1^2\right) + \frac{c_2}{5}\,q_1 u_1^3 - \frac{3}{5}\,c_2\,q_2 u_1^{-1} - \frac{1}{10}\,q_2^2 u_1^{-3} + \left(\frac{1}{15}\,q_1 q_2 - \frac{1}{3}\,q_2''\right)u_1 + q_3,$$

где $q_i = q_i(u)$, c_2 — постоянная.

Проверка условий 6 – 10 показывает, что существуют только два интегрируемых уравнения, которые являются симметриями уравнений (2.15) и (2.17).

Случай II.b.2. Из условий (3.22) и (3.24) следует, что

$$A_5 = A_8 = 0, \quad A_6 = q + c_2 u_1\sqrt{u_1^2+1} + (3\,q + c_3)u_1^2, \quad A_7 = \frac{5}{8}\,u_1\frac{19 - 9\,u_1^2}{(u_1^2+1)^3}, \quad q = q(u),$$

$$A_9 = \frac{3}{2}\,u_1\frac{2\,q + c_3}{u_1^2+1} + \frac{c_2}{\sqrt{u_1^2+1}} - \frac{1}{2}\,c_2\sqrt{u_1^2+1} - \frac{1}{2}\,(3\,q + c_3)\,u_1, \quad A_{10} = q' u_1(3\,u_1^2 + 2),$$

$$A_{11} = \frac{3}{25}\,c_2(3\,q + c_3)(u_1^2+1)^{5/2} - \frac{1}{5}\,c_2(2\,q + c_3)(u_1^2+1)^{3/2} + \frac{1}{10}(3\,q^2 + 2\,c_4\,q)\,u_1 +$$
$$+ \frac{3}{50}\big(10\,q'' + (3\,q + c_3)^2 + c_2^2\big)u_1^5 + \frac{1}{10}\big(5\,q'' + 6\,q^2 + 5\,c_3\,q + c_2^2\big)\,u_1^3 + c_5, \quad c_2\,q' = 0.$$

Проверка условий 6 – 10 показывает, что существуют только два интегрируемых уравнения, которые являются симметриями уравнений (2.14) и (2.16).

Случай II.b.3. Второе условие интегрируемости (3.22) позволяет показать, что все функции A_i не зависят от u. Поэтому преобразованием $u \to u - x$ уравнение (3.42) сводится к уравнениям из случаев **II.b.1**, если $c = 0$ и **II.b.2**, если $c \neq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае нет новых интегрируемых уравнений.

Случай II.c. Плотность в (3.23) эквивалентна кубичному по u_2 выражению (3.35). Условие $\psi_4 = 0$ позволяет выразить A_7 через f_0 и f_1. Далее находим

$$\frac{d}{dt}\rho_2 \sim (Z_1 u_2 + Z_2)\, u_4^2 + O(3).$$

Из уравнений $Z_1 = 0$, $Z_2 = 0$ находим два уравнения вида

$$\frac{\partial A_8}{\partial u_1} = F_1(f_0, f_1), \qquad \frac{\partial A_8}{\partial u} = F_2(f_0, f_1),$$

которые можно явно проинтегрировать. Подставив A_7 и A_8 во все выражения, находим $\rho_3 \sim \alpha\, u_3^2 + O(2)$. Так как $2\,A_3 - A_1 = 2\,f_1 \neq 0$, то по лемме 9 имеем $\alpha = 0$, что дает уравнение Риккати

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \varphi_1(f_0) f_1^2 + \varphi_2(f_0) f_1 + \varphi_3(f_0),$$

где φ_2 и φ_3 зависят как от f_0, так и от производных f_0 по u_1 первого и второго порядков.

Аналогично предыдущему находим $\rho_4 \sim u_3^2(Q_1 u_2 + Q_2) + O(2)$, и полагаем $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$. Второе из этих уравнений определяет A_5, а первое дает обыкновенное дифференциальное уравнение с производными f_0 по u_1, содержащее f_1. Из четвертого условия интегрируемости

$$\frac{d}{dt}\rho_3 \sim u_5^2(P_1\, u_2 + P_2) + u_4^3\, P_3 + u_4^2 u_3 (P_4\, u_2 + P_5) + u_4^2(P_6\, u_2^2 + P_7\, u_2 + P_8) + u_3^4 P_9 +$$
$$+\, u_3^3(P_{10}\, u_2^3 + P_{11}\, u_2^2 + P_{12}\, u_2 + P_{13}) + u_3^2 O(2) + O(2) \sim 0$$

получаем уравнения $P_i = 0$, $i = 1, \ldots, 13$, среди которых имеется много уравнений, содержащих только f_1, f_0 и производные f_0 по u_1. Выразив все производные f_0 из части уравнений, и подставив их в остальные уравнения, получаем противоречие $f_0 f_1 = 0$.

Это означает, что в условиях **II.c** не существует интегрируемых уравнений.

Случай II.d. Напомним, что в этом случае функции A_1 и A_2 имеют вид (3.41), который обеспечивает тривиальность первого канонического закона сохранения. Функция A_4 выражается формулой (3.43), а так как $c_1 \neq 0$, то имеем еще два уравнения (3.44) и (3.45). Кроме того, $A_3 = A_1/2 + f_1$, $f_1 \neq 0$.

После исключения A_3 уравнение (3.44) принимает следующий вид:

$$15\, f_0\, \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 30 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 + 20 f_0\, f_1\, \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 28\, f_0^2 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - 12\, c_1 f_0^3 = 0, \tag{3.47}$$

а уравнение (3.45) позволяет выразить A_5 через f_0 и f_1:

$$A_5 = \frac{15}{2\, f_0}\, u_1\, \frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial u_1} - \frac{5}{3\, f_0^2}\, \frac{\partial f_0}{\partial u} \left(3\, u_1 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 3\, f_0 - 2\, u_1\, f_0\, f_1\right) - \frac{2}{3}\, u_1\, \frac{\partial f_1}{\partial u}. \tag{3.48}$$

С учетом изложенного второе условие интегрируемости (3.22) имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_3^2(Z_1\, u_2^3 + Z_2\, u_2^2 + Z_3\, u_2 + Z_4) + Z_5\, u_2^7 + P_6(u_2) \sim 0.$$

Из уравнения $Z_1 = 0$ выражается A_7:

$$A_7 = \frac{55\, f_0^{-1}}{112}\, \frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} - \frac{f_0^{-2}}{1568} \left(185\, \frac{\partial f_0}{\partial u_1} + 84\, f_0\, f_1\right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - \tag{3.49}$$
$$- \frac{f_0^{-3}}{392} \left(205 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^3 - 230\, f_0\, f_1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 - 44\, c_1\, f_0^3 \frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right),$$

а из уравнения $Z_2 = 0$ — A_8:

$$A_8 = \frac{55}{28} f_0^{-1} u_1 \frac{\partial^3 f_0}{\partial u \partial u_1^2} - \frac{5 f_0^{-2}}{84} u_1 \frac{\partial f_0}{\partial u} \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} + \frac{f_0^{-1}}{126}(30 c_1 u_1 f_0 - 7 f_1) \frac{\partial f_0}{\partial u} \tag{3.50}$$
$$- \frac{f_0^{-2}}{168}\left(25 u_1 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 490 f_0 + 36 u_1 f_0 f_1\right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial u \partial u_1} - \frac{55}{21} f_0^{-3} u_1 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 \frac{\partial f_0}{\partial u}$$
$$+ \frac{5 f_0^{-2}}{504}(272 u_1 f_1 - 63) \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \frac{\partial f_0}{\partial u} - \frac{f_0^{-1}}{63} \frac{\partial f_1}{\partial u} \left(31 u_1 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 7 f_0\right).$$

Из уравнений $Z_3 = 0$ и $Z_4 = 0$ выражаются соответственно A_9 и A_{10} через функции f_0, f_1, A_6 и их производные. Эти выражения мы опускаем ввиду их громоздкости.

