ISSN 2074-1871 Уфимский математический журнал. Том 4. № 3 (2012). С. 86-103.

УДК 517.95

О НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, СВЯЗАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ПОДСТАНОВКАМИ С УРАВНЕНИЕМ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

М.Н. КУЗНЕЦОВА

Аннотация. В настоящей работе проведена полная классификация нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными $u_{xy} = f(u, u_x, u_y)$, сводящихся дифференциальными подстановками специального вида $v = \varphi(u, u_x)$ к уравнению Клейна-Гордона $v_{xy} = F(v)$.

Ключевые слова: нелинейные гиперболические уравнения, дифференциальные подстановки, уравнение Клейна-Гордона.

1. Введение

В настоящей статье рассматриваются нелинейные гиперболические уравнения вида

$$u_{xy} = f(u, u_x, u_y). \tag{1.1}$$

Дифференциальные подстановки широко применяются при исследовании интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений. Иногда, при помощи дифференциальных подстановок удается получить решение уравнения из решения другого, хорошо изученного уравнения. Отличительным признаком интегрируемости уравнения является наличие симметрий. В работе [1] было доказано, что нелинейное уравнение Клейна-Гордона

$$v_{xy} = F(v) \tag{1.2}$$

обладает высшими симметриями тогда и только тогда, когда оно эквивалентно либо уравнению Лиувилля

$$v_{xy} = \exp v, \tag{1.3}$$

либо уравнению синус-Гордона

$$v_{xy} = \sin v, \tag{1.4}$$

либо уравнению Цицейки

$$v_{xy} = \exp v + \exp(-2v). \tag{1.5}$$

В настоящей работе описан класс нелинейных гиперболических уравнений, связанных дифференциальными подстановками специального вида с уравнением Клейна-Гордона.

Для того чтобы сформулировать строгие утверждения и определения, отметим следующее. Поскольку, через u мы обозначаем любое решение уравнения (1.1), то все смешанные производные функции u выражаются через

$$u, \quad u_x, \quad u_y, \quad u_{xx}, \quad u_{yy}, \ldots \tag{1.6}$$

M.N. Kuznetsova, On nonlinear hyperbolic differential equations related to the Klein-Gordon equation by differential substitutions.

Работа поддержана РФФИ (гранты 11-01-97005-р-поволжье-а, 12-01-31208-мол-а) и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 годы (соглашение №8499).

Поступила 26 марта 2012 г.

в силу уравнения (1.1) и его дифференциальных следствий и исключаются изо всех выражений. При этом, переменные (1.6) считаются независимыми, так как их нельзя связать между собой, пользуясь уравнением (1.1) и его дифференциальными следствиями.

Определение 1. *Соотношение*

$$v = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, ..., \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \frac{\partial u}{\partial y}, ..., \frac{\partial^m u}{\partial y^m}\right) \tag{1.7}$$

называется дифференциальной подстановкой из уравнения (1.1) *в уравнение*

$$v_{xy} = g(v, v_x, v_y), \tag{1.8}$$

если для любого решения $u(x, y)$ *уравнения* (1.1) *функция* (1.7) *удовлетворяет уравнению* (1.8).

Прежде чем приступить к подробному изложению сути данной работы, кратко коснемся некоторых публикаций, посвященных дифференциальным подстановкам. Как известно (см. [2–4]), одним из критериев интегрируемости нелинейного уравнения является обрыв с двух сторон последовательности инвариантов Лапласа его линеаризации. Такие уравнения принято называть уравнениями лиувиллевского типа. В работах [5, 6] были описаны свойства обобщенных инвариантов Лапласа нелинейных уравнений, обладающих дифференциальными подстановками. Одним из наиболее полных обзоров, посвященных уравнениям лиувиллевского типа, является работа [7]. Необходимо отметить работу [8], которая посвящена нелинейным гиперболическим уравнениям, обладающим симметриями третьего порядка. Мы упоминаем здесь именно эти работы еще и потому, что в них представлено достаточно большое количество примеров дифференциальных подстановок, связывающих пары нелинейных гиперболических уравнений.

Дифференциальные подстановки могут быть частными случаями преобразований Беклунда (см., например, [9]). В статье [10] описаны пары нелинейных уравнений вида (1.1), линеаризации которых связаны преобразованиями Лапласа первого и второго порядка, и для каждой такой пары построено соответствующее преобразование Беклунда.

Цель данной работы — описать все нелинейные гиперболические уравнения (1.1), сводящиеся дифференциальными подстановками

$$v = \varphi(u, u_x) \tag{1.9}$$

к уравнению Клейна-Гордона (1.2). Другими словами, задача состоит в определении функций f, φ и F.

Полный список искомых уравнений и дифференциальных подстановок представлен во втором параграфе настоящей статьи. Третий параграф посвящен доказательству основного результата. Последний раздел посвящен в некотором смысле “обратной” задаче — описанию уравнений (1.2), сводящихся дифференциальными подстановками

$$u = \psi(v, v_y) \tag{1.10}$$

к уравнению (1.1). Кроме этого, для отдельных пар уравнений построены преобразования Беклунда, связывающие их решения.

2. Классификация уравнений, сводящихся к уравнению Клейна-Гордона

Основным результатом работы является следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть уравнение* (1.1) *сводится дифференциальной подстановкой* (1.9) *к уравнению Клейна-Гордона* (1.2)*. Тогда уравнения* (1.1), (1.2) *и подстановка* (1.9) *с точностью до точечных преобразований* $u \to \theta(u)$, $v \to \kappa(v)$, $x \to \xi x$, $y \to \eta y$, *где* ξ *и* η —

постоянные, принимают следующий вид:

$$u_{xy} = uF'\big(F^{-1}(u_x)\big), \quad v_{xy} = F(v), \quad v = F^{-1}(u_x); \tag{2.1}$$

$$u_{xy} = \sin u\sqrt{1-u_x^2}, \quad v_{xy} = \sin v, \quad v = u + \arcsin u_x; \tag{2.2}$$

$$u_{xy} = \exp u\sqrt{1+u_x^2}, \quad v_{xy} = \exp v, \quad v = u + \ln\left(u_x + \sqrt{1+u_x^2}\right); \tag{2.3}$$

$$u_{xy} = \frac{\sqrt{2u_y}}{s'(u_x)}, \quad v_{xy} = F(v), \quad v = s(u_x); \tag{2.4}$$

$$u_{xy} = \frac{c - u_y\varphi_u(u,u_x)}{\varphi_{u_x}(u,u_x)}, \quad v_{xy} = 0, \quad v = \varphi(u,u_x); \tag{2.5}$$

$$u_{xy} = u_x\big(\psi(u,u_y) - u_y\alpha'(u)\big), \quad v_{xy} = \exp v, \quad v = \alpha(u) + \ln u_x; \tag{2.6}$$

$$u_{xy} = u_x\big(\psi(u,u_y) - u_y\alpha'(u)\big), \quad v_{xy} = 0, \quad v = \alpha(u) + \ln u_x; \tag{2.7}$$

$$u_{xy} = u, \quad v_{xy} = v, \quad v = c_1u + c_2u_x; \tag{2.8}$$

$$u_{xy} = \delta(u_y), \quad v_{xy} = 1, \quad v = c_1u + c_2u_x. \tag{2.9}$$

Здесь c — произвольная постоянная, c_1 и c_2 такие, что $(c_1,c_2) \neq (0,0)$, функция ψ удовлетворяет условию $(\psi_u, \psi_{u_y}) \neq (0,0)$. В случае (2.4) функции s и F связаны соотношением $s'(u_x)F\big(s(u_x)\big) = 1$; в случае (2.6) функции ψ и α удовлетворяют соотношению

$$\psi_u + \psi\psi_{u_y} - \alpha' u_y\psi_{u_y} = \exp\alpha,$$

а в случае (2.7) — соотношению

$$\psi_u + \psi\psi_{u_y} - \alpha' u_y\psi_{u_y} = 0;$$

в случае (2.9) функция δ является решением обыкновенного дифференциального уравнения $\delta(c_1 + c_2\delta') = 1$.

Теперь остановимся подробно на некоторых из полученных уравнениях.

Случай (2.1). При $F(v) = \exp v$ получаем уравнение

$$u_{xy} = uu_x, \tag{2.10}$$

которое сводится дифференциальной подстановкой $v = \ln u_x$ к уравнению Лиувилля (1.3). Симметрии третьего порядка, интегралы и общее решение уравнения (2.10) можно найти, например, в [8].

При $F(v) = \sin v$ получаем уравнение

$$u_{xy} = u\sqrt{1-u_x^2}, \tag{2.11}$$

сводящееся дифференциальной подстановкой $v = \arcsin u_x$ к уравнению синус-Гордона (1.4). Симметрии уравнения (2.11) приведены в [8].

При $F(v) = \exp v + \exp(-2v)$ при помощи точечных замен приходим к уравнению

$$u_{xy} = 3ub(u_x). \tag{2.12}$$

Здесь функция b определяется соотношением $(2u_x + b)^2(u_x - b) = 1$. Дифференциальная подстановка $v = -\frac{1}{2}\ln\big(u_x - b(u_x)\big)$, которая сводит уравнение (2.12) к уравнению Цицейки (1.5), является известной (см. [7]).

Случай (2.2). Уравнение $u_{xy} = \sin u\sqrt{1-u_x^2}$ обладает симметриями третьего порядка [8].

Случай (2.3). Интегралы и общее решение уравнения $u_{xy} = \exp u\sqrt{1+u_x^2}$ можно найти, например, в [8].

Случай (2.4). При $F(v) = v$ получаем известное уравнение Гурса

$$u_{xy} = 2\sqrt{u_xu_y}, \tag{2.13}$$

сводящееся подстановкой $v = \sqrt{2u_x}$ к уравнению Гельмгольца $v_{xy} = v$. Уравнение (2.13) обладает симметриями третьего порядка (см. [8]).

При $F(v) = \sin v$ приходим к S–интегрируемому уравнению [8]

$$u_{xy} = \sqrt{2u_y}\sqrt{1-u_x^2}, \tag{2.14}$$

сводящемуся подстановкой $v = \arccos(-u_x)$ к уравнению синус-Гордона (1.4).

Если $F(v) = \exp v$, то уравнение

$$u_{xy} = u_x\sqrt{2u_y} \tag{2.15}$$

сводится преобразованием $v = \ln u_x$ к уравнению Лиувилля (1.3). Симметрии, интегралы и общее решение для (2.15) можно найти в [8].

Интерес представляет уравнение, полученное при $F(v) = \exp v + \exp(-2v)$, которое после точечной замены может быть записано так:

$$u_{xy} = \sqrt{2u_y}a(u_x). \tag{2.16}$$

Здесь функция a определяется соотношением $2(a+2u_x)^2(a-u_x) = 27$. Дифференциальная подстановка

$$v = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2a(u_x)-2u_x}{3}\right)$$

преобразует решение уравнения (2.16) в решение уравнения Цицейки (1.5). Здесь необходимо отметить, что уравнение (2.16) и последняя подстановка приведены в работе [11]. Указанная подстановка позволяет строить высшие симметрии уравнения (2.16).

Случай (2.5). Уравнение $u_{xy} = \frac{c-u_y\varphi_u(u,u_x)}{\varphi_{u_x}(u,u_x)}$ при $c = 0$ обладает x-интегралом $W = \varphi(u,u_x)$, при $c \neq 0$ — x-интегралом $W = \varphi_{u_x}u_{xx} + \varphi_u u_x$.

Случай (2.6). После замены $v \to v + \ln 2c_2$, $\alpha \to \alpha + \ln 2c_2$ при $\psi = c_1\exp(-u) + c_2\exp(u) + u_y$, $\alpha = u$ получаем уравнение

$$u_{xy} = u_x\big(c_1\exp(-u) + c_2\exp(u)\big), \tag{2.17}$$

которое сводится подстановкой $v = u + \ln u_x$ к уравнению Лиувилля $v_{xy} = 2c_2\exp v$. Симметрии, интегралы и общее решение (2.17) можно найти в [8].

Далее, при $\alpha(u) = u$ приходим к уравнению

$$u_{xy} = u_x\frac{\exp(u) - \psi_u(u,u_y)}{\psi_{u_y}(u,u_y)}$$

с y-интегралом $\bar W = \psi(u,u_y) - \exp u$.

В общем случае первое уравнение (2.6) обладает y-интегралом

$$\bar W = \psi_{u_y}u_{yy} + \psi_u u_y - \frac{\psi^2}{2}$$

и x-интегралом

$$W = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2}\frac{u_{xx}^2}{u_x^2} + \left(\alpha''(u) - \frac{\alpha'^2(u)}{2}\right)u_x^2.$$

Случай (2.7). Первое уравнение (2.7) имеет интегралы

$$W = \frac{u_{xx}}{u_x} + \alpha'(u)u_x, \quad \bar W = \psi(u,u_y).$$

Все указанные выше уравнения, обладающие интегралами, содержатся в списке уравнений лиувиллевского типа, приведенном в обзоре [7].

3. Доказательство основного результата

Для доказательства теоремы 1 проведем следующие преобразования. Подставляем функцию (1.9) в уравнение (1.2), учитывая формулу (1.1)

$$\begin{aligned}\big(\varphi_{uu}u_x+\varphi_{uu_x}u_{xx}\big)u_y+\varphi_u f+\big(\varphi_{u_xu}u_x+\varphi_{u_xu_x}u_{xx}\big)f+\\ +\varphi_{u_x}\big(f_u u_x+f_{u_x}u_{xx}+f_{u_y}f\big)=F(\varphi).\end{aligned} \tag{3.1}$$

Поскольку переменные u, u_x, u_y и u_{xx} являются независимыми, а все функции, фигурирующие в соотношении (3.1), не зависят от u_{xx}, последнее равенство эквивалентно следующей системе:

$$\begin{gathered}\varphi_{uu_x}u_y+\varphi_{u_xu_x}f+\varphi_{u_x}f_{u_x}=0,\\ \varphi_{uu}u_xu_y+\varphi_u f+\varphi_{uu_x}u_x f+\varphi_{u_x}f_u u_x+\varphi_{u_x}f_{u_y}f=F(\varphi).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Интегрируя первое уравнение (3.2) по переменной u_x, приходим к системе

$$\varphi_u u_y+\varphi_{u_x}f=\psi(u,u_y),\quad u_x\psi_u+\big(\varphi_u+\varphi_{u_x}f_{u_y}\big)f=F(\varphi). \tag{3.3}$$

Итак, исходная задача (1.1), (1.2), (1.9) свелась к исследованию системы (3.3). Из первого соотношения (3.3) определям правую часть уравнения (1.1):

$$f=\frac{\psi-u_y\varphi_u}{\varphi_{u_x}}. \tag{3.4}$$

Подставляем функцию (3.4) во второе равенство (3.3)

$$u_x\varphi_{u_x}\psi_u+\psi\psi_{u_y}-u_y\psi_{u_y}\varphi_u=\varphi_{u_x}F(\varphi). \tag{3.5}$$

Применим к левой и правой части соотношения (3.5) оператор $\frac{\partial^2}{\partial u_x\partial u_y}$:

$$\psi_{uu_y}\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}-\varphi_{uu_x}\big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}=0. \tag{3.6}$$

Равенство (3.6) справедливо, если выполнено одно из следующих условий:

$$\psi_{uu_y}=0,\quad \varphi_{uu_x}=0, \tag{3.7}$$

$$\psi_{uu_y}=0,\quad \big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}=0, \tag{3.8}$$

$$\varphi_{uu_x}=0,\quad \big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}=0, \tag{3.9}$$

$$\psi_{uu_y}\varphi_{uu_x}\neq 0. \tag{3.10}$$

Отметим, что если $\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}=0$ и $\big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}=0$, то

$$\varphi=c_1(u)\ln u_x+c_3(u),\quad \psi=c_2(u)\ln u_y+c_4(u).$$

Легко видеть, что данный случай является частым по отношению к (3.8), (3.10).