Уравнение $Z_5 = 0$ имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения пятого порядка для f_0 относительно переменной u_1. Другие следствия второго условия интегрируемости содержат производные функций f_0, f_1, A_6 и A_{11} по двум переменным u_0 и u_1 и слишком сложны для анализа.

Далее, в силу леммы 9 из выражений (3.35) для ρ_2 и ρ_3 следует, что $\psi_4 = 0$ и $\psi_8 = 0$. Эти два уравнения имеют следующий вид

$$70 f_0^2 \frac{\partial^3 f_0}{\partial u_1^3} - f_0 \left(405 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 28 f_0 f_1\right) \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} \tag{3.51}$$
$$+ 6 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \left(65 \left(\frac{\partial f_0}{\partial u_1}\right)^2 - 6 f_0 f_1 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - 2 c_1 f_0^3\right) = 0,$$

$$25 f_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial u_1^2} - 10 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} \left(5 \frac{\partial f_0}{\partial u_1} - f_0 f_1\right) + f_0^2 (15 c_1 f_0 + 28 f_1^2) = 0. \tag{3.52}$$

Выразив из (3.52) вторую производную f_0, и подставив ее в (3.51) с учетом (3.47), получаем $f_0 = -4/(5c_1) f_1^2$. После исключения f_0, уравнения (3.47) и (3.52) сводятся к следующему уравнению

$$25 f_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} - 75 \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\right)^2 + 10 f_1^2 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + 8 f_1^4 = 0, \tag{3.53}$$

а уравнение (3.51) и упомянутое уравнение $Z_5 = 0$ являются следствиями уравнения (3.53). Выполнив подстановку $f_1 = 5/(4 f)$ в (3.53), получаем уравнение

$$2 \frac{\partial}{\partial u_1} \left(f \frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial u_1} = 1, \tag{3.54}$$

общий интеграл которого записывается в виде

$$(f + u_1 + a)^2 (2f - u_1 - a) + b = 0, \tag{3.55}$$

где a и b — произвольные функции переменной u.

С учетом всех полученных результатов, включая дифференциальные следствия уравнения (3.55), нетрудно проверить, что

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_2^6 f^{-10} (3a + 3u_1 - 5 f)(3a' b - a b') + P_5(u_2),$$

где штрих означает производную по u. Таким образом, $3 a' b = a b'$, что влечет $a = c\, b^{1/3}$, $c = \text{const}$, если $b \neq 0$.

Этот результат позволяет обратить обе эти функции в постоянные точечным преобразованием $u = \varphi(v)$. В самом деле, так как $2 f_1 = 2 A_3 - A_1$, то, согласно формулам (3.33),

$\tilde{f}_1(v) = \varphi' f_1(u)$. Следовательно, функция $f \sim f_1^{-1}$ преобразуется по закону $\tilde{f}(v) = \varphi'^{-1} f(u)$. Выполнив преобразование в уравнении (3.55), получаем

$$[\tilde{f} + v_1 + a(u)\varphi'^{-1}]^2[2\tilde{f} - v_1 - a(u)\varphi'^{-1}] + b(u)\varphi'^{-3} = 0. \tag{3.56}$$

Если $a = b = 0$, то никакого преобразования не требуется, и мы имеем

$$(f + u_1)^2(2f - u_1) = 0.$$

Если же $b = 0$ и $a \neq 0$, то, полагая $\varphi' = a$, приводим уравнение (3.55) к виду

$$(f + u_1 + 1)^2(2f - u_1 - 1) = 0.$$

Если $b(u) \neq 0$, то $a(u) = k\, b^{1/3}(u)$, где k — постоянная. Выбрав $\varphi' = b^{1/3}$, мы получаем уравнение (3.55) в следующем виде:

$$(f + u_1 + a)^2(2f - u_1 - a) + 1 = 0, \tag{3.57}$$

где a — постоянная.

Таким образом, с точностью то точечного преобразования величины a и b в (3.55) – постоянные, причем возможны три случая

II.d.1. $f = -u_1 - a$; **II.d.2**. $f = \dfrac{1}{2}(u_1 + a)$; **II.d.3**. $f(u_1)$ удовлетворяет (3.57).

В каждом из этих случаев параметр a принимает одно из двух значений: $a = 0$ или $a = 1$.

Используя уравнение (3.54), можно исключить высшие производные f из выражений, для функций A_i, найденных выше. Это приводит к достаточно компактным выражениям:

$$A_1 = -\frac{5}{f} f', \quad A_2 = 0, \quad A_3 = \frac{5}{4f}(1 - 2f'), \quad A_4 = \frac{5}{4f^2}(16f'^2 - 3),$$

$$A_5 = 0, \quad A_7 = -\frac{5}{16} f^{-3}(2f' - 1)(28f'^2 + 20f' + 1), \quad A_8 = 0,$$

$$A_9 = \frac{1}{2} f^2 \frac{\partial^3 A_6}{\partial u_1^3} + \frac{1}{4} f(6f' + 1)\frac{\partial^2 A_6}{\partial u_1^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial A_6}{\partial u_1} - \frac{3f'}{2f} A_6,$$

$$A_{10} = u_1 f^2 \frac{\partial^3 A_6}{\partial u \partial u_1^2} + \frac{1}{2} u_1 f(2f' + 1)\frac{\partial A_6}{\partial u \partial u_1} - \frac{1}{2}(f + u_1 + 2ff')\frac{\partial A_6}{\partial u},$$

причем эти формулы верны для каждого из трех случаев II.d.1, II.d.2 и II.d.3.

Случай II.d.1. Если $a = 1$, тогда из условий интегрируемости следует, что $A_i = A_i(u_1), \forall i$. Следовательно, допускается преобразование $u \to u - x$, и мы приходим к случаю $a = 0$. В случае $a = 0$ многочисленные развилки приводят к единственному интегрируемому уравнению (3.11).

Случай II.d.2. Если $a = 1$, тогда точно так же, как в предыдущем случае, мы приходим к случаю $a = 0$, а в случае $a = 0$ получаем уравнение (3.10).

Случай II.d.3. Рассмотрим этот случай подробнее. С учетом полученных выше результатов второе и четвертое условия интегрируемости имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\rho_1 \sim u_2^5 Q_1 + u_2^4 Q_2 + u2^3 Q_3 + u_2^2 Q_4 + O(1) \sim 0, \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho_3 \sim{}& u_4^2(P_1 + u_2 P_2) + u_3^3(P_3 + u_2 P_4) + \\ &+ u_3^2(P_5 + u_2 P_6 + u_2^2 P_7 + u2^3 P_8) + u_2^7 P_9 + P_6(u_2) \sim 0. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Здесь функции Q_i и P_j зависят только от u_0 и u_1. Для эквивалентности этих выражений нулю необходимы равенства $Q_i = 0$, $P_j = 0$ для всех i, j. Условия $Q_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_4 = 0$, $P_8 = 0$ и $P_9 = 0$ представляют собой линейные однородные обыкновенные диффенциальные уравнения для функции $A_6(u_1)$, а u входит как параметр. Первые два уравнения имеют пятый порядок, порядки остальных равны 6, 7 и 9 соответственно. Путем исключения старших производных из двух первых уравнений приходим к уравнению

$$2f^2f'\frac{\partial^2 A_6}{\partial u_1^2}+f(f'+1)(2f'-1)\frac{\partial A_6}{\partial u_1}+(1-3f')A_6=0.$$

Все оставшиеся уравнения являются его дифференциальными следствиями. Общее решение приведенного выше уравнения имеет следующий вид:

$$A_6=\gamma(u)(f+u_1+a)^2+10\,\omega(u)(u_1+a)f, \tag{3.60}$$

где γ и ω — произвольные функции.