Покажем теперь, что требование (3.10) приводит к условию (3.7). Действительно, согласно соотношению (3.6), имеем

$$\frac{\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}}{\varphi_{uu_x}}=\frac{\big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}}{\psi_{uu_y}}. \tag{3.11}$$

Так как переменные u_x, u_y независимые, равенство (3.11) эквивалентно системе

$$\frac{\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}}{\varphi_{uu_x}}=\alpha(u),\quad \frac{\big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}}{\psi_{uu_y}}=\alpha(u).$$

Пусть $\alpha\neq 0$, тогда

$$\big(\varphi_{u_x}u_x\big)_{u_x}=\alpha(u)\varphi_{uu_x},\quad \big(\psi_{u_y}u_y\big)_{u_y}=\alpha(u)\psi_{uu_y}. \tag{3.12}$$

Интегрируя каждое уравнение системы (3.12), определяем функции φ и ψ:

$$\varphi=\lambda(u)+h\big(\kappa(u)u_x\big),\quad \psi=\mu(u)+H\big(\kappa(u)u_y\big). \tag{3.13}$$

Требование (3.10) влечет $\kappa' \neq 0$. Теперь вернемся к формулам (1.1) и (3.4), которые дают

$$u_{xy} = \frac{\psi - u_y \varphi_u}{\varphi_{u_x}}$$

или

$$\varphi_{u_x} u_{xy} + u_y \varphi_u = \psi.$$

Последнее соотношение означает, что $\bar{D}(\varphi) = \psi$, где $\bar{D}$ обозначает оператор полного дифференцирования по переменной y. Подставляя сюда функции (3.13), получаем

$$\bar{D}\Big(\lambda(u) + h\big(\kappa(u)u_x\big)\Big) = \mu(u) + H\big(\kappa(u)u_y\big).$$

Сделаем в последнем равенстве точечную замену

$$\int \kappa(u)du = U,$$

после которой оно примет следующий вид:

$$\bar{D}\big(\chi(U) + h(U_x)\big) = \theta(U) + H(U_y).$$

Вводя функции $\phi(U, U_x) = \chi(U) + h(U_x)$, $\Psi(U, U_y) = \theta(U) + H(U_y)$, сводим данный случай к случаю (3.7).

Если же $\alpha = 0$, то соотношения (3.12) дают

$$\varphi = h(u)\ln u_x + \epsilon(u), \quad \psi = H(u)\ln u_y + \delta(u). \tag{3.14}$$

Подставляем функции (3.14) в равенство (3.5)

$$\big(H'\ln u_y + \delta'\big)h + \big(H\ln u_y + \delta\big)\frac{H}{u_y} - \big(h'\ln u_x + \epsilon'\big)H = \frac{h}{u_x}F(h\ln u_x + \epsilon).$$

Откуда $H = 0$, что противоречит условию $\psi_{uu_y} \neq 0$. Случай (3.10) исследован.

Далее, перейдем к описанию уравнений (1.1), (1.2) и дифференциальных подстановок, связывающих их решения в случаях (3.7) – (3.9). Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (3.7). *Тогда уравнения* (1.1), (1.2) *и подстановка* (1.9) *с точностью до точечных преобразований* $u \to \theta(u)$, $v \to \kappa(v)$, $x \to \xi x$, $y \to \eta y$, *где* ξ *и* η *— постоянные, принимают следующий вид:*

$$u_{xy} = \frac{c_1 - u_y q'(u)}{s'(u_x)}, \quad v_{xy} = 0, \quad v = q(u) + s(u_x); \tag{3.15}$$

$$u_{xy} = u_x\left(g(u) - u_y\frac{g''(u)}{g'(u)}\right), \quad v_{xy} = \exp v, \quad v = \ln g'(u) + \ln u_x; \tag{3.16}$$

$$u_{xy} = uF'\big(F^{-1}(u_x)\big), \quad v_{xy} = F(v), \quad v = F^{-1}(u_x); \tag{3.17}$$

$$u_{xy} = u, \quad v_{xy} = v, \quad v = c_1 u + c_2 u_x, ; \tag{3.18}$$

$$u_{xy} = \sin u\sqrt{1 - u_x^2}, \quad v_{xy} = \sin v, \quad v = u + \arcsin u_x; \tag{3.19}$$

$$u_{xy} = u_x\big(c_1\exp(-u) + c_2\exp(u)\big), \quad v_{xy} = 2c_2\exp v, \quad v = u + \ln u_x; \tag{3.20}$$

$$u_{xy} = \exp(u)\sqrt{1 + u_x^2}, \quad v_{xy} = \exp(v), \quad v = u + \ln\left(u_x + \sqrt{1 + u_x^2}\right); \tag{3.21}$$

$$u_{xy} = \frac{\sqrt{2u_y}}{S'(u_x)}, \quad v_{xy} = F(v), \quad v = S(u_x); \tag{3.22}$$

$$u_{xy} = 0, \quad v_{xy} = 0, \quad v = u + s(u_x); \tag{3.23}$$

$$u_{xy} = \frac{\big(p(u_y) - cu_y\big)c_3}{c_4}, \quad v_{xy} = c_3, \quad v = cu + \frac{c_4}{c_3}u_x. \tag{3.24}$$

Здесь c_1, c_2 — произвольные, а c, c_3, c_4 — ненулевые постоянные. Функции S и p удовлетворяют уравнениям $S'(u_x)F\big(S(u_x)\big)=1$ и $p'(u_y)\big(p(u_y)-cu_y\big)=c_4$ соответственно.

Доказательство. Пусть выполнено условие (3.7), тогда

$$\varphi=q(u)+s(u_x),\quad \psi=g(u)+p(u_y). \tag{3.25}$$

Подставим функции (3.25) в соотношение (3.5)

$$u_x s'(u_x)g'(u)+\big(g(u)+p(u_y)\big)p'(u_y)-u_y p'(u_y)q'(u)=s'(u_x)F\big(q(u)+s(u_x)\big). \tag{3.26}$$

В силу независимости u_x и u_y, равенство (3.26) эквивалентно системе

$$p'(u_y)\big(u_y q'(u)-g(u)-p(u_y)\big)=\lambda(u),\quad s'(u_x)\big(u_x g'(u)-F(q(u)+s(u_x))\big)=\lambda(u). \tag{3.27}$$

Рассмотрим случай

$$q''(u)\neq 0. \tag{3.28}$$

Из условия (3.28) следует, что $q'(u)\neq 0$. Пусть

$$\lambda(u)=0, \tag{3.29}$$

тогда $p(u_y)=c_3$, где c_3 — произвольная постоянная. Кроме этого, обращаясь ко второму равенству (3.27), имеем

$$F\big(q(u)+s(u_x)\big)=u_x g'(u). \tag{3.30}$$

Дифференцируем последнее равенство по переменным u и u_x

$$F'\big(q(u)+s(u_x)\big)q'(u)=u_x g''(u),\quad F'\big(q(u)+s(u_x)\big)s'(u_x)=g'(u). \tag{3.31}$$

При $F'=0$, используя соотношения (3.31) получаем, что $g'(u)=0$ и $F=0$. Тогда $\psi=c_4$ и $\varphi=q(u)+s(u_x)$, и мы приходим к уравнениям (3.15).

Если же $F'\neq 0$, то из (3.31) следует

$$\frac{1}{s'(u_x)u_x}=\frac{g''(u)}{q'(u)g'(u)}=c\neq 0.$$

Откуда

$$s(u_x)=\frac{1}{c}\ln(c_1u_x),\quad g'(u)=\exp\big(cq(u)+c_2\big).$$

Подставим функции s и g' в формулу (3.30)

$$\begin{aligned}F\big(q(u)+s(u_x)\big)&=u_x\exp\big(cq(u)+c_2\big)=\\ =\exp\left(c\left(q(u)+\frac{1}{c}\ln(c_1u)-\frac{1}{c}\ln c_1\right)+c_2\right)&=\\ =\exp\Big(c\big(q(u)+s(u_x)\big)&+c_2-\ln c_1\Big).\end{aligned}$$

Последнее соотношение означает, что

$$F(v)=\exp\big(cv+c_2-\ln c_1\big).$$

Итак, мы приходим к уравнениям

$$u_{xy}=cu_x\left(g(u)-\frac{1}{c}u_y\frac{g''(u)}{g'(u)}\right),\quad v=\frac{1}{c}\ln g'(u)-\frac{c_2}{c}+\frac{1}{c}\ln(c_1u_x),$$
$$v_{xy}=\exp\big(cv+c_2-\ln c_1\big).$$

После замены $cv+c_2-\ln c_1\to v$ полученные уравнения принимают вид:

$$u_{xy}=u_x\left(cg(u)-u_y\frac{g''(u)}{g'(u)}\right),\quad v=\ln g'(u)+\ln u_x,\quad \frac{1}{c}v_{xy}=\exp v.$$

Замена $cg(u) \to g(u)$ преобразует последнюю систему к виду

$$u_{xy} = u_x \left(g(u) - u_y \frac{g''(u)}{g'(u)} \right), \; v = \ln g'(u) - \ln c + \ln u_x, \; v_{xy} = \exp(v + \ln c).$$

И, наконец, преобразование сдвига $v + \ln c \to v$ приводит к уравнениям (3.16).

Нетрудно показать, что случай $\lambda \neq 0$ не реализуется.

Теперь рассмотрим случай $q'(u) = c$, откуда

$$q(u) = cu + c_3. \tag{3.32}$$

Подставим функцию (3.32) в первое соотношение (3.27)

$$p'(u_y)\big(cu_y - g(u) - p(u_y)\big) = \lambda(u). \tag{3.33}$$

При $g'(u) \neq 0$ равенство (3.33) влечет

$$p'(u_y) = c_1. \tag{3.34}$$

Если $c_1 = 0$, то в силу (3.33) имеем $\lambda(u) = 0$ и $p(u_y) = c_2$. При этом, обращаясь ко второму уравнению (3.27), получаем

$$u_x g'(u) = F\big(cu + s(u_x) + c_3\big).$$

Замена $s(u_x) + c_3 \to s(u_x)$ дает

$$u_x g'(u) = F\big(cu + s(u_x)\big). \tag{3.35}$$

Положим $c = 0$, тогда функции (3.25) и соотношение (3.35) принимают вид:

$$\psi = g(u) + c_2, \quad \varphi = s(u_x), \quad u_x g'(u) = F\big(s(u_x)\big).$$

Замена $g(u) + c_2 \to g(u)$ приводит к формулам

$$\psi = g(u), \quad \varphi = s(u_x), \quad u_x g'(u) = F\big(s(u_x)\big). \tag{3.36}$$

В силу независимости переменных u, u_x и требования $g'(u) \neq 0$ из последнего равенства (3.36) заключаем, что $g'(u) = c_4 \neq 0$, откуда

$$g(u) = c_4 u + c_5. \tag{3.37}$$

Подставим функцию (3.37) в последнее соотношение (3.36)

$$F\big(s(u_x)\big) = c_4 u_x. \tag{3.38}$$

Используя соотношение (3.38), определяем функцию s:

$$s(u_x) = F^{-1}(c_4 u_x).$$

Таким образом, приходим к следующим уравнениям:

$$u_{xy} = \frac{c_4 u + c_5}{\big(F^{-1}(c_4 u_x)\big)' c_4}, \quad v = F^{-1}(c_4 u_x), \quad v_{xy} = F(v).$$

При помощи преобразований растяжения $c_4 u \to u$ и сдвига переменной $u + c_5 \to u$ приводим уравнения к (3.17).

Далее предположим, что $c \neq 0$. Дифференцируем равенство (3.35) по переменным u и u_x независимо

$$u_x g''(u) = cF'\big(cu + s(u_x)\big), \tag{3.39}$$

$$g'(u) = s'(u_x) F'\big(cu + s(u_x)\big). \tag{3.40}$$

Исключаем из соотношений (3.39) и (3.40) функцию F':

$$\frac{g''(u)}{g'(u)} = \frac{c}{u_x s'(u_x)}.$$

В силу независимости u и u_x, последнее равенство эквивалентно системе

$$\frac{g''(u)}{g'(u)} = \alpha, \quad \frac{c}{u_x s'(u_x)} = \alpha, \quad \alpha \neq 0. \tag{3.41}$$

Интегрируя уравнения (3.41) по переменным u, u_x соответственно, получаем

$$g(u) = \frac{1}{\alpha}\exp(\alpha u + \beta) + \delta, \quad s(u_x) = \frac{c}{\alpha}\ln(\gamma u_x). \tag{3.42}$$

Подставим функции (3.42) в (3.35)

$$F\big(cu + s(u_x)\big) = u_x \exp(\alpha u + \beta) = \exp\left(\frac{\alpha}{c}\left(cu + \frac{c}{\alpha}\ln(\gamma u_x) - \frac{c}{\alpha}\ln\gamma\right) + \beta\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{\alpha}{c}\big(cu + s(u_x)\big) - \ln\gamma + \beta\right).$$

Последнее соотношение означает, что

$$F(v) = \exp\left(\frac{\alpha}{c}v - \ln\gamma + \beta\right).$$

Итак, мы приходим к уравнениям

$$u_{xy} = u_x\left(\frac{1}{c}\exp(\alpha u + \beta) + \frac{\alpha}{c}\delta - \alpha u_y\right), \quad v = cu + \frac{c}{\alpha}\ln(\gamma u_x),$$
$$v_{xy} = \exp\left(\frac{\alpha}{c}v - \ln\gamma + \beta\right).$$

Преобразования сдвига и растяжения $\alpha u \to u$, $\alpha v/c \to v$ дают

$$u_{xy} = u_x\left(\frac{1}{c}\exp(u + \beta) + \frac{\alpha}{c}\delta - u_y\right),$$
$$v = u + \ln u_x + \ln\gamma - \ln\alpha, \quad v_{xy} = \frac{\alpha}{c}\exp(v - \ln\gamma + \beta).$$

После преобразований $u + \beta - \ln c \to u$, $v - \ln\gamma + \beta + \ln\alpha - \ln c \to v$ полученные уравнения приобретают вид

$$u_{xy} = u_x\left(\exp u + \frac{\alpha}{c}\delta - u_y\right), \quad v = u + \ln u_x, \quad v_{xy} = \exp v.$$

Таким образом, мы получили случай, который является частным по отношению к (3.16).

Далее, при $c_1 \neq 0$, обращаясь к формуле (3.34), получаем, что

$$p(u_y) = c_1 u_y + c_2. \tag{3.43}$$

Подставляя функцию (3.43) в (3.33) после замены $g(u) + c_2 \to g(u)$, имеем

$$c_1\big(cu_y - g(u) - c_1 u_y\big) = \lambda(u).$$

Поскольку переменные u, u_y независимые, из последнего равенства заключаем, что $c = c_1$ и

$$\lambda(u) = -c_1 g(u). \tag{3.44}$$

Подставляем функцию (3.44) во второе соотношение (3.27)

$$s'(u_y)\big(u_x g'(u) - F(c_1 u + c_3 + s(u_x))\big) = -c_1 g(u).$$

После замены $c_3 + s(u_x) \to s(u_x)$ последнее равенство принимает вид

$$F\big(c_1 u + s(u_x)\big) = u_x g'(u) + \frac{c_1 g(u)}{s'(u_x)}. \tag{3.45}$$

Дифференцируем (3.45) по переменным u и u_x независимо

$$c_1 F'\big(c_1 u + s(u_x)\big) = u_x g''(u) + \frac{c_1 g'(u)}{s'(u_x)}, \tag{3.46}$$

$$s'(u_x)F'\big(c_1u+s(u_x)\big)=g'(u)-c_1g(u)\frac{s''(u_x)}{s'^2(u_x)}. \tag{3.47}$$

Из соотношений (3.46) и (3.47) исключаем функцию F':

$$\frac{g''(u)}{g(u)}=-c_1^2\frac{s''(u_x)}{u_xs'^3(u_x)}. \tag{3.48}$$

Поскольку u, u_x независимые, равенство (3.48) эквивалентно системе

$$\frac{g''(u)}{g(u)}=-c_1^2\alpha^2,\quad \frac{c_1^2s''(u_x)}{u_xs'^3(u_x)}=c_1^2\alpha^2,$$