Подставив решение (3.60) в уравнение $Q_2=0$, получаем

$$70\,a\omega'(u_1+a)f^3+a\,\gamma'\Big[7f^4+14(u_1+a)f^3+7(u_1+a)^2f^2+f-u_1-a\Big]=0. \tag{3.61}$$

Вычисление результанта многочленов (3.61) и (3.57) по переменной u_1 дает

$$\begin{aligned}a\Big[&34300\,\omega'^2(20\,\omega'+9\gamma')f^{12}+980\,\omega'(165\,\omega'\gamma'+350\,\omega'^2+3\gamma'^2)f^9\\&-7\gamma'(930\,\omega'\gamma'+2100\,\omega'^2-\gamma'^2)f^6+\gamma'^2(210\,\omega'+59\gamma')f^3-\gamma'^3\Big]=0.\end{aligned}$$

Поскольку ω и γ — функции от u, а f — непостоянная функция от u_1, все коэффициенты этого многочлена должны равняться нулю. Отсюда следует

$$a\gamma'=0,\qquad a\omega'=0.$$

Далее рассмотрим уравнения, содержащие A_{11}. К ним относятся $Q_3=0$, $Q_4=0$, $P_5=0$ и $P_6=0$. Два первых из них имеют второй порядок: из первого можно выразить $\partial^2A_{11}/\partial u_1^2$, а из второго — $\partial^2A_{11}/\partial u\partial u_1$. С помощью $Q_3=0$ можно исключить A_{11} из $P_6=0$, и это дает уравнение для функции ω:

$$\omega''=6\omega^2.$$

Отсюда и из $a\omega'=0$ следует, что $a\omega=0$.

Исключая высшие производные A_{11} из $P_5=0$, получаем уравнение вида

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial u}=P_1(f,u_1,\gamma',\omega')P_2^{-1}(f,u_1,\gamma',\omega'),$$

где P_1 и P_2 — такие многочлены по переменным f и u_1, что $P_1(f,u_1,0,0)=0$ и $P_2(f,u_1,0,0)\neq0$. Это означает, что если $a\neq0$ и $\gamma'=\omega'=0$, то A_6 и A_{11} не зависят от u. Это ведет к тому, что все A_i зависят только от u_1. В таком случае допускается преобразование $u\to u-ax$, уничтожающее a в уравнении (3.57). Следовательно, достаточно рассмотреть только случай $a=0$.

При $a = 0$ уравнения для A_{11} становятся не слишком громозкими:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_{11}}{\partial u_1^2} =& \frac{1}{2\,f}\,(\gamma'' + 4\,\gamma\omega)(8\,f^4 + 16\,u_1\,f^3 + 8\,{u_1}^2 f^2 + 3\,f + u_1)\\ &+ \frac{2\,\gamma^2}{5\,f}(9\,f^4 + 18\,u_1\,f^3 + 9\,{u_1}^2 f^2 + 4\,f + u_1)\\ &- \frac{10}{f}\omega^2(14\,f^4 + 23\,u_1\,f^3 - 31\,{u_1}^2 f^2 + 9\,f - 3\,u_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{11}}{\partial u} =& 40\,f^2\frac{\omega'\,\omega\,(2\,f^6 + f^5 u_1 - f^4 {u_1}^2 - 3\,f^3 - 7\,u_1\,f^2 - 2)}{2\,f^3 + u_1\,f^2 - {u_1}^2 f + 1}\\ &- 2\,f^2\frac{(2\,f^3 + 3\,u_1\,f^2 + {u_1}^2 f + 1)(2\,\gamma\omega' + 3\,\gamma'\,\omega)}{2\,f^3 + u_1\,f^2 - {u_1}^2 f + 1}.\end{aligned}$$

Интегрируя первое уравнение,[1] мы получаем

$$\begin{aligned}A_{11} =& \frac{1}{10}\,(8\,f^5 + 2\,f^2 - {u_1}^2 + 16\,u_1\,f^4 + 8\,{u_1}^2 f^3)(4\,\gamma\omega + \gamma'')\\ &+ \frac{1}{25}\,\gamma^2(18\,{u_1}^2 f^3 + 36\,u_1\,f^4 + 7\,f^2 + 18\,f^5 - {u_1}^2)\\ &- 4\,\omega^2(2\,f^5 + 3\,f^2 - u_1\,f^4 - 8\,{u_1}^2 f^3 + {u_1}^2) + \alpha\,u_1 + \beta,\end{aligned}$$

где α и β — произвольные функции от u. Из второго уравнения следует, что α и β — постоянные. Используя преобразование Галилея, можно считать, что $\alpha = 0$.

Подстановка выражения для $\partial A_{11}/\partial u$ в уравнение $Q_4 = 0$ приводит к двум дополнительным уравнениям для γ и ω В итоге полная система уравнений для этих функций имеет следующий вид:

$$\omega'' = 6\omega^2, \tag{3.62}$$

$$\gamma''' = 8\gamma'\omega + 4\gamma\omega', \tag{3.63}$$

$$(\gamma + 15\omega)\gamma' + 10(\gamma + 10\omega)\omega' = 0, \tag{3.64}$$

Найдя явный вид всех функций A_i, и используя уравнения (3.62) – (3.64), нетрудно проверить до конца условия интегрируемости 1–4. Эти условия приводят к единственному ограничению $\beta\omega' = 0$, где β — постоянная, входящая в A_{11}.

Если $\omega' \neq 0$, то $\beta = 0$. Если же $\omega' = 0$, то из (3.62) следует $\omega = 0$, а из (3.64) – $\gamma = const$. В этом случае коэффициенты уравнения (3.42) не зависят от u, поэтому допускается преобразование $u \to u + \beta t$, уничтожающее постоянную β в A_{11}. Таким образом, $\beta = 0$ при любых ω и γ.

Если $\omega = 0$, то, положив $\gamma = 5\mu$, мы получаем уравнение (3.13).

Если $\omega \neq 0$, то из (3.62) следует, что $\omega' \neq 0$. В таком случае порядок уравнения (3.62) понижается, и мы получаем уравнение ${\omega'}^2 = 4\,\omega^3 + c$, совпадающее с (3.18). Так как $\omega' \neq 0$, то из (3.64) следует $\gamma + 15\,\omega \neq 0$, поэтому можно выразить γ' из (3.64). Это позволяет исключить производные функций γ и ω из (3.63). В итоге получаем следующее уравнение

$$(\gamma + 30\,\omega)(\gamma + 5\,\omega)(\gamma + 20\,\omega)\big[(\gamma + 20\,\omega)(\gamma + 5\,\omega)^2 + 125\,c\big] = 0, \tag{3.65}$$

где c — постоянная из (3.18).

Если $\gamma = -30\,\omega$, то из (3.64) вытекает $\omega = 0$, что противоречит предположению. Если $\gamma = -5\,\omega$, то получаем уравнение (3.14), а если $\gamma = -20\,\omega$, то — уравнение (3.15).

---

[1] Метод интегрирования указан в приложении 2.

Рассмотрим случай

$$(\gamma + 20\,\omega)(\gamma + 5\,\omega)^2 + 125\,c = 0. \tag{3.66}$$

Кубика (3.66) является рациональной и параметризуется следующей подстановкой:

$$\omega = \tilde{\omega} + \tilde{c}\,\tilde{\omega}^{-2}, \quad \gamma = -5\,\tilde{c}\,\tilde{\omega}^{-2} - 20\,\tilde{\omega},$$

где $c = -27\,\tilde{c}$. Подставляя эти выражения в (3.62) – (3.64), находим, что $\tilde{\omega}$ удовлетворяет уравнению (3.18) с постоянной $\tilde{c}$ вместо c. Подставив уже найденные функции A_i в уравнение (3.32), воспользовавшись выражениями для ω и γ, и переобозначив $\tilde{\omega} \to \omega$, $\tilde{c} \to c$, получаем уравнение (3.16). □

3.4. Дифференциальные подстановки, связывающие уравнения списка.