где α — произвольная постоянная. Или

$$g''(u)+c_1^2\alpha^2g(u)=0,\quad \frac{s''(u_x)}{s'^3(u_x)}=\alpha^2u_x. \tag{3.49}$$

Если $\alpha=0$, то $g(u)=\epsilon u+\delta$, $s(u_x)=\gamma u_x+d$, $\epsilon\gamma\neq 0$. Кроме этого, соотношение (3.45) дает

$$F\big(c_1u+s(u_x)\big)=\epsilon u_x+c_1\frac{\epsilon u+\delta}{\gamma}=\frac{\epsilon}{\gamma}(c_1u+\gamma u_x+d)-\frac{\epsilon d}{\gamma}+\frac{c_1\delta}{\gamma}=$$
$$=\frac{\epsilon}{\gamma}\big(c_1u+s(u_x)\big)-\frac{\epsilon d}{\gamma}+\frac{c_1\delta}{\gamma}.$$

Последнее соотношение означает, что

$$F(v)=\frac{\epsilon}{\gamma}v-\frac{\epsilon d}{\gamma}+\frac{c_1\delta}{\gamma}.$$

Итак, мы получили уравнения

$$u_{xy}=\frac{\epsilon u+\delta}{\gamma},\quad v=c_1u+\gamma u_x+d,\quad v_{xy}=\frac{\epsilon}{\gamma}v-\frac{\epsilon d}{\gamma}+\frac{c_1\delta}{\gamma}.$$

Преобразования $y\to\epsilon y/\gamma$, $u+\frac{\delta}{\epsilon}\to u$, $v-d+c_1\delta/\epsilon\to v$ дают (3.18).

Если же $\alpha\neq 0$, то в силу уравнений (3.49) функции g и s' определяются следующим образом:

$$g(u)=A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u), \tag{3.50}$$

$$s'(u_x)=\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}}. \tag{3.51}$$

Пусть $\beta\neq 0$. Интегрируя (3.51) по переменной u_x, определяем функцию s:

$$s(u_x)=\frac{1}{i\alpha}\ln\Big(i\alpha u_x+\sqrt{\beta-\alpha^2u_x}\Big)+\gamma. \tag{3.52}$$

Тогда соотношение (3.45) можно записать так:

$$F\left(c_1u+s(u_x)\right)=c\exp\big(i\alpha(c_1u+s(u_x))\big)+D\exp\big(-i\alpha(c_1u+s(u_x))\big).$$

Таким образом, приходим к формулам:

$$u_{xy}=\frac{A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)}{s'(u_x)}, \tag{3.53}$$

$$v=c_1u+s(u_x), \tag{3.54}$$

$$v_{xy}=C\exp(i\alpha v)+D\exp(-i\alpha v), \tag{3.55}$$

где s удовлетворяет (3.51) и $CD=ABc_1^2\beta$. Возможны случаи:

$$CD\neq 0, \tag{3.56}$$

$$C=D=0, \tag{3.57}$$

$$C = 0, \quad D \neq 0, \tag{3.58}$$

$$D = 0, \quad C \neq 0. \tag{3.59}$$

Пусть верно равенство (3.56). Тогда в уравнениях (3.51) — (3.55), сделав замену $\alpha u \to u$, $\alpha v \to v$, $\alpha s(u_x) \to s(u_x)$, приходим к формулам:

$$u_{xy} = \big(A\exp(ic_1u) + B\exp(-ic_1u)\big)\sqrt{\beta - u_x^2},$$

$$v = c_1u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - u_x^2}},$$

$$v_{xy} = C\exp(iv) + D\exp(-iv), \quad CD = ABc_1^2\beta \neq 0.$$

Замена $u - b \to u$, $v - a \to v$ преобразует последнюю систему к виду:

$$u_{xy} = \big(A\exp(ic_1b)\exp(ic_1u) + B\exp(-ic_1b)\exp(-ic_1u)\big)\sqrt{\beta - u_x^2},$$

$$v + a = c_1(u + b) + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - u_x^2}},$$

$$v_{xy} = C\exp(ia)\exp(iv) + D\exp(-ia)\exp(-iv), \quad CD = ABc_1^2\beta \neq 0.$$

Выберем a и b такими, чтобы $A\exp(ic_1b) = B\exp(-ic_1b)$ и $C\exp(ia) = D\exp(-ia)$, тогда

$$\frac{1}{A\exp(ic_1b)2i}u_{xy} = \sin(c_1u)\sqrt{\beta - u_x^2},$$

$$v = c_1u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - u_x^2}},$$

$$\frac{1}{C\exp(ia)2i}v_{xy} = \sin v, \quad C^2\exp(2ia) = A^2\exp(2ic_1b)c_1^2\beta \neq 0.$$

Преобразование растяжения переменной $yA\exp(ic_1b)2i \to y$ приводит к уравнениям

$$c_1\sqrt{\beta}u_{xy} = \sin(c_1u)\sqrt{\beta - u_x^2}$$

$$v = c_1u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - u_x^2}},$$

$$v_{xy} = \sin v.$$

Далее, сделаем замену $uc_1 \to u$, $s(u_x/c_1) \to s(u_x)$, тогда

$$\sqrt{\beta}u_{xy} = \sin(u)\sqrt{\beta - \frac{u_x^2}{c_1^2}},$$

$$v = u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta c_1^2 - u_x^2}},$$

$$v_{xy} = \sin v.$$

Введем обозначение $c_1\sqrt{b} = a$ и после преобразований растяжения переменных $ax \to x$, $y/a \to y$ приходим к уравнениям (3.19).

Пусть выполнено условие (3.57). Подставим (3.54) в (3.55), учитывая (3.53)

$$c_1\big(A\exp(ic_1\alpha u)+B\exp(-ic_1\alpha u)\big)\sqrt{\beta - \alpha^2u_x^2}+\big(A\exp(ic_1\alpha u)ic_1\alpha - Bic_1\alpha\exp(-ic_1\alpha u)\big)u_x = 0,$$

откуда $\beta = 0$, $A = 0$. Уравнения (3.51) – (3.55) принимают вид

$$u_{xy} = Bi\alpha u_x\exp(-ic_1\alpha u), \quad v = c_1u - \frac{i}{\alpha}\ln u_x + \gamma, \quad v_{xy} = 0.$$

При помощи замены $-ic_1\alpha u \to u$ преобразуем последнюю систему к виду

$$u_{xy} = Bi\alpha\exp(u)u_x, \quad v = -\frac{1}{i\alpha}u - \frac{i}{\alpha}\ln u_x + \frac{i}{\alpha}\ln(-ic_1\alpha) + \gamma, \quad v_{xy} = 0.$$

Далее преобразования $u+\ln(Bi\alpha)\to u$, $-i\alpha v+\ln(-ic_1\alpha)-\frac{\alpha\gamma}{i}+\ln(Bi\alpha)\to v$ дают

$$u_{xy}=\exp(u)u_x,\quad v=u-\ln u_x,\quad v_{xy}=0. \tag{3.60}$$

Таким, образом мы получили уравнения, которые представляют собой частные случаи уравнений (3.20).