Как отмечено в разделе 2.4, при вычислении дифференциальных подстановок полезно знать порядки канонических законов сохранения. В табл. 2 указаны порядки нескольких канонических законов сохранения для уравнений списка (3.2) – (3.16).

Четные плотности не отражены в табл. 2, потому что они все оказались тривиальными $\rho_{2n} \sim 0$. Для уравнения (3.12) порядки плотностей минимальных порядков, эквивалентных ρ_1 и ρ_9, указаны для случая констант общего положения, если же $\mu = 0$, то $\rho_1 \sim 0$, $\rho_9 \sim 0$.

Таблица 2. Порядки канонических законов сохранения. Для законов сохранения нулевого прядка в скобках указано, чему эквивалентна плотность

ρ_i	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(3.6)	(3.7)	(3.8)	(3.9)
ρ_1	0, $(\sim u)$	0, $(\sim u)$	0, (~ 0)	0, (~ 0)	0, $(\sim u^2)$	1	1	1
ρ_3	~ 0	~ 0	1	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0
ρ_5	1	1	2	2	2	3	3	3
ρ_7	2	2	3	3	3	4	4	4
ρ_9	~ 0	~ 0	4	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0
ρ_{11}	4	4	5	5	5	6	6	6
ρ_i	(3.10)	(3.11)	(3.12)	(3.13)	(3.14)	(3.15)	(3.16)	
ρ_1	2	2	1	2	2	2	2	
ρ_3	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	
ρ_5	4	4	3	4	4	4	4	
ρ_7	5	5	4	5	5	5	5	
ρ_9	~ 0	~ 0	3	~ 0	~ 0	~ 0	~ 0	
ρ_{11}	7	7	6	7	7	7	7	

Дифференциальные подстановки, допускаемые S-интегрируемыми уравнениями пятого порядка, изображены на рис. 2.

Ниже приведены подстановки для уравнений с константами общего положения.

(3.13)→(3.6): $\tilde{u} = \dfrac{u_2}{2f} + \sqrt{-\mu}\,(f + u_1)$.

(3.15)→(3.9): $\tilde{u} = \ln(f + u_1) - \ln\varphi$. При этом $\omega = \dfrac{\lambda_1^2}{4\,\varphi^2} + \dfrac{1}{2}\,\lambda_2\,\varphi$, а постоянная c в уравнении (3.18), которому удовлетворяет ω, равна $c = -\dfrac{27}{16}\,\lambda_1^2\lambda_2^2$.

(3.10)→(3.9): $\tilde{u} = \ln u_1, \quad \mu_1 = \lambda_2, \quad \mu_2 = -\lambda_1^2$.

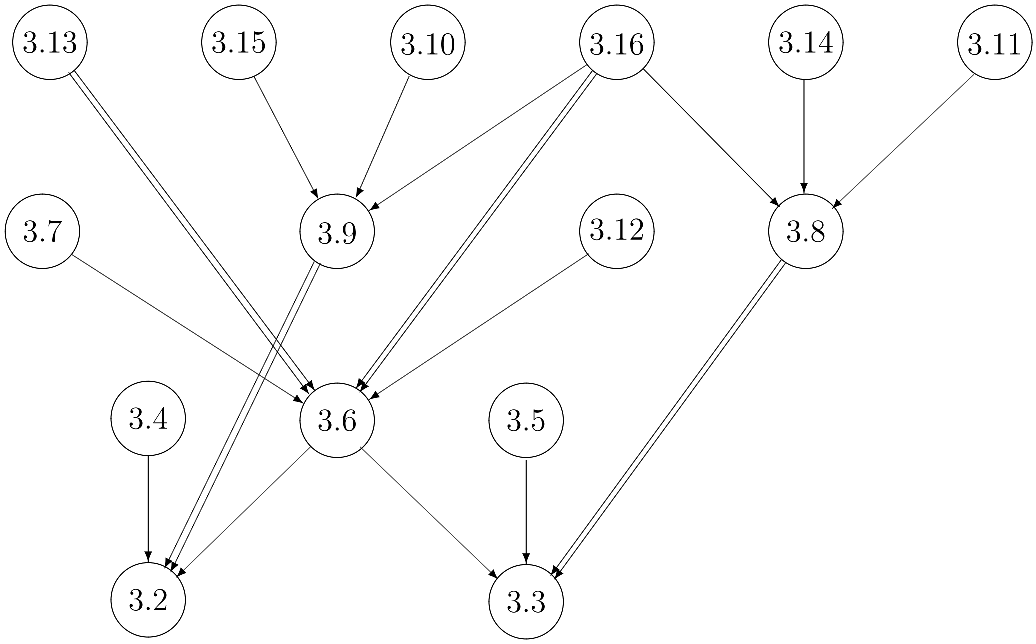

Рис. 2. Граф подстановок для S-интегрируемых уравнений пятого порядка

(3.16)→(3.9): $\tilde u = \ln(f+u_1) - \ln(2\,\omega\lambda_2^{-1}), \quad c = \dfrac{1}{4}\,\lambda_1^2\lambda_2^2.$

(3.16)→(3.8): $\tilde u = \ln(f+u_1) + \dfrac{1}{2}\ln(-4\,\omega\lambda_1^{-1}), \quad c = \dfrac{1}{4}\,\lambda_1\lambda_2^2.$

(3.16)→(3.6): $\tilde u = \dfrac{u_2}{2f} - \dfrac{f\omega'}{\omega} + \dfrac{1}{2\omega}(3\sqrt{c} - \omega')u_1.$

(3.14)→(3.8): $\tilde u = \ln(f+u_1) + \dfrac{1}{2}\ln\varphi$. При этом $\omega = -\lambda_1\,\varphi + 4\,\lambda_2^2\,\varphi^{-2},\ c = -108\,\lambda_1^2\lambda_2^2.$

(3.11)→(3.8): $\tilde u = -\dfrac{1}{2}\ln u_1, \quad \mu_1 = \lambda_1, \quad \mu_2 = -\lambda_2^2.$

(3.7)→(3.6): $\tilde u = u_1.$

(3.9)→(3.2): $\tilde u = -u_2 - u_1^2 \pm 3\,\lambda_1 e^u u_1 - \lambda_1^2 e^{2\,u} + \lambda_2 e^{-u}.$

(3.12)→(3.6): $\tilde u = \sqrt{u_1} - \mu$. При этом уравнение (3.12) должно содержать дополнительный член $5\,\mu^4 u_1$.

(3.8)→(3.3): $\tilde u = 2\,u_2 - u_1^2 \pm 6\,\lambda_2 e^{-2\,u} u_1 + \lambda_1 e^{2\,u} - \lambda_2^2 e^{-4\,u}.$

(3.6)→(3.2): $\tilde u = -u_1 - u^2.$

(3.6)→(3.3): $\tilde u = 2\,u_1 - u^2.$

(3.4)→(3.2): $\tilde u = u_1.$

(3.5)→(3.3): $\tilde u = u_1.$

Кроме этих, существуют еще подстановки при специальных значениях параметров, входящих в уравнения.

Пример 2. (3.8)→(3.6): $\tilde u = u_1 + \sqrt{-\lambda_1}\,e^u \pm \lambda_2\,e^{2\,u},\ \lambda_1\lambda_2 = 0$. В каждом из случаев $\lambda_2 = 0$ или $\lambda_1 = 0$, логарифмическая подстановка $u \to -\ln u$ или $u \to -\dfrac{1}{2}\ln u$ приводит к линейному уравнению первого порядка относительно u. То есть функцию u можно выразить через $\tilde u$ при помощи одной квадратуры.

Если положить здесь $\lambda_2 = 0,\ \lambda_1 \to -\lambda_1^2$, то получим подстановку **(3.9)→(3.6)** с $\lambda_2 = 0$.

Пример 3. (3.13)→(3.8): $\tilde u = \ln(f+u_1),\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 = \mu$. Здесь также можно выразить u через $\tilde u$ при помощи одной квадратуры. Действительно, как нетрудно проверить, кривая третьего порядка (3.17) имеет следующее параметрическое представление:

$$u_1 = \frac{1}{3}\left(2\,e^v + e^{-2\,v}\right), \qquad f = \frac{1}{3}\left(e^v - e^{-2\,v}\right),$$

причем $v = \tilde{u}$. Таким образом, имеем $u = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \left(2\, e^{\tilde{u}} + e^{-2\,\tilde{u}}\right) dx.$

Приложение 1. Дискретные симметрии функции Вейерштрасса ω

Уравнения (3.13) – (3.16) можно записать в различных формах. Отметим, во-первых, что в статье [9] эти уравнения записаны в терминах функции $R = f + u_1$, удовлетворяющей уравнению $2R^3 - 3u_1R^2 + 1 = 0$.

Кроме того, существуют преобразования, сохраняющие форму уравнения (3.18). Действительно, рассмотрим функции ω и $\tilde{\omega}$, удовлетворяющие уравнениям вида (3.18):

$$\omega'^2 = 4\,\omega^3 + c, \tag{П1.1}$$

$$\tilde{\omega}'^2 = 4\,\tilde{\omega}^3 + k, \tag{П1.2}$$

где $c\,k \neq 0$. Нетрудно проверить, что следующие простейшие преобразования

$$\omega = a\frac{a - \tilde{\omega}}{a + 2\,\tilde{\omega}}, \quad k = c = \frac{1}{2}\,a^3; \tag{$\boldsymbol{T}_1$}$$

$$\omega = \tilde{\omega} + \frac{k}{\tilde{\omega}^2}, \quad c = -27\,k; \tag{$\boldsymbol{T}_2$}$$

$$\omega = \frac{c + \sqrt{c}\,\tilde{\omega}'}{2\,\tilde{\omega}^2}\,, \quad k = c \tag{$\boldsymbol{T}_3$}$$

отображают решение (П1.2) в решение (П1.1).

Преобразование $\boldsymbol{T}_1$ обратимо, причем $\tilde{\omega}$ выражается через ω той же самой формулой. Обращение преобразования $\boldsymbol{T}_2$ также возможно, но задача сводится к решению кубического уравнения. Для обращения преобразования $\boldsymbol{T}_3$ требуется решить уравнение Риккати. Отметим, что формула ($\boldsymbol{T}_2$) помогла найти параметризацию кубики (3.66).

Композиции элементарных преобразований $\boldsymbol{T}_i$ приводят к новым преобразованиям, сохраняющим форму уравнения (3.18). Например,

$$\boldsymbol{T}_1 * \boldsymbol{T}_2: \quad \omega = \frac{3}{2}\,a + \frac{27\,a^2\tilde{\omega}^2}{2(2\tilde{\omega} + a)(\tilde{\omega} - a)^2}\,, \quad k = \frac{a^3}{2},\ c = -\frac{27}{2}\,a^3;$$

$$\boldsymbol{T}_2 * \boldsymbol{T}_2: \quad \omega = \tilde{\omega} + \frac{k}{\tilde{\omega}^2} - \frac{27\,k\,\tilde{\omega}^4}{(\tilde{\omega}^2 + k)^2}\,, \quad c = 729\,k;$$

$$\boldsymbol{T}_3 * \boldsymbol{T}_1: \quad \omega = \frac{a(2\tilde{\omega} + a)^2 - 3\sqrt{2a^3}\,\tilde{\omega}'}{4(\tilde{\omega} - a)^2}\,, \quad c = \frac{a^3}{2}\,;$$

$$\boldsymbol{T}_3 * \boldsymbol{T}_2: \quad \omega = \frac{c\,\tilde{\omega}^4 + \sqrt{c}\,\tilde{\omega}(\tilde{\omega}^3 - 2\,k)}{2(\tilde{\omega}^3 + k)^2}\,, \quad c = -27\,k.$$

Кроме того, $\boldsymbol{T}_1 * \boldsymbol{T}_1$ — тождественное преобразование, а $\boldsymbol{T}_3 * \boldsymbol{T}_3$ отличается от $\boldsymbol{T}_3$ лишь знаком корня $\sqrt{c}$. Таким образом, уравнения (3.13) – (3.16) можно записать бесконечным числом внешне разных способов.

Приложение 2. Явное интегрирование функций, зависящих от u_1 и f

Для проверки условий интегрируемости уравнений (3.13) – (3.16) необходима таблица интегралов от рациональных выражений $R(u_1, f)$, где функция f определена уравнением (3.17). Эти интегралы находятся с помощью рациональной параметризации

$$f = \frac{w^3 - 1}{3\,w^2}, \qquad u_1 = \frac{2\,w^3 + 1}{3\,w^2} \tag{П2.1}$$

кривой (3.17). Параметризация позволяет преобразовать интеграл от иррациональной функции $R(u_1, f)$ переменной u_1 в интеграл от рациональной функции переменной w:

$$\int R(u_1, f)\, du_1 = \int R\left(\frac{2\,w^3+1}{3\,w^2}, \frac{w^3-1}{3\,w^2}\right)\left(\frac{2\,w^3+1}{3\,w^2}\right)' dw.$$

Ответ можно записать в исходных переменных u_1 и f с помощью формулы $w = f + u_1$, вытекающей из (П2.1).

Для проверки условий интегрируемости нам понадобились интегралы вида

$$\int u_1^n f^m\, du_1, \quad n = 0, 1, 2; \quad -5 \leqslant m \leqslant 11.$$

Например:

$$\int f\, du_1 = \frac{1}{2}u_1^2 - f^2, \qquad \int u_1^2 f\, du_1 = \frac{1}{20}\big(8f^4 + 14f^3u_1 + f^2u_1^2 - u_1\big),$$

$$\int u_1 f\, du_1 = \frac{1}{9}\big(2f^3 + f^2u_1 + 2fu_1^2 - 2\ln(f+u_1)\big),$$

$$\int \frac{du_1}{f} = 2\ln(f+u_1), \qquad \int \frac{u_1\, du_1}{f} = 2f + u_1, \qquad \int \frac{u_1\, du_1}{f^2} = 2\ln(f+u_1) + 2\ln f.$$

Для вычисления повторных интегралов необходимо добавить к таблице также и интегралы от логарифмов, например:

$$\int \ln(f+u_1)\, du_1 = u_1\ln(f+u_1) - \frac{u_1}{2} - f.$$

При доказательстве теоремы 2 использовано около двух десятков подобных формул.

Для проверки любой из приведенных формул достаточно продифференцировать ее, исключить $f' = \dfrac{u_1 - f}{2\,f}$ и понизить степени u_1, если это нужно, с помощью тождеств

$$u_1^3 = 1 + 3u_1f^2 + 2f^3, \quad u_1^4 = u_1(1 + 3u_1f^2 + 2f^3), \dots,$$

вытекающих из (3.17).

Приложение 3. О рекуррентных формулах для канонических плотностей

Здесь мы обсуждаем способ получения рекуррентных формул типа (2.2) и (3.26). Исходная идея этого метода содержится в работе [55], где был предложен простой метод вывода рекуррентных формул для законов сохранения уравнений Лакса. В работе [10] этот подход был применен к линеаризации эволюционных уравнений и систем.