Пусть выполнено условие (3.58). Подставляя (3.54) в (3.55), учитывая (3.53), приходим к равенствам

$$Ac_1\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}+ic_1\alpha u_xA=0. \tag{3.61}$$

$$c_1B\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}-Bic_1\alpha u_x=D\exp\bigl(-s(u_x)i\alpha\bigr). \tag{3.62}$$

Из (3.61) следует, что $A=0$. При этом, $B\neq0$, т.к. $D\neq0$. Перепишем соотношение (3.62), учитывая (3.52) так:

$$\frac{B}{D}c_1\bigl(\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}-i\alpha u_x\bigr)=\frac{1}{i\alpha u_x+\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}}.$$

Последнее равенство верно лишь при условии $Bc_1\beta/D=1$. Итак, систему (3.51) — (3.55), используя формулу (3.52), можно представить в виде

$$u_{xy}=B\exp(-ic_1\alpha u)\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2},$$
$$v=c_1u-\frac{1}{i\alpha}\ln\bigl(-i\alpha u_x+\sqrt{\beta-\alpha^2u_x^2}\bigr)+c,$$
$$v_{xy}=D\exp(-i\alpha v),\quad \frac{B}{D}c_1\beta=1.$$

Преобразование растяжения переменной $-i\alpha u\to u$ приводит к уравнениям

$$u_{xy}=-i\alpha B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},$$
$$v=-\frac{c_1u}{i\alpha}-\frac{1}{i\alpha}\ln\bigl(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\bigr)+c,$$
$$v_{xy}=D\exp(-i\alpha v),\quad \frac{B}{D}c_1\beta=1.$$

После преобразования $-i\alpha v\to v$ получаем

$$u_{xy}=-i\alpha B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},$$
$$v=c_1u+\ln\bigl(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\bigr)+c,$$
$$v_{xy}=-i\alpha D\exp(v).$$

Или

$$u_{xy}=B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},$$
$$v=c_1u+\ln\bigl(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\bigr)+c,$$
$$v_{xy}=D\exp(v).$$

Подставляя функцию v в последнее уравнение, получаем, что $c_1B=D\exp(c)$, и полученные уравнения приобретают вид

$$u_{xy}=B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},\quad v=c_1u+\ln\left(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\right)+c,\quad v_{xy}=c_1B\exp(v-c).$$

Преобразование сдвига $v-c\to v$ дает

$$u_{xy}=B\exp(c_1u)\sqrt{\beta+u_x^2},\quad v=c_1u+\ln\left(u_x+\sqrt{\beta+u_x^2}\right),\quad v_{xy}=c_1B\exp(v).$$

Замена $c_1u\to u$, преобразование растяжения переменной $ax\to x$ при a, таком, что $\beta c_1^2/a^2=1$, преобразование сдвига $v+\ln c_1-\ln a\to v$ и, наконец, преобразование $u+\ln B\to u$, $v+\ln B\to v$ приводит к уравнениям (3.21).

Теперь рассмотрим случай (3.59). Уравнения (3.51)– (3.55) принимают вид

$$u_{xy} = \frac{A\exp(ic_1\alpha u) + B\exp(-ic_1\alpha u)}{s'(u_x)},$$

$$v = c_1 u + s(u_x), \quad s'(u_x) = \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha^2 u_x^2}},$$

$$v_{xy} = C\exp(i\alpha v).$$

Подставим функцию v в последнее уравнение

$$c_1\big(A\exp(ic_1\alpha u) + B\exp(-ic_1\alpha u)\big)\sqrt{\beta - \alpha^2 u_x^2} +$$
$$+ ic_1\alpha\big(A\exp(ic_1\alpha u) - B\exp(-ic_1\alpha u)\big)u_x = C\exp\big(i\alpha(c_1 u + s(u_x))\big).$$

Откуда

$$c_1 A\sqrt{\beta - \alpha^2 u_x^2} + ic_1\alpha u_x A = C\exp(i\alpha),$$
$$c_1 B\sqrt{\beta - \alpha^2 u_x^2} - ic_1\alpha u_x B = 0.$$

Поскольку $\beta \neq 0$, то $B = 0$ и, следовательно

$$u_{xy} = A\exp(ic_1\alpha u)\sqrt{\beta - \alpha^2 u_x^2},$$

$$v = c_1 u + \frac{1}{i\alpha}\ln\left(\alpha i u_x + \sqrt{\beta - \alpha^2 u_x^2}\right),$$

$$v_{xy} = C\exp(i\alpha v).$$

Сводится к предыдущему.

Теперь рассмотрим случай $\beta = 0$. Из формулы (3.51) получаем, что

$$s(u_x) = \frac{1}{i\alpha}\ln(c_2 u_x).$$

Подставим функцию s в систему (3.53) — (3.55)

$$u_{xy} = \big(A\exp(ic_1\alpha u) + B\exp(-ic_1\alpha u)\big)i\alpha u_x, \tag{3.63}$$

$$v = c_1 u + \frac{1}{i\alpha}\ln(c_2 u_x), \tag{3.64}$$

$$v_{xy} = C\exp(i\alpha v) + D\exp(-i\alpha v). \tag{3.65}$$

Подставим функцию (3.64) в (3.65), учитывя (3.63)

$$c_1\big(A\exp(ic_1\alpha u) + B\exp(-ic_1\alpha u)\big)i\alpha u_x +$$
$$+ ic_1\alpha u_x\big(A\exp(ic_1\alpha u) - B\exp(-ic_1\alpha u)\big) = Cc_2 u_x\exp(i\alpha c_1 u) + \frac{D}{c_2 u_x}\exp(-i\alpha c_1 u).$$

Отсюда получаем, что $D = 0$, $Cc_2 = 2c_1\alpha Ai$, и уравнения (3.63)–(3.65) можно представить в виде:

$$u_{xy} = \big(A\exp(ic_1\alpha u) + B\exp(-ic_1\alpha u)\big)i\alpha u_x,$$

$$v = c_1 u + \frac{1}{i\alpha}\ln(c_2 u_x),$$

$$v_{xy} = \frac{2c_1\alpha Ai}{c_2}\exp(i\alpha v).$$

Применим замену переменных $i\alpha v \to v$, $uc_1 i\alpha \to u$ и после преобразования сдвига $v - \ln(c_2) + \ln(c_1 i\alpha) \to v$ придем к уравнениям вида (3.20):

$$u_{xy} = \big(A\exp(u) + B\exp(-u)\big)u_x, \quad v = u + \ln u_x, \quad v_{xy} = 2A\exp(v).$$

Теперь предположим, что $g(u) = c_1$, где c_1 — произвольная постоянная. В данном случае, вспоминая (3.32), перепишем (3.27)

$$p'(u_y)\big(cu_y - c_1 - p(u_y)\big) = \lambda(u), \quad -s'(u_x)F\big(cu + s(u_x)\big) = \lambda(u). \tag{3.66}$$

Поскольку переменные u, u_x, u_y — независимые, из (3.66) делаем вывод, что $\lambda(u) = -c_2$, и переписываем (3.66)

$$p'(u_y)\big(cu_y - c_1 - p(u_y)\big) = -c_2, \quad -s'(u_x)F\big(cu + s(u_x)\big) = c_2. \tag{3.67}$$

Дифференцируем второе равенство (3.67) по переменной u:

$$s'(u_x)cF'\big(cu + s(u_x)\big) = 0.$$

Следовательно, $c = 0$ либо $F' = 0$.

Пусть $c = 0$, тогда второе равенство (3.67) дает

$$s'(u_x)F\big(s(u_x)\big) = c_2.$$

И мы приходим к уравнениям:

$$u_{xy} = \frac{c_1 + p(u_y)}{s'(u_x)}, \tag{3.68}$$

$$v = s(u_x), \tag{3.69}$$

$$v_{xy} = F(v). \tag{3.70}$$

Подставим (3.69) в (3.70), учитывая (3.68)

$$\frac{p'(u_y)(c_1 + p(u_y))}{s'(u_x)} = \frac{c_2}{s'(u_x)}.$$

Итак, имеем

$$\begin{gathered} u_{xy} = \frac{c_1 + p(u_y)}{s'(u_x)}, \quad v = s(u_x), \quad v_{xy} = F(v), \\ s'(u_x)F\big(s(u_x)\big) = c_2, \quad p'(u_y)\big(c_1 + p(u_y)\big) = c_2. \end{gathered} \tag{3.71}$$

Замена $p(u_y) + c_1 \to p(u_y)$ приводит к уравнению $p'(u_y)p(u_y) = c_2$, решением которого является

$$p(u_y) = \sqrt{2c_2u_y + c_3}.$$

Замена $u \to u - c_3y/(2c_2)$ преобразует систему (3.71) к виду

$$u_{xy} = \frac{\sqrt{2c_2u_y}}{s'(u_x)}, \quad v = s(u_x), \quad v_{xy} = F(v), \quad s'(u_x)F\big(s(u_x)\big) = c_2.$$

Применяя преобразование растяжения переменной $y \to c_2y$, затем, сделав замены $s(u_x) \to c_2s(u_x)$ и $F(c_2S) \to F(S)$, приходим к уравнениям (3.22).

Пусть $c \neq 0$, тогда $F = c_3$, где c_3 — произвольная постоянная. Второе соотношение (3.67) дает

$$s'(u_x)c_3 = c_2.$$

Если здесь $c_2 = 0$, то $c_3 = 0$ и из первого соотношения (3.67) получаем

$$p'(u_y)\big(cu_y - c_1 - p(u_y)\big) = 0.$$

Откуда $p(u_y) = cu_y - c_1$. Получаем

$$u_{xy} = 0, \quad v = cu + s(u_x), \quad v_{xy} = 0.$$

Преобразование растяжения переменной $cu \to u$ и замена $s(u_x/c) \to s(u_x)$ приводит к уравнениям (3.23). Если же $c_2 \neq 0$, то $F = c_3 \neq 0$, и получаем

$$\begin{gathered} u_{xy} = \frac{c_1 + p(u_y) - cu_y}{s'(u_x)}, \quad v = cu + s(u_x), \quad v_{xy} = c_3, \\ s'(u_x) = \tfrac{c_2}{c_3}, \quad p'(u_y)\big(cu_y - c_1 - p(u_y)\big) = -c_2. \end{gathered}$$

Или

$$u_{xy}=\frac{\big(c_1+p(u_y)-cu_y\big)c_3}{c_2},\quad v=cu+\frac{c_2}{c_3}u_x+c_4,\quad v_{xy}=c_3,$$
$$p'(u_y)\big(cu_y-c_1-p(u_y)\big)=-c_2.$$

Преобразования сдвига $p+c_1\to p$, $v-c_4\to v$ приводят к уравнениям (3.24). Лемма доказана.

Итак, случай (3.7) исследован полностью. Теперь рассмотрим условие (3.8). Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (3.8) *и* $\varphi_{uu_x}\neq 0$. *Тогда уравнения* (1.1), (1.2), (1.9) *приобретают следующий вид:*

$$u_{xy}=\frac{\alpha(u)F'\Big(F^{-1}\big(u_x\alpha'(u)\big)\Big)-\alpha''(u)u_xu_y}{\alpha'(u)},\quad v_{xy}=F(v),\quad v=\big(F^{-1}(u_x\alpha'(u))\big). \tag{3.72}$$

$$u_{xy}=\frac{c-u_y\varphi_u(u,u_x)}{\varphi_{u_x}(u,u_x)},\quad v_{xy}=0,\quad v=\varphi(u,u_x). \tag{3.73}$$

Доказательство. Пусть верно (3.8). Тогда нетрудно видеть, что

$$\psi=\alpha(u)+c\ln u_y. \tag{3.74}$$

После подстановки функции (3.74) в соотношение (3.5), последнее может быть представлено в виде:

$$u_x\varphi_{u_x}\alpha'(u)+\big(\alpha(u)+c\ln u_y\big)\frac{c}{u_y}-c\varphi_u=\varphi_{u_x}F(\varphi).$$

Поскольку функции, фигурирующие в полученном равенстве, не зависят от переменной u_y, то коэффициент при выражении $\ln u_y$ должен быть равен нулю, т.е. $c=0$, и, следовательно

$$u_x\alpha'(u)=F\big(\varphi(u,u_x)\big).$$

Из последнего соотношения определяем функцию φ, задающую искомую дифференциальную подстановку

$$\varphi=F^{-1}\big(u_x\alpha'(u)\big).$$

При $\alpha'\neq 0$ приходим к уравнениям (3.72). Если же $\alpha'=0$, то $F=0$, и мы получаем уравнения (3.73). Лемма доказана.

И, наконец, для завершения классификации требуется исследовать случай (3.9). Имеет место следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* (3.9) *и* $\psi_{uu_y}\neq 0$. *Тогда уравнения* (1.1), (1.2), (1.9) *точечной заменой вида* $v\to\kappa(v)$ *сводятся к уравнениям*

$$u_{xy}=u_x\big(\psi(u,u_y)-u_y\alpha'(u)\big),\quad v_{xy}=c_1\exp v,\quad v=\alpha(u)+\ln u_x \tag{3.75}$$

соответственно. Здесь c_1 *— произвольная постоянная, а функции* ψ *и* α *связаны соотношением* $\psi_u+\psi\psi_{u_y}-\alpha' u_y\psi_{u_y}=c_1\exp\alpha$.

Доказательство. Предположим, что выполнено требование (3.9), тогда

$$\varphi=\alpha(u)+c\ln u_x. \tag{3.76}$$

Здесь $c\neq 0$, поскольку мы рассматриваем такие подстановки, что $\varphi_{u_x}\neq 0$. Подставим функцию (3.76) в соотношение (3.5), тогда последнее можно представить в виде:

$$c\psi_u(u,u_y)+\psi(u,u_y)\psi_{u_y}(u,u_y)-u_y\alpha'(u)\psi_{u_y}(u,u_y)=\frac{c}{u_x}F\big(\alpha(u)+c\ln u_x\big). \tag{3.77}$$

В силу независимости переменных u_x и u_y (3.77) эквивалентно системе

$$\begin{gathered} F\bigl(\alpha(u) + c\ln u_x\bigr) = \frac{1}{c}u_x\gamma(u), \\ c\psi_u(u,u_y) + \psi(u,u_y)\psi_{u_y}(u,u_y) - \alpha'(u)u_y\psi_{u_y}(u,u_y) = \gamma(u). \end{gathered} \tag{3.78}$$

Применим к левой и правой части соотношения (3.78) оператор $\frac{\partial}{\partial u_x}$:

$$F'\bigl(\alpha(u) + c\ln u_x\bigr)\cdot\frac{c}{u_x} = \frac{\gamma(u)}{c}. \tag{3.79}$$

Теперь перепишем (3.79), учитывая первое уравнение (3.78), так:

$$F'\bigl(\alpha(u) + c\ln u_x\bigr) = \frac{1}{c}F\bigl(\alpha(u) + c\ln u_x\bigr). \tag{3.80}$$

Используя соотношение (3.80), делаем вывод, что $cF'(v) - F(v) = 0$. Интегрируя последнее уравнение, определяем функцию F, задающую правую часть уравнения Клейна-Гордона (1.2):

$$F(v) = c_2\exp(v/c).$$

Подставляя функцию F в соотношение (3.78), получаем, что $\gamma(u) = cc_2\exp\bigl(\alpha(u)/c\bigr)$.

Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\begin{gathered} u_{xy} = \frac{u_x}{c}\bigl(\psi(u,u_y) - u_y\alpha'(u)\bigr), \quad v = \alpha(u) + c\ln u_x, \quad v_{xy} = c_2\exp(v/c), \\ c\psi_u + \psi\psi_{u_y} - \alpha' u_y\psi_{u_y} = cc_2\exp\bigl(\alpha/c\bigr). \end{gathered}$$

Замена $\psi/c \to \psi$, $\alpha/c \to \alpha$, $v/c \to v$, а затем $c_2/c \to c_1$ преобразует полученные уравнения к виду (3.75). Лемма доказана.

Итак, доказательство Теоремы 1 следует из Лемм 1–3.

4. Дифференциальные подстановки вида $u = \psi(v, v_y)$

В настоящем параграфе мы рассматриваем, как уже было сказано выше, задачу в некотором смысле "обратную" по отношению к задаче первой части работы. Наша цель найти все уравнения (1.2), сводящиеся дифференциальными подстановками (1.10) к уравнению (1.1). Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть уравнение Клейна-Гордона* (1.2) *сводится дифференциальной подстановкой* (1.10) *к уравнению* (1.1). *Тогда уравнения* (1.2), (1.1) *и подстановка* (1.10) *с точностью до точечных преобразований $v \to \kappa(v)$, $u \to \theta(u)$, $x \to \xi x$, $y \to \eta y$, где ξ и η — постоянные, принимают следующий вид:*

$$v_{xy} = F(v), \quad u_{xy} = F'\bigl(F^{-1}(u_x)\bigr)u, \quad u = v_y; \tag{4.1}$$

$$v_{xy} = 1, \quad u_{xy} = \frac{\psi''\bigl(\psi^{-1}(u)\bigr)u_y}{\psi'\bigl(\psi^{-1}(u)\bigr)}, \quad u = \psi(v_y); \tag{4.2}$$

$$v_{xy} = 0, \quad u_{xy} = 0, \quad u = cv + \mu(v_y); \tag{4.3}$$

$$v_{xy} = 0, \quad u_{xy} = -u_x\exp u, \quad u = \ln v_y - \ln v; \tag{4.4}$$

$$v_{xy} = v, \quad u_{xy} = u, \quad u = c_1 v + c_2 v_y; \tag{4.5}$$

$$v_{xy} = 1, \quad u_{xy} = 1, \quad u = v + cv_y. \tag{4.6}$$

Здесь c — произвольная постоянная, c_1 и c_2 такие, что $(c_1, c_2) \neq (0,0)$.