Для полноты изложения мы вначале кратко изложим суть метода Захарова — Шабата.

Предположим, что уравнение (0.1) имеет представление Лакса:

$$\frac{dL}{dt} = [A,\, L] \Longleftrightarrow u_t = u_n + F(x, u, u_1, \dots, u_{n-1}),$$

где квадратными скобками обозначен коммутатор линейных операторов. Для простоты предположим, что $A = A(\partial_x, \mu, u)$ и $L = L(\partial_x, \mu, u)$ — скалярные дифференциальные операторы, не зависящие от ∂_t, μ — спектральный параметр, u — решение уравнения (0.1).

Представление Лакса обеспечивает совместность линейной системы

$$L\psi = 0, \qquad \psi_t = A\psi. \tag{П3.1}$$

Введем обозначения для логарифмических производных функции ψ:

$$(\ln\psi)_x = R, \qquad (\ln\psi)_t = T.$$

Очевидно, функции R и T связаны соотношением

$$R_t = T_x, \tag{П3.2}$$

и $R\,dx + T\,dt = d\ln\psi$. Поэтому с точностью до постоянного множителя имеем

$$\psi = \exp\left(\int R\,dx + T\,dt\right), \tag{П3.3}$$

где интеграл в аргументе экспоненты — это криволинейный интеграл с переменным верхним пределом (x, t).

Так как $\psi_x = \psi R$, $\psi_t = \psi T$, то справедливы следующие операторные формулы:

$$\psi^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \psi = \left(\frac{d}{dx} + R\right)^n, \qquad \psi^{-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \psi = \left(\frac{d}{dt} + T\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В силу этих формул имеем

$$\psi^{-1}L(\partial_x, \mu, u)\psi = L(\partial_x + R, \mu, u), \quad \psi^{-1}A(\partial_x, \mu, u)\psi = A(\partial_x + R, \mu, u).$$

Поэтому уравнения (П3.1) можно переписать в терминах функций R и T:

$$L(\partial_x + R, \mu, u)(1) = 0, \tag{П3.4}$$

$$T = A(\partial_x + R, \mu, u)(1). \tag{П3.5}$$

Эти два уравнения нелинейны по R. Их решения ищут в виде рядов Лорана по параметру μ. Коэффициенты этих рядов в силу (П3.2) являются плотностями законов сохранения.

Пример 4. Для уравнения КдФ $u_t = u_{xxx} - 6uu_x$ ассоциированную линейную систему можно записать в следующем виде:

$$\psi_{xx} - u\psi - \mu^2\psi = 0, \tag{П3.6}$$

$$\psi_t = 4\psi_{xxx} - 6u\psi_x - 3u_x\psi. \tag{П3.7}$$

Формулы (П3.4),(П3.5) приводят к следующим уравнениям для R и T:

$$R_x + R^2 - u - \mu^2 = 0, \tag{П3.8}$$

$$T = 4(\partial_x + R)^2(R) - 6u\,R - 3u_x. \tag{П3.9}$$

Уравнение (П3.9) можно упростить при помощи (П3.8), это дает

$$T = (4\mu^2 - 2u)R + u_x. \tag{П3.10}$$

Если подставить в уравнение (П3.8) следующий ряд

$$R = \mu + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \mu^{-n}, \tag{П3.11}$$

и приравнять к нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ, то получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\rho_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u\delta_{n0} - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_i\rho_{n-i} - \frac{d}{dx}\rho_n\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{П3.12}$$

где δ_{n0} — символ Кронекера. Заметим, что масштабное преобразование $\rho_n \to \rho_n(-2)^{-n}$ приводит формулу к виду, указанному в монографии [19]. Приведем первые элементы последовательности ρ_n:

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_1 = \frac{1}{2}u, \quad \rho_2 = -\frac{1}{4}u_1, \quad \rho_3 = \frac{1}{8}(u_2 - u^2).$$

Далее, подставив ряд (П3.11) в уравнение (П3.10), получаем разложение

$$T = 4\mu^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \mu^{-n}, \tag{П3.13}$$

где

$$\theta_n = 4\rho_{n+2} - 2u\rho_n, \quad n > 0. \tag{П3.14}$$

Ввиду произвольности параметра μ, формула (П3.2) определяет бесконечную последовательность законов сохранения

$$\frac{d}{dt}\rho_n = \frac{d}{dx}\theta_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{П3.15}$$

Для получения канонических плотностей ρ_n, достаточно (П3.2) и одного из уравнений (П3.8) или (П3.9).

Если использовать уравнение (П3.8), то вновь придем к рекуррентной формуле (П3.12), а формула (П3.14) теряется. Токи θ_n, соответствующие плотностям ρ_n, можно найти из (П3.15), обращая оператор полной производной $\dfrac{d}{dx}$ (алгоритм обсуждался в замечании 4, на стр. 113).

Для дальнейшего важнее понять, как получить канонические плотности из уравнений (П3.9) и (П3.2). Так как уравнение (П3.9) не содержит параметра, то параметр вводится априорно, и мы можем выбрать вид разложения для R по своему усмотрению. Если, например, считать, что R — это ряд Тейлора

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \mu^n,$$

где μ — параметр, то

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mu^n,$$

где коэффициенты θ_n определяются из уравнения (П3.9). Нетрудно проверить, что

$$\theta_n = 4\sum_{0}^{n} \rho_i\rho_j\rho_k - 3\,u_1\delta_{n0} - 6\,u\rho_n + 4\frac{d^2}{dx^2}\rho_n + 6\frac{d}{dx}\sum_{0}^{n}\rho_i\rho_j,$$

где использованы обозначения для сумм, введенные на странице 128. Поскольку в левой и правой частях этой формулы одновременно появляются неизвестные функции θ_n и ρ_n, она никак не помогает при вычислении законов сохранения.

Ситуация меняется, если постулировать разложение функции R в ряд Лорана

$$R = \mu^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \mu^n. \tag{П3.16}$$

В этом случае из уравнения (П3.9) получаем вид разложения для T

$$T = 4\mu^{-3} + \theta_{-2}\mu^{-2} + \theta_{-1}\mu^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mu^n, \tag{П3.17}$$

и рекуррентную формулу

$$\rho_{n+2} = \frac{1}{2}\,u\rho_n + \frac{1}{4}u_1\delta_{n,0} - \sum_{0}^{n+1}\rho_i\rho_j + \frac{1}{12}\theta_n - \frac{1}{3}\sum_{0}^{n}\rho_i\rho_j\rho_k + \frac{1}{12}\theta_{-2}\delta_{n,-2} -$$
$$- \frac{d}{dx}\left(\rho_{n+1} + \frac{1}{2}\sum_{0}^{n}\rho_i\rho_j + \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\rho_n\right) + \frac{1}{12}\left(6\,u + \theta_{-1}\right)\delta_{n,-1}, \tag{П3.18}$$

где $n = -2, -1, 0, \ldots$ Рассмотрим соответствующую серию законов сохранения (П3.15), где $n = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. Если законы сохранения с номерами $i \leqslant n+1$ уже известны, то мы находим ρ_{n+2} из (П3.18), а затем θ_{n+2} из (П3.15) и т.д. При нахождении θ_{n+2} нам приходится обращать оператор $\dfrac{d}{dx}$. При предположении, что плотности и токи законов сохранения (П3.15) не зависят явно от t, эта процедура абсолютно алгоритмична (см. стр. 113). При этом функция θ_{n+2} определена однозначно с точностью до постоянной интегрирования.

Начало этой рекурренции выглядит следующим образом. Согласно (П3.16), имеем $\rho_{-2} = \rho_{-1} = 0$, поэтому из (П3.15) получаем, что соответствующие токи постоянны: $\theta_{-1} = 12c_{-1},\ \theta_{-2} = 12c_{-2}$. Далее находим $\rho_0 = c_{-2}$. Следующие две плотности имеют вид

$$\rho_1 = \frac{1}{2}u + c_{-1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{12}\theta_0 - \frac{c_{-2}}{2}u - \frac{1}{4}u_1 - \frac{c_{-2}^3}{3} - 2c_{-1}c_{-2}.$$

Для определения θ_0 необходимо снова прибегнуть к уравнению (П3.15) при $n = 0$, что дает $\theta_0 = c_0$.

Важно отметить, что постоянные c_i, возникающие при нахождении токов θ_i, не являются существенными, поскольку могут быть устранены заменой параметра μ следующего вида:

$$\mu \to \mu + \sum_{i=2}^{\infty} k_i \mu^i. \qquad \text{(П3.20)}$$

Рассмотрим теперь произвольное эволюционное уравнение с одной пространственной переменной

$$u_t = K(x, u, u_x, \ldots, u_n), \qquad n > 1. \qquad \text{(П3.20)}$$

В случае (0.1) имеем $K = u_n + F(x, u, u_x, \ldots, u_{n-1})$. Обозначим через K_* производную Фреше функции K:

$$K_* = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial K}{\partial u_i} \frac{d^i}{dx^i}.$$

Формальный ряд

$$L = \sum_{k=-\infty}^{1} f_k \frac{d^k}{dx^k},$$

коэффициенты которого зависят от $x, u, u_x, \ldots$, удовлетворяющий уравнению

$$L_t = [K_*,\, L]\,, \qquad \text{(П3.21)}$$

называется формальной симметрией (формальным рекурсионным оператором) уравнения (П3.20). Известно, что уравнение, имеющее высшие симметрии или законы сохранения, обладает формальной симметрией [4, 7, 9].

Уравнение (П3.21) обеспечивает совместность следующей пары линейных уравнений

$$L\psi = \lambda\psi, \qquad \psi_t = K_*\psi, \qquad \text{(П3.23)}$$

где λ — спектральный параметр. К этой системе можно применить процедуру получения канонических плотностей, изложенную выше. Так как оператор L заранее неизвестен, то используем уравнение (П3.5):

$$T = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial K}{\partial u_i} \left(\frac{d}{dx} + R\right)^i (1). \qquad \text{(П3.25)}$$

Пусть

$$R = \rho_{-1}\mu^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \mu^k, \tag{П3.27}$$

тогда

$$T = \mu^{-n} + \sum_{i=1}^{n-1} \theta_{-i}\mu^{-i} + \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \mu^k. \tag{П3.28}$$

Действительно, минимальная степень μ в правой части равенства (П3.25) содержится в слагаемом

$$\frac{\partial K}{\partial u_n}\left(\frac{d}{dx} + R\right)^n (1) = \frac{\partial K}{\partial u_n} R^n + \dots = \frac{\partial K}{\partial u_n}(\rho_{-1})^n \mu^{-n} + \dots,$$

поэтому ряд для T должен начинаться с члена $\theta_{-n}\mu^{-n}$. Так как $n > 1$, то $\rho_{-n} = 0$ и θ_{-n}=const$\neq 0$. Растяжением параметра μ обращаем θ_{-n} в единицу, и получаем (П3.28).

Подставляя в (П3.25) разложения (П3.27), (П3.28) и приравнивая в уравнении (П3.25) члены при μ^{-n}, получаем первую каноническую плотность

$$\rho_{-1} = \left(\frac{\partial K}{\partial u_n}\right)^{-1/n}.$$

Формулы для нескольких следующих канонических плотностей можно найти в [9].

Рассмотри теперь уравнения вида (0.2) и приведем вывод рекуррентной формулы (2.2) для канонических плотностей, следуя описанной выше схеме.

1-й шаг. Записываем линеаризацию уравнения (0.2):

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \frac{\partial F}{\partial u_2}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{d}{dx} + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dt}\right]\psi = 0.$$

2-й шаг. При помощи подстановки

$$\psi = \exp\left(\int R\,dx + T\,dt\right), \quad \text{где} \quad R_t = T_x,$$

получаем уравнение с «удлиненными производными»:

$$\left[\left(\frac{d}{dx} + R\right)^3 + \frac{\partial F}{\partial u_2}\left(\frac{d}{dx} + R\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial u_1}\left(\frac{d}{dx} + R\right) + \frac{\partial F}{\partial u} - \left(\frac{d}{dt} + T\right)\right](1) = 0,$$

которое равносильно соотношению

$$T = \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}R + R\frac{d}{dx} + R^2\right)(R) + \frac{\partial F}{\partial u_2}\left(\frac{d}{dx} + R\right)(R) + \frac{\partial F}{\partial u_1}R + \frac{\partial F}{\partial u}. \tag{П3.29}$$

3-й шаг. Выбираем подходящее разложение для R. Простейший выбор состоит в том, чтобы положить

$$R = \mu^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n \mu^n. \tag{П3.30}$$

Замечание 12. Несколько попыток искать разложения с полюсами высших порядков не дали ничего нового. Если, например, принять для уравнения (0.2) $R = \mu^{-2} + \sum_{n=-1}^{\infty} \rho_n \mu^n$, то после проверки нескольких условий (П3.15) получаем $\rho_{2n+1} = 0$, $\forall n$. Это равносильно тому, что R разлагается по параметру $\xi = \mu^2$. Аналогичные результаты были получены и для некоторых других уравнений и систем (см. [11]).

Выбрав разложение (П3.30), мы должны принять

$$T = \mu^{-3} + \theta_{-2}\mu^{-2} + \theta_{-1}\mu^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mu^n, \tag{П3.31}$$

чтобы в уравнении (П3.29) уничтожились слагаемые с μ^{-3}.

Для разложения (П3.30) имеем $\rho_{-1} = 1, \rho_{-2} = 0$ откуда следует, что θ_{-2} и θ_{-1} — постоянные. Поскольку аддитивные постоянные интегрирования в токах устраняются преобразованием параметра (П3.20), положим $\theta_{-2} = \theta_{-1} = 0$.

Теперь, как нетрудно проверить, подстановка разложений (П3.30) и (П3.31) в уравнение (П3.29) приводит к формуле (2.2) с указанными там ρ_0 и ρ_1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *What is Integrability?* Ed. V.E. Zakharov. Springer series in Nonlinear Dynamics. 1991.
2. *Integrability.* Ed. A.V. Mikhailov. Lecture Notes in Physics. Springer. 2009. V. 767.
3. Ньюэлл А. *Солитоны в математике и физике.* Москва. Мир. 1989. 323 с.
4. Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б. *О бесконечных алгебрах Ли-Беклунда*//Функц. анализ и его прилож.. 1980. Т. 14. №4. С. 79–80.
5. Свинолупов С. И., Соколов В. В. *Об эволюционных уравнениях с нетривиальными законами сохранения*//Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. №4. С. 86–87.
6. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *О законах сохранения для уравнений, обладающих нетривиальной алгеброй Ли-Беклунда* // Интегрируемые системы: сб. статей. Ред. А.Б. Шабат. БФ АН СССР. Уфа. 1982. С. 53–67.
7. V.V. Sokolov and A.B. Shabat *Classification of Integrable Evolution Equations*//Soviet Scientific Reviews, Section C. 1984. V. 4. P. 221–280.
8. Михайлов А.В., Шабат А. Б., Ямилов Р.И. *Симметрийный подход к классификации нелинейных уравнений. Полные списки интегрируемых систем* // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. №4. 3–53.
9. A.V. Mikhailov, V.V. Sokolov, A.B. Shabat *The symmetry approach to classification of integrable equations* // What is Integrability? Ed. V.E. Zakharov. Springer series in Nonlinear Dynamics. 1991. P. 115–184. Перевод на рус. в кн. Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Ред. В.Г. Бахтарьяр и В.Е. Захаров. Киев. Наукова думка. 1990. 472 с.
10. H.H. Chen, Y.C. Lee and C.S. Liu *Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method* // Phys. Scr. 1979. V. 20. №3–4. P. 490–492.
11. A.G. Meshkov *Necessary conditions of the integrability*//Inverse Problems. 1994. V.10. 635–653.
12. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега — де Фриза*//Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. Москва. ВИНИТИ. 1984. Т. 24. С. 81–180.
13. Свинолупов С.И. *Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями*//Успехи матем. наук. 1985. Т. 40. №5. С. 263–264.
14. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Слабые нелокальности в эволюционных уравнениях*//Матем. заметки. 1990. №6. С. 91–97.
15. A.S. Fokas *A symmetry approach to exactly solvable evolution equations*//J. Math. Phys. 1980. V. 21. №6. P. 1318–1325.
16. R.H. Heredero, V.V. Sokolov, and S.I. Svinolupov *Toward the classification of third order integrable evolution equations*//J. Phys. A: Mathematical and General. 1994. V. 13. P. 4557–4568.
17. R.H. Heredero *Classification of fully nonlinear integrable evolution equations of third order*//J. Nonlin. Math. Phys. 2005. V. 12. №4. P. 567–585.
18. Дринфельд В.Г., Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Классификация эволюционных уравнений пятого порядка, обладающих бесконечной серией законов сохранения* // Докл. АН УССР. 1985. Т. А10. С. 7–10.
19. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи.* Москва. Наука. 1980. 320 с.