Схема доказательства. Подставим функцию (1.10) в соотношение (1.1), учитывая (1.2)

$$\begin{aligned}\big(\psi_{vv}v_y+\psi_{vv_y}v_{yy}\big)v_x+\psi_vF+\big(\psi_{v_yv}v_y+\psi_{v_yv_y}v_{yy}\big)F+\psi_{v_y}F'v_y=\\=f\big(\psi,\psi_vv_x+\psi_{v_y}F,\psi_vv_y+\psi_{v_y}v_{yy}\big).\end{aligned}\tag{4.7}$$

Обозначим первый, второй и третий аргумент функции f через a, b и c соответственно. Применим к левой и правой части равенства (4.7) оператор $\frac{\partial}{\partial v_{yy}}$:

$$\psi_{vv_y}v_x+\psi_{v_yv_y}F=f_c\psi_{v_y}.\tag{4.8}$$

Применим к левой и правой части равенства (4.8) оператор $\frac{\partial}{\partial v_{yy}}$: $f_{cc}\psi_{v_y}^2=0$. Если $\psi_{v_y}=0$, то вместо дифференциальной подстановки получаем точечную замену $u=\psi(v)$. Поэтому

$$f(a,b,c)=\alpha(a,b)c+\beta(a,b).\tag{4.9}$$

Подставим функцию (4.9) в соотношение (4.8)

$$\psi_{vv_y}v_x+\psi_{v_yv_y}F=\alpha\big(\psi,\psi_vv_x+\psi_{v_y}F(v)\big)\psi_{v_y}.\tag{4.10}$$

Равенство (4.7) в силу (4.9), (4.10) принимает вид

$$\begin{aligned}\big(\psi_{vv}v_x+\psi_{vv_y}F\big)v_y+\psi_vF+\psi_{v_y}F'v_y\\=\alpha\big(\psi,\psi_vv_x+\psi_{v_y}F\big)\psi_vv_y+\beta\big(\psi,\psi_vv_x+\psi_{v_y}F\big).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Таким образом, задача (1.2), (1.1), (1.10) свелась к исследованию соотношений (4.10), (4.11). Применим к равенствам (4.10), (4.11) оператор $\frac{\partial^2}{\partial v_x^2}$:

$$\alpha_{bb}\psi_v^2\psi_{v_y}=0,\quad \alpha_{bb}\psi_v^3v_y+\beta_{bb}\psi_v^2=0.\tag{4.12}$$

Равенства (4.12) выполнены, если выполнено одно из следующих условий:

$$\psi_v=0,\tag{4.13}$$

$$\psi_v\neq0,\quad \alpha_{bb}=0,\quad \beta_{bb}=0.\tag{4.14}$$

Исследование условий (4.13), (4.14) приводит к уравнениям (4.1) – (4.6).

Используя Теоремы 1 и 2 для некоторых пар уравнений, можно построить преобразования Беклунда. Например, уравнения $u_{xy}=-u_x\exp u$, $v_{xy}=0$ связаны преобразованием Беклунда $v=\ln u_x-u$, $u=\ln(v_y/v)$. Далее, уравнения

$$u_{xy}=F'\big(F^{-1}(u_x)\big)u,\quad v_{xy}=F(v)\tag{4.15}$$

связаны преобразованием Беклунда

$$v=F^{-1}(u_x),\quad u=v_y.$$

Согласно работе [10], линеаризации уравнений (4.15) связаны преобразованием Лапласа первого порядка. В качестве примеров мы приведем уравнения

$$u_{xy}=\big(\lambda-\beta nb^{n-1}(u_x)\big)u,\quad v_{xy}=\lambda v-\beta v^n,\quad n>0,\tag{4.16}$$

где λ и β — произвольные постоянные, а функция b удовлетворяет уравнению $\lambda b(u_x)-\beta b^n(u_x)=u_x$. Преобразование Беклунда, связывающее решения уравнений (4.16), имеет вид

$$u=v_y,\quad v=b(u_x).$$

Необходимо отметить, что второе из уравнений (4.16) является вариантом [12] так называемого уравнения φ^4 в физике элементарных частиц. Уравнение φ^4 и соответствующее преобразование Беклунда получается при $n=3$. Эта модель важна в физике твердого тела и в физике частиц с высокой энергией [13].

Далее, мы получаем уравнения

$$u_{xy}=\pm\left(\cos b(u_x)+\frac14\cos\frac{b(u_x)}{2}\right)u,\quad v_{xy}=\pm\left(\sin v+\frac12\sin\frac v2\right),\tag{4.17}$$

где функция b удовлетворяет соотношению $\pm\left(\sin b(u_x) + \frac{1}{2}\sin\frac{b(u_x)}{2}\right) = u_x$. Преобразование Беклунда задается формулами $u = v_y$, $v = b(u_x)$. Второе из уравнений (4.17) — двойное уравнение синус-Гордона, со знаком плюс имеет применение в нелинейной оптике, со знаком минус применяется в нелинейной оптике и при изучении B-фазы жидкого гелия [13].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Жиберу А. В. за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жибер А.В., Шабат А.Б. *Уравнения Клейна-Гордона с нетривиальной группой* // Доклады АН СССР. Т. 247, № 5. 1979. С. 1102–1107.
2. I.M. Anderson, N. Kamran *The variational bicomplex for second order scalar partial differential equations in the plane* // Preprint. Montreal: Centre de Recherches Mathematiques, Universite de Montreal. 1994.
3. I.M. Anderson, N. Kamran *The variational bicomplex for hiperbolic second-order scalar partial differential equations in the plane* // Duke Math. J. V. 87, № 2. 1997. Pp. 265–319.
4. Жибер А.В., Соколов В.В., Старцев С.Я. *О нелинейных гиперболических уравнениях, интегрируемых по Дарбу* // Докл. РАН. Т. 343, № 6. 1995. С. 746–748.
5. Старцев С.Я. *Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой* // ТМФ. Т. 120, № 2. 1999. С. 237–247.
6. Старцев С.Я. *О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки* // ТМФ. Т. 127, № 1. 2001. С. 63–74.
7. Жибер А.В., Соколов В.В. *Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа* // УМН. Т. 56, вып. 1. 2001. С. 63–106.
8. Мешков А.Г., Соколов В.В., *Гиперболические уравнения с симметриями третьего порядка* // ТМФ. Т. 166, № 1. 2011. С. 51–67
9. Хабиров С.В. *Бесконечно параметрические семейства решений нелинейных дифференциальных уравнений* // Математический сборник. Т. 183, № 11. 1992. С. 45–54.
10. Кузнецова М.Н. *Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения* // УМЖ. Т. 1, вып. 3. 2009. С. 87–96.
11. Искандарова М.Н. (Кузнецова М.Н.) *Нелинейные гиперболические уравнения и уравнение Цицейки* // Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых. Математика. Уфа, БГУ. Т. 1. 2009. С. 183–193.
12. A.A. Soliman, H.A. Abdo *New exact solutions of nonlinear variants of the RLN, the PHI-four and Boussinesq equations based on modified extended direct algebraic method* arXiv: 1207.5127v1 [math.NA]
13. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж, Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* — М.: Мир, 1988. — 694 с.

Мария Николаевна Кузнецова,
Уфимский государственный
авиационный технический университет,
ул. К. Маркса, 12,
450000, г. Уфа, Россия
E-mail: kuznetsova@matem.anrb.ru