20. Соколов В.В. *О симметриях эволюционных уравнений*//Успехи матем. наук. 1988. Т. 43. №5. С. 165–204.
21. Sanders Jan and Jing Ping Wang *On the Integrability of homogeneous scalar evolution equations* // J. Differential Equations. 1998. V. 147. P. 410–434.
22. P. Olver, Jing Ping Wang *Classification of integrable one-component systems on associative algebras*//Proc. London Math. Soc. 2000. V. 81. №3. P. 566–586.
23. M. Gurses, A. Karasu and V.V. Sokolov *On construction of recursion operator from Lax representation*// JMPh. 1999. V. 40, №12. P. 6473–6490.
24. V.V. Sokolov and T. Wolf *A symmetry test for quasilinear coupled systems*//Inverse Problems. 1999. V. 15. P. L5–L11.
25. Мешков А. Г., Михаляев Б. Б. *Уравнения газовой динамики, допускающие бесконечное число симметрий*//Теор. и мат. физ. 1987. Т. 72. №2. С.163–171.
26. S.I. Svinolupov *On the analogues of the Burgers equation*//Phys. Lett. A. 1989. V. 135. №1. P. 32–36.
27. S.I. Svinolupov *Generalized Schrödinger equations and Jordan pairs*//Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. №1. P. 559–575.
28. Свинолупов С.И. *Йордановы алгебры и обобщенные уравнения Кортевега — де Фриза*//Теор. и мат. физ. 1991. Т. 87. №3. С. 391–403.
29. Свинолупов С.И., Соколов В.В. *Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений*//Теор. и мат. физ. 1994. Т. 100. №2. С. 214–218.
30. V.V. Sokolov and S.I. Svinolupov *Deformation of nonassociative algebras and integrable differential equations*//Acta Applicandae Mathematica.1995. V. 41. №1–2. P. 323–339.
31. I.T. Habibullin, V.V. Sokolov, R.I. Yamilov *Multi-component integrable systems and nonassociative structures*//Nonlinear Physics: theory and experiment. Eds: E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. World Scientific Publisher. Singapore. 1996. P. 139–168.
32. P.J. Olver and V.V. Sokolov *Integrable evolution equations on associative algebras*//Commun. Math. Phys. 1998. V. 193. №2. P. 245–268.
33. V.V. Sokolov, T. Wolf *Classification of integrable polynomial vector evolution equations*//J. Phys. A: Mathematical and General 2001. V. 34. P. 11139–11148.
34. A.G. Meshkov and V.V. Sokolov *Integrable evolution equations on the N-dimensional sphere*//Commun. Math. Phys. 2002. V. 232. №1. P. 1–18.
35. Мешков А.Г., Соколов В.В. *Классификация интегрируемых дивергентных N-компонентных эволюционных систем*//Теор. и мат. физ. 2004. Т. 139. №2. С. 192–208.
36. M.Ju. Balakhnev, A.G. Meshkov *Integrable anisotropic evolution equations on a sphere*//SIGMA. 2005, V. 1. Paper 027. 11 p.
37. Балахнев М.Ю. *Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений*//Теор. и мат. физ. 2005. Т. 142. №1. С. 13–20.
38. Мешков А.Г. *К симметрийной классификации эволюционных систем третьего порядка дивергентного вида*//Фундам. и прикл. математика. 2006. Т. 12. №7. С.141–161.
39. M.Ju. Balakhnev, A.G. Meshkov *Two-field integrable evolutionary systems of the third order and their differential substitutions*//SIGMA. 2008, V. 4. Paper 018. 29 p.
40. M.Ju. Balakhnev, A.G. Meshkov *On a classification of integrable vectorial evolutionary equations*//J. Nonlin. Math. Phys. 2008. V. 15. №2. P. 212–226.
41. A.V. Mikhailov, V.V. Sokolov *Symmetries of differential equations and the problem of integrability*//Integrability. Ed. A.V. Mikhailov. Lecture Notes in Physics. Springer. 2009. V. 767. P. 19–88. ISBN: 978-3-540-88110-0
42. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнение Клейна-Гордона с нетривиальной группой*//Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. №5. С. 1103–1107.
43. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Системы уравнений $u_x = p(u,v)$, $v_y = q(u,v)$, обладающие симметриями*//Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. №1. С. 29–33.
44. Мешков А.Г. *Симметрии скалярных полей. 3. Двумерные интегрируемые модели*//Теор. и мат. физ. 1985. Т. 63. №3. С. 323–332.

45. A.G. Meshkov *Hamiltonian and recursion operators for two-dimensional scalar fields*//Phys. Lett. A. 1992. V. 170. №6. P. 405–408.
46. Жибер А.В. *Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий*//Изв. РАН, сер. матем. 1994. Т. 58. №4. С. 33–54.
47. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа*//Успехи матем. наук. 2001. Т. 56. №1. С. 63–106.
48. Мешков А.Г. *Нелокальные симметрии 2-полевых дивергентных эволюционных систем*//Теор. и мат. физ. 2008. Т. 156. №3. С. 351–363.
49. Мешков А.Г. *Векторные гиперболические уравнения, обладающие высшими симметриями*//Теор. и мат. физ. 2009. Т. 161. №2. С. 176–190.
50. Мешков А.Г., Соколов В.В. *Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка*//Теор. и мат. физ. 2011. Т. 166. №1. С. 51–67.
51. Олвер П. *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.* Москва. Мир. 1989. 639 с.
52. Свинолупов С.И., Соколов В.В., Ямилов Р.И. *Преобразования Бэклунда для интегрируемых эволюционных уравнений*//Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. №4. С. 802–805.
53. Дринфельд В.Г., Соколов В.В. *Об уравнениях, родственных уравнению Кортевега–де Фриза*//Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. №1. С. 29–33.
54. Бейтмен Г. и Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье, сер. СМБ.* Москва. Наука. 1967. 300 с.
55. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде*//ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118–134.

Анатолий Георгиевич Мешков,
Государственный университет – УНПК,
Наугорское шоссе, 29,
302020, г. Орел, Россия
E-mail: a_meshkov@orel.ru

Владимир Вячеславович Соколов,
ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН,
просп. Академика Семенова, 1-а,
г. Черноголовка, Московская обл., Ногинский р-н, Россия
E-mail: sokolov@itp.ac.ru